

به نام خداوند مهربان  
مدرسه علوم کامپیوتر و ریاضی یزد  
آزمون تئوری - ۱۲ آذر ۹۵ - روز دوم

## ۱ به نام هندسه

در مثلث  $ABC$  مرکز ارتفاعی مثلث را  $H$  و محل برخورد میانه راس  $A$  با دایره محیطی مثلث  $ABC$  را  $X$  می‌نامیم. نقطه  $Q$  را روی دایره محیطی مثلث  $ABC$  طوری در نظر می‌گیریم که  $\angle AQH = 90^\circ$  برقرار باشد. اگر  $O$  مرکز دایره محیطی مثلث  $BHC$  باشد ثابت کنید  $HO$  و  $XQ$  روی  $BC$  هم‌رسند.

## ۲ جبر بدون حسابان

برای اعداد حقیقی و مثبت  $a, b, c$  ثابت کنید:

$$\sqrt{\frac{a^4+2b^2c^2}{a^2+2bc}} + \sqrt{\frac{b^4+2c^2a^2}{b^2+2ca}} + \sqrt{\frac{c^4+2a^2b^2}{c^2+2ab}} \geq a + b + c$$

## ۳ ترکیبیات بدون جبر

فرض کنید  $n$  عددی طبیعی باشد و  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$  زیرمجموعه‌های ناتهی از مجموعه  $\{1, 2, \dots, n\}$  باشند. ثابت کنید دو مجموعه‌ی ناتهی از اندیس‌ها مثل  $B, C$  موجوداند به گونه‌ای که  $B \cap C = \emptyset$  و داشته باشیم:

$$\bigcup_{i \in B} A_i = \bigcup_{i \in C} A_i$$

## ۴ سوال استاد بزرگ نظریه

فرض کنید  $p, q$  اعدادی اول هستند و  $n$  عددی طبیعی به طوری که دو رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$pq|n^p + 2$$

$$n + 2|q^p + n^p$$

ثابت کنید عدد طبیعی  $m$  وجود دارد به طوری که  $q|n \times 4^m + 2$ .