

در عشق توام وفا قرین می‌باید
کار من و دل خاصه در حضرت تو

وصل تو گمان است و یقین می‌باید
بد نیست ولیکن به از این می‌باید
مولوی

آزمون تئوری پنجم (الگوریتم) - دسته‌ی نخست

سه‌شنبه ۲۱ آبان ۱۳۹۲ - چهار ساعت

در این آزمون نگران بزرگ‌شدن یا دقت اعداد نباشید و فرض کنید چهار عمل اصلی را می‌توان در زمان ثابت انجام داد.

پرسش نخست: تجزیه‌ی جای‌گشت

یک عمل ترانهش روی یک جای‌گشت به این صورت است که ابتدا دو تا از عناصر جای‌گشت را انتخاب می‌کنیم و سپس جای آن‌ها را با هم عوض می‌کنیم. به عنوان نمونه جای‌گشت ۱۲۳ را می‌توان با یک ترانهش به هر یک از جای‌گشت‌های ۲۱۳، ۱۳۲، یا ۳۲۱ تبدیل کرد. جای‌گشتی از اعداد طبیعی ۱ تا n به شما داده شده است. الگوریتمی خطی (از مرتبه‌ی زمانی $O(n)$) ارائه دهید که با استفاده از تعدادی ترانهش جای‌گشت همانی را به این جای‌گشت تبدیل کند. الگوریتم شما باید تعداد ترانهش‌های لازم و خود این ترانهش‌ها را بیابد. اگر چند جواب وجود دارد، پیدا کردن یکی از آن‌ها کفایت و لزومی ندارد که جواب شما کم‌ترین تعداد ترانهش را به کار ببرد.

پرسش دوم: زیرمجموعه‌های زوج و فرد

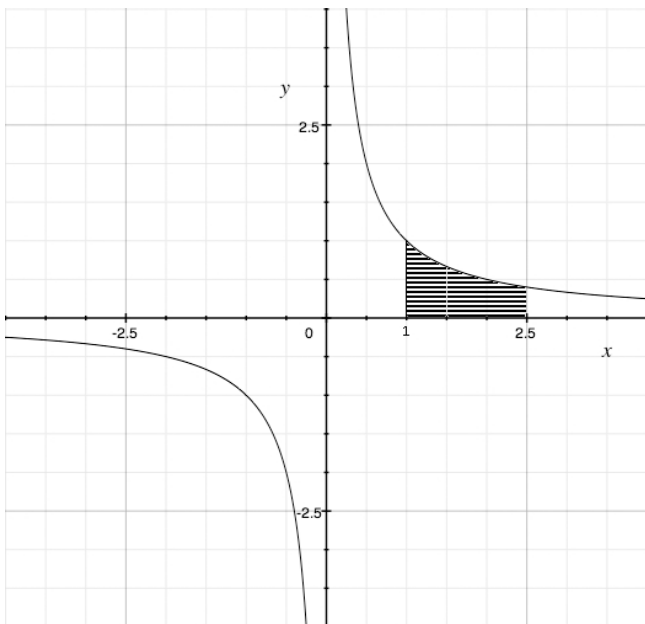
اگر X یک زیرمجموعه‌ی متناهی از اعداد طبیعی باشد، حاصل‌جمع عناصر X را عدد X می‌نامیم. اگر عدد X زوج باشد، می‌گوییم X نیز زوج است و در غیر این صورت می‌گوییم X فرد است. هم‌چنین تعریف می‌کنیم $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$.
آ) الگوریتمی از $O(\lg n)$ ارائه دهید که تعداد زیرمجموعه‌های فرد مجموعه‌ی \mathbb{N}_n را بیابد.
ب) الگوریتمی از $O(n)$ ارائه دهید که مجموع اعداد زیرمجموعه‌های فرد مجموعه‌ی \mathbb{N}_n را بیابد.
پ) برای قسمت قبل الگوریتمی از $O(\lg n)$ ارائه دهید.

پرسش سوم: لگاریتم

می‌دانیم که یک عدد حقیقی مثبت به نام e^* وجود دارد که به ازای هر عدد حقیقی بزرگ‌تر از ۱ مانند k داریم: $\log_e(k) = \int_{x=1}^k \frac{1}{x} dx$ یعنی لگاریتم k در مبنای e برابر است با مساحت زیر تابع $y = \frac{1}{x}$ که در آن $1 \leq x \leq k$. (شکل را ببینید).

در شکل مقابل نموداری از تابع $y = \frac{1}{x}$ را مشاهده می‌کنید. آنچه گفته شد به این معناست که لگاریتم عدد ۲٫۵ در مبنای e برابر است با مساحت قسمت هاشورخورده در این شکل. با استفاده از اطلاعاتی که به شما داده شد ثابت کنید اگر

$$T(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \in O(\lg n), \text{ آن‌گاه}$$



* $e \approx 2,7182818284590452353602874713526624977572470937$

پرسش چهارم: تجزیه

می‌خواهیم همه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی n را به حاصل ضرب اعداد اول تجزیه کنیم.

آ) الگوریتمی از $O(n \lg n \lg n)$ ارائه دهید که این کار را بکند.

ب) الگوریتمی از $O(n \lg n)$ ارائه دهید که این کار را بکند.

راهنمایی: از حکم پرسش قبل استفاده کنید.

پرسش پنجم: Θ و \circ

فرض کنید f و g دو تابع طبیعی باشند. توابع جدیدی به این شکل تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{f}(n) = 2^{f(n)} \quad \bullet$$

$$\tilde{g}(n) = 2^{g(n)} \quad \bullet$$

آ) آیا هر وقت $f \in O(g)$ ، آن‌گاه $\tilde{f} \in O(\tilde{g})$ ؟

ب) آیا هر وقت $f \in o(g)$ ، آن‌گاه $\tilde{f} \in O(\tilde{g})$ ؟

پ) آیا هر وقت $f \in o(g)$ ، آن‌گاه $\tilde{f} \in o(\tilde{g})$ ؟

سربلند و پیروز باشید

امیر کفشار گوه‌رشادی

زان نیست که یک دو دم قدامت دارند

در رفتن از این خرابه سبقت دارند

استاد خلیلی

پیران که چنین مقام و حرمت دارند

این حرمت از آن است که آن‌ها دو نفس