

آزمون تئوری چهاردهم

چهارشنبه چهارم بهمن ماه ۱۳۹۱ - ۲ ساعت

پرسش نخست: سه جای گشت

به یک جای گشت π از اعداد طبیعی ۱ تا n می‌گوییم ۳-ساخت یافته، هرگاه جای گشتی مانند ξ (نه لزومن متمایز با π) از اعداد ۱ تا n یافت شود که با سه بار اعمال آن به π برسیم.
همه‌ی n هایی را بیابید که به ازای آن‌ها همه‌ی جای گشت‌های اعداد طبیعی ۱ تا n ، ۳-ساخت یافته هستند.

پرسش دوم: باز هم جای گشت!

دو جای گشت (نه لزومن متمایز) π و ξ از اعداد طبیعی ۱ تا n را نسبت به هم تعویض پذیر گوییم هرگاه $\xi = \pi \xi \pi$.^۱ فرض کنید K جای گشتی باشد که $K(i) = i + 1$ به ازای هر i بین ۱ تا $n-1$ و $K(n) = 1$.
ثابت کنید تنها جای گشت‌های تعویض پذیر نسبت به K ، توان‌های آن هستند.^۱

پرسش سوم: به ذره الگوریتم^۲

n ریاضی‌دان در یک سمینار حضور دارند. در این سمینار قرار است n موضوع مطرح شود. هر یک از ریاضی‌دان‌ها به بعضی از این موضوعات علاقه‌مند است. دو ریاضی‌دان تصمیم به کار مشترک می‌گیرند اگر و تنها اگر علایق آن‌ها حداقل k تا اشتراک داشته باشد. یک ریاضی‌دان با همه‌ی کسانی که کار مشترک انجام دهد آشنا می‌شود. هم‌چنین با همه‌ی آشنایان آشنایانش نیز آشنا می‌شود و ...
با داشتن لیست علایق هر ریاضی‌دان، می‌خواهیم تعیین کنیم که بزرگ‌ترین گروه آشنایی که بین ریاضی‌دانان به وجود می‌آید چند عضو دارد.
(آ) الگوریتمی از $O(n^3)$ ارائه دهید.
(ب) الگوریتمی از $O(n^2(\lg n + k))$ ارائه دهید.

This, therefore, is Mathematics:

She reminds you of the invisible form of the soul;

She gives light to her own discoveries;

She awakens the mind and purifies the intellect;

She brings light to our intrinsic ideas;

She abolishes oblivion and ignorance which are ours by birth.

Proclus

۰ Oh Math! You're all Greek to me.

۱ (چه بیخی چه خبیی)^۲ یعنی چه اول این یکی را اعمال کنیم بعد آن یکی را، چه اول آن یکی را اعمال کنیم بعد این یکی را، حاصل یکسان باشد.

۱/۱ یعنی جای گشت‌هایی که با چند بار اعمال K پدید می‌آیند.

۲ المپیاد کامپیوتر هند، همین چند روز پیش

۳ سه بار تکرار کنید (به این می‌گن Footnote تو Footnote)