نمونه سوال شده از مباحث میان ترم ۱-۹۹-۹۸

۱. ثابت کنید چندجمله‌ای درونیاب (حداکثر از درجه $n$) منحصر به فرد است.

تعریف چندجمله‌ای درونیاب:

فرض کنید نقاط $(x_i, f(x_i))$ ، $i=0,1,2,\dots,n$ که $x_i$ها متمایز هستند، مفروض باشند.
آنگاه یک و تنها یک چندجمله‌ای $p(x)$ ، حداکثر از درجه‌ی $n$ ، وجود دارد به طوری که:

$$p(x_i)=f(x_i) \quad i=0,1,\dots,n$$

حال می‌خواهیم ثابت کنیم چنین چندجمله‌ای وجود دارد و سپس ثابت کنیم منحصر به فرد است:

اثبات وجود این چندجمله‌ای:

برای تابع $f(x)$ می‌توان شکل کلی زیر را در نظر گرفت:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$$

و از آنجایی که مقادیر $f(x_i)$ها را داریم پس می‌توان به شکل زیر نوشت که:

$$\begin{aligned} f(x_0)&=a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\dots+a_nx_0^n\\ f(x_1)&=a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\dots+a_nx_1^n\\ &\ \vdots\\ f(x_n)&=a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\dots+a_nx_n^n \end{aligned}$$

به یک دستگاه با $n$ معادله و $n$ مجهول می‌رسیم که بسط ضرایب آن طولانی است.

پس به دنبال محاسبه تابعی هستیم که ضرایب $L_i(x_j)$ را به صورت زیر تعیین کند به طوری که:

$$L_1(x)f(x_1)+L_2(x)f(x_2)+\dots+L_n(x)f(x_n)$$

به طوری که مثلاً وقتی به $L_1(x)$ مقدار $x_1$ را می‌دهیم مقدار $L_1(x_1)$ عدد ۱ شود و بقیه ~~ضرایب~~ ضرایب عدد صفر شود. پس تعریف می‌کنیم:

$$L_i(x)=\prod_{j=0,\ j\ne i}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)},\quad i=0,1,\dots,n$$

این چندجمله‌ای‌ها از درجه $n$ هستند و این خاصیت را دارند که

$$L_i(x_j)=\begin{cases}0 & i\ne j\\ 1 & i=j\end{cases}$$

حال چندجمله‌ای درونیاب $p(x)$ را تعریف می‌کنیم: $p(x)=\sum_{i=0}^{n}L_i(x)f(x_i)$

$p(x)$ حداکثر از درجه $n$ است و داریم $f(x_i)=p(x_i)$ و به این ترتیب وجود $p(x)$ ثابت می‌شود.

اثبات یکتایی چندجمله‌ای درونیاب:

حال می‌خواهیم نشان دهیم $P(x)$ یکتا است. فرض کنید $Q(x)$ نیز چندجمله‌ای حداکثر از درجه $n$ با خاصیت زیر باشد.

$$Q(x_i)=f(x_i) \quad i=0,1,\dots,n$$

تعریف می‌کنیم

$$R(x)=P(x)-Q(x)$$

$R(x)$ یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه $n$ است و داریم:

$$R(x_i)=P(x_i)-Q(x_i)=f_i-f_i=0 \Rightarrow R(x_i)=0, \quad i=0,1,\dots,n$$

به عبارت دیگر $R(x)$ یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه $n$ است که دارای $n+1$ ریشه است. و این ممکن نیست مگر آنکه $R(x)\equiv 0$ و بنابراین داریم:

$$P(x)\equiv Q(x)$$

۲- مقدار تقریبی $e^{1.5}$ را با توجه به جدول مقادیر تابع نمایی $e^x$ در نقاط $x_0=1$ ، $x_1=1.25$ ، $x_2=1.75$ و $x_3=2$ را به روش لاگرانژ بدست آورید

| $x$ | $1$ | $1.25$ | $1.75$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $e^x$ | $2.71828$ | $3.49034$ | $5.75460$ | $7.38906$ |

$$L_0(x) = \frac{(x-1.25)(x-1.75)(x-2)}{(1-1.25)(1-1.75)(1-2)} \Rightarrow L_0(1.5) = -0.16667$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-1.75)(x-2)}{(1.25-1)(1.25-1.75)(1.25-2)} \Rightarrow L_1(1.5) = 0.66667$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-1.25)(x-2)}{(1.75-1)(1.75-1.25)(1.75-2)} \Rightarrow L_2(1.5) = 0.66667$$

$$L_3(x) = \frac{(x-1)(x-1.25)(x-1.75)}{(2-1)(2-1.25)(2-1.75)} \Rightarrow L_3(1.5) = -0.16667$$

$$P(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + L_2(x)f_2 + L_3(x)f_3 \quad (*)$$

با جایگذاری مقادیر $L_i(x)$ و $f_i$ ها در رابطه (*) می‌توان $P(1.5)$ را محاسبه کرد (شما باید بنویسید)

$$p(1.5) = (-0.16667)(2.71828) + (0.66667)(3.49034) + (0.66667)(5.75460) + (-0.16667)(7.38906)$$

$$= 4.47873$$