فصل ۳

اصل اکسترمال

ریاضی‌دان ورزیده مجهز به یک سری اصول و فنون با دامنه کاربرد وسیع و ساده می‌باشد که می‌تواند از آنها در حالت‌های مختلف استفاده نماید. این اصول و فنون وابسته به موضوعی ویژه نبوده و درکلیه شاخه‌های ریاضی قابلیت استفاده را دارند. ریاضی‌دان به این اصول فکر نمی‌کند بلکه به طور ناخودآگاه از آن مطلع می‌باشد یکی از این اصول اصل ناوردایی بود که در فصل اول از آن بحث شد و اما اصل اکسترمال زمانی که بحث درباره تبدیلات است مورد استفاده واقع می‌شود. «وقتی شما تبدیل دارید به دنبال ناوردایی باشید». در این فصل به بحث درباره اصل اکسترمال خواهیم پرداخت که دارای کاربردهای پردامنه‌ای می‌باشد که باید با تمرین زیاد آن را به خاطر سپرد. به این اصل روش «متغیر» هم گفته می‌شود. با این روش می‌توان به اثبات‌های بسیار آسان دست یافت.

ابتدا سعی می‌کنیم وجود یک حالت را به اثبات برسانیم. اصل اکسترمم به ما می‌گوید که با انتخاب این حالت سعی کنید برخی حالت‌های ماکزیمم و می‌نیمم آن را بررسی کنید. حالت حاصل نشان‌دهنده تقریبی وضعیت خواسته شده است هرچند کاملاً با آن منطبق نمی‌نماید ولی با کمی تغییر روی توابع به حالت اصلی می‌توان رسید. اگر راه‌های مختلفی برای بهینه‌سازی وجود داشته باشد انتخاب یکی از آنها بسته به نظر ما می‌باشد. اصل اکسترمال بسیار خلاق است و می‌تواند آلگوریتم روش ساختن آن حالت را به ما نشان دهد.

در این بحث به حل ۱۷ مثال به کمک اصل اکسترمال در زمینه‌های هندسه، نظریه گراف، ترکیبیات، نظریه اعداد خواهیم پرداخت، اما در ابتداء به سه اصل معروف می‌پردازیم.

الف: هر مجموعه محدود نامشخصی مثل A از اعداد صحیح یا حقیقی دارای یک عنصر می‌نیمال می‌نیمم A و یک عنصر ماکسیمال ماکسیمم A دارد که ضرورتاً یکتا نمی‌باشند.

ب: هر زیرمجموعه غیرتهی از اعداد صحیح مثبت دارای کوچک‌ترین عضو است. این را «اصل خوش‌ترتیبی» می‌نامند و هم ازر با «اصل استقراء ریاضی است».

ج: مجموعه نامحدود A از اعداد حقیقی ضرورتاً دارای عضو ماکسیمال یا می‌نیمال نیست. اگر A از بالا کران‌دار باشد، آنگاه دارای کوچک‌ترین کران بالاست که آن را سوپرموم A می‌نامیم. اگر A از پایین کران‌دار باشد دارای بزرگ‌ترین کران پایین است و آن را اینفیموم A می‌نامیم.

اگر $SUPA \in A$ باشد آنگاه $SUPA = \max A$ و اگر $infA \in A$ آنگاه $inf(A) = \min A$.

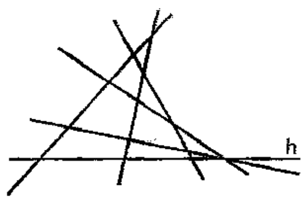
مثال (۱ـ E): الف: n خط حداکثر یک صفحه را به چند بخش تقسیم می‌کند؟ ب: با n صفحه در حالت کلی فضا به چند بخش تقسیم می‌گردد.

حل. در حالت الف و ب تعداد تقسیم‌ها را با P_n و S_n نمایش می‌دهیم. یک نفر مبتدی برای حل این مسائل از این جا شروع می‌کند که

$P_{n+1} = f(p_n)$ و $S_{n+1} = g(S_n)$. در حقیقت با اضافه کردن یک خط (صفحه) به n خط (صفحه) به سادگی به‌دست می‌آید که

$$P_{n+1} = P_n + n + 1$$

$$S_{n+1} = S_n + P_n$$



شکل (۳ـ۱)

در واقع در این استدلال هیچ اشکالی نیست چون رابطه بازگشتی پایه و اساس این شیوه تفکر است یک مسئله حل کن تجربه‌گرا ممکن است مسئله را در ذهن خود حل نماید. در حالت (الف) ما به شماره کردن مسئله می‌پردازیم. یکی از اصول شمارش اساسی تناظر یک به یک برقرارکردن است.

اولین سئوال این است آیا می‌توان P_n بخش از صفحه را به صورت یک به یک به مجموعه‌ای مربوط ساخت که به آسانی بتوان آن را شمرد؟ ترکیب $\binom{n}{2}$ نقطه برخود n خط را به آسانی می‌توان یافت. اما پایین برخورد دقیقاً در یک بخش وجود دارد (اصل اکسترمال) بنابراین $\binom{n}{2}$ بخش را با یک نقطه اشتراک داریم، بخش‌ها بدون نقاط اشتراک درکران پایین واقع نمی‌شوند، و یک خط افقی را به $n+1$ قسمت تقسیم می‌کند مانند شکل (۳ـ۱)

این بخش‌ها را می‌توان بطور منحصر بفرد به این نقطه خط‌ها نسبت داد. بنابراین $n+1$ یا $\binom{n}{1} + \binom{n}{0}$ قسمت بدون یک نقطه اشتراک وجود دارد. بنابراین در مجموع داریم

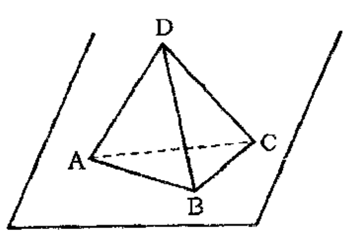
$$P_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}$$

ب: سه صفحه یک راس در فضا می‌سازند. پس $\binom{n}{3}$ راس وجود دارد که با یک نقطه اشتراک یک بخش از فضا را می‌سازند. پس $\binom{n}{3}$ بخش با یک نقطه اشتراک پایین داریم هر بخش با یک راس مشترک یک صفحه افقی را به P_n قطعه صفحه تقسیم می‌نماید. بنابراین در بخش‌های فضا عبارتند از

$$S_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$$

مثال (۲ـ E): دنبال بخش ب: فرض کنیم $n \geq 5$ نشان دهید در بین S_n بخش از فضا حداقل $\frac{2n-3}{4}$ چهاروجهی وجود دارد $(HMO, 1973)$.

بررسی نتیجه مسئله را ساده‌تر می‌کند. یک مسئله حل کن با تجربه اغلب با توجه به نتیجه به جستجوی راه‌حل مسئله می‌پردازد. فرض کنیم t_n تعداد چهار وجهی‌هایی باشد که در S_n بخش از فضا وجود دارند. پس باید ثابت کنیم که $t_n \geq \frac{(2n-3)}{4}$ حدس عددی به ما می‌گوید که روی n صفحه حداقل دو چهاروجهی وجود دارد. بنابراین این تعداد باید بر ۴ بخش‌پذیر باشد.

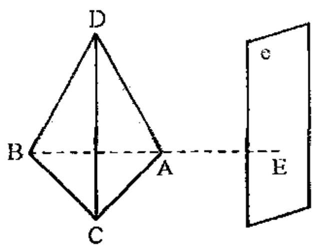


شکل (۳ـ۲)

با توجه به استدلال فوق به راحتی می‌توان راه‌حل مسئله را یافت. فرض کنیم l یکی از n صفحه باشد.این صفحه فضا را به دو نیم فضای H_1 و H_2 تقسیم می‌نماید. حداقل یکی از نیم‌فضاها مثلاً H_1 شامل راس‌هایی می‌باشد. در H_1 ما راس D را کمترین فاصله نسبت به e درنظر می‌گیریم (اصل اکسترمال) D فصل مشترک صفحات e_1 و e_2 و e_3 می‌باشد و بنابراین e و e_1 و e_2 و e_3 یک چهاروجهی مانند $T = ABCD$ تعریف می‌کند به شکل (۳ـ۲).

هیچ یک از $n-4$ صفحه باقی‌مانده با T تقاطع ندارد. بنابراین T یکی از بخش‌ها بوده که به وسیله n صفحه بوجود آمده است. اگر صفحه‌ای مانند e' چهاروجهی T را قطع نماید، بنابراین e' باید یکی از یال‌های AD و BD و CD را در نقطه‌ای مانند Q قطع نماید که فاصله کمتری از e تا D دارد و این یک تناقض است.

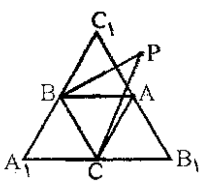
مطلب فوق برای هر n صفحه صادق است. حال اگر رئوس در هر دو طرف یک صفحه باشند، پس حداقل دو چهاروجهی بوجود می‌آیند. حال کافیست نشان دهیم در این n صفحه سه چهاروجهی وجود دارد که تمام رئوس آن در یک طرف صفحه واقع می‌باشند.



شکل (۳ـ۳)

این مطلب را با مثال نقیض ثابت می‌کنیم. فرض کنیم چهار صفحه e_1 و e_2 و e_3 e_4 وجود داشته باشد. **آنها چهاروجهی $ABCD$ را ناحیه‌بندی می‌کنند. شکل (۳ـ۳)**

این صفحه نمی‌تواند هر شش یال چهاروجهی را قطع نماید. فرض کنیم امتداد AB را در نقطه E قطع نماید. پس B و E در دو طرف مختلف صفحه e_3 $(e_3 = ACD)$ واقع می‌شود که یک تناقض است.



شکل (۳ـ۴)

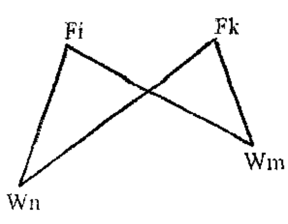
مثال (۳ـ E): n نقطه در یک صفحه واقع می‌باشند. هر سه نقطه‌ای یک مثلث با مساحتی نابیشتر از یک دارند. ثابت نمایید تمام این نقاط در مثلثی به مساحت نابیشتر از ۴ واقع می‌باشند.

حل. در بین تمام نقاط $\binom{n}{3}$ سه نقطه A و B و C را درنظر می‌گیریم که مساحت آن ماکزیمم F باشد. واضح است که $F \leq 1$. از رئوس مثلث ABC سه خط به موازات اضلاع مقابل مثلث رسم می‌کنیم. مثلث $A_1B_1C_1$ به‌دست می‌آید که مساحت آن

$$F_1 - 4F \leq 4$$

ثابت خواهیم کرد مثلث $A_1B_1C_1$ دربردارنده تمام n نقطه می‌باشد. فرض کنیم یک نقطه مثل P در خارج مثلث $A_1B_1C_1$ واقع باشد پس مثلث ABC و نقطه P در یک طرف یکی از سه ضلع مثلث مثلاً B_1C_1 واقع می‌باشند. پس مثلث BCP مساحتی بیش از مثلث ABC خواهد داشت. **این یک تناقض درباره ماکسیمال بودن مساحت مثلث ABC می‌باشد.**

مثال (۴ـ E): $2n$ نقطه در یک صفحه مفروضند که هیچ سه‌تایی از آنها بر یک خط راست واقع نمی‌باشند. nتا از این نقطه‌های مزرعه‌های $F = \{F_1, F_2, \ldots F_n\}$ را می‌سازند. n نقطه باقیمانده چاه‌های $W = \{W_1, W_2, \ldots, W_n\}$ را می‌سازند. از ما خواسته شده جاده‌ای مستقیم بسازیم که هر چاه را به یک مزرعه وصل نماید. ثابت کنید این جاده‌ها می‌توانند طوری ساخته شوند که هیچ یک دیگری را قطع نکند.

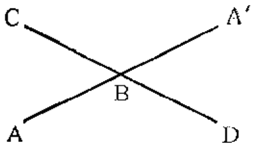


شکل (۳ـ۵)

حل. یک نگاشت یک به یک $f : F \to W$ تعریف می‌کنیم. اگر ما از هر مزرعه F_i یک جاده مستقیم $f(F_i)$ را بسازیم، سیستم جاده‌ها را طراحی کرده‌ایم. فرض کنیم در بین همه $n!$ جاده یکی را که کوتاه‌ترین راه را دارد انتخاب کرده باشیم. فرض کنیم این سیستم جاده‌ها قطعه خط‌های متقاطعی مانند F_iW_m و F_kW_n داشته باشند به شکل مقابل

این جاده‌ها را با جاده‌های F_kW_m و F_iW_n جایگزین می‌کنیم، مجموع طول جاده‌ها به خاطر نامساوی مثلثی کوتاه‌تر می‌شود، بنابراین این جاده خواسته شده نیست.

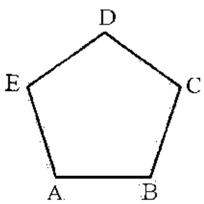
مثال (۵ـ E): W مجموعه نقاطی از صفحه است. هر نقطه W وسط دو نقطه دیگر W است. ثابت کنید W مجموعه‌ای نامحدود است.



شکل (۳ـ۶)

اثبات اول: فرض کنیم W یک مجموعه محدود باشد. آنگاه W شامل دو نقطه مانند A و B است که فاصله آنها $m = |AB|$ ماکسیمال باشد. حال اگر B نقطه وسط دو نقطه C و D از W باشد مطابق شکل مقابل $AB < |AD|$ یا $|AC| > |AB|$

اثبات دوم: فرض کنیم تمام نقاط W در طرف چپ و نقطه M دورترین نقطه آن باشد. نقطه M نمی‌تواند نقطه میانی B و A متعلق W باشد چون یک عضو $\{A, B\}$ باز در طرف چپ نقطه M واقع می‌شود که ناممکن است.



شکل (۳ـ۷)

مثال (۶ـ E): در یک پنج ضلعی محدب می‌توان سه قطر انتخاب کرد اضلاع یک مثلث باشند.

حل. فرض کنیم BE بزرگ‌ترین قطر پنج ضلعی باشد نامساوی مثلثی ایجاب می‌کند که

$$|BD| + |CE| > |BE| + |CD| > |BE|$$

بنابراین با BE و BD و CE می‌توان یک مثلث ساخت.

مثال (۷ـ E): در هر چهار وجهی با سه یال همرس می‌توان یک مثلث ساخت.

حل. فرض کنیم AB بزرگ‌ترین یال $ABCD$ باشد. آنگاه

$$(AC + AD - AB) + (BC + BD - BA) = (AD + BD - AB) + (AC + BC - AB) > ۰$$

پس یا $AC + AD - AB > ۰$ یا $BC + BD - BA > ۰$

مثال (۸ـ E): نقاط شبکه‌ای صفحه با اعداد صحیح مثبت نام‌گذاری شده‌اند. هر نقطه‌ای واسطه حسابی از چهار نقطه کناری خود است (بالا ، پایین ، راست ، چپ).

ثابت کنید تمام اعداد شماره‌گذاری شده با هم برابرند.

حل. کوچک‌ترین شماره‌گذاری را m می‌گیریم که مربوط به نقطه L است. در همسایگی L $d = c.b, a$ وجود دارند، آنگاه

$$m = \frac{a + b + c + d}{۴} \Rightarrow a + b + c + d = ۴m \qquad (۱)$$

حال $a \geq m$ و $b \geq m$ و $c \geq m$ و $d \geq m$. اگر یکی از این چهار نامساوی‌ها درست باشد بنابراین

$$a + b + c + d > ۴m$$

که با رابطه (۱) متناقض می‌باشد بنابراین

$$a = b = c = d = m$$

بنابراین تمام شماره‌گذاری برابر m خواهد بود.

این مسئله ساده بود، اما با جایگزین کردن اعداد حقیقی مثبت به جای اعداد صحیح مثبت مسئله بسیار پیچیده می‌شود. چون اعداد حقیقی ایجاب نمی‌نماید که کوچک‌ترین عضو را داشته باشند. درحالی که برای اعداد صحیح مثبت به خاطر اصل خوش‌ترتیبی این موضوع الزام‌آور است. ولی می‌دانیم مسئله در این حالت درست است ولی راه‌حل ساده‌ای برای آن وجود ندارد.

مثال (۹ـ E): ثابت کنید برای اعداد صحیح مثبت معادله زیر جواب ندارد.

$$x^2 + y^2 = 3(z^2 + u^2)$$

راه‌حل: فرض کنیم معادله جواب داشته باشد. می‌توان فرض کرد که با کوچک‌ترین $x^2 + y^2$ مسئله حل شده باشد. حال اگر (a, b, c, d) جواب‌های معادله باشند داریم:

$$a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2) \Rightarrow 3|a^2 + b^2 \Rightarrow 3|a, 3|b \Rightarrow$$

$$a = 3a_1, b = 3b_1$$

$$a^2 + b^2 = 9(a_1^2 + b_1^2) = 3(c^2 + d^2) \Rightarrow c^2 + d^2 = 3(a_1^2 + b_1^2)$$

بنابراین یک عده جواب دیگر به صورت (c, d, a_1, b_1) به‌دست آورده‌ایم که $c^2 + d^2 < a^2 + b^2$ که یک تناقض است.

در راه‌حل از این موضوع سود بردیم که

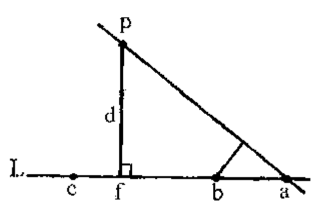
$$3|a^2 + b^2 \Rightarrow 3|a, 3|b$$

این حکم را خودتان ثابت کنید.

مثال (۱۰ـ E): مسئله سیلوستر. این مسئله به وسیله سیلوستر در سال ۱۸۹۳ طرح شد و در سال ۱۹۳۳ توسط گالی به روش پیچیده‌ای حل گردید و سپس در سال ۱۹۴۸ درچند خط با اصل اکسترمال توسط کلی حل گردیده است.

مجموعه محدود S شامل نقاطی از صفحه است که هر خط گذرنده از دونقطه از نقطه سومی می‌گذرد. ثابت کنید تمام نقاط روی یک خط واقع می‌باشند.

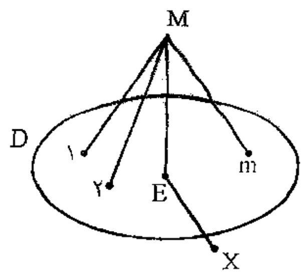
حل. فرض کنیم این نقاط هم خط نیستند. زوج (P, L) عبارت است از خطی مانند L و نقطه‌ای مانند P غیرواقع بر L. حال نقطه‌ای را درنظر می‌گیریم که فاصله‌اش از خط می‌نیمم باشد. فرض کنیم f پای عمودی است که از نقطه P بر خط L وارد شده است. بنابراین بنا به فرض حداقل سه نقطه c, b, a بر خط قرار دارد. فرض کنیم دو نقطه مثلاً a و b در یک طرف f واقع باشند به شکل (۳ـ۸)



شکل (۳ـ۸)

و فرض کنیم b به f تا a نزدیک‌تر باشد آنگاه فاصله b تا ap کمتر از d می‌باشد و این تناقض است.

مثال (۱۱ـ E): درکشور اسکانیا هر شهری به شهر دیگر فقط به وسیله یک جاده یک طرفه وصل شده است. ثابت کنید شهری وجود دارد که از هر شهری به آن مستقیم و یا حداکثر به واسطه یک شهر دیگر می‌توان رسید.



شکل (۳ـ۹)

حل. **فرض کنیم m حداکثر جاده‌های منتهی به یک شهر باشد. و فرض کنیم M شهری باشد** که حداکثر جاده‌ها به آن وصل شده باشد. فرض کنیم D مجموعه m شهری باشد که به M متصل هستند. و فرض کنیم R مجموعه تمام شهرهای نامتصل به M و موجود در D باشد. اگر $R = \phi$ باشد حکم ثابت است. اگر $X \in R$ باشد پس شهری مانند $E \in D$ وجود دارد که از طریق آن می‌توان به M رسید یعنی

$$X \to E \to M$$

اگر چنین E وجود نداشته باشد، پس به شهر X می‌توان از طریق شهرهای D و از M رسید بنابراین $m + ۱$ جاده به X منتهی می‌شود که یک تناقض نسبت به فرض در مورد M است. بنابراین به هر شهر به طور حداکثر به حالت حکم مسئله می‌توان رسید.

مثال (E ـ ۱۲): رخ‌های روی صفحه شطرنج $n \times n \times n$ قرار دارند. واضح است که n رخ کمترین تعداد رخی می‌باشد که تمام خانه‌های شطرنج $n \times n$ را تهدید می‌نماید. اما درباره R_n چه می‌توان گفت که بتوانند خانه‌های شطرنج $n \times n \times n$ را تهدید کند.

حل. ابتدا سعی می‌کنیم کوچک‌ترین n را حدس بزنیم. اما در ابتدا باید بدانیم که قرارگرفتن رخ‌ها در فضا چگونه صورت می‌گیرد. n ردیف $۱ \times n \times n$ روی مربع‌های $n \times n$ قرار می‌دهیم و آنها را با اعداد $۱, ۲, \ldots, n$ شماره‌گذاری می‌کنیم. هر رخ شماره‌ای را دارد که در آن ردیف واقع است. شکل (۳ـ۱۰) حالت‌هایی را که به حدس زدن کمک می‌نماید نشان می‌دهد

۱

$T_۱ = ۱$

	۲
۱	

$T_۲ = ۲$

	۳	۲
	۲	۳
۱		

$T_۳ = ۵$

		۴	۳
		۳	۴
۲	۱		
۱	۲		

$T_۴ = ۸$

		۵	۳	۴
		۴	۵	۳
		۳	۴	۵
۲	۱			
۱	۲			

$T_۵ = ۱۳$

شکل (۳ـ۱۰)

$$R_n = \begin{cases} \dfrac{n^۲}{۲} & n = ۲k \quad \text{زوج} \\ \dfrac{n^۲ + ۱}{۲} & n = ۲k + ۱ \quad \text{فرد} \end{cases}$$

حال باید حدس خود را اثبات کرد. فرض کنیم R رخ در مکعب‌های $n^۳$ قرارگرفته‌اند و تمام مکعب‌های درونی را تهدید کرده‌اند. ما ردیف L را انتخاب می‌کنیم در این ردیف تعداد رخ‌ها حداقل است. فرض کنیم این ردیف با صفحه $x_۱x_۲$ موازی باشد. اگر ردیف l دارای t **رخ باشد می‌توان فرض کرد که t رخ $t_۱$ ردیف را در $x_۱$ جهت تهدید می‌کند و $t_۲$ رخ در جهت $x_۲$ تهدید می‌نماید و همچنین فرض** می‌کنیم که $t_۱ > t_۲$. واضح است که $t \geq t_۱$ و $t_۲ \geq t$. در ردیف L این رخ‌ها نمی‌توانند $(n - t_۱)(n - t_۲)$ خانه را تهدید نمایند چون آنها در جهت $x_۳$ می‌باشند. حال تمام n ردیف موازی صفحه $x_۱x_۳$ را درنظر می‌گیریم. در $n - t_۱$ هیچ رخی از ردیف L وجود ندارد، **چون باید حداقل $(n - t_۱)(n - t_۲)$ رخ داشته باشیم. پس در ردیف‌های $t_۱$ حداقل t رخ وجود دارد پس**

$$R \geq (n - t_۱)(n - t_۲) + tt_۱ \geq (n - t_۱)^۲ + t_۱^۲ = \frac{n^۲}{۲} + \frac{(۲t_۱ - n)^۲}{۲}$$

سمت راست تساوی وقتی می‌نیم است که برای nهای زوج داشته باشیم $\frac{n^2}{2}$ و برای n های فرد داشته باشیم $\frac{n^2+1}{2}$، به سادگی دیده می‌شود این تعداد بنابر شکل (۳ـ۱۱) کفایت دارد.

				۸	۵	۶	۷
				۷	۸	۵	۶
				۶	۷	۸	۵
				۵	۶	۷	۸
۴	۱	۲	۳				
۳	۴	۱	۲				
۲	۳	۴	۱				
۱	۲	۳	۴				

			۷	۴	۵	۶
			۶	۷	۴	۵
			۵	۶	۷	۴
			۴	۵	۶	۷
۳	۱	۲				
۲	۳	۱				
۱	۲	۳				

شکل (۳ـ۱۱)

مثال (۱۳ـ E): هفت کوتوله دور یک میز دایره‌ای نشسته‌اند. در مقابل هر یک یک فنجان قرار دارد. در بعضی از فنجان‌ها شیر وجود دارد که مجموع آنها ۳ لیتر است. یکی از کوتوله‌ها شیر فنجان خود را به طور مساوی در سایر فنجان‌ها ریخت. در جهت عکس عقربه‌های ساعت سایر کوتوله‌ها هم همین کار را انجام دادند. بعد از اینکه هفتمین کوتوله این عمل را انجام داد در هر فنجان به اندازه اولیه شیر وجود داشت تعیین کنید در هر فنجان در ابتدا چقدر شیر بوده است. (المپیاد $A \cup O$ ۱۹۷۷).

جواب صحیح $\frac{6}{7}$ و $\frac{5}{7}$ و $\frac{4}{7}$ و $\frac{3}{7}$ و $\frac{2}{7}$ و $\frac{1}{7}$ و صفر است. حدس زدن این جواب‌ها با اصل ناوردایی آسان است.

فرض کنیم کوتوله A ماکزیمم مقدار شیر به اندازه x_i را قبل از عمل تقسیم داشته است پس کوتوله‌های دست راست او دارای x_1 و x_2 و ... x_6 مقدار هستند. پس این کوتوله از کوتوله iام به اندازه $\frac{x_i}{6}$ شیر دریافت می‌کند پس

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6}{6} \tag{1}$$

که $x_i \leq x$ برای $i = 1 \ldots 2$.

اگر یک نامساوی وجود داشته باشد در رابطه (۱) علامت تساوی نمی‌توانند وجود داشته باشد بنابراین

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x$$

پس کوتوله مقدار مساوی شیر دریافت کرده است. بنابراین به سادگی دیده می‌شود که توزیع شیر به صورت

$$0, \frac{x}{6}, \frac{2x}{6}, \frac{3x}{6}, \frac{4x}{6}, \frac{5x}{6} \frac{6x}{6}$$

می‌باشد پس برای ۳ لیتر به‌دست می‌آید که $x = \frac{6}{7}$.

مثال (۱۴ـ E): پارلمان کشور اسکانیا یک مجلس است. هر نماینده‌ای حداکثر در بین سایر نمایندگان سه دشمن دارد. ثابت کنید این مجلس را می‌توان به دو مجلس چنان تقسیم کرده که هر کس فقط یک دشمن در مجلس خود داشته باشد.

حل. افراد پارلمان را به دو مجلس تقسیم می‌کنیم. اگر E تعداد دشمنانی باشد که یک نماینده در قسمت خودش دارد، قسمت‌بندی که در آن E می‌نیمال باشد جواب است. چون ، اگر بعضی از نمایندگان حداقل دو دشمن در قسمت خودش داشته باشد پس یک دشمن در قسمت دیگر برایش می‌ماند. با قرار دادن آن فرد در قسمت دیگر ما به می‌نیمم مقدار E دست می‌یابیم، که این یک تناقض است.

مثال (۱۵ـ E): آیا می‌توان ۱۹۸۳ عدد صحیح مثبت کوچک‌تر از ۱۰۰۰۰۰ چنان انتخاب کرد که هیچ سه تایی از آن یک تصاعد حسابی تشکیل ندهند. (۱۹۸۳ و IMO).

حل. مجموعه‌ای مانند T می‌سازیم که حتی شامل بیش از ۱۹۸۳ عدد صحیح باشد. همه کمتر از 10^5 باشند، به طوری که هیچ سه تا از آنها تشکیل تصاعد عددی ندهند یعنی دو معادله $x + y = 2y$ صدق نکنند.

مجموعه T متشکل از کلیه اعداد صحیح مثبت است که نمایش آنها در مبنای ۲ حداکثر ۱۱ رقم دارد که هر یک از آنها صفر یا یک است (یعنی رقم ۲ ندارد) پس $1983 < 2^{11} - 1$ تا از آنها موجود است و بزرگ‌ترین آنها عبارتست از

$$1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{10} = 88573 < 10^5$$

حال فرض کنید به ازای $x, y, z \in T$ $x + z = 2y$ باشد عدد $2y$ به ازای $y \in T$ تنها متشکل از ارقام ۰ و ۲ است بنابراین x و z باید رقم به رقم با هم منطبق نماید پس نتیجه می‌شود که $x = y = z$ بنابراین شامل هیچ تصاعد حسابی سه جمله‌ای نیست و انتخاب موردنظر امکان‌پذیر است.

مثال (۱۶ـ E): در هر n ضلعی محدب سه راس مجاور A و B و C چنان وجود دارد که دایره محیطی مثلث ABC تمام n ضلعی محدب را می‌پوشاند.

حل. در بین این تعداد محدود از دایره‌ها یکی از آنها ماکسیمال است. حال مسئله را به دو قسمت می‌نمائیم.

الف: دایره ماکسیمال n ضلعی را می‌پوشاند.

ب: دایره ماکسیمال از سه راس مجاور می‌گذرد.

قسمت الف را اینطور اثبات می‌کنم که فرض کنیم راس A' بیرون از دایره ماکسیمال ABC واقع شود که A و B و C و A' رئوس یک چهار ضلعی محدب هستند. پس دایره محیطی مثلث $A'BC$ از دایره محیطی مثلث ABC بزرگتر خواهد شد و این یک تناقض است.

اثبات قسمت B. فرض کنیم A و B و C رئوس روی دایره ماکسیمال باشند و فرض کنیم A' بین B و C واقع باشد و روی این دایره نیز نباشد. به دلیل حکم قسمت الف این نقطه داخل دایره واقع می‌شود، اما باز هم دایره محیطی مثلث $A'BC$ بزرگتر از دایره ماکسیمال می‌شود که این یک تناقض است.

مثال (۱۷ـ E): ثابت کنید $n\sqrt{2}$ برای هر عدد صحیح مثبت n نمی‌تواند یک عدد صحیح باشد.

حل. فرض کنیم S مجموعه اعداد صحیح n باشد که $n\sqrt{2}$ را یک عدد صحیح نماید اگر S تهی نباشد دارای یک عضو حداقل مانند K است.

حال عدد $K(\sqrt{2} - 1)$ را درنظر می‌گیریم

$$(\sqrt{2} - 1)k\sqrt{2} = 2k - k\sqrt{2}$$

و چون $K \in S$ هم $K(\sqrt{2} - 1)$ و هم $2k - k\sqrt{2}$ اعداد صحیح مثبت هستند بنابراین $(\sqrt{2} - 1)k \in s$ اما $(\sqrt{2} - 1)k < k$ پس با اینکه k کوچک‌ترین عضو بود در تناقض است. پس s تهی می‌باشد که به معنی آن است که $\sqrt{2}$ گویا نیست.

مسائل

۱. ثابت کنید حداقل $\frac{(2n-2)}{3}$ مثلث بین p_n بخش مختلف صفحه در مثال شماره‌ی ۱ ($E1$) وجود دارد.

۲. در صفحه‌ی n خط وجود دارند ($n \geq 3$) که هیچ دو تایی موازی نیستند. از تقاطع هر دو خط، خط سومی نیز می‌گذرد. ثابت کنید همه خطوط از نقطه‌ی مشترکی می‌گذرند.

۳. اگر n نقطه روی صفحه داشته باشیم که همگی روی یک خط نباشند در این صورت خطی وجود دارد که دقیقاً از دو تا از این نقاط می‌گذرد.

۴. چند توده مهره داریم. دو نفر به نوبت به این ترتیب با هم بازی می‌کنند: هر بازیکن در نوبت خود می‌تواند توده‌ای که شامل بیش از یک مهره باشد به دو توده تقسیم کند. هر بازیکنی که آخرین حرکت را انجام دهد برنده است. حالت اولیه‌ی توده‌ها چه شرطی داشته باشد تا بازیکن اول بتواند طوری بازی کند که حتماً برنده باشد و راهکاری برای برد او ارائه دهید.

۵. آیا چهار وجهی‌ای وجود دارد که هر یال آن ضلعی از یک زاویه‌ی باز یک وجه باشد؟

۶. ثابت کنید هر چندوجهی محدب حداقل دو وجه با تعداد اضلاع برابر دارد.

۷. $(2n+1)$ نفر در صفحه طوری قرار گرفته‌اند که فاصله‌ی دوبدوی آنها از هم متفاوت است. سپس هر کس به سمت کسی که در کمترین فاصله از او ایستاده است شلیک می‌کند. ثابت کنید:

a) حداقل یک نفر صدمه‌ای نمی‌بیند.

b) به هیچ شخصی بیشتر از ۵ بار شلیک نمی‌شود

c) مسیر گلوله را قطع نمی‌کنند.

d) پاره خطهای تشکیل شده با مسیر گلوله‌ها تشکیل یک چند ضلعی بسته نمی‌دهند.

۸. تعدادی مهره در صفحه‌ی $n \times n$ به گونه‌ای قرار دارند که: اگر خانه‌ی (i,j) خالی باشد در این صورت حداقل n مهره در مجموع سطر iام و ستون jام قرار دارد. ثابت کنید در این صفحه حداقل $n^2/2$ مهره قرار دارد.

۹. تقاطع هر صفحه‌ای با یک جسم یک دایره است. ثابت کنید که این جسم یک کره است.

۱۰. شکل بسته و کران‌دار ϕ با این ویژگی در صفحه داده شده است: هر دو نقطه از ϕ می‌توانند با یک نیم‌دایره که تماماً در داخل ϕ قرار می‌گیرد، به هم متصل شوند، ϕ را بیابید. (پیشنهادی کشور آلمان غربی برای IMO ۱۹۷۷)

۱۱. n نقطه در فضا به گونه‌ای قرار گرفته‌اند که هیچ چهار تایی از آنها هم صفحه نیستند. تعدادی از نقاط را با پاره خطهایی به هم وصل کرده‌ایم. به این ترتیب گراف G با k یال به‌دست می‌آید. ثابت کنید:

a) اگر G شامل مثلث نباشد آنگاه $k \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$.

(یعنی اگر G شامل سه نقطه نباشد که دوبدو به هم متصل باشند آنگاه تعداد یال‌های آن از $\frac{n^2}{4}$ بیشتر نیست.)

b) اگر G شامل چهار وجهی نباشد آنگاه $k \leq [\frac{n^{۲}}{۳}]$.

(یعنی اگر G شامل چهار نقطه نباشد که دوبدو به هم متصل باشند آنگاه تعداد یالهای آن از $\frac{n^{۲}}{۳}$ بیشتر نیست.)

۱۲. ۲۰ کشور در یک قاره وجود دارند به گونه‌ای که از بین هر سه کشور حداقل دو تا از آنها با هم رابطه سیاسی ندارند. ثابت کنید در این قاره حداکثر ۲۰۰ سفارت وجود دارد.

۱۳. در یک تورنمنت n نفره هر دو نفر دقیقاً یک بار با هم بازی می‌کنند فرض کنید هیچ بازی حالت تساوی نداشته باشد. پس از پایان بازیها هر نفر لیستی از اشخاص را تهیه می‌کند که:

(a) به او باخته باشند (b) به کسی باخته باشند که آن شخص به او باخته باشد. ثابت کنید لیست یکی از بازیکنان شامل همه‌ی افراد است.

۱۴. فرض کنید O محل تلاقی قطرهای چهار ضلعی محدب $ABCD$ باشد. ثابت کنید اگر محیط مثلث‌های ABC و BCO و CDO و DAO برابر باشد در این صورت $ABCD$ یک لوزی است.

۱۵. n ماشین بر روی یک مسیر دایره‌ای شکل قرار گرفته‌اند. این n ماشین جمعاً سوخت لازم برای پیمودن یک دور کامل در این مسیر را دارا هستند. ثابت کنید ماشینی وجود دارد که می‌تواند کل مسیر را با استفاده از سوختی که از ماشینهای مسیرش برمی‌دارد، طی کند.

۱۶. فرض کنید M بیشترین فاصله بین ۶ نقطه‌ی متمایز در صفحه باشد و m نیز کمترین فاصله بین این نقاط. نشان دهید:

$$M.m \geq \sqrt{۳}$$

۱۷. ثابت کنید یک مکعب را نمی‌توان به تعدای مکعب با اضلاع متفاوت افراز کرد.

۱۸. در فضا تعدادی کره به شعاع واحد قرار گرفته‌اند. روی سطح هر کره نقاطی را علامت می‌زنیم که از آن جا هیچ کره‌ی دیگری دیده نشود. ثابت کنید مجموع سطوحی که روی کره‌ها علامت زده‌ایم برابرسطح یک کره‌ی واحد است.

۱۹. در صفحه‌ی ۱۹۹۴ بردار رسم شده است. دو نفر به نوبت یک بردار را انتخاب می‌کنند، تا هیچ برداری باقی نماند. کسی بازنده است که جمع بردارهایش کمتر باشد. ثابت کنید نفر اول می‌تواند طوری بازی کند که نبازد.

۲۰. تعداد نامتناهی چند ضلعی نه لزوماً محدب داده شده است. طوری که هر دو تایی از آنها نقطه‌ی مشترکی دارند. ثابت کنید خطی وجود دارد که با همه‌ی آنها نقطه‌ی مشترکی دارند.

۲۱. هر چند ضلعی محدب به مساحت ۱ را می‌توان در مستطیلی به مساحت ۲ جای داد.

۲۲. $nm \geq ۳$ نقطه که همه با هم روی یک خط قرار نگرفته‌اند در صفحه داده شده است. ثابت کنید دایره‌ای وجود دارد که از سه تا از این نقاط می‌گذرد و هیچ نقطه‌ی دیگری در داخل آن قرار نگرفته است.

۲۳. نقاط $A_{۱}$ و $B_{۱}$ و $C_{۱}$ را به ترتیب روی اضلاع BC و AC و AB از مثلث ABC قرار دارند نشان دهید اگر

$1 \le |AA_1| \le 1, |BB_1| \le 1, |CC_1|$ باشند در این صورت مساحت مثلث ABC کوچکتر یا مساوی $1/\sqrt{3}$ است.

۲۴. $2n+3$ نقطه در صفحه مفروضند که هیچ سه تایی از آنها هم خط و هیچ چهارتایی هم دایره نیستند. ثابت کنید که می‌توانیم سه نقطه از این‌ها را انتخاب کنیم و از آنها دایره‌ای بگذرانیم به نحوی که دقیقاً n نقطه از این نقاط داخل دایره و n نقطه‌ی دیگر بیرون دایره قرار بگیرند.

۲۵. حرکتی در صفحه‌ی مختصات تحت شرایط زیر تعریف می‌کنیم:

از نقطه‌ی داده شده $P(x,y)$ می‌توانیم در گام بعدی به یکی از نقاط $U(x, y+2x)$ و $D(x, y-2x)$ و $L(x-2y, y)$ و $R(x+2y, y)$ برویم. این شرط که نمی‌توانیم عکس عملی که انجام داده‌ایم را بلافاصله انجام دهیم.

ثابت کنید اگر از نقطه‌ی $(1, \sqrt{2})$ آغاز کنیم نمی‌توانیم مجدداً به این نقطه بازگردیم. ($HMO1990$).

۲۶. مسأله $E8$ از فصل ۱ را با استفاده از روش اکسترمال حل کنید.

۲۷. بین هر ۱۵ عدد دوبدو نسبت به هم اول بین ۲ و ۱۹۹۲ ثابت کنید که حداقل یک عدد اول وجود دارد.

۲۸. ۸ نقطه درون دایره‌ای به شعاع ۱ انتخاب شده‌اند. ثابت کنید دو نقطه با فاصله‌ی کمتر از ۱ وجود دارند.

۲۹. n نقطه در صفحه داده شده است. نقاط وسط پاره‌خط‌هایی که با این n نقطه تشکیل می‌شوند را علامت زده‌ایم. ثابت کنید حداقل $2n-3$ نقطه‌ی علامت خورده متمایز وجود دارد.

۳۰. قاعده‌ی هرم $A_1A_2\ldots A_nS$ n ضلعی منتظم $A_1\ldots A_n$ به ضلع a است. ثابت کنید اگر $< SA_1A_2 = \cdots = < SA_nA_1$ باشد. هرم منتظم است.

۳۱. روی سطح یک کره ۵ عرق‌چین مجزا و بسته وجود دارند که هم کدام از یک نیمکره کوچکترند. ثابت کنید روی سطح کره دو نقطه‌ی مقابل قطری وجود دارند که توسط هیچ عرق‌چینی پوشانده نشده‌اند.

۳۲. کلیه‌ی جواب‌های مثبت دستگاه نامعادلات زیر را بیابید:

$$x_1 + x_2 = x_3^2, x_2 + x_3 = x_4^2, x_4 + x_5 = x_1^2, x_5 + x_1 = x_2^2$$

۳۳. کلیه‌ی جواب‌های حقیقی دستگاه زیر را بیابید:

$$(x+y)^3 = z, (y+z)^3 = x, (z+x)^3 = y$$

۳۴. فرض کنید E مجموعه‌ای متناهی از نقاط در فضا باشند که دارای خواص زیر است:

(a) نقاط E هم صفحه نیستند.

(b) هیچ سه نقطه‌ای از E هم خط نیستند.

ثابت کنید: یا ۵ نقطه از E هستند که رئوس یک هرم محدب هستند که شامل هیچ نقطه‌ی دیگری نیست یا صفحه‌ای وجود دارد که شامل دقیقاً ۳ نقطه از E است.

۳۵. ۶ دایره دارای نقطه مشترک A هستند. ثابت کنید دایره‌ای وجود دارد که شامل مرکز دایره‌ی دیگری است.

۳۶. n نقطه روی محیط یک دایره انتخاب می‌کنیم و کلیه‌ی پاره‌خط‌های با این n نقطه را رسم می‌کنیم. تعداد بخش‌های حاصل از رسم این پاره‌خط‌ها بر روی قرص دایره را پیدا کنید.

۳۷. هر یک از ۳۰ دانش‌آموز یک کلاس به تعداد مساوی دوست در کلاسشان دارند. حداکثر تعداد دانش‌آموزانی که درسشان از کلیه‌ی دوستانشان بهتر باشد چقدر است؟ (بین هر دونفر می‌توانیم تعیین کنیم که درس کدام یک بهتر است) (RO۱۹۹۴)

۳۸. مجموعه‌ی s از افراد دارای خاصیت زیر است.

هر دو نفر با تعداد مساوی دوست در s، دوست مشترکی ندارند. ثابت کنید شخصی در s وجود دارد که دقیقاً یک دوست دارد.

۳۹. جمع تعداد عدد نامنفی برابر ۳ و جمع مربعات آنها بزرگتر از ۱ است. ثابت کنید می‌توان سه تا از آن‌ها را انتخاب کرد که جمع آنها بزرگتر از ۱ باشد.

۴۰. تعدادی عدد حقیقی مثبت روی کاغذ نوشته شده است. جمع حاصلضرب‌های دو تایی این اعداد برابر ۱ است. ثابت کنید می‌توان یکی از این اعداد را کنار گذاشت به شرطی که جمع اعداد باقیمانده کمتر از $\sqrt{2}$ باشد.

۴۱. m مهره $(m > n)$ روی رئوس یک n ضلعی محدب قرار گرفته است. درهر حرکت می‌توانیم دو مهره موجود در یک رأس را در دو جهت مختلف همسایه‌های آن رأس انتقال دهیم. ثابت کنید اگر پس از تعدادی حرکت به آرایش اولیه‌ی مهره‌ها رسیدیم تعداد حرکات مضربی از n خواهد بود.

۴۲. اعداد $a_1, \dots a_n$ و $b_1, \dots b_n$ جایگشتهایی از اعداد $1, 1/2, \dots, 1/n$ هستند. می‌دانیم $a_1+b_1 \ge a_2+b_2 \ge \dots \ge a_n+b_n$. ثابت کنید برای هر m از ۱ تا n داریم:

$$a_m + b_m \le \frac{4}{m}$$

۴۳. ۵۰ پاره‌خط روی یک خط داده شده‌اند. ثابت کنید یا ۸ پاره‌خط وجود دارند که نقطه مشترکی دارند یا ۸ پاره‌خط وجود دارند که دو بدو مجزا هستند. (AUO۱۹۷۲)

۴۴. در هر یک از سه مدرسه مفروض n دانش‌آموز وجود دارد: هر دانش‌آموز جمعاً $n+1$ دوست از دو مدرسه دیگر دارد. ثابت کنید می‌توانیم یک نفر از هر مدرسه انتخاب کنیم به طوری که این سه نفر دوبدو دوست باشند.

حل مسائل

۱. از ایده‌ی مشابه حالت پیچیده‌تر که در $E2$ بررسی شده استفاده کنید.

۲. فرض کنید این طور نباشد و همه‌ی خطوط از یک نقطه‌ی مشترک عبور نکنند. همه‌ی نقاط تقاطع خطوط با یکدیگر را در نظر می‌گیریم و کوتاهترین فاصله‌ی این نقاط از خطوط را پیدا می‌کنیم. فرض کنید این کوتاهترین فاصله از نقطه‌ی A تا خط l باشد. بنابر داده‌ی مسأله

حداقل سه خط از نقطه‌ی A می‌گذرند، فرض کنید این سه خط l را در نقاط B و C و D قطع کنند. از A، عمود AP را بر خط l فرود می‌آوریم. دو تا از نقاط B و C و D در یک سمت نقطه‌ی P قرار می‌گیرند. فرض کنید که این دو نقطه C و P باشند و فرض کنید $|CP| < |DP|$. در این صورت فاصله‌ی C تا AD از فاصله‌ی A تا l کمتر است، که این تناقض با نحوه‌ی انتخاب A و l است.

۳. این مسأله بیان دیگری از مسأله سیلوستر است.

۴. فرض کنید بزرگ‌ترین توده شامل M مهره باشد. اگر در نوبت من (نفر اول)، $M > ۱$ باشد می‌توانیم حرکت انجام دهم. برد من به M مربوط است و ثابت می‌کنم در صورتی که در حالت اولیه M به صورت $۲^k - ۱$ نباشد می‌توانیم بازی را ببرم. بررسی حالت‌های اولیه نشان می‌دهد که من باید حالت $M = ۲^k - ۱$ را ایجاد کنم و رقیب من در هر حالت باید حالت

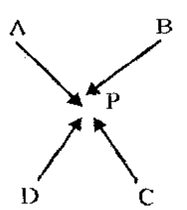
$$۲^{k-۱} < M < ۲^k - ۱$$

را ایجاد نماید. حرکت بعد می‌توانم حالت $M = ۲^{k-۱} - ۱$ را ایجاد کنم. اگر این روش را ادامه دهم در نهایت به حالت $M = ۲^۱ - ۱ = ۱$ می‌رسم که رقیب من دیگر حرکتی ندارد و در نتیجه بازنده است.

۵. فرض کنید AB بزرگ‌ترین ضلع مثلث ABC باشد. در این صورت زوایای A و B و حاده هستند چون زاویه‌ی C بزرگ‌ترین زاویه است (زاویه‌ی روبرو به بزرگ‌ترین ضلع) و اگر A یا B باز باشند C نیز باز است. که تناقض است چون مثلث نمی‌تواند دو زاویه‌ی باز داشته باشد. حال AB را بزرگ‌ترین ضلع چهار وجهی در نظر بگیرید. در این صورت AB مجاور هیچ زاویه‌ی بازی نیست.

۶. فرض کنید F وجه با بیشترین تعداد ضلع باشد و فرض کنید m ضلع داشته باشد. در این صورت $m + ۱$ وجه را در نظر بگیرید: F و همه‌ی وجه‌های مجاورش. هر کدام از این $m + ۱$ وجه می‌توانند $۳, ۴, \ldots, m$ ضلع داشته باشند که یعنی $m - ۲$ امکان برای آنها وجود دارد. در این صورت بنابر اصل لانه‌ی کبوتر حداقل دو تا از این $m + ۱$ وجه تعداد اضلاع برابر دارند.

۷. (a) همه‌ی فواصل بین نقاط متمایز هستند پس دو شخص A و B با کمترین فاصله از هم وجود دارند. در این صورت هم A به B و هم B به سمت A شلیک می‌کنند. اگر شخص دیگری به A یا B شلیک کند در این صورت در بین بقیه‌ی $۲n - ۱$ نفر به غیر از A و B یک نفر سالم می‌ماند و گلوله‌ای به آن شلیک نمی‌شود. چون جمعاً به آن $۲n - ۱$ نفر حداقل $۲n - ۲$ گلوله شلیک می‌شود. در غیر این صورت اگر A و B گلوله‌ی دیگری شلیک نشود می‌توان آن دو را کنارگذاشت و همین استدلال را برای افراد باقیمانده به کار برد. با تکرار استدلال تنها یک نفر باقی می‌ماند که در این صورت کسی به او شلیک نمی‌کند و حکم بداهتاً صحیح است.



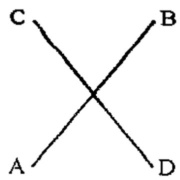
شکل (۳ـ۱۲)

(b) فرض کنید افراد A و B و C و D و ... به P شلیک کنند. (شکل ۳ـ۱۲). A به سمت P شلیک می‌کند در حالی که به B شلیک نمی‌کند و می‌توان نتیجه گرفت که $|AP| < |AB|$. B به سمت P شلیک می‌کند و نه به A پس $|BP| < |AB|$ پس AB بزرگ‌ترین ضلع مثلث ABP است. بزرگ‌ترین زاویه مثلث روبرو بزرگ‌ترین ضلع است در نتیجه:

$$\gamma > \alpha \ , \ \gamma\beta \quad \text{یا} \quad ۲\gamma > \alpha + \beta \ , \ ۳\gamma > \alpha + \beta + \gamma \ , \ \gamma > ۶۰^\circ$$

$$\gamma = APB \ , \ \alpha =< BAP \ , \ B =< ABP$$

پس هر دو نفر که به سمت P شلیک می‌کنند، مسیر گلوله‌هایشان زاویه‌ی بزرگتر از 60° با هم می‌سازند. اما از آن جا که $360^\circ = 6 \times 60$ پس حداکثر ۵ نفر به یک نفر شلیک می‌کنند.



(c) فرض کنید A به سمت B و C به سمت P شلیک کنند و مسیر گلوله‌هایشان باهم در نقطه‌ی S تقاطع داشته باشند (شکل ۳ـ۱۳) بنابراین $|CD| < |CB|$، $|AB| < |AD|$ ایجاب می‌کند که:

شکل (۳ـ۱۳)

$$|AB| + |CD| < |AD| + |CB|$$

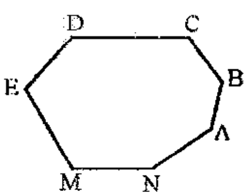
از طرف دیگر با استفاده از نامساوی مثلث داریم:

$$|AS| + |SD| > |AD| \quad , \quad |BS| + |SC| > |BC|$$

که با جمع طرفین نامساوی به دست می‌آید:

$$|AB| + |CD| > |AD| + |BC|$$

که تناقض است.



(d) فرض کنید یک چند ضلعی بسته $ABCDE\ldots MN$ (شکل ۱۴.۳) به‌دست آمده باشد. در این صورت با توجه به شرایط مسأله $|AN| < |AB|$، که N نزدیکترین شخص به A است. در این صورت:

شکل (۳ـ۱۴)

$$|AB| < |BC| \;,\; |BC| < |CD| \;,\; |CD < |PE|, \ldots, |MN| < |NA|$$

که نتیجه می‌دهد، $|AB| < |NA|$ که تناقض است. فرض $|AN| < |AB|$ نیز به تناقض می‌رسد.

۸. بین $2n$ سطر و ستون جدول $n \times n$، آن سطر یا ستون را انتخاب می‌کنیم که شامل کمترین تعداد مهره‌ها باشد. فرض کنید که این سطر باشد و تعداد مهره‌های آن هم k تا باشد. اگر $k \geq n/2$ باشد که هر سطر یا ستون حداقل شامل $\frac{n}{2}$ مهره است و حداقل $\frac{n^2}{2}$ مهره در جدول وجود دارد پس کافیست حالت $k < \frac{n}{2}$ را بررسی کنیم. در این سطر حداقل $n - k$ خانه‌ی خالی وجود دارد و متناظر با هر کدام از این خانه‌های خالی یک ستون داریم که شامل حداقل $n - k$ مهره است چون جمع مهره‌هایی این ستون متناظر با این سطر انتخاب شده باید n باشد. و چون در این سطر k مهره داریم در آن ستون حداقل $n - k$ مهره داریم. پس $n - k$ مهره داریم. پس $n - k$ ستون داریم که هرکدام شامل حداقل $n - k$ مهره است. k ستون باقیمانده هرکدام حداقل شامل k مهره هستند پس جمعاً در این گونه ستونها k^2 مهره داریم و حداقل در جدول $(n-k)^2 + k^2$ مهره وجود دارد و کافیست ثابت کنیم که این مقدار بزرگتر یا مساوی $n^2/2$ است.

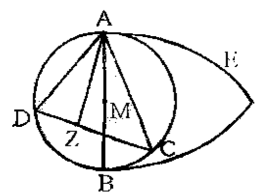
$$(n-k)^2 + k^2 = \frac{n^2}{2} + \frac{(n-2k)^2}{2} = \begin{cases} \geq \dfrac{n^2}{2} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد.} \\[2mm] \geq \dfrac{(n^2+1)}{2} & \text{اگر } A \text{ فرد باشد.} \end{cases}$$

* چنین جدول برای هر n وجود دارد و می‌توان آنرا به اینگونه ساخت: $n \times n$ را به صورت شطرنجی رنگ می‌کنیم و اگر n زوج باشد $\frac{n^2}{2}$ خانه سیاه را انتخاب می‌کنیم و هر مهره را در آن قرار می‌دهیم. و در حالتی که n فرد باشد $\frac{(n^2+1)}{2}$ خانه‌ای را انتخاب می‌کنیم که با ۴ خانه‌ی گوشه‌ای صفحه همرنگ باشند و همه را با مهره پر می‌کنیم.

۹. صفحه‌ای را در نظر بگیرید که دایره‌ی تقاطع آن با جسم مجهول بیشترین قطر را داشته باشد. هر صفحه‌ی دیگری را در نظر بگیرید که از قطری از این دایره بگذرد مجدداً متناظر با یک دایره‌ی دیگر است که قطر دایره‌ی قبلی وتری از این دایره است و از آن جا که دایره‌ی اول بزرگ‌ترین همه‌ی اینگونه دوایر است قطر همه‌ی این دایره‌ها برابر است و اگر یک قطر از دایره‌ی اول را در نظر بگیریم و همه‌ی صفحات **گذرنده از این قطر را فرض کنیم نتیجه می‌گیریم که جسم مذکور یک کره است.**

در حقیقت این اثبات کامل نیست و ثابت نکرده‌ایم که دایره‌ی با بیشترین قطر وجود دارد. در حقیقت اگر رویه‌ی جسم متعلق به خود جسم نباشد، بزرگ‌ترین دایره می‌تواند وجود نداشته باشد، پس فرض می‌کنیم که جسم بسته و محدود است و در این صورت می‌توانیم **قضیه‌ی ((Weistrat) صفحه‌ی ۵۲ را اعمال کنیم: تابع پیوسته بر روی مجموعه‌ی بسته و کراندار همواره ماکزیمم و مینیمم دارد.**

این قضیه مربوط به ریاضیات عالی است اما در IMO می‌توانید از آن استفاده کنید. اثباتهای مقدماتی اما اندکی طولانیتر از این مسأله هم وجود دارد. (نگاه کنید به HMO ۱۹۵۴)



شکل (۳_۱۵)

۱۰. دو نقطه‌ی A و B با بیشترین فاصله از هم در ϕ را در نظر می‌گیریم و دایره‌ی C به قطر AB را رسم می‌کنیم و مرکز دایره که همان وسط پاره خط AB است را M می‌نامیم. ثابت **می‌کنیم که ϕ یک قرص با محیط C است خط AB، دایره C را به دو نیمدایره‌ی C_2 و C_1** تقسیم می‌کند. (شکل ۱۵.۳)

از طرفی بنابر شرط مسأله $C_2 \subset \phi$ یا $c_1 \subset \phi$. فرض کنید $C_2 \subset \phi$. نقطه‌ی X در سمت چپ AB و خارج از C نمی‌تواند به ϕ متعلق باشد. در غیر این صورت اگر تقاطع XM را با C_2، Y بنامیم، $|XY| > |AB|$ می‌شود که تناقض است. برای نقطه‌ی U در سمت راست AB و خارج از یکی از دوایر به شعاع $|AB|$ و به مراکز A و B نیز داریم: $|BU| > |AB|$ یا $|AV| > |AB|$ پس **ناحیه‌ی خارج از $AEBDA$ در شکل ۱۵.۳ به ϕ تعلق ندارد. حال نقطه‌ای مانند z در داخل c در نظر می‌گیریم و پاره خط AZ را** رسم می‌کنیم وتر DC را از C در نظر می‌گیریم که بر AZ عمود باشد. از D یا C یکی متعلق به ϕ است چون یکی به C_2 تعلق دارد. فرض کنید $c \in \phi$ در این صورت دایره‌ی به قطر AC و دو نیمدایره‌ی آن که در دو طرف AC هستند را در نظر می‌گیریم. نیمدایره‌ای **که از z نمی‌گذرد داخل ناحیه‌ی $AEBDA$ نیست و نمی‌تواند در ϕ باشد پس نیمدایره‌ی AZC در ϕ است یعنی $z \in \phi$ و این نتیجه** می‌دهد که همه‌ی نقاط داخلی c در ϕ قرار دارند و چون ϕ مجموعه‌ای بسته است، $c \subset \phi$. و هیچ نقطه‌ای خارج از C نمی‌تواند در ϕ باشد و چون دراین صورت فرض بیشینه بودن $|AB|$ نقض می‌شود.

۱۱. (a) نقطه‌ی P را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که به بیشترین تعداد نقاط دیگر وصل باشد یعنی P رأسی باشد که بیشترین درجه را داشته باشد و فرض کنید P به m نقطه‌ی دیگر وصل باشد. (درجه‌ی $(p) = m$) حال نقاط را به دو دسته‌ی

$$A = \{p_1, \dots, p_m\} \quad , \quad B = \{p, q_1, \dots, q_{n-m-1}\}$$

تقسیم می‌کنیم که A شامل نقاطی است که به P متصل هستند و تعداد آنها نیز m است. نقاط مجموعه‌ی A نمی‌تواند به هم متصل

باشند در غیر این صورت اگر p_i و p_j وصل باشند مثلث pp_ip_j تشکیل می‌شود که خلاف فرض مسأله مبتی بر بی‌مثلث بودن G است. هرکدام از نقاط مجموعه‌ی B نیز حداکثر به m یال متصل است و چون تعداد آنها $n-m$ تا است پس گراف حداکثر $m(n-m)$ یال دارد.

$$k \leq m(n-m) = \frac{n^۲}{۴} - \left(\frac{n}{۲} - m\right)^۲ \leq \frac{n^۲}{۴}$$

حالت تساوی برای n زوج و $m = \frac{n}{۲}$ رخ می‌دهد.

b) رجوع کنید به فصل ۸ (استقرای ریاضی).

۱۲. این همان مسأله قبلی است با $n = ۲۰$ در این صورت اگر گراف مربوط به کشورها را رسم کنیم این گراف مثلث ندارد سپس حداکثر $\left\lfloor \frac{n^۲}{۴} \right\rfloor = ۱۰۰$ سفارت در این قاره وجود دارد.

۱۳. فرض کنید A شخصی باشد که بیشترین تعداد بردها را داشته باشد. اگر A خاصیت ذکر شده در صورت مسأله را نداشته باشد در این صورت شخص مانند B وجود دارد که از A و همچنین از تمام اشخاصی که به A باخته‌اند برنده است در این صورت B تعداد بیشتری برد نسبت به A دارد که این خلاف انتخاب A به عنوان کسی است که بیشترین تعداد برد را در بین بازیکنان داراست.

۱۴. فرض کنید $|BO| \geq |AO|$, $|BO| \geq |PO|$ و فرض کنید $B_۱$ و $C_۱$ قرینه‌های B و C نسبت به O باشند. فرض کنید $P(XYZ)$ نشان دهنده‌ی مساحت مثلث XYZ باشد در این صورت مثلث $B_۱OC_۱$ درون مثلث AOD قرار می‌گیرد و در نتیجه داریم: $P(AOD) \geq P(B_۱OC_۱)$ اما $P(B_۱OC_۱) = P(BOC)$ پس $P(AOD) \geq P(BOC)$. این نامساوی بنابر فرض مسأله تساوی است پس $P(AOD) = P(B_۱OC_۱)$ و در نتیجه $C_۱ = A$ و $B_۱ = D$ پس $ABCD$ متوزی‌الاضلاع است اما $|AB| - |BC| = P(ABO) - P(BCO) = ۰$ پس $ABCD$ لوزی است.

۱۵. ماشینی در نظر بگیرید که به اندازه‌ی کافی سوخت برای پیمودن یک دور کامل از مسیر را داشته باشد و از نقطه‌ای شروع به پیمودن کند و به هر ماشین که رسید سوخت آنرا نیز بردارد. در نقطه‌ای از مسیر مقدار سوخت این ماشین به حداقل خود می‌رسد در این صورت در ماشینی که در A وجود دارد قادر به پیمودن کل مسیر با شرایط مسأله خواهد بود. راه حل دیگری با استفاده از استقرا نیز در فصل ۸ ارائه شده است.

۱۶. از بین هر ۶ نقطه‌ی متمایز در صفحه، ۳ تا از آنها تشکیل مثلثی می‌دهند که یک زاویه‌ی آن بزرگتر یا مساوی ۱۲۰° است. در این مثلث نسبت بزرگ‌ترین ضلع به کوچک‌ترین ضلع بزرگتر یا مساوی $\sqrt{۳}$ است. پس کافیست ثابت کنیم چنین مثلثی وجود دارد:

حال پوش محدب این ۶ نقطه را در نظر بگیرید. اگر این پوش مثلث ABC باشد یک نقطه‌ی درونی آن مثل D را در نظر بگیرید. دراین صورت مجموع سه زاویه‌ی ADB و ADC و BCD ۳۶۰° است و در نتیجه یکی از آنها بزرگتر یا مساوی ۱۲۰° است. اگر پوش محدب چهار ضلعی $ABCD$ باشد در این صورت یکی دیگر از نقاط مثلاً E درون یکی از مثلثهای ABC یا ADC قرار می‌گیرد فرض کنید E درون ABC باشد مجدداً یکی از مثلثهای EAB و EBC و ECA زاویه‌ای بزرگتر یا مساوی ۱۲۰° دارند. اگر پوش محدب یک ۵ ضلعی باشد در این صورت نقطه‌ی دیگر یعنی F درون یکی از مثلثهایی قرار می‌گیرد که با رسم قطرهای گذرنده از یک رأس به وجود می‌آیند. فرض کنید F درون مثلث ACD قرار گیرد مشابهاً یکی از مثلثهای EAC و ECD و EDA زاویه‌ای بزرگتر یا مساوی ۱۲۰° پیدا می‌کند. اگر این ۶ نقطه رئوس یک ۶ ضلعی محدب باشند در این صورت یکی از زوایای داخلی آن بزرگتر یا مساوی

120° است. اگر در هر یک از مراحل نقطه‌ی درونی روی قطر قرار گرفت می‌توانیم حکم را قویتر نیز نماییم. $Mm \geq ۲ > \sqrt{۳}$.

پس مثلثی وجود دارد که زاویه‌ای بزرگتر یا مساوی 120° دارد. اگر زوایای آن $\alpha \leq \beta < \gamma$ باشند در این صورت نسبت ضلع مقابل به زاویه‌ی γ به ضلع مقابل به زاویه‌ی α برابر است با: $\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$.

اما داریم:

$$\alpha \leq \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{180^\circ - \gamma}{2} \leq 30^\circ$$

پس:

$$\sin\alpha \leq \frac{1}{2}$$

و همچنین:

$$\gamma \geq 120^\circ$$

پس:

$$\sin\gamma \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

و در نتیجه $\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \geq \sqrt{3}$ است که حکم را ثابت می‌کند.

۱۷. فرض کنید مکعب را به تعدادی مکعب با اضلاع متمایز تقسیم کرده باشیم در این صورت وجه‌های آن به تعدادی مربع با اضلاع متفاوت تقسیم شده است. کوچک‌ترین مربع را از بین این مربعها انتخاب کنید. مکعب را طوری بچرخانید تا وجه شامل کوچک‌ترین مربع در کف قرار گیرد. واضح است که کوچک‌ترین مربع نمی‌تواند بر روی مرز قرار بگیرد. این مکعب توسط تعدادی مکعب بزرگتر احاطه شده است. سقف این مکعب با مکعبهای کوچکتری پر می‌شود و اگر همین استدلال را برای مکعب کوچکتر که بر روی سقف این مکعب قرار دارد انجام دهیم و ... بالاخره به سقف مکعب اصلی می‌رسیم و چون در هر مرحله مکعبها کوچکتر می‌شوند مکعبی که در سقف قرار می‌گیرد کوچکتر از مکعب کوچکی است که در کف در نظر گرفتیم و این تناقض با طرز انتخاب مکعب کوچک اولی است.

۱۸. برای دوکره حکم بدیهی است. حال فرض کنید $O_1, O_2, \ldots, O_n$ مراکز این n کره باشند، کافیست ثابت کنیم برای هر بردار واحد $\overrightarrow{a}$ نقطه‌ی یکتای X روی کره‌ی شماره‌ی i وجود دارد به گونه‌ای که $O_iX + \overrightarrow{a}$ و از X هیچ کره‌ی دیگری دیده نشود. ابتدا ثابت می‌کنیم نقطه‌ی X یکتاست. فرض کنید $\overline{O_iX} = \overline{O_jY}$ و از X و Y هیچ کره‌ی دیگری رویت نشود. اما حکم برای حالت ۲ کره بدیهی است یعنی اگر کره‌ی شماره‌ی jام از X دیده نشود کره‌ی شماره‌ی j ام از Y دیده می‌شود و این تناقض است.

حال وجود نقطه‌ی X را ثابت می‌کنیم. دستگاه مختصاتی با محور OX در راستای $\overrightarrow{a}$ در نظر بگیرید. در این صورت نقطه‌ای از کره‌های داده شده، که بیشترین مختص x را داراست نقطه‌ی X است.

۱۹. فرض کنید جمع این ۱۹۹۴ بردار برابر $\overrightarrow{a}$ باشد. دستگاه مختصاتی که محور OX آن منطبق بر بردار $\overrightarrow{a}$ باشد را در نظر بگیرید (اگر $\overrightarrow{a} = 0$ باشد جهت دلخواهی را در نظر بگیرید.) در هر حرکت نفر اول باید برداری که بیشترین مختص x را داراست یعنی برداری را بردارد که در راستای $\overrightarrow{a}$ بیشترین طول را دارد. در نهایت جمع طول بردارهای نفر اول در راستای $\overrightarrow{a}$ یعنی جمع مختص‌های x آن از جمع طول برداریهای نفر دو در راستای $\overrightarrow{a}$ کمتر نیست.

از طرفی قدر مطلق جمع مختص‌های Y بردارهای نفر اول و دوم برابر است و در نتیجه بردار نهایی نفر اول از بردار نهایی نفر دوم کوچکتر نیست. یعنی نفر اول بازنده نیست.

۲۰. خط دلخواه g را در صفحه در نظر بگیرید و همه‌ی چند ضلعی‌ها را روی g تصویر کنید. در این صورت تعدادی پاره خط به‌دست می‌آید که هر دو تایی از آنها با هم تلاقی دارند حال نقاط سمت چپ این پاره‌خط‌ها را علامت بزنید و از بین آنها آن که در سمت راست (یعنی آن که بقیه‌ی نقاط مذکور در سمت چپ آن قرار گرفته‌اند) را در نظر بگیرید. این نقطه به همه‌ی پاره خطها تعلق دارد. حال عمودی بر g رسم کنید که از این نقطه بگذرد. در این صورت خط به‌دست آمده همه‌ی چند ضلعی‌ها را قطع می‌کند.

۲۱. فرض کنید AB بزرگ‌ترین قطر یا ضلع چند ضلعی باشد. عمودهای a و b را بر AB در نقاط A و B رسم نمایید. به وضوح چند ضلعی بین دو خط a و b قرار می‌گیرد چون اگر X یکی از رئوس چند ضلعی باشد $AX \leq AB$ و $XB \leq AB$. حال چند ضلعی را به کوچک‌ترین مستطیل $KLMN$ محدود نمایید که دو ضلع KL و MN آن بر روی خطوط a و b قرارگرفته باشند و نقطه‌ی مشترک C و D با چند ضلعی داشته باشند. در این صورت $|KLMN| = ۲|ABC| + ۲|ABD| = ۲|ABCD|$ حال از آن جا که $ABCD$ تماماً در چند ضلعی به مساحت ۱ جای گرفته است پس $|ABCD| \leq ۱$ و در نتیجه $|LKMN| \leq ۲$ است.

۲۲. دو نقطه را در نظر بگیرید که کمترین فاصله را از هم دارا هستند. در این صورت نقطه‌ی دیگری درون دایره‌ی به قطر AB قرار ندارد. حال فرض کنید C یکی از نقاط باقیمانده باشد به نحوی که $ACB >$ بیشترین مقدار ممکن باشد. در این صورت هیچ نقطه‌ی دیگری درون دایره‌ی گذرنده از A, B, C وجود ندارد دقت کنید که نقاط دیگر می‌توانند روی این دایره قرار بگیرند.

۲۳. می‌توانیم فرض کنید $\gamma >\geq \beta >\geq \alpha >$ دو حالت در نظر می‌گیریم.

(۱) مثلث ABC حاده زاویه باشد دراین صورت $۹۰ > \alpha \geq ۶۰°$ از آن جا که $۱ \leq |BB_۱| \leq h_b$ و $۱ \leq |cc_۱| \leq h_c$ داریم:

$$|ABC| = ch_c/۲ = h_b h_c/۲ \sin\alpha \leq ۱/\sqrt{۳}$$

در حقیقت از این استفاده کردیم که تابع $\sin\alpha$ در بازه‌ی $\left(۰, \frac{\pi}{۲}\right)$ صعودی است.

(۲) مثلث ABC حاده‌الزاویه نباشد در این صورت $\alpha \geq ۹۰°$ و در این صورت $۱ \leq |BB_۱| \leq |AB|$ و $۱ \leq |CC_۱| \leq |AC|$ و در نتیجه:

$$|ABC| \leq |AB||AC|/۲ \leq ۱/۲ < ۱\sqrt{۳}$$

۲۴. دو نقطه B و A را طوری انتخاب کنید که بقیه‌ی نقاط در یک طرف خط AB قرار بگیرند. این نقاط را به شکل $X_۱, X_۲, X_۳, \dots, X_{۲n+۱}$ طوری انتخاب کنید که $\not< AX_iB > \not< AX_{i+۱}B$ برای $i = ۱, ۲, \dots, ۲n$. در این صورت دایره‌ی گذرنده از $A, X_{n+۱}, B$ نقاط $X_۱, \dots, X_n$ را شامل می‌شود و چون هیچ چهارنقطه‌ای هم دایره نیستند نقطه‌ی دیگر X_i می‌تواند روی این دایره قرار بگیرد (در این صورت X_i و $A, B, X_{n+۱}$ هم دایره می‌شوند) پس بقیه‌ی n نقطه نیمی $X_{n+۲}, \dots, X_{۲n+۱}$ خارج از این دایره قرار می‌گیرند.

۲۵. بدیهی است که اگر P روی یکی از خطوط $y = -x$ و $y = x$ و $y = ۰$ و $x = ۰$ نباشد. در این صورت دقیقاً یکی از گام‌های ذکر شده ما را به سمت نقطه مبدأ یعنی O نزدیکتر می‌کند و بقیه‌ی گام‌ها ما را از O دور می‌کند. از آن جا که نسبت مختصات p در گام نخست گنگ است و همیشه گنگ می‌ماند پس نکته ذکر شده در بالا همواره صادق است.

فرض کنید پس از تعدادی گام $P_۰ P_۱ \dots P_n = P_۰$ مجدداً به نقطه‌ی $P_۰(۱, \sqrt{۲})$ بازگشته‌ایم. فرض کنید P_i دورترین نقطه از بین $P_۰, P_۱, \dots, P_n$ نسبت به مبدأ باشد. در این صورت

$$d(op_i) > d(op_{i+۱}), \qquad d(op_i) > d(op_{i-۱})$$

در این صورت بنابر خاصیت ذکر شده $P_{i+1} = P_{i-1}$ که تناقض با شرط مسأله است که نباید گام پیموده شده را بلافاصله در جهت عکس پیمود. پس چنین ترتیبی برای $p_\circ p_1, \dots p_n = p_\circ$ وجود ندارد.

۲۶. تمام جای‌گشت‌های $2n$ سفیرکبیر را دور یک میز دایره‌ای شکل در نظر بگیرید. تعداد زوج‌های دشمن را در هر ترکیب در نظر بگیرید. فرض کنیم H تعداد حداقل این زوج‌ها باشد. اگر حالت $H = \circ$ را کنار بگذاریم فرض کنیم که $H > \circ$. پس با گام‌های آلگوریتم بازگشتی در مثال $(E8)$ فصل ۱ ما می‌توانیم این مقدار حداقل را کاهش دهیم که این یک تناقض است.

۲۷. فرض کنید ۱۵ عدد طبیعی $n_1, \dots, n_{15}$ در شرط مسأله صدق کنند و همگی مرکب باشند. کوچک‌ترین مقسوم علیه اول n_i را با p_i نشان می‌دهیم. فرض کنید p بزرگ‌ترین عدد از بین $p_1, \dots, p_{15}$ باشد. از آن جا که $n_1, \dots, n_{10}$ نسبت به هم اولند $p_1, \dots, p_{10}$ نیز همگی اعداد اول متمایزند. از آن جا که $p \geq 47$ (۴۷ ، پانزدهمین عدد اول است) و همچنین p کوچک‌ترین مقسوم علیه اول n است داریم:

$$n \geq p.p \geq 47^2 > 1993$$

که این تناقض است.

۲۸. حداقل ۷ نقطه به غیر از مرکز دایره O وجود دارد. پس کوچک‌ترین زاویه‌ی به شکل $A_iOA_j \leq$ حداکثر $60^\circ > 360/7$ است. اگر A و B نقاط متناظر با این کوچک‌ترین زاویه باشند در این صورت $|AB| < 1$ است چون $|OA| < 1$ و $|OB| < 1$ و همچنین $AOB <$ نمی‌تواند بزرگ‌ترین زاویه‌ی ΔAOB باشد و در نتیجه $|AB|$ از یکی از $|AO|$ یا $|BO|$ کوچکتر است که در هر حالت نتیجه می‌شود $|AB| < 1$.

۲۹. فرض کنید A و B نقاطی باشند که بیشترین فاصله را از هم دارند. وسط پاره‌خط‌هایی که از A و بقیه نقاط حاصل می‌شوند داخل دایره به مرکز A و به شعاع $\frac{|AB|}{2}$ قرار می‌گیرند و همچنین وسط پاره‌خط‌هایی که از B و بقیه‌ی نقاط حاصل می‌شوند درون دایره به مرکز B و شعاع $\frac{|AB|}{2}$ قرار می‌گیرند. این دو دایره تنها یک نقطه‌ی مشترک دارند و در هر کدام $n - 1$ نقطه‌ی علامت خورده وجود دارد پس جمعاً حداقل $2(n-1) - 1 = 2n - 3$ نقطه‌ی علامت خورده وجود دارد.

۳۰. زاویه‌ی $\alpha =< BAC$ را در صفحه رسم کنید که $\alpha =< SA_1A_2 = \dots =< SA_nA_1$ و $|AB| = a$. در این صورت برای $i = 1, \dots, n$ نقطه‌ی S_i را روی AC چنان پیدا می‌کنیم که $\Delta AS_iB = \Delta AS_iA_{i+1}$. فرض کنید همه نقاط S_i به هم منطبق نباشند و S_k نزدیکترین نقطه به B باشد و S_l نقطه باشد که بیشترین فاصله را از B دارد. از آن جا که $|S_kS_l| > |S_kB - S_lB|$ داریم

$$|S_kA - S_lA| > |S_kB - S_lB| \Rightarrow |S_{k-1}B - S_{l-1}B| > |S_kB - S_lB|$$

ولی سمت راست نامساوی تفاضل بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین فاصله است ولی سمت چپ تفاضل دو مقدار بین آنهاست که این تناقض است یعنی همه‌ی S_iها بر هم منطبق هستند و در نتیجه S از همه‌ی رئوس $A_1, \dots, A_n$ به یک فاصله است.

۳۱. عرق‌چینی با شعاع ماکزیمم را درنظر بگیرید و دایره‌ای با شعاع اندکی بزرگتر از آن رسم کنید که آنرا در برگیرد و با عرق‌چین‌های دیگر تلاقی نداشته باشد. ۵ عرق‌چین را نسبت به مرکز کره قرینه کنید. به وضوح عرق‌چین‌ها و قرینه‌های آنها کل کره را نمی‌پوشانند و در نتیجه یک نقطه که پوشانده نشده است و نقطه‌ی مقابل قطری آن شرایط مساله را دارند.

۳۲. فرض کنید x و y به ترتیب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین اعداد از بین $x_1, \ldots, x_5$ باشند. از معادلات مسأله به‌دست می‌آید:

$$x^2 \leq 2x, y^2 \geq 2y$$

اما از آن جا که $y > 0$ ،$x > 0$ نتیجه می‌شود $2 \leq y \leq x \leq 2$. یعنی بیشترین و کوچک‌ترین اعداد مساوی هستند و دستگاه تنها جواب $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 2$ را دارد.

۳۳. با توجه به تفاوت معادلات می‌توانیم فرض کنیم $x \geq y, x \geq z$. دو معادله‌ی آخر نتیجه می‌دهند $x + z \geq z + y$ یعنی $y \geq x$ که با توجه به فرض $x \geq y$، x و y مساوی می‌شوند. تشابهاً می‌توانیم نتیجه بگیریم $z = x$. معادله‌ی $x = 8x^3$ دارای ریشه‌های

$$x = 0, x = 1/2\sqrt{2}, x = -1/2\sqrt{2}$$

است. پس

$$x = y = z = 0 \quad \text{یا} \quad 1/2\sqrt{2} \text{یا} - 12/2\sqrt{2}$$

۳۴. تعداد دوتایی‌های (A, P) که $A \in E$ و P صفحه‌ای گذرا از سه نقطه‌ی $E|A$ است متناهی است. پس یک دو تایی وجود دارد که فاصله‌ی بن A و P کمترین مقدار است.

اگر P شامل دقیقاً سه نقطه از E باشد که حکم ثابت شده است درغیر این صورت چهار نقطه‌ی A_2, A_3, A_4, A_5 متعلق به $E \cap P$ وجود دارند که چهار ضلعی $Q = A_2A_3A_4A_5$ شامل هیچ نقطه‌ی دیگری از E نباشد. حال فرض کنید Q محدب نباشد. می‌توانیم فرض کنیم A_2 درون مثلث $A_3A_4A_5$ قرار دارد. خطوط موازی با اضلاع این مثلث که از A_2 می‌گذرند Q را به تعدادی بخش تقسیم می‌کند. می‌توانیم بخشی را پیدا کنیم که به جز تصویر A بر روی $P(A_1)$ شامل نقطه‌ی دیگری از بین $\{A_3, A_4, A_5\}$ (فرض کنید A_3) باشد. در این صورت فاصله‌ی بین A_2 و صفحه‌ی P_2 (گذرنده از نقاط $A_., A_s, A$) کمتر از فاصله‌ی A_1 و صفحه P_2 است و در نتیجه بنابر قضیه‌ی فیثاغورث کمتر از $|AA_1|$ است، که این خلاف فرض ما در مورد خاصیت (A, P) است. در نتیجه Q محدب است. فرض مینیمم بودن (A, P) همچنین لازم می‌دارد که هرم $A_1A_2A_3A_4A_5$ شامل نقطه‌ی دیگری از E نباشد.

۳۵. A را به مراکز این ۶ دایره $(O_1, O_2, \ldots, O_6)$ وصل کنید. فرض کنید O_1AO_2 کوچک‌ترین زاویه از بین زوایای O_iAO_j باشد. ثابت کنید که پاره‌خط O_1O_2 کاملاً درون یک دایره قرار می‌گیرد و به این ترتیب حکم بدیهی است.

۳۶. مانند مثال $(E1)$.

۳۷. به دانش‌آموزی، خوب می‌گوییم که درسش از همه‌ی دوستانش بهتر باشد. فرض کنید x تعداد دانش‌آموزان خوب و k تعداد دوستان هر دانش‌آموز باشد. بهترین دانش‌آموز کلاس، بهترین دانش‌آموز از k زوج است و هر دانش‌آموز دیگری حداقل در $\frac{(k+1)}{2} \geq 1 + [\frac{k}{2}]$ زوج حضور دارد. بنابراین دانش‌آموزان خوب در بهترین حالت حداقل در $\frac{k + 1(x-1)(k+1)}{2}$ زوج حضور دارند. این عدد نمی‌تواند از مقدار تمام زوج‌های کلاس که $15k$ است بیشتر باشد. بنابراین $\frac{k+(x-1)(k+1)}{2} \leq 15k$ یا $x \leq \frac{28k}{k+1} + 1$. بنابراین $k \leq 59 - 2x$ یا $\frac{k+1}{2} \leq 30 - x$ چون تعداد دانش‌آموزان که از بدترین بهترین دانش‌آموزان بهتر باشند $30 - x$ تجاوز نمی‌کند یعنی $x \leq \frac{28(59-2x)}{60-2x} + 1$ یا $x^2 - 59x + 856 \geq 0$. بزرگترین عدد صحیح $x \leq 30$ که $x = 25$ در نامساوی صدق می‌کند. مثالی بیاورید که تائید نماید ۲۵ بهترین جواب است.

۳۸. شخصی را درنظر بگیرید که بیشترین تعداد دوست (n تا) در s داشته باشد. مسلماً همه‌ی دوستان او تعداد دوستانشان متمایز است و همچنین تعداد دوستانشان عددی بزرگتر از ۰ و کوچکتر یا مساوی n است. یعنی n امکان $۱, ۲, ۳, \ldots, n$ برای تعداد دوستان این n نفر وجود دارد. پس کلیه‌ی این مقادیر باید انتخاب شوند و در حالت خاص شخصی وجود دارد که دقیقاً یک دوست دارد.

۳۹. فرض کنید $x_۱ \geq x_۲ \geq \ldots \geq x_n$. فرض کنید $x_۱ + x_۲ + x_۳ \leq ۱$. در اینصورت:

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ - (x_۱ - x_۳)(۱ - x_۱) - (x_۲ - x_۳)(۱ - x_۲) \leq ۱$$

$$x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳(۳ - x_۱ - x_۲) \leq ۱ \quad \text{یا}$$

$$x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳(x_۳ + \cdots + x_n) \leq ۱ \quad \text{یا}$$

$$x_۱^۲ + x_۲^۲ + \cdots + x_n^۲ \leq ۱ \quad \text{یا}$$

که این تناقض حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۴۰. فرض کنید $x_۱$ بزرگ‌ترین عدد از بین $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ باشد. در این صورت

$$(x_۲ + \cdots + x_n)^۲ = \sum_{i=۲}^{n} x_i^۲ + \sum_{۲ \leq i < j \leq n} ۲x_i x_j \qquad (۱)$$

با جمع نامساوی‌ها $x_i < ۲x_۱ < x_۲$ برای $i = ۲, \ldots, n$ داریم:

$$\sum_{i=۲}^{n} x_i^۲ < \sum_{i=۲}^{n} ۲x_۱ x_i$$

و با جاگذاری در نامساوی (۱) به‌دست می‌آید:

$$(x_۲ + \cdots + x_n)^۲ < \sum_{i=۲}^{n} ۲x_۱ x_i + \sum_{۲ \leq i < j \leq n} ۲x_i x_j = \sum_{۱ \leq i < j \leq n} ۲x_i x_j$$

در نتیجه

$$(x_۲ + \cdots + x_n)^۲ < ۲$$

یعنی

$$x_۲ + \cdots + x_n < \sqrt{۲}$$

برای حل دیگر مراجعه کنید به فصل ۹ مسأله ۳۹.

۴۱. رئوس n ضلعی را در جهت عقربه‌های ساعت عددگذاری کنید. فرض کنید a_i حرکت بر روی مهره‌های رأس iام انجام شده باشد. اگر به حالت اولیه برسیم بنابر شرط مساله باید داشته باشیم:

$$a_۱ = \frac{a_۲ + a_n}{۲}, a_۲ = \frac{a_۱ + a_۳}{۲}, \ldots, a_n = \frac{a_{n-۱} + a_۱}{۲}$$

فرض کنید $a_۱$ بیشترین مقدار a_iها باشد. در این صورت $a_۱ = \frac{a_۲ + a_n}{۲}$ نتیجه می‌دهد $a_۲ = a_n = a_۱$ مشابهاً $a_۲ = \frac{a_۱ + a_۳}{۲}$ نتیجه می‌دهد $a_۱ = a_۲ = a_۳$ و به همین ترتیب $a_۱ = a_۲ = \cdots = a_n$ و تعداد کل حرکات برابر است با $na_۱$ که مضرب n است.

۴۲. برای هر m($1 \le m \le n$) بین دو تایی‌های (a_k, b_k) حداقل یکی از نامساوی‌های $a_k \ge b_k$ یا $b_k \ge a_k$، $\frac{m}{2}$ بر قرار است.

فرض کنید $b_k \ge q_k$ برای $\frac{m}{2}$ جفت برقرار باشد. اگر b_l کمترین عدد از بین b_k ها باشد در این صورت $b_l \le \frac{2}{m}$. بین $a_l + b_l \le 2b_l \le \frac{4}{m}$ و از آن جا که $i \le m$ است داریم

$$a_m + b_m \le a_l + b_l \le \frac{4}{m}$$

۴۳. فرض کنید $[a_1, b_1]$ پاره‌خطی با کوچک‌ترین نقطه سمت راست باشد. اگر بیشتر از ۷ پاره‌خط شامل b_1 باشند، ۸ پاره‌خط یافت شده‌اند که نقطه مشترکی دارند و حکم تمام است. در غیراین صورت اگر تعداد این پاره‌خط‌ها کمتر یا مساوی ۷ باشد در این صورت حداقل ۴۳ پاره‌خط کاملاً در سمت راست b_1 قرار می‌گیرند. از این پاره‌خط‌ها $[a_2, b_2]$ را درنظر بگیرید که کوچک‌ترین نقطه سمت راست را دارد. در این صورت مشابهاً یا b_2 متعلق به ۸ پاره‌خط است و یا ۳۶ پاره‌خط کاملاً در سمت راست b_2 قرار می‌گیرند. با ادامه این روش پاره‌خط‌های $[a_1, b_1], \ldots [a_7, b_7]$ یافت می‌شوند که در سمت راست $[a_k, b_k]$ حداقل $50 - 7k$ پاره‌خط قرار می‌گیرند. یعنی در سمت راست پاره‌خط $[a_7, b_7]$ پاره‌خط $[a_8, b_8]$ قرار می‌گیرد که در این صورت ۸ پاره‌خط کاملاً مجزا پیدا شده است.

مشابهاً می‌توانیم ثابت کنیم بین هر $mn + 1$ پاره‌خط یا می‌توان $m + 1$ پاره‌خط دو بدو مجزا یافت و یا $n+$ پاره‌خط با نقطه‌ی مشترک. این مساله حالت خاصی از قضیه دیلورث است:

قضیه‌ی دیلورث: در یک مجموعه‌ی $mn + 1$ عضوی که دارای رابطه ترتیب است یا زنجیری شامل $m + 1$ عضو یافت می‌شود و یا پادزنجیری به طول $n + 1$.

۴۴. از بین این $3n$ نفر، شخصی را انتخاب کنید که بیشترین تعداد دوست از یک مدرسه (فرض کنید kتا) را داشته باشد. فرض کنید این دانش‌آموز A از مدرسه‌ی اول باشد که با k نفر از مدرسه دوم و در نتیجه با $(n + 1 - k)$ نفر از مدرسه‌ی سوم دوست است. از آن جا که $k \le n$ است پس $n + 1 - k \ge 1$. دانش‌آموز B از مدرسه سوم را درنظر بگیرید که با A دوست است. اگر B حداقل با یک نفر از k دوست A در مدرسه دوم دوست باشد $\{A, B\}$ سه تایی مطلوب است ولی اگر B با هیچ یک از k دوست k در مدرسه دوم دوست نباشد در این صورت در این مدرسه حداکثر با $n - k$ نفر دوست است و در نتیجه در مدرسه اول حداقل $n + 1 - (n - k) = k + 1$ دوست دارد که این با انتخاب ما برای A و K در تناقض است.