



وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملی پرورش استعداد‌های درخشان و دانش‌پژوهان جوان

مبارزه‌ی علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی (ره)»



سیزدهمین دوره‌ی المپیاد نجوم و اخترفیزیک

آزمون‌های پایان دوره

آزمون تئوری ۲

(۱۶ شهریور ۱۳۹۶ - ساعت ۸:۰۰ تا ۱۱:۳۰)

توضیحات مهم:

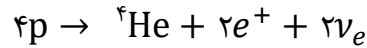
۱. این آزمون ۶ سؤال دارد و زمان آن ۲۱۰ دقیقه است.
۲. به همراه سؤالات، دفترچه‌ی پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته است. نام و نام خانوادگی خود را بر روی این دفترچه وارد کنید.
۳. در دفترچه‌ی پاسخ‌نامه، پاسخ هر سؤال را در برگی مربوط به همان سؤال بنویسید.
۴. استفاده از ماشین حساب **CASIO fx - 82MS** مجاز است.
۵. همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی مجاز نیست.

ثوابت فیزیکی و نجومی

مقدار	کمیت
$6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$	G ثابت جهانی گرانش
$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$	c سرعت نور
$6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$	h ثابت پلانک
$1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$	k ثابت بولتزمن
$5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$	σ ثابت استفان-بولتزمن
$1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$	eV الکترون ولت
$1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$	m_H جرم اتم هیدروژن
$3.09 \times 10^{16} \text{ m}$	pc پارسک
$9.46 \times 10^{15} \text{ m}$	ly سال نوری
$3.85 \times 10^{26} \text{ W}$	L_{\odot} درخشندگی خورشید
$1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$	M_{\odot} جرم خورشید
$6.96 \times 10^8 \text{ m}$	R_{\odot} شعاع خورشید
$1.90 \times 10^{27} \text{ kg}$	M_J جرم مشتری
$5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$	M_{\oplus} جرم زمین
6378 km	R_{\oplus} شعاع زمین
$21.4^{\circ} N$	عرض جغرافیایی مکه
$39.9^{\circ} E$	طول جغرافیایی مکه
62.6°	انحراف صفحه ی کهکشان راه شیری از استوای سماوی

سؤال ۱ (۱۵ نمره)

الف) چند درصد از پروتون‌های ستاره‌ای به جرم $M = 5 M_{\odot}$ در طول عمر ستاره تبدیل به هلیوم می‌شود؟ فرض کنید ستاره در لحظه‌ی شروع زندگی فقط از هیدروژن تشکیل شده است و طی فرایند زیر هیدروژن‌ها تبدیل به هلیوم می‌شوند.



در این فرایند 25.7 MeV انرژی آزاد می‌شود که تقریباً 4 MeV مربوط به انرژی نوترینوها است. فرض کنید رابطه‌ی جرم-درخشندگی به صورت $L \propto M^3$ است.

ب) محاسبه‌ی فوق را برای ستاره‌ای به جرم خورشید تکرار کرده و نتیجه را با قسمت الف مقایسه کنید.

سؤال ۲ (۳۵ نمره)

گذشتگان ما همواره نگاه ویژه‌ای به آسمان داشتند و سعی می‌کردند باورهای خود را به پدیده‌های آسمانی گره بزنند. یکی از قابل توجه‌ترین پدیده‌هایی که در آسمان دیده می‌شود، نوار کهکشان راه شیری است.



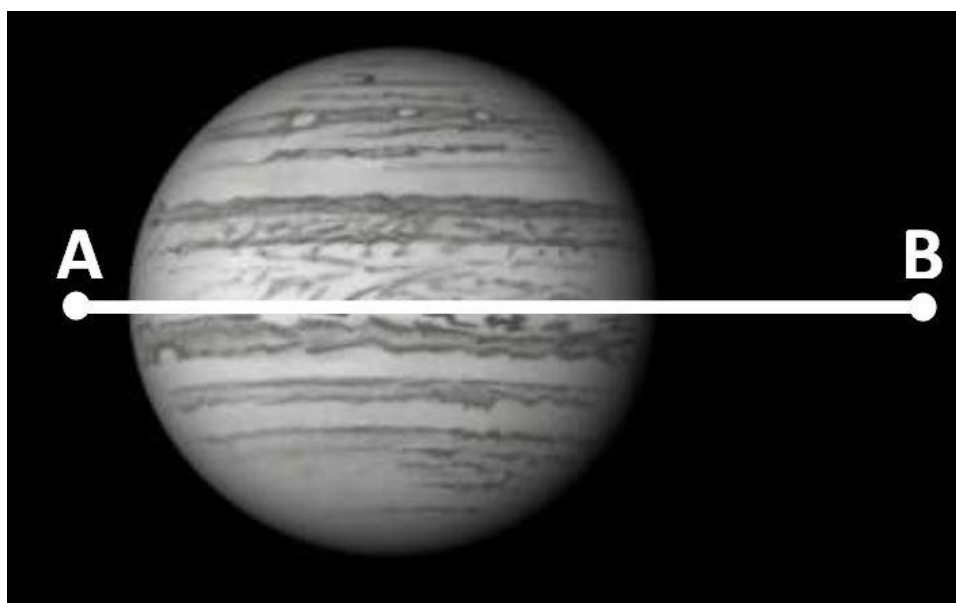
شکل ۱ (این شکل کاربردی در حل مسئله ندارد.)

طبق یک باور قدیمی، محل تقاطع نوار کهکشان راه شیری با افق، نمایانگر جهت قبله است. در شهر تهران با مختصات جغرافیایی $\varphi = 35.7^\circ \text{ N}$, $l = 51.4^\circ \text{ E}$ احتمال این که در طول یک شبانه روز زمینی تقاطع استوای راه شیری با افق با دقت $\pm 15^\circ$ به سمت قبله باشد، چه قدر است؟

سؤال ۳ (۶۰ نمره)

ماهواره‌ای برای اکتشاف فضایی به نزدیکی مشتری فرستاده می‌شود. این ماهواره در هر لحظه فاصله‌ی خود از مرکز مشتری را به همراه تصاویری از سطح مشتری برای دانشمندان زمینی می‌فرستد. در اثر یک اتفاق تکه‌ای سنگ به فرستنده‌ی این ماهواره برخورد می‌کند و مدار ماهواره حول مشتری عوض می‌شود و فرستنده نیز از کار می‌افتد. یکی از دانشمندان که در همان زمان مشغول مشاهده‌ی ماهواره از داخل تلسکوپ بوده است، پس از برخورد مشاهده می‌کند که این ماهواره روی یک پاره‌خط متناوباً جابه‌جا می‌شود. این دانشمند در گزارش‌های خود شکل شماتیک زیر را برای نشان دادن نحوه‌ی حرکت ماهواره رسم می‌کند.

توجه: شکل صرفاً برای روشن شدن صورت مسئله است و اندازه‌ها و ابعاد روی آن ارزشی ندارد.



شکل ۲

در این شکل ماهواره بین نقاط A و B جابه‌جا می‌شود. در اطلاعات ثبت شده توسط این دانشمند آمده است که مدت زمانی که طول می‌کشد این ماهواره از A به B برسد (از جلوی مشتری رد می‌شود) ۱۵۵ دقیقه است و مدت زمانی که طول می‌کشد ماهواره از B به A برسد (از پشت مشتری رد می‌شود) ۱۱۵ دقیقه است. هم‌چنین در این اطلاعات ذکر شده است که در لحظه‌ی برخورد سنگ با ماهواره، ماهواره دقیقاً روی نقطه‌ی A قرار داشته است و آخرین اطلاعاتی که فرستنده به زمین می‌فرستد بیان می‌کند که در لحظه‌ی برخورد، فاصله‌ی ماهواره تا مرکز مشتری ۹۰ هزار کیلومتر بوده است.

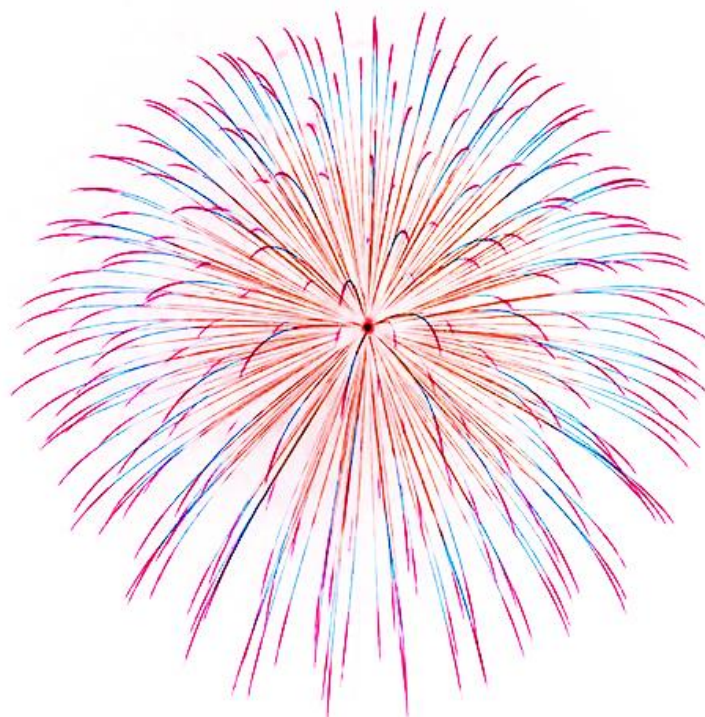
فرض کنید در مدت زمانی که دانشمند مشغول رصد است موقعیت زمین و مشتری در فضا تغییر چندانی نمی‌کند و فاصله‌ی زمین تا مشتری بسیار بزرگ‌تر از فاصله‌ی ماهواره تا مشتری است.

الف) نیم قطر بزرگ (a) و خروج از مرکز (e) مدار این ماهواره را بیابید.

ب) شکل شماتیک رسم شده توسط این دانشمند کاملاً دقیق نیست. اگر این دانشمند شکل را دقیق رسم می‌کرد، نسبت فاصله‌ی نقطه‌ی A تا مرکز مشتری روی شکل به فاصله‌ی B تا مرکز مشتری روی شکل چه قدر باید می‌شد؟

سؤال ۴: گل آتش در مراسم شادی (۴۵ نمره)

یک گل آتش^۱ شامل تعداد بسیار زیادی از ذرات تقریباً یکسان است که در یک گلوله‌ی اصلی قرار گرفته‌اند. وقتی گل آتش به هوا پرتاب می‌شود، در نقطه‌ی اوج خود منفجر شده و ذرات داخل آن با سرعت‌های اولیه‌ی یکسان و به صورت متقارن در تمامی جهت‌ها پراکنده می‌شوند.



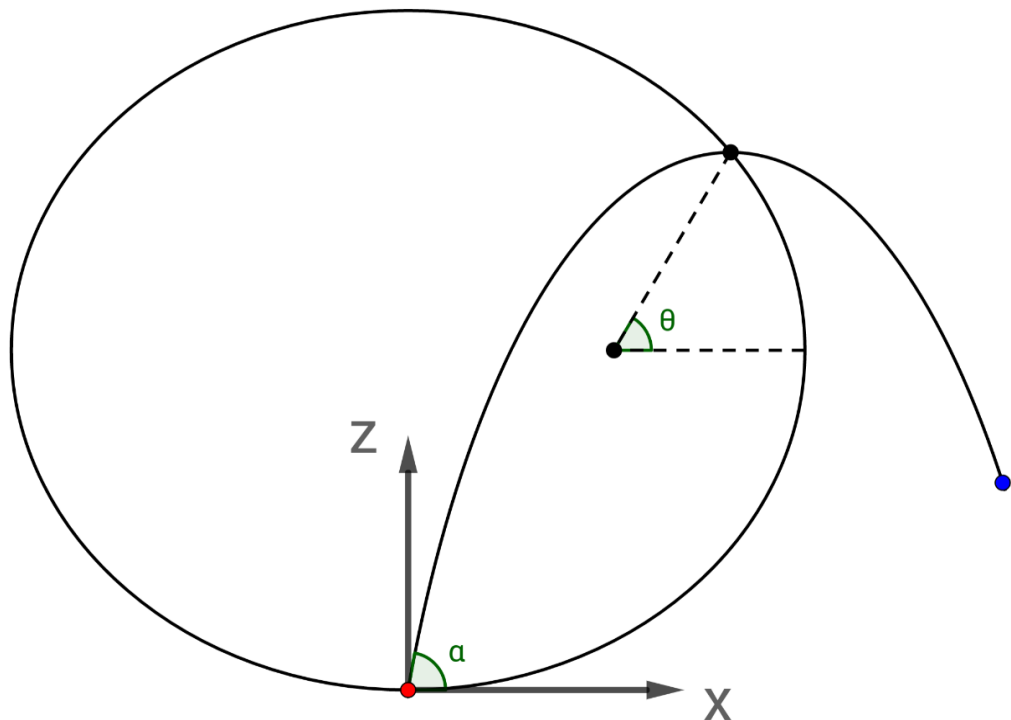
شکل ۳ - ذرات یک گل آتش، لحظاتی پس از انفجار

دستگاه مختصات به مبدأ نقطه‌ی انفجار در نظر بگیرید که صفحه‌ی γx آن موازی با افق و محور Z آن رو به بالا است. ذراتی که در لحظه‌ی انفجار گل آتش در راستای γ سرعت ندارند و سرعتشان در راستای Z مثبت است را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید مکان هندسی نقاط اوج این ذرات یک بیضی است.

ب) نیم قطر بزرگ (a) و خروج از مرکز (e) این بیضی را محاسبه کنید.

ج) یک رابطه‌ی صریح برای زاویه‌ی پرتابه^۱ (α) بر حسب زاویه‌ی حضیضی^۲ (θ) در بیضی فوق به دست آورید.



شکل ۴ - نحوه‌ی اندازه‌گیری α و θ برای یک ذره از گل آتش

- د) ذره‌ای را در نظر بگیرید که اندازه‌ی برد آن (روی محور x) بیشینه است. زوایای پرتابه و حضیضی را برای این ذره به دست آورید. مقدار این زوایا برای ذره‌ای که اندازه‌ی برد آن کمینه است چه قدر است؟
- ه) مکان هندسی ذرات گل آتش در یک لحظه (نقاط هم‌زمان) را به دست آورید.
- و) نتیجه‌ی قسمت «ه» را توصیف فیزیکی کنید.

^۱ به زاویه‌ی مسیر جسم با صفحه‌ی افق در لحظه‌ی پرتاب، زاویه‌ی پرتابه گفته می‌شود.

^۲ True Anomaly

سؤال ۵ (۲۵ نمره)

فیلتر فابری-پرو متشکل از دو نیم‌آینه است که به فاصله‌ی d از یک‌دیگر قرار گرفته‌اند و فضای بین آن‌ها با ماده‌ای با ضریب شکست n پر شده است. بین دو آینه، درصد بازتاب خیلی بیشتر از درصد عبور است. ضریب شکست محیط بیرون برابر یک است. این فیلتر را مقابل نور یک ستاره قرار می‌دهیم.

الف) اگر پرتوی فرودی کاملاً عمود بر فیلتر تابانده شود، طول موج خروجی (λ_{out}) چه قدر است؟

ب) اگر پرتوی فرودی با زاویه‌ی تمایل θ از خط عمود بر فیلتر، به آن تابانده شود، طول موج خروجی بر حسب پارامترهای داده شده چه خواهد شد؟

ج) مزیت مایل تاباندن پرتو به فیلتر چیست؟

سؤال ۶ (۳۰ نمره)

فرض کنید در ستاره دو منبع اصلی برای فشار وجود دارد؛ یکی فشار گاز ایده‌آل و دیگری فشار تبهگنی ذرات غیرنسبیتی.

$$P_c = \frac{\rho k T}{\mu m_H} + K \rho^{\frac{5}{3}}$$

الف) در ستاره‌ای به جرم M و چگالی ثابت، با استفاده از تعادل هیدروستاتیک رابطه‌ی $P_c(M, \rho_c)$ را به دست آورید.

ب) دمای مرکز ستاره (T_c) را بر حسب چگالی مرکز (ρ_c) به دست آورید.

ج) در ستاره‌هایی با جرم M ، بیشینه‌ی دمای مرکزی برای چه ستاره‌ای رخ می‌دهد؟

د) فرض کنید یک ستاره تماماً از هلیوم تشکیل شده باشد. حداقل جرم ستاره برای فعال شدن هم‌جوشی در هسته‌ی

هلیومی $M_{\odot} / 3$ است. مقدار ثابت K را تعیین کنید. مقادیر زیر را فرض کنید

$$P_c = 10^{17} \text{ g/cm/s}^2, T_c = 10^8 \text{ K}$$