اتحادهای مهم جبری

در میان اتحادهای جبری، برخی از اتحادها بسیار مهم و کاربردی می باشند و در حل معادلات، محاسبات جبری، تجزیه عبارت جبری و... بسیار کاربرد دارند. از این رو دانستن و به کاربردن آنها از اهمیت خاصی برخوردار است. در این قسمت به بررسی این اتحادهای مهم می پردازیم.

اتحاد مربع مجموع دو جمله

$$\forall a, b \in R : (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

مثال:

$$(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2 \times (2x) \times 3 \ + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$$

اتحاد مربع تفاضل دو جمله

$$\forall a, b \in R : (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

مثال:

$$(4x-3y)^2 = (4x)^2 - 2(4x)(3y) + (3y)^2 = 16x^2 - 24xy + 9y^2$$

اتحاد مکعب مجموع دو جمله

$$\forall a, b \in R : (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

مثال:

$$(2a+3b)^3 = 8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$$

اتحاد بسط دو جمله ای نیوتن

به توان های دو و سه رسیدند. حال این اتحاد برای (a+b)،(a-b) در دو اتحاد قبل مشاهدی کردید که عبارت مجموع با تفاضل دو جمله چون n توانهای طبیعی هم قابل تعمیم است و به آن اتحاد بسط دو جمله ای نیوتن می گویند.

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n} b^n$$

$$(a-b)^n = a^n - \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 - \ldots + (-1)^n b^n$$

:مثال

$$(a+b)^4 = a^4 + \binom{4}{1} a^3b + \binom{4}{2} a^2b^2 + \binom{4}{3} ab^3 + \binom{4}{4} b^4$$

$$(a-b)^5 = a^5 - \binom{5}{1} a^4b + \binom{5}{2} a^3b^2 - \binom{5}{3} a^2b^3 + \binom{5}{4} ab^4 - \binom{5}{5} b^5$$

اتحاد مربع سه جمله

$$\forall a,b,c \in R : (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

:مثال

$$(2x-3y-xy)^2 = 4x^2 + 9y^2 + x^2y^2 - 12xy - 4x^2y + 6xy^2$$

تعمیم اتحاد مربع چند جمله

$$\forall a_i \in R : (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2$$
$$+(2a_1a_2 + 2a_1a_3 + 2a_1a_4 + \ldots + 2a_1a_n)$$
$$+(2a_2a_3 + 2a_2a_4 + \ldots + 2a_2a_n) + \ldots + 2a_{n-1}a_n$$

:مثال

$$(a+b+c+d+e)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2ae$$
$$+2bc + 2bd + 2be + 2cd + 2ce + 2de$$

اتحاد مزدوج

$$\forall a,b \in R : (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

مثال:

$$(2x+3y)(2x-3y) = 4x^2 - 9y^2$$

- .می گویند a+b را مزدوج عبارت اول یعنی a-b آنگاه عبارت a+b لازم به توضیح است اگر داشته باشیم

اتحاد جمله مشترک

$$\forall x,a,b \in R : (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

مثال:

$$(3x+2)(3x-5) = 9x^2 + (2-5)(3x) + (2)\times(-5) = 9x^2 - 9x - 10$$

تعمیم اتحاد جمله مشترک

$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4 + (a+b+c+d)x^3 + (ab+ac+ad+bc+bd+$$

$$+(abc+bcd+acd+abd)x + abcd$$

- .این روال به همین ترتیب برای حالات دیگر هم برقرار است

مثال:

$$(x+2)(x+3)(x-4) = x^3 + (2+3-4)x^2 + (6-8-12)x + (-24) = x^3 + x^2 - 1$$

$$(x-2)(x+3)(x-4)(x+5) = x^4 + (-2+3-4+5)x^3 + (-6+8-10-12+15$$

$$+(24-30-60+40)x + 120 = x^4 + 2x^3 - 25x^2 - 26x + 120$$

اتحاد مجموع مکعبات دو جمله(اتحاد چاق و لاغر)

$$\forall a,b \in R : a^3 + a^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

مثال:

$$8a^3 + b^3 = (2a+b)(4a^2 - 2ab + b^2)$$

تعمیم اتحاد مجموع مکعبات دو جمله(اتحاد چاق و لاغر)

$$\forall a,b \in R : a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + b^{n-1})$$

پس می توان نتیجه زیر را بیان کرد:

$$a^n + 1 = (a+1)(a^{n-1} - a^{n-2} + a^{n-3} - \ldots + 1$$

- لازم به توضیح است که این اتحاد فقط برای حالتی برقرار ست که توان n عدد طبیعی فرد باشد.

مثال:

$$32a^5 + 243b^5 = (2a+3b)(16a^4 - 24a^3b + 36a^2b^2 - 54ab^3 + 81b^4)$$

اتحاد تفاضل مکعبات دو جمله(اتحاد چاق و لاغر)

$$\forall a,b \in R : a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

مثال:

$$8a^3 - 125 = (2a-5)(4a^2 + 10a + 125)$$

تعمیم اتحاد تفاضل مکعبات دو جمله(اتحاد چاق و لاغر)

$$\forall a,b \in R : a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1})$$

پس می توان نتیجه زیر را بیان کرد:

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + ... + 1)$$

- برقرار است n لازم به توضیح است این این اتحاد برای هر عدد طبیعی.

مثال:

$$32a^5 - 1 = (2a-1)(16a^4 + 8a^3 + 4a^2 + 2a + 1)$$

اتحاد اویلر

$$\forall a,b,c \in R : (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) = a^3+b^3+c^3-3abc$$

- **برهان:**

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) = a^3+ab^2+ac^2-a^2b-abc-ca^2$$
$$+ba^2+b^3+bc^2-ab^2-b^2c-abc+ca^2+cb^2+c^3-abc-bc^2-c^2a$$
$$= a^3+b^3+c^3-3abc$$

- صورتی دیگر از اتحاد اویلر:

$$\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2] = a^3+b^3+c^3-3abc$$

- **برهان:**

$$\frac{1}{2}(a+b+c)[a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+a^2-2ac+c^2]$$
$$= \frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac)$$
$$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac) = a^3+b^3+c^3-3abc$$

- نتایج اتحاد اویلر:
  - اگر a+b+c=0 آنگاه $a^3+b^3+c^3=3abc$
  - اگر a=b=c آنگاه $a^3+b^3+c^3=3abc$

مثال:

$$(2x+y+1)(4x^2+y^2+1-2xy-2x-y)=8x^3+y^3-6xy+1$$

همچنین اگر $a=3+\sqrt{2}, b=3-\sqrt{2}, c=-6$ باشد آنگاه داریم:

$$a^3+b^3+c^3=3abc=3\times(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})(-6)=3\times(9-2)(-6)=-126$$

اتحاد لاگرانژ

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$$

مثال:

$$(4a^2+b^2)(x^2+9y^2)=(2ax+3by)^2+(6ay-bx)^2$$