به نام خدا
روزهای پنجم تا هشتم
نارودایی، اکسترمال، استقرا و لانه‌کبوتری، سوالات اضافی
http://YazdCS.blog.ir

۱ ناوردایی

۱.۱

یک دایره را به ۶ بخش تقسیم کرده‌ایم و در هر قطاع یک مهره قرار داده‌ایم. در هر مرحله می‌توان دو مهره را انتخاب و هر یک را به قطاعی مجاور منتقل کرد. آیا ممکن است به حالتی برسیم که همه‌ی مهره‌ها در یک قطاع جمع شوند؟

۲.۱

ثابت کنید نمی‌توان جدول ۱۰×۱۰ را با موزاییک‌های به شکل ۱×۴ پوشاند.

۳.۱

در یک شهر تعدادی چوپان داریم که در مجموع ۱۲۸ گوسفند دارند. در هر روز اگر چوپانی بیشتر از نصف گوسفندان را در اختیار داشت بقیه‌ی چوپان‌ها هر یک به تعداد گوسفندان خودشان از او می‌دزدند. ثابت کنید حداکثر ۷ روز در این روستا دزدی اتفاق می‌افتد.

۴.۱

n نقطه‌ی آبی و n نقطه‌ی قرمز در صفحه وجود دارد طوری که هیچ ۳ نقطه‌ای رو یک خط نیستند. آیا می‌توان هر نقطه‌ی آبی را به یک نقطه‌ی قرمز وصل کرد طوری که این پاره‌خط‌ها متقاطع نباشند؟

۵.۱

$۲n$ نفر در یک مهمانی دعوت شده‌اند که هر کدام حداکثر $n - ۱$ دشمن دارند. ثابت کنید این افراد می‌توانند دور یک میز گرد بنشینند طوری که هیچ کس کنار دشمنش ننشسته باشد.

۶.۱

روی ۷ راس یک مکعب عدد صفر و روی راس دیگر عدد یک نوشته شده‌است. هر بار می‌توانیم به دو سر یک یال یک واحد اضافه کنیم. آیا ممکن است اعداد طوری باشند که ب.م.م. آن‌ها بزرگتر از ۱ شود؟

۷.۱

سه راس یک مربع داده شده‌است. هر بار می‌توانیم قرینه‌ی یک نقطه نسبت به نقطه‌ی دیگری از مجموعه را به مجموعه اضافه کنیم. آیا با تکرار این عمل ممکن است که راس چهارم مربع در مجموعه قرار گیرد؟

۸.۱

۲۰۰۴ نفر دور یک دایره نشسته‌اند. در ابتدا یکی از افراد ۲۰۰۴ مهره دارد و در مرحله یکی از افرادی که بیش از یک مهره دارد یک مهره به فرد سمت چپ و یک مهره به فرد سمت راست خود می‌دهد. ثابت کنید همیشه فردی وجود دارد که هیچ مهره‌ای ندارد.

۹.۱ تمرین‌های ناوردایی

۱.۹.۱

۲۰۰۴ لامپ دور یک دایره قرار دارد. در ابتدا یکی از لامپ‌ها خاموش و بقیه روشن است. در هر مرحله یک لامپ روشن انتخاب و وضعیت این لامپ و دو لامپ کجاورش را تغییر می‌دهیم. آیا ممکن است به وضعیتی برسیم که همه‌ی لامپ‌ها خاموش باشند؟

۲.۹.۱

ثابت کنید صفحه‌ی ۱۰ $\times$ ۱۰ را نمی‌توان با ۲۵ موزاییک به شکل L پوشاند.

۲ اکسترمال

۱.۲

ثابت کنید در هر تورنمت n راسی حداقل یک راس وجود دارد که به بقیه‌ی رئوس با مسیر به طول حداکثر ۲ می‌رسد.

۲.۲

یک گراف دلخواه داریم. ثابت کنید می‌توان رئوس گراف را به دو دسته طوری تقسیم کرد که بیش از نیمی از یال‌ها بین دو دسته قرار بگیرند.

۳.۲

مسئله‌ی ۳ بخش ناوردایی.

۴.۲

سه مدرسه داریم. در هر یک از سه مدرسه مفروض n دانش‌آموز وجود دارد. هر دانش‌آموز جمعا $n + ۱$ دوست از دو مدرسه دیگر دارد. ثابت کنید می‌توانیم یک نفر از هر مدرسه انتخاب کنیم به طوری که این سه نفر دو به دو دوست باشند.

۵.۲

$۲n + ۱$ نفر در یک صفحه طوری قرار گرفته‌اند که فاصله‌ی دو به دوی آن‌ها از هم متفاوت است. سپس هرکس به سمت کسی که در کمترین فاصله از او ایستاده‌است شلیک می‌کند. ثابت کنید:

الف) حداقل یک نفر صدمه‌ای نمی‌بیند.

ب) به هیچ شخصی بیشتر از ۵ بار شلیک نمی‌شود.

ج) مسیر گلوله‌ها یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

د) پاره‌خط‌های تشکیل شده از مسیر گلوله‌ها تشکیل یک چند ضلعی بسته نمی‌دهند.

۶.۲

n ماشین روی یک مسیر دایره‌ای قرار گرفته‌اند. این n ماشین جمعا سوخت لازم برای پیمودن یک دور کامل در این مسیر را دارا هستند. ثابت کنید ماشینی وجود دارد که می‌تواند کل مسیر را با استفاده از سوختی که از ماشین‌های مسیرش برمی‌دارد طی‌کند.

۷.۲

۵۰ پاره‌خط روی یک خط داده‌شده. ثابت کنید یا ۸ پاره‌خط وجود دارد که نقطه‌ی مشترکی دارند. یا ۸ پاره‌خط وجود دارد که دو به دو مجزا هستند.

۸.۲

سیلوستر: مجموعه‌ای از نقاط داریم که هر خط گذرنده از دو نقطه از نقطه‌ی سومی هم می‌گذرد. ثابت کنید تمام نقاط روی یک خط واقع می‌باشند.

۹.۲ تمرین‌های اکسترمال

۱.۹.۲

نوشتن راه حل سوال ۴ بخش ناوردایی با استفاده از اکسترمال.

۳ استقرا و لانه‌کبوتری

۱.۳

n تیم در یک تورنمت شرکت کرده‌اند. ثابت کنید اگر هیچ دو تیمی مساوی نکرده باشند دنباله‌ای مثل $t_۱, t_۲, ..., t_n$ از تیم‌ها وجود دارد به طوری که هر تیم از تیم بعدی خود برده باشد.

۲.۳

A و B دو مجموعه‌ی متناهی جدا از هم هستند. به طوری که به ازای هر $x \in A \cup B$ یا $x + ۱ \in A$ است یا $x - ۲ \in B$ است. ثابت کنید تعداد اعضای A دو برابر تعداد اعضای B است.

۳.۳

مدرسه‌ای n دانش‌اموز با k کلاس دارد. به ازای هر دو کلاس فردی از A و فردی از B وجود دارند که باهم دوستند. ثابت کنید n دانش‌آموز را می‌توان به $n - k + ۱$ دسته طوری تقسیم کرد که افراد متعلق به یک دسته باهم دوست باشند.

۴.۳

به ازای چه n هایی می‌توان گراف کامل n راسی را طوری جهت‌دهی کرد که همه‌ی راس‌ها شاه باشند؟

۵.۳

محور x مختصات را در نظر بگیرید. در ابتدا دو مهره در خانه‌های ۱ و ۲ قرار دارند. در هر مرحله می‌توانیم یک مهره که در خانه‌ی i است را i خانه خالی جلو ببریم. ثابت کنید به ازای هر n دلخواه می‌توان یکی از مهره‌ها را به خانه‌ی nـ‌ام برد.

۶.۳

در هر خانه از یک مستطیل $n \times (n + ۲)$ یک سرباز وجود دارد. در یک لحظه هر سرباز می‌تواند ۱ خانه مجاور جابه‌جا شود یا حرکتی نکند. می‌خواهیم در یک لحظه طوری سربازها حرکت کنند که تبدیل به یک مستطیل با n سطر و $n + ۲$ ستون شوند. چه کار کنیم؟

۷.۳

۶ نفر با یکدیگر دست داده‌اند. ثابت کنید یا ۳ نفر هستند که همه با هم دست داده‌اند یا ۳ نفر هستند که هیچ یک با هم دست نداده‌اند.

۸.۳

صفحه‌ی شطرنجی ۳×۷ را با دو رنگ سیاه و سفید رنگ می‌کنیم. ثابت کنید همیشه می‌توان زیر مستطیلی از این صفحه پیدا کرد که خانه‌های ۴ گوشه‌ی آن همرنگ باشد.

۹.۳

$n+۱$ عدد از بین ۱ تا $۲n$ انتخاب شده‌اند. ثابت کنید دو تا از این اعداد نسبت به هم اول هستند.

۱۰.۳

قضیه‌ی اردوش ژگرس: یک دنباله‌ی $n^۲ + ۱$ تایی از اعداد متمایز داریم. ثابت کنید یا یک زیردنباله‌ی اکیدا صعودی به طول $n + ۱$ دارد یا یک زیردنباله‌ی اکیدا نزولی به طول $n + ۱$ دارد. (هر دنباله‌ی حاصل از حذف تعدادی از عناصر دنباله‌ی اولیه، زیردنباله‌ی دنباله‌ی اولیه است.)

۱۱.۳ تمرین‌های استقرا و لانه‌کبوتری

۱.۱۱.۳

همه‌ی اعداد طبیعی‌ایی مثل n را بیابید که مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ..., n\}$ را بتوان به سه زیرمجموعه مانند A, B, C طوری افراز کرد که مجموع این سه افراز باهم برابر باشند.

۴ سوالات اضافی

۱.۴

اگر n مربع کامل باشد، ثابت کنید می‌توان n عدد از بین هر $2n - 1$ عدد صحیح انتخاب کرد که حاصل جمع آن‌ها بر n بخش‌پذیر باشد.

۲.۴

اعداد حقیقی $x_1, x_2, ..., x_n$ و $y_1, y_2, ..., y_m$ داده شده‌است. ماتریس $m \times n$ ه A اینطور ساخته می‌شود که $a_{i,j} = 1$ است اگر $x_i + y_j \geq 0$ باشد و در غیر این صورت $a_{i,j} = 0$ است. ماتریس ۰ و ۱، B که هم‌اندازه‌ی A است این طور است که مجموع هر سطر B برابر سطر متناظر آن در A و مجموع هر ستون B برابر ستون متناظر آن در A است. ثابت کنید $A = B$ است.

۳.۴

یک جدول 6×6 را با دومینو کاشی کرده‌ایم. ثابت کنید حتما خطی صافی وجود دارد که جدول را دو قسمت می‌کند و از وسط هیچ کاشی‌ای نمی‌گذرد.

۴.۴

یک دنباله از اعداد داریم که مجموع آن‌ها 2^n است. در هر مرحله می‌توان دو عدد انتخاب کرد که $b \leq a$ و به جای آن‌ها $2b$ و $a - b$ گذاشت. آیا ممکن است به 2^n رسید؟

۵.۴

آیا با داشتن ۴ نقطه‌ی اولیه‌ی $(0,1), (1,0), (1,1), (0,0)$ و عمل قرینه کردن به چهار نقطه‌ی $(-1,2), (0,3), (1,1), (0,0)$ رسید؟

۶.۴

تعداد رشته‌های به طول n با حروف، a, b, c, d که تعداد a و b های برابر دارند چندتاست؟

۷.۴

در یک جدول مستطیلی در خانه عددی طبیعی نوشته شده‌است. در هر حرکت می‌توان تمام اعداد یک سطر را ۲ برابر کرد یا از تمام اعداد یک ستون یک واحد کم کرد. ثابت کنید می‌توان به جدولی رسید که تمام اعداد آن صفر باشند.

۸.۴

۸ رخ که یکدیگر را تهدید نمی‌کنند در صفحه‌ی شطرنج قرار دارند. ثابت کنید تعداد رخ‌های روی خانه‌های سیاه عددی زوج است.

۹.۴

یک مکعب روی یک صفحه قرار دارد. هر بار مکعب را حول یکی از یال‌هایش می‌غلطانیم. پس از مدتی مکعب به سر جای اولیه‌ش برگشته به طوری که وجه بالایی آن هم تغییر نکرده‌است. آیا ممکن است که این وجه به اندازه‌ی ۹۰ درجه چرخیده باشد؟

۱۰.۴

در هر خانه از یک جدول ۶ $\times$ ۶ یک عدد صحیح نوشته شده‌است. در هر مرحله می‌توانیم یک مربع بزرگتر از ۱ انتخاب کنیم و همه خانه‌های آن را ۱ واحد اضافه کنیم. آیا همیشه ممکن است همه اعداد بر ۳ بخش‌پذیر شوند؟

۱۱.۴

در سه ظرف به ترتیب a, b, c (که همه اعداد طبیعی هستند) لیتر آب ریخته شده‌است. در هر مرحله می‌توان ۲ ظرف با x و y لیتر آب انتخاب کرد به طوری که $y \leq x$ و از ظرف x مقدار y لیتر به ظرف y لیتری منتقل کرد. ثابت کنید با تکرار این عمل می‌توان حداقل یکی از ظرف‌ها را در متناهی مرحله خالی از آب کرد.

۱۲.۴

شطرنج‌بازی ۱۱ هفته تمرین می‌کند. هر روز حتما یک بازی می‌کند و در هیچ هفته‌ای بیشتر از ۱۲ بازی نمی‌کند. ثابت کنید چند روز متوالی هست که شطرنج باز طی آن‌ها دقیقا ۲۰ دست بازی کرده‌است.

۱۳.۴

n نقطه که همه باهم روی یک خط قرار نگرفته‌اند در صفحه داده‌شده است. ثابت کنید دایره‌ای وجود دارد که از سه تا از نقاط می‌گذر و هیچ نقطه‌ی دیگری در داخل آن قرار نگرفته است.

۱۴.۴

تعدادی مهره در صفحه‌ی $n \times n$ وجود دارد به طوری که اگر خانه‌ی (i, j) خالی باشد در این صورت حداقل n مهره در مجموع سطر iـ‌ام و ستون jـ‌ام قرار دارد. ثابت کنید که در این صفحه حداقل $\frac{n^۲}{۲}$ مهره وجود دارد.

۱۵.۴

یک جدول ۲۰۰ $\times$ ۲۰۰ داریم که هر خانه آن سفید یا سیاه است. اختلاف تعداد خانه‌های سفید و سیاه ۴۰۴ است. ثابت کنید حداقل یک مربع ۲ $\times$ ۲ وجود دارد که تعداد خانه‌های سفید آن فرد است.

۱۶.۴

کف یک اتاق با کاشی‌های ۲ $\times$ ۲ و ۱ $\times$ ۴ پوشیده شده‌است. بر اثر اتفاق یکی از این کاشی‌ها می‌شکند. می‌دانیم یک کاشی سالم از نوع دیگر داریم. نشان‌دهید با این کاشی و کاشی‌های سالم باقی‌مانده نمی‌توان اتاق را به روشی دیگر پوشاند.

۱۷.۴

یک صفحه‌ی $n \times$ ۴ و یک اسب در گوشه‌ی پایین سمت چپ آن داریم. آیا این اسب می‌تواند از همه خانه‌ها دقیقا یک‌بار عبور کند و به خانه‌ی اول بازگردد. (حواستان باشد که اسب فقط می‌تواند حرکات L شکل انجام دهد.)

۱۸.۴

n نقطه که هیچ ۳ تایی روی یک خط راست نیستند داده شده‌است. ثابت کنید خطی وجود دارد که r نقطه از این n نقطه یک طرف آن و $n - r$ تای دیگر طرف دیگر آن قرار گیرند.

۱۹.۴

ساختمان روشنایی تعداد زیادی چراغ و کلید دارد. هر چراغ دست کم به یک کلید وصل است. اگر در ابتدا همه‌ی چراغ‌ها خاموش باشند ثابت کنید حتما می‌توان بیش از نیمی از چراغ‌ها را روشن کرد. (دقت کنید ممکن است یک کلید به بیشتر از یک لامپ وصل باشد.)