بسمه‌تعالی

دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل

آزمون میان‌ترم درس ریاضی عمومی ۱ رشته‌های فنی و مهندسی

تاریخ امتحان: ۱۳۹۵/۸/۲۳ گروه‌های ۸ و ۹ زمان : ۹۰ دقیقه

---

۱. مکان هندسی مجموعه نقاطی از صفحه را بیابید که در نامعادله‌ی

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z+۱}\right) \leq ۱$$

صدق می‌کند. (۱.۲۵ نمره)

---

۲. ثابت کنید تابع f باضابطه‌ی

$$f(x) = \begin{cases} -x^۳ & x \in \mathbb{Q} \\ x^۳ & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

در نقطه‌ی $x = ۰$ پیوسته است اما در بقیه‌ی نقاط $\mathbb{R}$ ناپیوسته است. (۱.۵ نمره)

---

۳. فرض کنید به‌ازای هر $a, b \in \mathbb{R}$ تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در رابطه‌ی زیر صدق کند:

$$f(a+b) = f(a) + f(b) + (a^۲ + b^۲)f(a)f(b)$$

نشان دهید که اگر $f'(۰)$ موجود باشد آن‌گاه f در هر نقطه از $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. (۱.۲۵ نمره)

---

۴. با استفاده از مفهوم دیفرانسیل مقدار تقریبی $\sin(۳۱^\circ)$ را محاسبه کنید. (۱.۲۵ نمره)

---

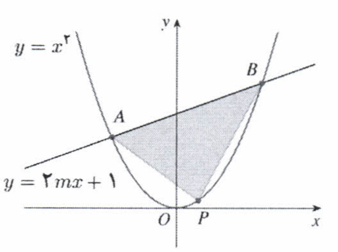
۵. فرض کنید تابع $f : [۰, ۱] \to [۱, ۳]$ بر بازه‌ی $[۰, ۱]$ پیوسته و بر بازه‌ی $(۰, ۱)$ مشتق‌پذیر باشد و $f(۰) = f(۱) = ۱$. ثابت کنید نقاط متمایز $x_۱, x_۲ \in (۰, ۱)$ وجود دارند به‌طوری‌که رابطه‌ی

$$\frac{f(x_۱)}{f'(x_۱)} - \frac{f(x_۲)}{f'(x_۲)} = ۱$$

برقرار است. (۱.۲۵ نمره)

---

۶. خط $y = ۲mx + ۱$ سهمی $y = x^۲$ را در نقاط A و B قطع می‌کند. نقطه‌ی P را روی کمان AOB طوری بیابید که مساحت مثلث PAB ماکزیمم باشد. (۱.۵ نمره)



موفق باشید.

استاد درس: دکتر بخشنده

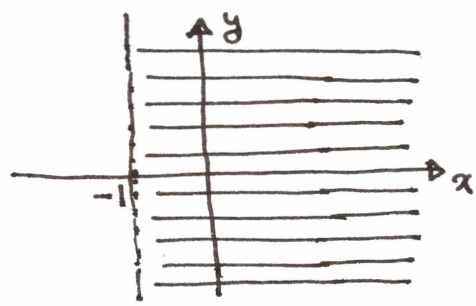
① با قرار دادن $z=x+yi$ داریم:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z}{z+1}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{x+yi}{x+1+yi}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{x+yi}{x+1+yi}\times\frac{x+1-yi}{x+1-yi}\right)$$

$$=\frac{x^2+y^2+x}{(x+1)^2+y^2}\leq 1 \quad\Rightarrow\quad x\geq -1$$

بنابراین مکان هندسی مجموعه نقاط خواسته شده در سؤال عبارتست از

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq -1\}$$



---

② ابتدا نشان می دهیم تابع f در $x=0$ پیوسته است به عبارت دیگر $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$.
به ازای هر $\varepsilon>0$ کافیست $\delta=\sqrt[3]{\varepsilon}$ اختیار کنیم در این صورت با فرض $|x|<\delta$ خواهیم داشت:

$$|f(x)-f(0)|=|\pm x^3-0|=|x|^3<(\sqrt[3]{\varepsilon})^3=\varepsilon$$

و در نتیجه حکم برقرار است.

حال نشان می دهیم تابع f در هر نقطه ی $0\neq a\in\mathbb{R}$ ناپیوسته است. چون $f(a)=\pm a^3$ می باشد لذا اگر $\varepsilon=\frac{|a|^3}{2}$ بگیریم آن گاه برای δ-ای که $|x-a|<\delta$ باشد بینهایت عدد

دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل
دانشکده علوم پایه

بسمه تعالی

گویا و بینهایت عدد اصم در بازه‌ی $(a-\delta, a+\delta)$ وجود دارد بنابراین با انتخاب x مناسب داریم:

$$|f(x)-f(a)| = |\pm x^3 \mp a^3| > \frac{|a|^3}{2}$$

و در نتیجه

$$\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$$

---

۳) با قرار دادن $a=b=0$ به سهولت $f(0)=0$ نتیجه می‌شود. حال فرض کنید $x\in\mathbb{R}$ دلخواه باشد آن‌گاه طبق تعریف مشتق داریم:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)+f(h)+(x^2+h^2)f(x)f(h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} \times \left[1+(x^2+h^2)f(x)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h-0} \times \lim_{h\to 0}\left[1+(x^2+h^2)f(x)\right]$$

$$= \left(1+x^2 f(x)\right) f'(0)$$

بنابراین تابع f در هر نقطه‌ی دیگر غیر از صفر نیز مشتق پذیر است.

---

۴) طبق تعریف دیفرانسیل تابع f در نقطه‌ی $x=a$ داریم:

$$f(a+\Delta x) \simeq f'(a)\,dx + f(a)$$

قرار می‌دهیم $f(x)=\sin x$ و $a=\pi/4$ و $\Delta x = dx = \frac{\pi}{180}$.

تلفن: ۰۱۱۱ - ۳۲۳۲۰۷۱-۴
دورنگار: ۰۱۱۱ - ۳۲۲۰۵۷۰
صندوق پستی: ۴۸۴
کد پستی: ۷۱۱۶۷ - ۴۷۱۴۸
www.nit.ac.ir
مازندران، بابل، خیابان شریعتی، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل
دانشکده علوم پایه

بنابراین خواهیم داشت :

$$\sin(31^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) \simeq \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \times \frac{\pi}{180} + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\simeq \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3/14}{180} + /5$$

$$= /85 \times /017 + /5 = /51445$$

---

۵) چون $1 < e < 3$ و تابع f بر $[0,1]$ پیوسته است طبق قضیه‌ی مقدار میانی $c \in (0,1)$ ای وجود دارد به طوری که $f(c) = e$. حال تابع $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $g(x) = \ln(f(x))$ را در نظر می‌گیریم که بر $[0,1]$ پیوسته و بر $(0,1)$ مشتق‌پذیر است .
اکنون قضیه‌ی مقدار میانگین (لاگرانژ) را برای تابع g در دو بازه‌ی مجزای $(0,c)$ و $(c,1)$ به‌کار می‌بریم :

$$\exists x_1 \in (0,c) \; ; \quad g'(x_1) = \frac{g(c) - g(0)}{c - 0} = \frac{\ln e - \ln 1}{c - 0} = \frac{1}{c}$$

$$\exists x_2 \in (c,1) \; ; \quad g'(x_2) = \frac{g(1) - g(c)}{1 - c} = \frac{\ln 1 - \ln e}{1 - c} = \frac{-1}{1-c}$$

از سوی دیگر چون $g'(x_1) = \dfrac{f'(x_1)}{f(x_1)}$ و $g'(x_2) = \dfrac{f'(x_2)}{f(x_2)}$ هستند بنابراین داریم :

$$\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = \frac{1}{g'(x_1)} - \frac{1}{g'(x_2)} = c - (c-1) = 1$$

که $x_1, x_2 \in (0,1)$ متمایز هستند .

تلفن : ۴-۰۱۱۱ - ۳۲۳۲۰۷۱
دورنگار : ۰۱۱۱ - ۳۲۲۰۵۷۰
صندوق پستی : ۴۸۴
کد پستی : ۷۱۱۶۷ - ۴۷۱۴۸
www.nit.ac.ir
مازندران ، بابل ، خیابان شریعتی ، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل

(۶) چون خط $y=2mx+1$ و سهمی $y=x^2$ در دو نقطه‌ی A و B یکدیگر را قطع می‌کنند بنابراین معادله‌ی درجه دوم $x^2-2mx-1=0$ دو ریشه‌ی مجزا دارد و بنابراین A و B دارای مختصات

$$\left(m+\sqrt{m^2+1}\,,\ 2m^2+m\sqrt{m^2+1}+1\right) \quad \text{و} \quad \left(m-\sqrt{m^2+1}\,,\ 2m^2-m\sqrt{m^2+1}+1\right)$$

می‌باشند. در نتیجه قاعده‌ی مثلث برابر است با:

$$\overline{AB} = 2\sqrt{(m^2+1)(m^2+4)}$$

ارتفاع وارد بر این قاعده از نقطه‌ی $P(a,a^2)$ برابر است با:

$$\overline{PH} = \frac{|a^2-2ma-1|}{\sqrt{m^2+1}}$$

در نتیجه مساحت مثلث PAB برابر است با:

$$S(a) = \frac{\overline{AB}\times\overline{PH}}{2} = \sqrt{m^2+4}\ |a^2-2ma-1|$$
$$= \sqrt{m^2+4}\ (1+2ma-a^2)$$

که $S(a)$ تابعی مشتق‌پذیر است و داریم:

نقطه‌ی بحرانی $S'(a) = 2\sqrt{m^2+4}\ (m-a) = 0 \Rightarrow m=a$

چون به ازای $a<m$ ، $S'(a)>0$ و به ازای $a>m$ ، $S'(a)<0$ است بنابراین $a=m$ نقطه‌ی ماکزیمم تابع $S(a)$ خواهد بود و مساحت مثلث PAB در نقطه‌ی $P(m,m^2)$ ماکزیمم است.

روح اله عشنده
۹۵/۸/۲۳