

به نام خدا
روز سوم
نظریه‌ی گراف
<http://YazdCS.blog.ir>

۱ مقدمه

الف) ثابت کنید مجموع درجات راس‌های گراف دو برابر تعداد یال‌هاست.
ب) ثابت کنید در هر گراف تعداد راس‌های با درجه‌ی فرد، زوج است.
پ) کمترین درجه‌ی راس‌های گراف را δ می‌نامیم. ثابت کنید در هر گراف یک دور به طول $\delta + 1$ وجود دارد.
ج) ثابت کنید در هر گراف با دست کم 2δ راس یک مسیر به طول 2δ وجود دارد.

۲ دوبخشی

یک گراف دوبخشی است اگر بتوان جوری راس‌های آن را به دو بخش افراز کرد که هیچ یالی بین راس‌های داخل یک مجموعه نباشد. ثابت کنید یک گراف دوبخشی است اگر و تنها اگر دور به طول فرد نداشته باشد.

۳ گذر فرد

ثابت کنید هر گذر به طول فرد شامل یک دور به طول فرد نیز هست.

۴ رنگ آمیزی راس‌ها

بیشترین درجه‌ی راس‌های گراف‌ها را Δ می‌نامیم. ثابت کنید برای هر گراف می‌توان با حداکثر $\Delta + 1$ رنگ، جوری راس‌های گراف را رنگ کرد به طوری که هیچ دو راس مجاور هم‌رنگ نباشند.

۵ زیرگراف دوبخشی

ثابت کنید در هر گراف با m یال یک زیرگراف دو بخشی با دست کم $\frac{m}{3}$ یال وجود دارد.

۶ مهمانی سیاستمدارها

همانطور که خوب می دانید سیاستمدارها با هم دوستی ندارند فقط دشمنی دارند! n سیاستمدار در یک مهمانی هستند. می خواهیم آن‌ها را جوری در دو اتاق تقسیم کنیم که تعداد دشمنان هرکس در اتاق دیگر بیشتر از تعداد دشمنانش در اتاق خودش باشد.

۷ عملیات دور چهارتایی

یک گراف کامل n راسی داریم. تا زمانی که در گراف دست کم یک دور چهارتایی وجود دارد می توانیم یک دور چهارتایی دلخواه انتخاب کنیم و یکی از یال‌های آن را به دلخواه حذف کنیم. کمترین تعداد یال‌های باقی مانده در پایان کار را محاسبه کنید.

۸ پادشاه

در یک تورنمنت n تیم شرکت کرده‌اند. هر دو تیم یک بار دقیقاً یک بار مسابقه داده‌اند و هر بازی یک برنده دارد.
الف) ثابت کنید دست کم یک تیم وجود دارد که هر تیم دیگر را یا به صورت مستقیم یا با دنباله‌ای از بازی‌ها برده.
ب) ثابت کنید دست کم یک تیم وجود دارد که هر تیم دیگر با یک دنباله‌ی به طول حداکثر ۲ برده‌است.

۹ مجموعه‌ی همایونی

ثابت کنید در هر گراف جهت‌دار یک زیر مجموعه مثل S از رئوس وجود دارد به طوری که هیچ دو راسی در S به هم یال ندارند و به ازای هر راس خارج از S ، مثل u ، دست کم یک راس در S مثل v وجود دارد که یک مسیر به طول حداکثر ۲ به u دارد.

۱۰ اشتراک طولانی‌ترین‌ها

ثابت کنید در هر گراف، هر دو طولانی‌ترین مسیر مختلف دست کم در یک راس اشتراک دارند.

۱۱ دوست و دشمن

یک جمع n نفره داریم که هر دو نفر یا با هم دوست هستند یا دشمن. همچنین هر چهار نفری که انتخاب کنیم یا سه نفر بین آن‌ها هستند که دو به دو دوست هستند یا سه نفر بین آن‌ها هستند که دو به دو دشمن هستند. ثابت کنید می‌توان افراد را جوری به دو قسمت تقسیم کرد که در یک بخش همه دو به دو دوست باشند و در یک بخش همه دو به دو دشمن.

۱۲ بدون مثلث

حداکثر تعداد یال‌های یک گراف $2n$ راسی بدون دور سه‌تایی را پیدا کنید.