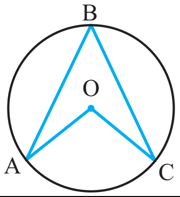
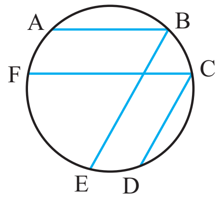
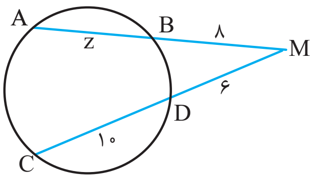
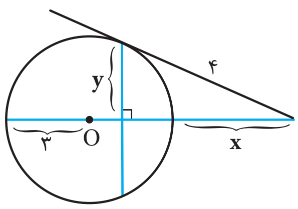
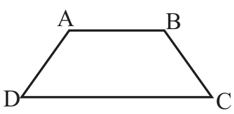
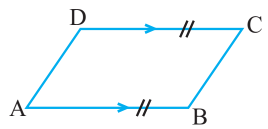
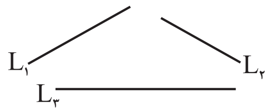
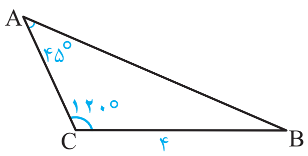
| آزمون پایان سال هندسه۲ | آزمون شمارهٔ (۴) | مدت زمان امتحان:۱۳۵ دقیقه<br>پایهٔ یازدهم ریاضی |
|---|---|---|

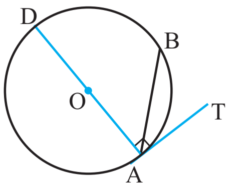
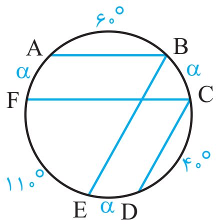
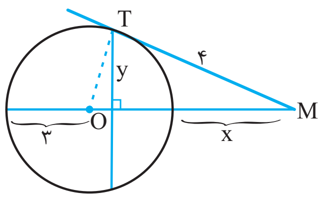
| ردیف | سؤالات | نمره |
|---|---|---|
| ۱ | واژه‌های زیر را تعریف کنید.<br>الف) قطاع دایره　　ب) دو دایره متداخل　　ج) نقطهٔ ثابت تبدیل | ۱/۵ |
| ۲ | عبارات زیر را کلمات مناسب تکمیل کنید.<br>الف) از یک نقطه خارج از دایره، تنها ............. مماس بر دایره می‌توان رسم نمود.<br>ب) در تجانس به نسبت $k$، اگر $\lvert k \rvert < ۱$ باشد، آن را ............. می‌نامیم.<br>ج) مساحت هر مثلث برابر است با ............. حاصل ضرب اندازه‌های هر دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آن‌ها. | ۰/۷۵ |
| ۳ | در دایرهٔ $C(O,۵)$، اگر $A\hat{O}C = (۳\alpha+۱۲)^\circ$ و $A\hat{B}C = (\alpha+۱۶)^\circ$ باشد، مقدار $\alpha$ و طول کمان روبرو به زاویهٔ $A\hat{O}C$ را بدست آورید.<br><br> | ۱ |
| ۴ | قضیه: ثابت کنید اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی برابر است با نصف کمان روبرو به آن زاویه. | ۱ |
| ۵ | در شکل زیر $\overset{\frown}{AB} = ۶۰^\circ$، $\overset{\frown}{CD} = ۴۰^\circ$ و $\overset{\frown}{EF} = ۱۱۰^\circ$ می‌باشد. زاویهٔ $FCD$ چقدر است؟<br>$(CD \parallel BE, AB \parallel CF)$<br><br> | ۰/۷۵ |
| ۶ | در شکل های زیر، مقادیر $x$ و $y$ و $z$ را بیابید.<br><br><br>(ب)<br><br><br>(الف) | ۱/۲۵ |
| ۷ | طول مماس مشترک‌های داخلی و خارجی دو دایرهٔ $C(O,۵)$ و $C'(O',۳)$ را در صورتی که طول خط المرکزین آن‌ها برابر ۱۰ باشد، بیابید. | ۱ |
| ۸ | اگر در یک مثلث با مساحت $S$ و محیط $۲p$ شعاع دایره محاطی برابر $r$ باشد، نشان دهید: $S = rp$ | ۱ |
| ۹ | قضیه: مطابق شکل چهارضلعی $ABCD$ را در نظر بگیرید. اگر $AB+CD = BC+AD$ باشد، ثابت کنید $ABCD$ یک چهارضلعی محیطی است.<br><br> | ۱/۲۵ |
| ۱۰ | قضیه: در هر تبدیل طولپا، تبدیل یافتهٔ هر زاویه، زاویه‌ای هم اندازهٔ آن است. | ۱ |

| آزمون پایان سال هندسه۲ | آزمون شمارهٔ (۳) | مدت زمان امتحان:۱۳۵ دقیقه<br>پایهٔ یازدهم ریاضی |
|---|---|---|

<table>
<tr><th>ردیف</th><th>سؤالات</th><th>نمره</th></tr>
<tr><td>۱۱</td><td>درستی یا نادرستی هر عبارت را داخل جدول مشخص کنید.
<table>
<tr><th></th><th>اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند</th><th>جهت شکل را حفظ می‌کند</th></tr>
<tr><td>بازتاب</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>انتقال</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>دوران</td><td></td><td></td></tr>
</table></td><td>۱/۵</td></tr>
<tr><td>۱۲</td><td>در چهارضلعی $ABCD$، اگر $AB \parallel CD$ و $AB = CD$ باشد، با استفاده از ویژگی‌های تبدیل انتقال ثابت کنید:<br>$AD = BC\ ,\ AD \parallel BC$

</td><td>۱/۲۵</td></tr>
<tr><td>۱۳</td><td>مطابق شکل زیر، سه خط $L_1$، $L_2$ و $L_3$ در صفحه مفروض‌اند. پاره خطی به طول ۷ سانتی متر رسم کنیدکه دو سر آن روی $L_1$ و $L_2$ بوده و موازی $L_3$ باشد. (مراحل رسم را توضیح دهید.)

</td><td>۱/۲۵</td></tr>
<tr><td>۱۴</td><td>با توجه به شکل زیر، طول ضلع $AB$ و شعاع دایرهٔ محیطی مثلث را محاسبه کنید.

</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۱۵</td><td>در مثلث $ABC$ ، $AB = 2\sqrt{2}$ ، $AC = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ و $\hat{A} = 60^\circ$ است. به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها، طول ضلع $BC$ را به‌دست آورید.</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۱۶</td><td>در مثلث $ABC$، $AB = 7$ ، $AC = 5$ ، $BC = 8$ می‌باشد. نیمساز زاویهٔ $B$ ضلع $AC$ را در نقطهٔ $D$ قطع می‌کند. طول‌های $AD$ و $CD$ را به‌دست آورید.</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>۱۷</td><td>قضیه: ثابت کنید در هر مثلث، مربع اندازه هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل ضرب اندازهٔ دو ضلع زاویه، منهای حاصل ضرب اندازهٔ دو قطعه‌ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.</td><td>۱/۵</td></tr>
<tr><td>۱۸</td><td>مساحت یک مثلث با اضلاعی به طول‌های ۱۳، ۱۴و ۱۵ را بیابید.</td><td>۱</td></tr>
<tr><td>جمع</td><td>موفق باشید</td><td>۲۰</td></tr>
</table>

| آزمون پایان سال هندسه ۲ | آزمون شمارهٔ (۴) | مدت زمان امتحان: ۱۳۵ دقیقه<br>پایهٔ یازدهم ریاضی |
|---|---|---|

۱

| ردیف | پاسخ | نمره |
|---|---|---|
| ۱ | الف) ناحیه‌ای از درون و روی دایره را، که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است، یک قطاع دایره می‌نامند.<br>ب) دو دایره را که تمام نقاط یکی درون دیگری باشد، متداخل می‌نامند.<br>ج) در هر تبدیل، نقطه‌ای را که تبدیل یافتهٔ آن برخود آن منطبق شود، نقطهٔ ثابت تبدیل می‌نامند. | ۱/۵ |
| ۲ | الف) دو ب) انقباض ج) نصف | ۰/۷۵ |
| ۳ | $\left.\begin{array}{l} A\hat{O}C = \overset{\frown}{AC} \\ A\hat{B}C = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}\end{array}\right\} \Rightarrow A\hat{O}C = ۲A\hat{B}C \Rightarrow ۳\alpha+۱۲ = ۲(\alpha+۱۶)$<br>$\Rightarrow \alpha = ۲۰^\circ \Rightarrow A\hat{O}C = ۷۲^\circ$<br>$\overset{\frown}{AC} = \frac{\pi(۵)}{۱۸۰}\times ۷۲ \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = ۲\pi$ | ۱ |
| ۴ | $D\hat{A}T = ۹۰^\circ \Rightarrow D\hat{A}T = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{DBA}$<br>زاویهٔ محاطی: $D\hat{A}B = \frac{\overset{\frown}{DB}}{۲}$<br>بنابراین:<br>زاویهٔ ظلی: $T\hat{A}B = D\hat{A}T - D\hat{A}B = \frac{\overset{\frown}{DBA}-\overset{\frown}{DB}}{۲} \Rightarrow T\hat{A}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$<br> | ۱ |
| ۵ | $\left.\begin{array}{l} AB \parallel CF \Rightarrow \overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{BC} \\ CD \parallel BE \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{DE}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{DE} = \alpha$<br>بنابراین:<br>$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{EF}+\overset{\frown}{FA} = ۳۶۰^\circ$<br>$\Rightarrow ۳\alpha+۶۰^\circ+۴۰^\circ+۱۱۰^\circ = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۵۰^\circ$<br>$F\hat{C}D = \frac{\overset{\frown}{FED}}{۲} = \frac{۱۱۰^\circ+۵۰^\circ}{۲} = ۸۰^\circ$<br> | ۰/۷۵ |
| ۶ | الف)<br>$(۴)^۲ = x\cdot(x+۶) \Rightarrow x^۲+۶x-۱۶ = ۰$<br>$\Rightarrow (x-۲)(x+۸) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۸ & \text{غ ق ق} \\ x = ۲ \end{cases}$<br>$\overset{\triangle}{OTM}: y\cdot(x+۳) = ۳\times۴$<br>$\Rightarrow y\cdot(۵) = ۱۲ \Rightarrow y = \frac{۱۲}{۵} = ۲/۴$<br>ب)<br>$۸\times(۸+z) = ۶\times(۶+۱۰) \Rightarrow ۸(۸+z) = ۹۶ \Rightarrow ۸+z = ۱۲ \Rightarrow z = ۴$<br> | ۱/۲۵ |

| آزمون پایان سال هندسه۲ | آزمون شمارهٔ (۴) | مدت زمان امتحان:۱۳۵ دقیقه |
|---|---|---|
| | | پایهٔ یازدهم ریاضی |

**۷**

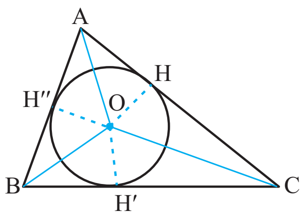
$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{d^۲-(R+R')^۲} = \sqrt{۱۰^۲-(۵+۳)^۲} = ۶$$

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{d^۲-(R-R')^۲} = \sqrt{۱۰^۲-(۵-۳)^۲} = ۴\sqrt{۶}$$

بارم: ۱

**۸**

از نقطهٔ $O$ (مرکز دایرهٔ محاطی) به رئوس $A$، $B$ و $C$ وصل می‌کنیم. اگر محل تماس دایره با اضلاع را $H$، $H'$ و $H''$ بنامیم، داریم:




$$S_{\overset{\triangle}{AOC}} = \frac{۱}{۲}\cdot OH\cdot AC$$

$$S_{\overset{\triangle}{BOC}} = \frac{۱}{۲}\cdot OH'\cdot BC$$

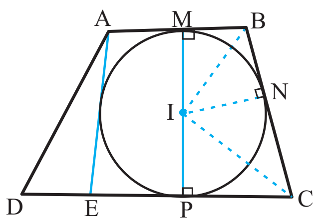
$$S_{\overset{\triangle}{AOB}} = \frac{۱}{۲}\cdot OH''\cdot AB$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = S_{\overset{\triangle}{AOC}} + S_{\overset{\triangle}{BOC}} + S_{\overset{\triangle}{AOB}} = r\cdot\left(\frac{AB+BC+CA}{۲}\right) = r\cdot\frac{۲p}{۲} \Rightarrow S = rp$$

بارم: ۱

**۹**

نیمسازهای دو زاویهٔ $B$ و $C$ همدیگر را در نقطه‌ای مانند $I$ قطع می‌کنند:




$$MI = NI = PI$$

حال اگر این دایره بر $AD$ هم مماس باشد، حکم ثابت شده است اما اگر این دایره بر $AD$ مماس نباشد، از $A$ بر آن مماس رسم می‌کنیم تا خط $CD$ را در نقطه‌ای مانند $E$ قطع کند:

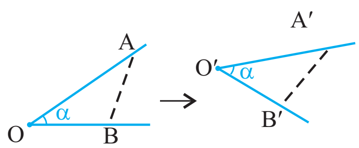
$$AB + CE = AE + BC$$

با توجه به فرض و رابطهٔ بالا داریم $AD = DE + AE$ که این رابطه درست نیست پس فرض خلف غلط و $E$ همان $D$ است.

بارم: ۱/۲۵

**۱۰**

تبدیل‌های طولپا، تبدیل‌هایی هستند که طول پاره‌خط را حفظ می‌کنند. حال اگر فرض کنیم $T$ تبدیلی طولپا (ایزومتری) باشد، برای زاویه $AOB$ داریم:




$$T(A) = A'$$
$$T(B) = B'$$
$$T(O) = O'$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AB = A'B' \\ AO = A'O' \\ BO = B'O' \end{cases} \xrightarrow{\text{ض‌ض‌ض}} \overset{\triangle}{AOB} \cong \overset{\triangle}{A'O'B'} \Rightarrow A\hat{O}B = A'\hat{O}'B'$$

بارم: ۱

**۱۱**

| | اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند | جهت شکل را حفظ می‌کند |
|---|---|---|
| بازتاب | درست | نادرست |
| انتقال | درست | درست |
| دوران | درست | درست |

بارم: ۱/۵

| آزمون پایان سال هندسه۲ | آزمون شمارهٔ (۴) | مدت زمان امتحان:۱۳۵ دقیقه<br>پایهٔ یازدهم ریاضی |
|---|---|---|

**۱۲** (۱/۲۵)

اگر بردار $\overrightarrow{AB}$ را به عنوان بردار انتقال در نظر بگیریم، با توجه به اینکه $AB$ و $DC$ موازی و مساوی‌اند، بنابراین داریم:

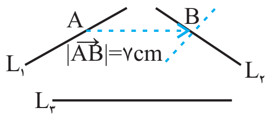
$$\left.\begin{matrix} A \to B \\ D \to C \end{matrix}\right\} \Rightarrow AD \to BC$$

از طرفی انتقال یک تبدیل طولپاست و شیب خط را حفظ می‌کند. پس:

$$AD = BC \;,\; AD \parallel BC$$

**۱۳** (۱/۲۵)

با استفاده از تبدیل انتقال، خط $L_1$ را با یک بردار به اندازهٔ ۷ سانتی‌متر و موازی $L_3$ انتقال می‌دهیم تا خط $L_2$ را در نقطهٔ $B$ قطع کند، سپس این نقطه را با همین بردار در خلاف جهت انتقال می‌دهیم تا خط $L_1$ را در نقطهٔ $A$ قطع کند. بنابراین با توجه به طولپا بودن تبدیل انتقال، پاره‌خط $AB$ جواب مسئله می‌باشد.




**۱۴** (۱)

به کمک قضیهٔ سینوس‌ها:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{AB}{\sin 120^\circ} = \frac{4}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{AB}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow AB = 2\sqrt{6}$$

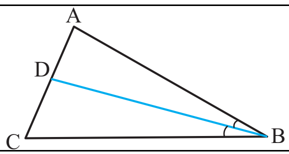
$$\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{4}{\sin 45^\circ} = 2R \Rightarrow \frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2R \Rightarrow R = 2\sqrt{2}$$

**۱۵** (۱)

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A \Rightarrow BC^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2 - 2\left(2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos 60^\circ$$

$$= 8 + 6 + 2 + 2\sqrt{12} - 2\sqrt{12} - 4 = 12 \Rightarrow BC = 2\sqrt{3}$$

**۱۶** (۱)

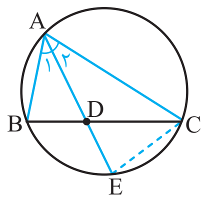



$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD} = \frac{7}{8} \Rightarrow \frac{AD+CD}{CD} = \frac{7+8}{7} \Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{15}{8}$$

$$\Rightarrow CD = \frac{8 \times 5}{15} = \frac{8}{3} \;,\; AD = AC - CD = 5 - \frac{8}{3} = \frac{7}{3}$$

**۱۷** (۱/۵)

نیمساز داخلی زاویهٔ $A$ یعنی $AD$ را امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطهٔ $E$ قطع کند.سپس $E$ را به $C$ وصل می‌کنیم.




$$\left.\begin{matrix} \hat{E} = \hat{B} = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2} \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \end{matrix}\right\} \to \overset{\triangle}{ABD} \sim \overset{\triangle}{AEC}$$

با توجه به تشابه این دو مثلث داریم:

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AE}{AB} = \frac{CE}{BD} \Rightarrow AB \cdot AC = AD \cdot AE = AD \cdot \left(AD + DE\right) = AD^2 + AD \cdot DE$$

از طرفی می‌دانیم؛ $AD \cdot DE = BD \cdot DC$ . بنابراین:

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$

**۱۸** (۱)

بنا بر رابطهٔ هرون برای محاسبه مساحت یک مثلث با اضلاع $c,b,a$ و محیط $2p$ داریم:

$$2p = 13 + 14 + 15 = 42 \Rightarrow p = 21$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow S = \sqrt{21 \times 6 \times 7 \times 8} = \sqrt{7^2 \times 3^2 \times 4^2} = 84$$