

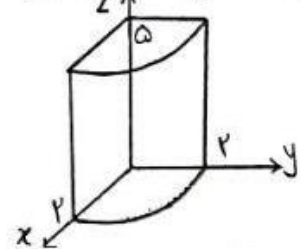
تمرین سری V

(۱) اگر $x = \rho a \nu \cos \varphi$ ، $y = \rho a \nu \sin \varphi$ ، $z = a(u^2 - v^2)$ باشد، h_u ، h_v ، h_φ را

یابید.
با در نظر گرفتن a به عنوان مقداری ثابت:

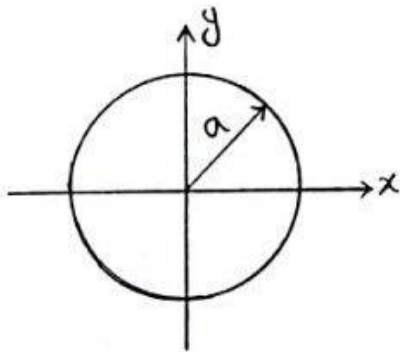
- (الف) عبارت مربوط به گرادیان تابع f را بنویسید.
(ب) عبارت مربوط به دیورژانس بردار A در این دستگاه بنویسید.
(ج) عبارت مربوط به کابل بردار A را در این دستگاه بنویسید.
(د) عبارت مربوط به لاپلاس تابع f در این دستگاه چیست؟

(۲) قضیه‌ی دیورژانس را با استفاده از یک ربع استوانه (شعاع ۲، ارتفاع ۵) برای تابع زیر محاسبه کنید:



$$\vec{v} = \rho(2 + \sin^2 \theta) \hat{\rho} + \rho \sin \theta \cos \theta \hat{\theta} + 3z^2 \hat{z}$$

(۳) قضیه‌ی استوکس را برای میان برداری \vec{A} و شکل زیر بررسی کنید.



$$\vec{A} = \frac{ky}{x^2 + y^2} \hat{i} - \frac{kx}{x^2 + y^2} \hat{j}$$

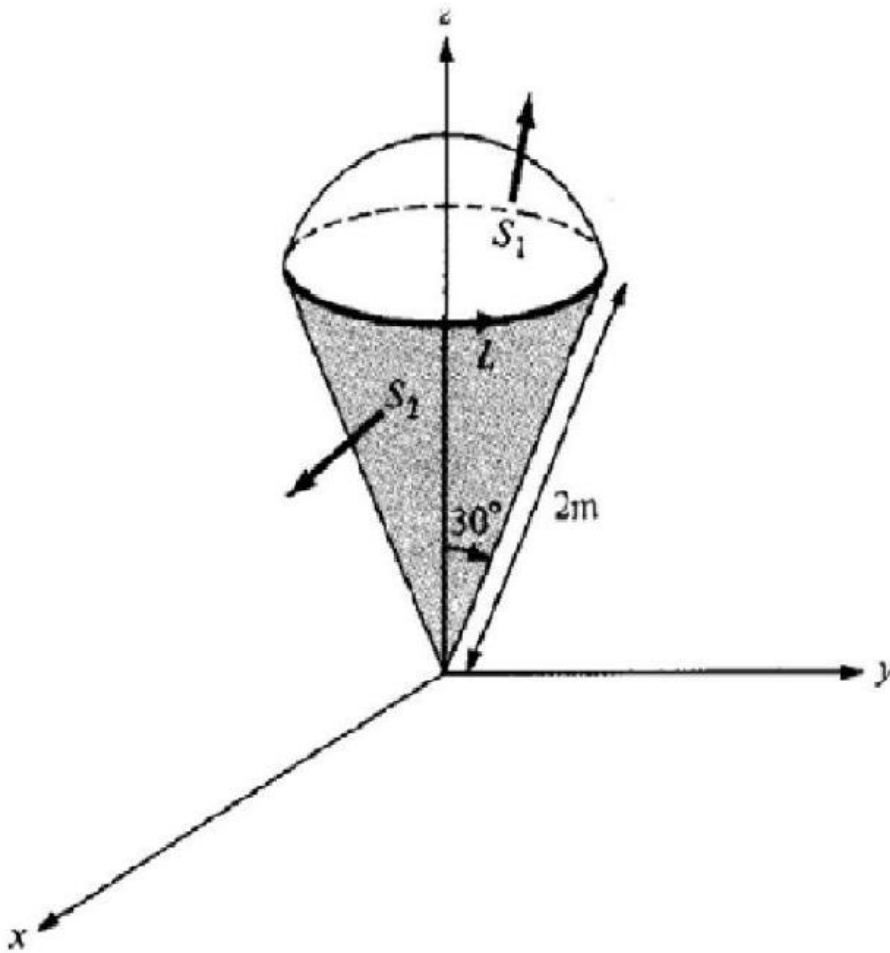
آیا قضیه استوکس برقرار است؟ چرا؟

(۴) الف) میان الکتریکی کره‌ی بارداره‌ی به شعاع R و چگالی بار $\rho = ar$ را در داخل و خارج کره به دست آورید.

ب) میان مغناطیسی سیم‌لوله‌ی بی‌نهایت با چگالی سیم n و جریان a و شعاع a را در داخل و خارج آن به دست آورید.

۵) میان برداری \vec{G} و شکل زیر را در نظر بگیرید و انتگرال های زیر را حساب کنید:

$$\vec{G} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} [(x-y)\hat{i} + (x+y)\hat{j}]$$



الف) $\int_L \vec{G} \cdot d\vec{l}$

ب) $\int_{S_1} \vec{\nabla} \times \vec{G} \cdot d\vec{a}$

ج) $\int_{S_2} \vec{\nabla} \times \vec{G} \cdot d\vec{a}$

د) $\int_{S_1} \vec{G} \cdot d\vec{a}$

ه) $\int_{S_2} \vec{G} \cdot d\vec{a}$

و) $\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{G} d\tau$

ز) از مقایسه جواب های قسمت الف تا و ه چه نتایج می تواند بگیرد؟

دکارتی: $d\vec{l} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$

$d\vec{a} = dydz\hat{i} + dx dz\hat{j} + dx dy\hat{k}$

$d\tau = dx dy dz$

استوانه ای: $d\vec{l} = \rho d\theta\hat{\theta} + \rho d\theta\hat{\rho} + dz\hat{z}$

$d\vec{a} = \rho dz d\theta\hat{\theta} + \rho dz d\theta\hat{\rho} + \rho d\rho d\theta\hat{z}$

$d\tau = \rho d\rho d\theta dz$

← برخی از روابطی که ممکن است نیاز باشند:

کروی: $d\vec{l} = dr\hat{r} + r d\theta\hat{\theta} + r \sin\theta d\varphi\hat{\varphi}$

$d\vec{a} = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi\hat{r} + r dr d\theta\hat{\varphi} + r \sin\theta d\rho d\varphi\hat{\theta}$

$d\tau = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$