

جلسه اول و دوم

پرسش‌های آموزشی

۱. به چند طریق می‌توان عدد n را به صورت چند عدد طبیعی ترتیب‌دار نوشت؟ اگر جمع‌وندها ناکوچک‌تر از ۲ باشند چطور؟ اگر جمع‌وندها ناکوچک‌تر از k باشند، چطور؟

۲. ثابت کنید:

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{\dots\sqrt{n}}}} < 3$$

۳. چندجمله‌ای درجه دوم $f(x)$ می‌تواند با $x^2 f(1 + \frac{1}{x})$ یا $x^2 f(\frac{1}{x-1})$ جای‌گزين شود. با شروع از چندجمله‌ای $x^2 + 4x + 3$ آیا ممکن است چندجمله‌ای $x^2 + 10x + 9$ را به دست آورد؟

۴. جدولی $m \times n$ داریم که با اعداد صحیح پر شده است. هر مرحله می‌توانیم یک سطر یا یک ستون را در نظر بگیریم و اعداد آن را قرینه کنیم. ثابت کنید می‌توانیم به حالتی برسیم که در آن هیچ سطر یا ستونی وجود نداشته باشد که مجموع اعدادش منفی باشد. اگر جدول با اعداد حقیقی پر شده باشد چطور؟

۵. ۵ جعبه با شماره‌های ۱ تا ۵ داریم که در مجموع، ۴۰ مهره دارند. هر مرحله می‌توان جعبه‌ی $1 < i < 5$ با دست کم ۲ مهره را انتخاب کرد، ۲ مهره از آن برداشت و یک مهره در جعبه‌ی $i - 1$ و یک مهره در جعبه‌ی $i + 1$ قرار داد. ثابت کنید پس از متناهی گام، متوقف می‌شویم.

۶. n خط در صفحه داریم که هیچ ۲-تایی موازی و هیچ ۳-تایی هم‌رس نیستند. این خطوط، صفحه را به چند ناحیه تقسیم می‌کنند؟ (با فرین حل شود)

۷. قضیه‌ی اردیش-سکرش: دنباله‌ای از $mn + 1$ عدد حقیقی داریم. ثابت کنید زیردنباله‌ای ناکاهشی به طول دست کم $n + 1$ یا زیردنباله‌ای نافزایشی به طول دست کم $m + 1$ وجود دارد.

پرسش‌های تمرینی

۱. در یک مربع جادویی $n \times n$ ، تمام n^2 خانه‌ی آن با اعداد $1, 2, \dots, n^2$ پر شده‌اند و برای هر جفت از خانه‌ها، مراکز آن‌ها با یک بردار به هم وصل هستند که از خانه‌ی با عدد کم‌تر به خانه‌ی با عدد بیش‌تر، جهت‌دهی شده است. ثابت کنید جمع این بردارها، برابر صفر است.

۲. n نقطه در صفحه داریم که همگی هم‌خط نیستند. ثابت کنید دست کم n خط متفاوت وجود دارد که آن‌ها را به هم وصل می‌کند.

۳. دنباله‌ای با ۲۰۰۰ عدد از اعداد صحیح ناصفر بازه‌ی $[1000, 1000]$ داده شده است؛ طوری که جمع آن‌ها ۱ است. ثابت کنید می‌توان تعدادی از اعضای دنباله را انتخاب کرد؛ طوری که جمع‌شان ۰ باشد.

۴. جمعی از $2n + 1$ نفر داریم که برای هر n نفر، نفری خارج از این n نفر وجود دارد که همه‌ی آن‌ها را بشناسد. ثابت کنید نفری وجود دارد که همه را می‌شناسد.

۱ یک مربع جادویی، مربعی است که در آن جمع اعداد هر سطر و هر ستون در آن، مقداری ثابت است.

۵. ۶ جعبه با شماره‌های ۱ تا ۶ داریم که در ابتدا هر کدام، یک مهره دارند. هر مرحله می‌توان یکی از ۲ کار زیر را انجام داد:

- برداشتن یک مهره از جعبه‌ی $i < ۶$ و اضافه کردن ۲ مهره به جعبه‌ی $i + ۱$
- برداشتن یک مهره از جعبه‌ی $i < ۵$ و جابه‌جا کردن محتوی ۲ جعبه‌ی $i + ۲, i + ۱$

ثابت کنید می‌توان به حالتی رسید که جعبه‌ی ۶، شامل ۲۰۱۰۲۰۱۰۲۰۱۰ مهره باشد و بقیه‌ی جعبه‌ها بی‌مهره باشند.

۶. یک چندضلعی ساده^۲ داریم. هر مرحله می‌توان ۲ رأس نامجاور را در نظر گرفت؛ طوری که تمام چندضلعی در یک طرف پاره‌خط واصل آن‌ها باشد؛ سپس یکی از ۲ قسمت بین آن‌ها را نسبت به وسط پاره‌خط واصل آن‌ها، قرینه کرد. ثابت کنید می‌توان به حالتی رسید که چندضلعی، کوژ^۳ شود.

موفق باشید
-اسدی

^۲ چندضلعی ساده، چندضلعی‌ای است که خودش را قطع نمی‌کند
^۳ محدب