فهرست

بخش ۲ هم‌نهشتی دو مثلث

پلکان آموزش

۱ ـ دو شکل هم‌نهشت و حالت‌های هم‌نهشتی دو مثلث

هرگاه دو شکل به گونه‌ای باشند که دقیقاً بر هم منطبق شوند و یک‌دیگر را بپوشانند، آن دو شکل را هم‌نهشت گویند.

اگر دو شکل، هم‌نهشت باشند، ضلع‌های و زاویه‌های نظیر در آن دو شکل، با هم برابرند. چنان‌چه دو مثلث ABC و $A'B'C'$ هم‌نهشت باشند، آن را با نماد $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ و یا گاهی به‌اختصار با نماد $ABC \cong A'B'C'$ نمایش می‌دهند.

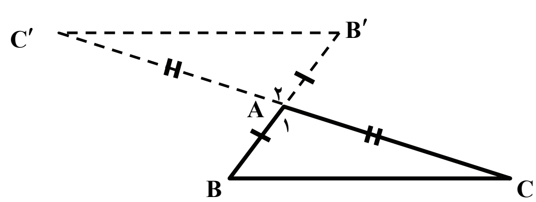
قضیه: دو مثلث در سه حالت زیر، با یک‌دیگر هم‌نهشت هستند:

الف) هرگاه دو ضلع و زاویه‌ی بین این دو ضلع در دو مثلث، برابر باشند. (ض‌زض)

ب) هرگاه دو زاویه و ضلع بین این دو زاویه در دو مثلث، برابر باشند. (زض‌ز)

پ) هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر برابر باشند. (ض‌ض‌ض)

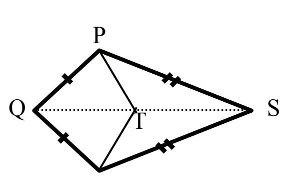
مثال ۱۲ دو ضلع AB و AC از مثلث ABC را از طرف رأس A و به‌اندازه‌ی خودشان امتداد می‌دهیم تا به‌ترتیب نقطه‌های B' و C' به‌دست آیند. ثابت کنید $BC = B'C'$.



$$\left.\begin{array}{l} AB = AB' \\ \angle A_1 = \angle A_2 \\ AC = AC' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض‌زض}} \Delta ABC \cong \Delta AB'C' \Rightarrow BC = B'C'$$

نکته در دو مثلث هم‌نهشت، علاوه بر ضلع‌ها و زاویه‌ها، تمام اجزای متناظر، با هم برابرند؛ مانند میانه‌های نظیر، ارتفاع‌های نظیر، نیم‌سازهای نظیر و ...

مثال ۱۳ در چهارضلعی PQRS، $PQ = RQ$ و $PS = RS$. اگر نقطه‌ی T وسط قطر QS باشد، ثابت کنید $PT = RT$.



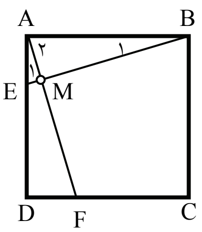
$$\left.\begin{array}{l} PQ = RQ \\ PS = RS \\ QS = QS \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض‌ض‌ض}} \Delta PSQ \cong \Delta RSQ$$

چون در دو مثلث PSQ و RSQ پاره‌خط‌های PT و RT میانه‌های نظیر هم هستند، از هم‌نهشتی این دو مثلث، برابری PT و RT نتیجه می‌شود.

برای اثبات هم‌نهشتی دو مثلث قائم‌الزاویه، علاوه بر سه حالت کلی اثبات هم‌نهشتی، از یکی از دو حالت زیر نیز می‌توان استفاده کرد:

الف) هرگاه وتر و یک زاویه‌ی حاده در دو مثلث قائم‌الزاویه با هم برابر باشند، آن دو مثلث، هم‌نهشت هستند (وتر و یک زاویه‌ی حاده).

ب) هرگاه وتر و یک ضلع دیگر در دو مثلث قائم‌الزاویه با هم برابر باشند، آن دو مثلث، هم‌نهشت هستند (وتر و یک ضلع).

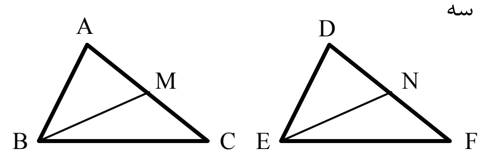


مثال ۱۱۲ در شکل روبه‌رو، چهارضلعی ABCD مربع و همچنین $AE = DF$ است. اندازه‌ی زاویه‌ی $\angle AMB$ چند درجه است؟

با توجه به شکل روبه‌رو، از هم‌نهشتی دو مثلث ABE و ADF نتیجه می‌شود $\angle A_1 = \angle B_1$ و چون $\angle A_1 + \angle A_2 = 90^\circ$، نتیجه می‌شود $\angle B_1 + \angle A_2 = 90^\circ$، و بنابراین در مثلث AMB داریم:

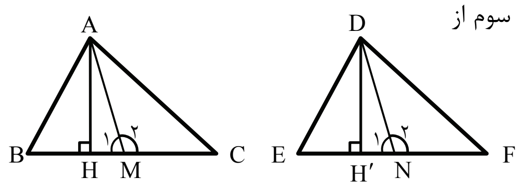
$$\underbrace{A_1 + B_1}_{=90^\circ} + M = 180^\circ \Rightarrow \angle M = 90^\circ$$

اگر چه حالت‌های اصلی هم‌نهشتی دو مثلث، همان سه حالتی است که در ابتدا بیان شد، اما می‌توان حالت‌های دیگری برای هم‌نهشتی دو مثلث مطرح کرد که البته این‌ها مستقل از آن سه حالت اصلی هم‌نهشتی نیستند، بلکه نتایجی از آن‌ها می‌باشند.



۱ ـ اگر در دو مثلث، دو ضلع و میانه‌ی وارد بر یکی از آن دو ضلع از یک مثلث، با دو ضلع و میانه‌ی وارد بر یکی از آن دو ضلع از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث هم‌نهشت هستند.

۲ ـ هرگاه دو ضلع و میانه‌ی وارد بر ضلع سوم از یک مثلث با دو ضلع و میانه‌ی وارد بر ضلع سوم از مثلثی دیگر، برابر باشند، آن دو مثلث هم‌نهشت هستند.

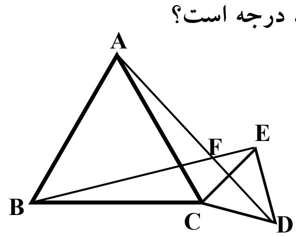


۳ ـ هرگاه یک ضلع و میانه و ارتفاع وارد بر آن ضلع از یک مثلث، با یک ضلع و میانه و ارتفاع وارد بر آن ضلع از مثلثی دیگر، برابر باشند، آن دو مثلث هم‌نهشت هستند.

۱ ـ در مثلث ABC اندازه‌ی ضلع AB، نصف ضلع BC است. میانه‌ی AM را از طرف A به‌اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم تا به نقطه‌ی D برسیم. نسبت $\frac{BD}{AC}$ چه‌قدر است؟ *(آزمون پیش‌دانشگاهی ـ تجربی ـ ۷۶)*

۱) مساوی با ۱ ۲) بزرگ‌تر از ۱ ۳) کوچک‌تر از ۱ ۴) نمی‌توان اظهار نظر کرد.

۲ ـ در شکل روبه‌رو، مثلث‌های ABC و ECD متساوی‌الاضلاع‌ها هستند. اندازه‌ی زاویه‌ی $\angle AFB$ چند درجه است؟



۱) 30°

۲) 45°

۳) 60°

۴) 90°

۲ ـ مثلث متساوی‌الساقین

مثلثی که دو ضلع آن برابر باشند، مثلث متساوی‌الساقین نامیده می‌شود. نقطه‌ی مشترک این دو ضلعِ برابر را رأس، دو ضلع برابر را ساق‌ها و ضلع سوم را قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقین گویند.

چند نکته در مثلث متساوی‌الساقین:

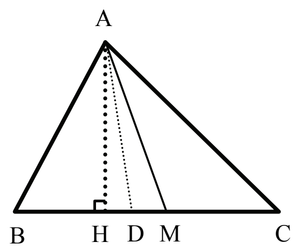
۱ ـ زاویه‌های مجاور به قاعده، با هم برابرند.

۲ ـ ارتفاع، نیمساز و میانه‌ای که از رأس مثلث متساوی‌الساقین رسم می‌شود، بر هم منطبق‌اند.

۳ ـ عمودمنصف قاعده، از رأس می‌گذرد.

۴ ـ نیم‌ساز بیرونی نظیر رأس، موازی قاعده‌ی مثلث است.
۵ ـ ارتفاع‌های وارد بر دو ساق، با هم برابرند.
۶ ـ میانه‌های وارد بر دو ساق، با هم برابرند.
۷ ـ نیم‌سازهای نظیر دو ساق، با هم برابرند.

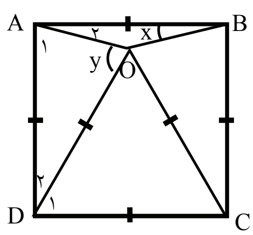
تذکر ۱: باید دقت کرد که هر یک از ویژگی‌های فوق، به‌صورت دو شرطی هستند؛ یعنی مثلثی که متساوی‌الساقین است، دارای ویژگی‌های ۱ تا ۷ است و مثلثی که یکی از ویژگی‌های ۱ تا ۷ را داشته باشد، متساوی‌الساقین است؛ به‌عنوان مثال، اگر در مثلثی میانه و ارتفاع نظیر یکی از رأس‌ها بر هم منطبق باشند، نتیجه می‌گیریم آن مثلث، در آن رأس متساوی‌الساقین است.



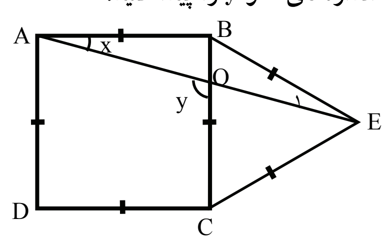
تذکر ۲: به‌طور کلی نیم‌ساز نظیر هر رأس مثلث بین میانه و ارتفاع آن قرار می‌گیرد و بین اندازه‌های آن‌ها رابطه روبه‌رو برقرار است: میانه ≤ نیم‌ساز ≤ ارتفاع

علامت تساوی تنها در رأس مثلث متساوی‌الساقین برقرار است و در این صورت این سه پاره‌خط بر هم منطبق‌اند.

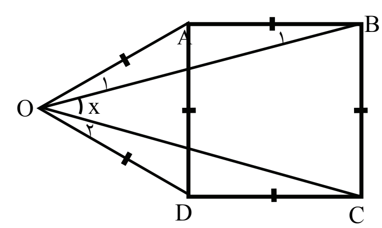
مثال ۱۵ در هر یک از شکل‌های زیر، ABCD مربع است؛ اندازه‌های x و y را پیدا کنید:



«الف»

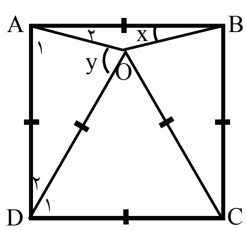


«ب»



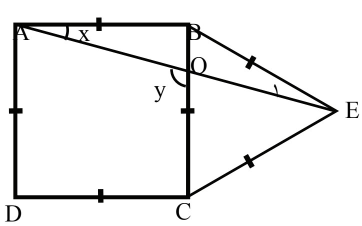
«پ»

الف)



متساوی‌الاضلاع ODC $\Rightarrow \angle D_{۱} = ۶۰^\circ \Rightarrow \angle D_{۲} = ۳۰^\circ \xrightarrow[\text{متساوی‌الساقین}]{\text{مثلث ODA}} y = \angle A_{۱} = \frac{۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ}{۲} = ۷۵^\circ$

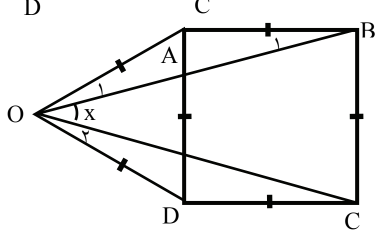
به‌سادگی معلوم می‌شود دو مثلث AOD و BOC هم‌نهشت‌اند، پس $AO = OB$ و در نتیجه $x = \angle A_{۲}$.
از طرفی: $\angle A_{۱} = ۷۵^\circ \Rightarrow \angle A_{۲} = ۱۵^\circ \Rightarrow x = ۱۵^\circ$



ب) در مثلث ABE داریم $\angle B = ۹۰^\circ + ۶۰^\circ = ۱۵۰^\circ$.

$AB = BE \Rightarrow x = \angle E_{۱} = \frac{۱۸۰^\circ - ۱۵۰^\circ}{۲} = ۱۵^\circ$

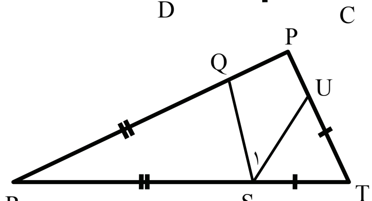
زاویه‌ی خارجی مثلث AOB $y \Rightarrow y = ۹۰^\circ + x = ۹۰^\circ + ۱۵^\circ = ۱۰۵^\circ$



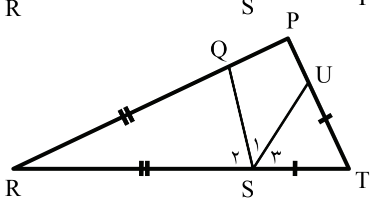
پ) در مثلث ABO اندازه‌ی زاویه‌ی A برابر $۹۰^\circ + ۶۰^\circ = ۱۵۰^\circ$ است و $OA = AB$، پس $\angle O_{۱} = \angle B_{۱} = ۱۵^\circ$ و به همین دلیل $\angle O_{۲} = ۱۵^\circ$، در نتیجه داریم:

$x = ۶۰^\circ - \angle O_{۱} - \angle O_{۲} = ۶۰^\circ - ۱۵^\circ - ۱۵^\circ = ۳۰^\circ$

مثال ۱۶ با توجه به شکل روبه‌رو، ثابت کنید: $\angle S_{۱} = ۹۰^\circ - \frac{۱}{۲}\angle P$



چون مثلث QRS در رأس R متساوی‌الساقین است، پس $\angle S_{۲} = \frac{۱۸۰^\circ - \angle R}{۲}$ و با استدلالی مشابه، $\angle S_{۳} = \frac{۱۸۰^\circ - \angle T}{۲}$، در نتیجه داریم:

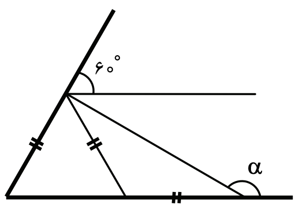


$$\angle S_{۱} + \angle S_{۲} + \angle S_{۳} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \angle S_{۱} = ۱۸۰^\circ - (\angle S_{۲} + \angle S_{۳})$$
$$= ۱۸۰^\circ - (\frac{۱۸۰^\circ - \angle R}{۲} + \frac{۱۸۰^\circ - \angle T}{۲})$$
$$= \frac{\angle R + \angle T}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ - \angle P}{۲} = ۹۰^\circ - \frac{۱}{۲}\angle P$$

۳ ـ بر قاعده‌ی BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC، دو نقطه‌ی M و N را چنان اختیار می‌کنیم که BM = NC. این نقطه‌ها را به رأس A وصل می‌کنیم. مثلث AMN همواره چه‌گونه است؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۶۲)*

۱) غیرمشخص　۲) متساوی‌الاضلاع‌ها　۳) متساوی‌الساقین　۴) قائم‌الزاویه

۴ ـ در شکل مقابل، سه پاره‌خط، مساوی و دو خط، موازی‌اند. زاویه‌ی α چند درجه است؟ *(آزمون پیش‌دانشگاهی ـ تجربی ـ ۷۷)*

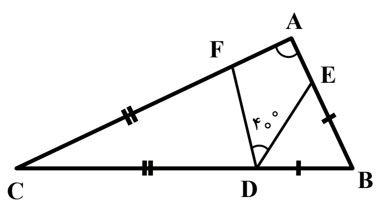


۱) ۱۲۰°
۲) ۱۲۵°
۳) ۱۳۵°
۴) ۱۵۰°

۵ ـ اگر مثلثی متساوی‌الساقین باشد، طول ارتفاع وارد بر قاعده، برابر کدام است؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۶۵)*

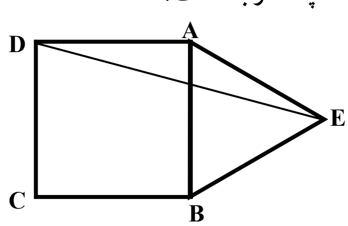
۱) نصف طول قاعده　۲) طول میانه‌ی یک ضلع دیگر
۳) طول شعاع دایره‌ی محیطی مثلث　۴) طول نیم‌ساز زاویه‌ی مقابل به قاعده

۶ ـ در شکل مقابل، اندازه‌ی زاویه‌ی A چه‌قدر است؟



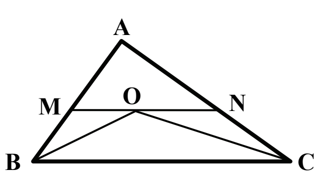
۱) ۷۰°
۲) ۹۰°
۳) ۱۰۰°
۴) ۱۱۰°

۷ ـ در شکل روبه‌رو، ABCD یک مربع و ABE یک مثلث متساوی‌الاضلاع است. اندازه‌ی ∠AED چند درجه است؟



۱) ۱۰°
۲) ۱۵°
۳) ۲۰°
۴) ۲۵°

۸ ـ در شکل روبه‌رو، BO و CO نیم‌ساز زاویه‌های B و C هستند و MN که از نقطه‌ی O می‌گذرد، باBC موازی است. اگر AB = ۱۲ و AC = ۱۸، آن‌گاه محیط مثلث AMN برابر کدام گزینه است؟



۱) ۳۰
۲) ۳۳
۳) ۳۶
۴) ۳۹

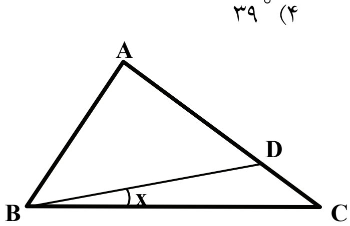
۹ ـ در مثلث متساوی‌الساقینABC، داریم AC = AB و ∠A = ۳۲°. قاعده‌ی BC را به‌اندازه‌ی ساق، تا نقطه‌ی D امتداد می‌دهیم. زاویه‌ی ∠ADC چند درجه است؟

۱) ۳۶°　۲) ۳۴°　۳) ۳۷°　۴) ۳۹°

۱۰ ـ در مثلث ABC که در رأس A متساوی‌الساقین است؛ نیم‌ساز زاویه‌ی درونی C، مساوی قاعده‌ی BC است. اندازه‌ی زاویه‌ی درونی A چند درجه است؟

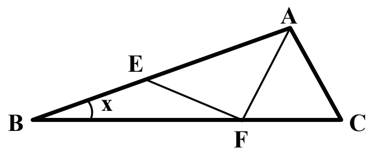
۱) ۳۶°　۲) ۳۴°　۳) ۳۷°　۴) ۳۹°

۱۱ ـ در مثلث شکل روبه‌رو، ∠B − ∠C = ۲۰° است. اگر AB = AD، آن‌گاه اندازه‌ی زاویه‌ی x چند درجه است؟



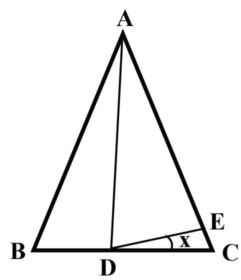
۱) ۱۰°　۲) ۱۵°
۳) ۲۰°　۴) ۳۰°

۱۲ ـ در شکل روبه‌رو، با فرض آن که $\angle BAC = 100^\circ$ و $BE = EF = FA = AC$ باشند، اندازه‌ی زاویه‌ی x چند درجه است؟



۱) 10°
۲) 15°
۳) 20°
۴) 30°

۱۳ ـ در مثلث متساوی‌الساقین ABC با رأس A، قاطع AD را به‌گونه‌ای رسم می‌کنیم که داشته باشیم $\angle BAD = 30^\circ$. اگر $AD = AE$ باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی x چند درجه است؟

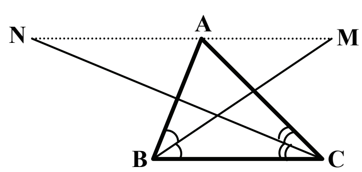


۱) 10°
۲) 15°
۳) $17/5^\circ$
۴) 20°

۱۴ ـ در مثلث ABC، $\hat{B} = \hat{C} = 70^\circ$ زاویه‌ی بین نیم‌ساز BD و ارتفاع BH کدام است؟ *(آزاد ـ تجربی ـ ۶۶)*

۱) 10° ۲) 15° ۳) 20° ۴) 25°

۱۵ ـ در شکل زیر، BM و CN به‌ترتیب نیم‌سازهای زاویه‌های $\angle B$ و $\angle C$ هستند و MN موازی BC است. طول MN کدام است؟
($P = \frac{a+b+c}{2} =$ نصف محیط)



۱) $a+b$
۲) $2(p-a)$
۳) $b+c$
۴) $p-a$

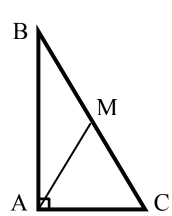
۱۶ ـ اگر در مثلث متساوی‌الساقین ABC، $AB = AC$ و نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی B، نیم‌ساز خارجی زاویه‌ی A را در D قطع کرده باشد، اندازه‌ی AD کدام است؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۷۳)*

۱) AC ۲) طول نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی B
۳) BC ۴) شعاع دایره‌ی محیطی

۱۷ ـ در مثلث ABC، AB=AC و $\angle A = 40^\circ$. نقطه‌ی O درون مثلث به‌گونه‌ای قرار دارد که $\angle OBC = \angle OCA$. زاویه‌ی $\angle BOC$ چند درجه است؟

۱) 55° ۲) 70° ۳) 110° ۴) 140°

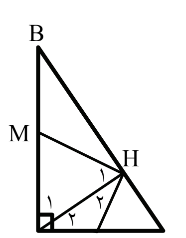
۳ ـ چند ویژگی از مثلث قائم‌الزاویه



قضیه: در هر مثلث قائم‌الزاویه، میانه‌ی وارد بر وتر، نصف وتر است و برعکس. اگر در مثلثی میانه‌ی نظیر یک رأس، نصف ضلع نظیرش باشد، مثلث در آن رأس قائم‌الزاویه است؛

یعنی در شکل مقابل اگر M وسط BC باشد، داریم: $\angle A = 90^\circ \Leftrightarrow AM = \frac{BC}{2}$

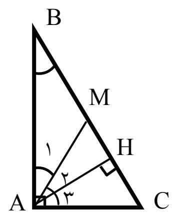
مثال ۱۷ در مثلث ABC که در رأس A قائمه است، نقاط M و N وسط‌های ضلع‌های AB و AC هستند. اگر H پای ارتفاع رسم‌شده از رأس A باشد، ثابت کنید $\angle MHN = 90^\circ$.



$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABH: \text{میانه‌ی وارد بر وتر } MH \Rightarrow MH = \frac{1}{2}AB = AM \Rightarrow \angle H_1 = \angle A_1 \\ \Delta ACH: \text{میانه‌ی وارد بر وتر } NH \Rightarrow NH = \frac{1}{2}AC = AN \Rightarrow \angle H_2 = \angle A_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\angle H_1 + \angle H_2 = \angle A_1 + \angle A_2 = 90^\circ$$

نکته در مثلث قائم‌الزاویه، زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر، برابر قدر مطلق تفاضل دو زاویه‌ی دیگر است.



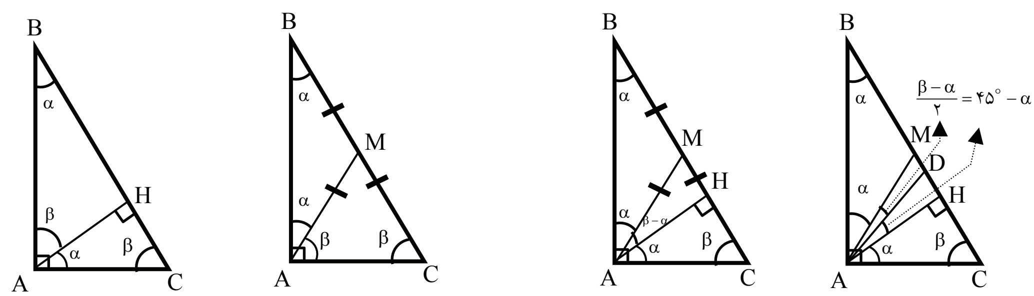
مثال ۱۸ در شکل مقابل، M وسط وتر BC است. اگر $\angle A_۲ = ۲۰^\circ$ باشد، مقادیر دو زاویه‌ی حاده‌ی B و C را بیابید.

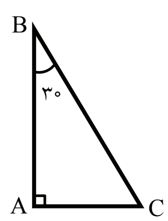
فرض کنیم $\angle B < \angle C$، داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_۲ = ۲۰^\circ \Rightarrow \hat{C}-\hat{B} = ۲۰^\circ \\ \hat{C}+\hat{B} = ۹۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{C} = ۵۵^\circ \text{ و } \hat{B} = ۳۵^\circ$$

نکته در مثلث قائم‌الزاویه، نیم‌ساز زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر، نیم‌ساز زاویه‌ی A نیز می‌باشد.

برای درک به‌تر نکته‌های فوق، به شکل‌های زیر بادقت بیش‌تری توجه کنید:

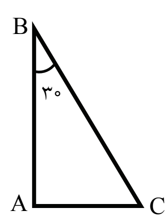




قضیه: در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که دارای زاویه‌ی ۳۰° است، ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی ۳۰°، نصف وتر است؛ یعنی در شکل مقابل:

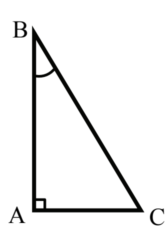
$$(\angle A = ۹۰^\circ \text{ و } \angle B = ۳۰^\circ) \Rightarrow AC = \frac{BC}{۲}$$

عکس قضیه‌ی فوق را می‌توان به دو صورت زیر مطرح کرد که هر دو درست هستند:



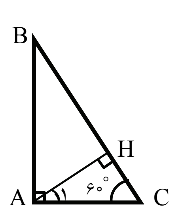
الف) اگر در مثلثی که زاویه‌ی ۳۰° دارد و ضلع روبه‌رو به آن زاویه، نصف ضلع مجاور به این زاویه باشد، آن مثلث، قائم‌الزاویه است؛ یعنی در شکل مقابل:

$$(AC = \frac{BC}{۲} \text{ و } \angle B = ۳۰^\circ) \Rightarrow \angle A = ۹۰^\circ$$



ب) اگر در مثلث قائم‌الزاویه‌ای یک ضلع، نصف وتر باشد، زاویه‌ی روبه‌رو به آن ضلع، ۳۰° است؛ یعنی در شکل مقابل:

$$(AC = \frac{BC}{۲} \text{ و } \angle A = ۹۰^\circ) \Rightarrow \angle B = ۳۰^\circ$$



مثال ۱۹ در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یکی از زاویه‌های آن ۶۰° است، ارتفاع وارد بر وتر، وتر را به چه نسبتی قطع می‌کند؟

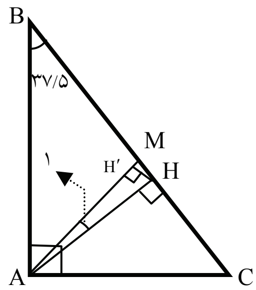
اگر در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC در شکل مقابل، زاویه‌ی C برابر ۶۰ درجه باشد، داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ACH : \angle A_۱ = ۳۰^\circ \Rightarrow CH = \frac{۱}{۲}AC \\ \Delta ABC : \angle B = ۳۰^\circ \Rightarrow AC = \frac{۱}{۲}BC\end{array}\right\} \Rightarrow CH = \frac{۱}{۴}BC \Rightarrow BH = \frac{۳}{۴}BC \Rightarrow \frac{CH}{BH} = \frac{۱}{۳}$$

پس ارتفاع AH، وتر را به نسبت ۱ به ۳ تقسیم می‌کند.

قضیه: اگر یکی از زاویه‌های مثلثی قائم‌الزاویه ۱۵° باشد، ارتفاع نظیر وتر، یک‌چهارم وتر است.

عکس این قضیه را نیز همانند قضیه‌ی قبل، می‌توان به دو صورت، همانند قضیه‌ی قبل بیان نمود که هر دو درست هستند.



مثال ۲۰ در مثلث ABC که در رأس A قائمه است، طول وتر، برابر ۱۶ و یکی از زاویه‌های حاده، برابر $۳۷/۵^\circ$ است. فاصله‌ی H، پای ارتفاع وارد بر وتر، از میانه‌ی وارد بر وتر چه‌قدر است؟

اگر در شکل مقابل، $\angle B = ۳۷/۵^\circ$ و M وسط BC باشد، خواهیم داشت:

$\angle A_۱ = |B - C| = |۳۷/۵^\circ - ۵۲/۵^\circ| = ۱۵^\circ$ زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر

چون در مثلث قائم‌الزاویه‌ی AHM یک زاویه، ۱۵ درجه است و HH' ارتفاع نظیر وتر این مثلث است، پس داریم:

$$HH' = \frac{AM}{۴} = \frac{\frac{۱}{۲}BC}{۴} = \frac{BC}{۸} = \frac{۱۶}{۸} = ۲$$

یعنی فاصله‌ی H از میانه‌ی AM، برابر ۲ است.

۱۸ ـ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، پاره‌خط‌های AH ،AM و AD به‌ترتیب، میانه، ارتفاع و نیم‌ساز نظیر زاویه‌ی قائمه‌ی A هستند. کدام گزینه درست است؟

۱) $\angle HAD = \angle ABC$
۲) $\angle HAD = \angle ACB$
۳) $\angle HAD = \angle MAD$
۴) $\angle ABC = \angle MAD$

۱۹ ـ در مثلث ABC که در رأسA قائمه است، نقطه‌ی H پای ارتفاع نظیر وتر و نقطه‌های M و N وسط‌های دو ضلع نظیر زاویه‌ی قائمه هستند. مثلث HMN چه‌گونه مثلثی است؟

۱) متساوی‌الساقین
۲) متساوی‌الاضلاع
۳) قائم‌الزاویه
۴) متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه

۲۰ ـ در مثلث ABC که در رأس A قائمه است، ضلع AB را به‌اندازه‌ی AC از طرف A امتداد می‌دهیم تا نقطه‌ی B' به‌دست آید و ضلع AC را به‌اندازه‌ی AB از طرف A امتداد می‌دهیم تا نقطه‌ی C' به‌دست آید. در این صورت ارتفاع وارد بر وتر مثلث ABC چه خطی برای مثلث $A'B'C'$ است؟

۱) ارتفاع
۲) میانه
۳) نیم‌ساز
۴) عمودمنصف

۲۱ ـ در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، زاویه‌ی بین میانه و ارتفاع وارد بر وتر، برابر ۲۰° است. نسبت دو زاویه‌ی حاده‌ی این مثلث کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۱۱}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۷}$
۴) $\frac{۵}{۸}$

۲۲ ـ فاصله‌ی وسط قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقینی که دو زاویه‌ی ۷۵ درجه دارد، تا ساق مثلث، برابر 5cm است. مجموع دو ساق مثلث چه‌قدر است؟

۱) ۲۰
۲) ۲۵
۳) ۳۰
۴) ۴۰

۲۳ ـ در مثلث متساوی‌الساقینی که زاویه‌ی ۱۲۰° دارد، ارتفاع وارد بر قاعده، چه کسری از ساق مثلث است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۸}$
۴) $\frac{۱}{۳}$

۲۴ ـ در مثلث ABC، $B - C = ۳۰^\circ$، ارتفاع AH و نیم‌ساز AD رسم شده‌اند. فاصله‌ی H از نیم‌ساز AD کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}AH$
۲) $\frac{۱}{۴}AD$
۳) $\frac{۱}{۳}AD$
۴) $\frac{۱}{۸}BC$

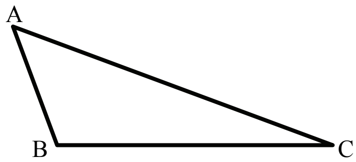
۲۵ ـ در مثلث دل‌خواه ABC، از A عمودی بر نیم‌ساز خارجی رأس B رسم می‌کنیم تا آن را در E قطع کند. اگر M وسط AB باشد، کدام گزینه درست <u>نیست</u>؟

۱) $EM \parallel BC$
۲) $EM = \frac{AB}{۲}$
۳) $\angle AEM = \frac{۱}{۲}\angle B$
۴) $\angle EAB = \frac{۱}{۲}\angle C$

۲۶ ـ در مثلث ABC از رأس A عمودهای AE و AF را بر نیم‌سازهای خارجی زاویه‌های B و C رسم می‌کنیم. اگر محیط مثلث ABC برابر ۱۲ باشد، آن‌گاه طول پاره‌خط EF کدام است؟ *(المپیاد مرحله‌ی اول ـ ۸۰ ـ ۸۱)*

۱) ۶
۲) ۵
۳) $۴\sqrt{۲}$
۴) $۴\sqrt{۳}$

۴ ـ مثلث شبه قائمه



تعریف: مثلث ABC را در رأس A شبه قائمه نامند، اگر $|\angle B-\angle C|=90^\circ$ باشد.

مثال ۲۱ در مثلث شبه قائمه‌ی ABC به رأس A، اگر $\angle A=30^\circ$ باشد، اندازه‌ی دو زاویه‌ی دیگر را به‌دست آورید.

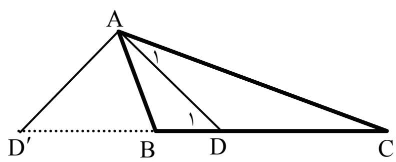
$$\left.\begin{array}{l}\angle A=30^\circ \Rightarrow \angle B+\angle C=150^\circ\\ \text{مثلث ABC شبه قائمه است} \Rightarrow \angle B-\angle C=90^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \angle B=120^\circ\ ,\ \ \angle C=30^\circ$$

مثال ۲۲ در مثلث شبه قائمه به رأس A، که در آن B، بزرگ‌ترین زاویه است، ثابت کنید:

الف) $\angle A+2\angle C=90^\circ$.

ب) نیم‌ساز درونی رأس A با ضلع BC زاویه‌ی 45° می‌سازد.

پ) طول‌های نیم‌سازهای درونی و بیرونی نظیر رأس A با هم برابرند.



الف)

$$\angle B-\angle C=90^\circ \Rightarrow \angle B=\angle C+90^\circ$$

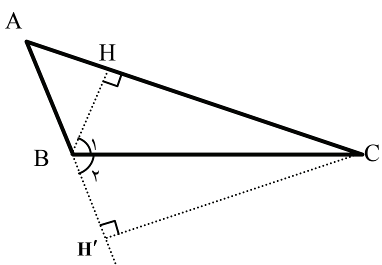
$$\Rightarrow \angle A+(\angle C+90^\circ)+\angle C=180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle A+2\angle C=90^\circ$$

ب)

$$\left.\begin{array}{l}\angle A+2\angle C=90^\circ\\ \underset{\text{زاویه‌ی خارجی ACD است.}}{\angle D_1} \Rightarrow \angle D_1=\angle A_1+\angle C=\frac{1}{2}\angle A+\angle C\end{array}\right\}\Rightarrow \angle D_1=\frac{1}{2}\times 90^\circ=45^\circ$$

پ) چون نیم‌سازهای درونی و بیرونی هر زاویه‌ی مثلث بر هم عموداند، پس $\angle D'AD=90^\circ$ و چون $\angle D_1=45^\circ$، پس زاویه‌ی سوم نیز برابر 45° و مثلث $D'AD$ قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است، در نتیجه $AD'=AD$.

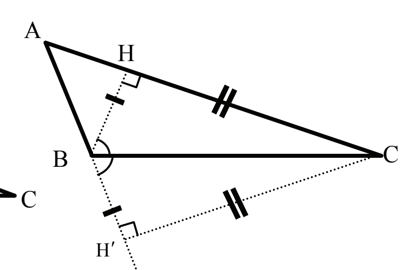


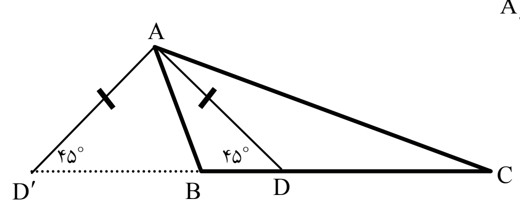
مثال ۲۳ در مثلث شبه قائمه ABC ($\angle B-\angle C=90^\circ$) اگر BH و CH′ به‌ترتیب، ارتفاع‌های نظیر رأس‌های B و C باشند، ثابت کنید: $BH=BH'$ و $CH=CH'$

$$\left.\begin{array}{l}\angle B-\angle C=90^\circ \Rightarrow \angle B=\angle C+90^\circ \Rightarrow \angle B_2=180^\circ-(\angle C+90^\circ)=90^\circ-\angle C\\ BHC \Rightarrow \angle B_1+\angle C=90^\circ \Rightarrow \angle B_1=90^\circ-\angle C\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle B_2=\angle B_1\\ BC=BC\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه‌ی حاده}}\Delta BHC\cong\Delta BH'C\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}BH=BH'\\ CH=CH'\end{array}\right.$$

تذکر: برای درک به‌تر مطالب فوق، به شکل‌های زیر دقت کنید:





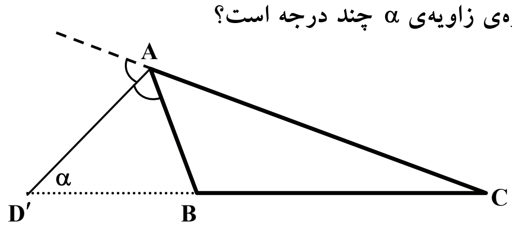
۲۷ ـ در شکل زیر، $\angle B-\angle C=90^\circ$ و AD′ نیم‌ساز خارجی A می‌باشد. اندازه‌ی زاویه‌ی α چند درجه است؟

۱) 30°

۲) 45°

۳) 60°

۴) 90°



۲۸ ـ اگر در مثلث ABC، طول نیم‌سازهای داخلی و خارجی رأس A برابر باشند، $\angle B-\angle C$ کدام است؟

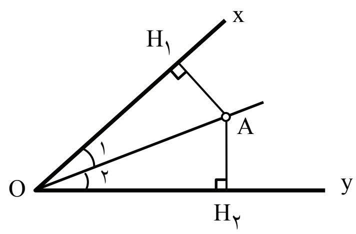
۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\angle A$ ۴) $\frac{1}{2}\angle A$

۲۹ ـ در مثلث ABC داریم $\angle B-\angle C=90^\circ$. اگر B'، قرینه‌ی B نسبت به ارتفاع نظیر رأس A باشد، زاویه‌ی $\angle CAB'$ چند درجه است؟

۱) 30° ۲) 45° ۳) 60° ۴) 90°

۵ ـ ویژگی نقطه‌های روی نیم‌ساز و عمودمنصف

۵ ـ ۱ ـ ویژگی نقطه‌های روی نیم‌ساز



هر نقطه روی نیم‌ساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

اگر A روی نیم‌ساز زاویه‌ی $\angle xOy$ باشد. $\Rightarrow AH_1=AH_2$

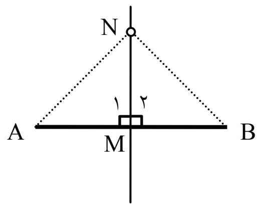
اگر نقطه‌ای از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، آن نقطه روی نیم‌ساز آن زاویه قرار دارد.

اگر $AH_1=AH_2 \Rightarrow$ A روی نیم‌ساز زاویه‌ی $\angle xOy$ قرار دارد.

دو مطلب فوق را می‌توان به‌صورت یک قضیه‌ی دو شرطی، به‌صورت زیر، بیان کرد:

«شرط لازم و کافی برای آن که نقطه‌ای روی نیم‌ساز یک زاویه قرار داشته باشد، آن است که از ضلع‌های آن زاویه، به یک فاصله باشد.»

۵ ـ ۲ ـ ویژگی نقطه‌های روی عمودمنصف



اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف پاره‌خطی واقع باشد، از دو سرِ آن پاره‌خط به یک فاصله است.

اگر N روی عمودمنصفِ AB باشد. $\Rightarrow AN=BN$

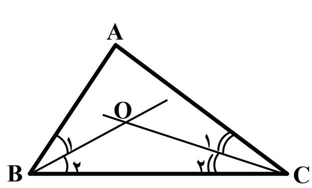
اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، آن نقطه روی عمودمنصفِ آن پاره‌خط قرار دارد.

اگر $AN=BN \Rightarrow$ N روی عمودمنصف AB قرار دارد.

دو مطلب فوق را می‌توان به‌صورت یک قضیه‌ی دو شرطی، به‌صورت زیر، بیان نمود:

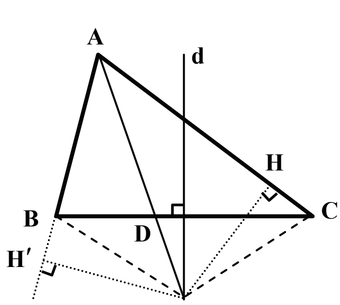
«شرط لازم و کافی برای آن که نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره‌خط قرار داشته باشد، آن است که از دو سر آن پاره‌خط، به یک فاصله باشد.»

۳۰ ـ در مثلث ABC نقطه‌ی O محل برخورد نیم‌سازهای داخلی دو زاویه‌ی B و C می‌باشد. در مورد نقطه‌ی O کدام درست است؟



۱) فاصله‌ی O تا دو ضلع AB و AC برابر است.
۲) فاصله‌ی O تا دو ضلع AB و BC برابر است.
۳) فاصله‌ی O تا دو ضلع BC و AC برابر است.
۴) هر سه گزینه

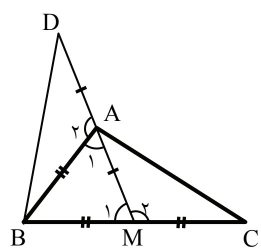
۳۱ ـ در مثلث ABCی شکل روبه‌رو، خط d عمودمنصف BC، AD نیم‌ساز زاویه‌ی A و $AB<AC$ است. کدام گزینه نادرست است؟



۱) $MB=MC$
۲) $MH=MH'$
۳) $CH=BH'$
۴) $AH=AB$

پاسخ تست‌های پلکان آموزش

۱ ـ (۱) با توجه به شکل روبه‌رو داریم:

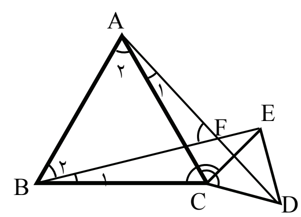


$$\left.\begin{array}{r} AB = BM \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{M}_1 \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{M}_2 \\ AD = AM \\ AB = MC \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{AMC} \Rightarrow BD = AC$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{AC} = 1$$

۲ ـ (۳) چون دو زاویه‌ی $\angle ACB$ و $\angle ECD$ با یک‌دیگر برابرند (هر دو برابر 60° هستند)، اگر هر دو به اضافه مقداری ثابت شوند، باز با یک‌دیگر برابر خواهند بود، پس دو زاویه‌ی $\angle ECB$ و $\angle DCA$ با هم برابرند.



داریم:

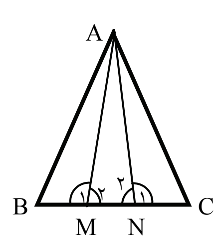
$$\left.\begin{array}{l} CD = CE \\ CA = CB \\ \angle DCA = \angle ECB \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ACD} \cong \overset{\Delta}{BCE} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1$$

$$\overset{\Delta}{ABF}: (\hat{A}_1 + \hat{A}_2) + \hat{B}_2 + \hat{F} = 180^\circ$$

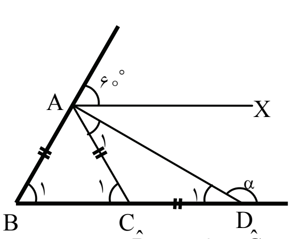
$$\Rightarrow (\hat{A}_1 + 60) + (60 - \hat{B}_1) + \hat{F} = 180^\circ$$

$$\xrightarrow{\hat{A}_1 = \hat{B}_1} 120^\circ + \hat{F} = 180^\circ \Rightarrow \hat{F} = 60^\circ$$

۳ ـ (۳) از متساوی‌الساقین بودن مثلث ABC و این که $BM = NC$، نتیجه می‌شود دو مثلث ABM و CAN به حالت (ض‌زض) هم‌نهشت هستند، پس $M_1 = N_1$ و در نتیجه $M_2 = N_2$، بنابراین مثلث AMN متساوی‌الساقین است.



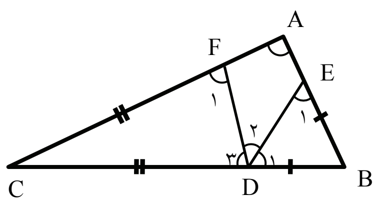
۴ ـ (۴) با توجه به موازی بودن دو خط AX و BD در شکل روبه‌رو داریم:



$$\left.\begin{array}{l} \hat{B}_1 = 60^\circ \Rightarrow \hat{C}_1 = 60^\circ \\ A\hat{C}D \text{ زاویه‌ی خارجی } \hat{C}_1 = \hat{A}_1 + \hat{D}_1 = 2\hat{D}_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{D}_1 = 30^\circ \Rightarrow \alpha = 150^\circ$$

۵ ـ (۴) در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع، میانه و نیم‌ساز وارد بر قاعده، بر هم منطبق هستند.

۶ ـ (۳)

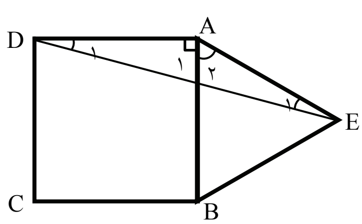


$$\left.\begin{array}{l} BE = BD \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{D}_1 \Rightarrow \hat{B} = 180^\circ - 2\hat{D}_1 \\ CF = CD \Rightarrow \hat{F}_1 = \hat{D}_3 \Rightarrow \hat{C} = 180^\circ - 2\hat{D}_3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\hat{B} + \hat{C} = 360^\circ - 2(\hat{D}_1 + \hat{D}_3) = 360^\circ - 2(180^\circ - \hat{D}_2) = 80^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$

۷ ـ (۲) ضلع AB در مربع و مثلث متساوی‌الاضلاع مشترک است، بنابراین تمام ضلع‌های مربع و تمام ضلع‌های مثلثِ متساوی‌الاضلاع، هم‌اندازه هستند، پس:

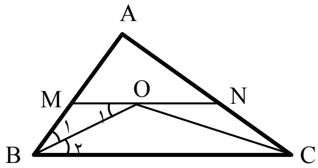


$$AD = AE \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{E}_1$$

$$\overset{\Delta}{AED}: \hat{D}_1 + (\hat{A}_1 + \hat{A}_2) + \hat{E}_1 = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{E}_1 + 90^\circ + 60^\circ + \hat{E}_1 = 180^\circ \Rightarrow 2\hat{E}_1 = 30^\circ \Rightarrow \hat{E}_1 = 15^\circ$$

۸ ـ (۱)



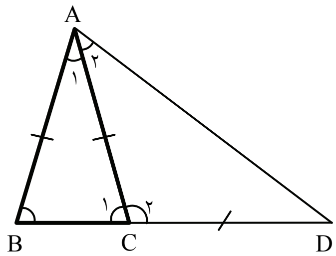
$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} MN \parallel BC \\ BO \text{ مورب} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{B}_2 \\ \hat{B}_1 = \hat{B}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow MO = MB$$

به همین‌ترتیب ثابت می‌شود. $NO = NC$ $\Rightarrow$

$$\text{محیط مثلث } AMN = AM + MN + AN = AM + MO + NO + AN$$

$$= AM + MB + NC + AN = AB + AC = 12 + 18 = 30$$

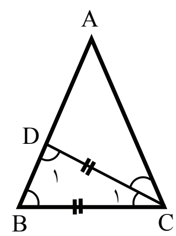
۹ ـ گزینه ۳



$$\left.\begin{array}{r} AB=AC\Rightarrow \hat{B}=\hat{C}_۱ \\ \hat{A}_۱=۳۲° \end{array}\right\}\Rightarrow ۳۲°+۲\hat{C}_۱=۱۸۰°\Rightarrow \hat{C}_۱=\frac{۱۴۸°}{۲}=۷۴°$$

$$\left.\begin{array}{r} AC=CD\Rightarrow \hat{A}_۲=\hat{D} \\ \text{ACD زاویه‌ی خارجی } C_۱=\hat{A}_۲+\hat{D} \end{array}\right\}\Rightarrow \hat{C}_۱=۲\hat{D}\Rightarrow \hat{D}=\frac{۷۴°}{۲}=۳۷°$$

۱۰ ـ گزینه ۱



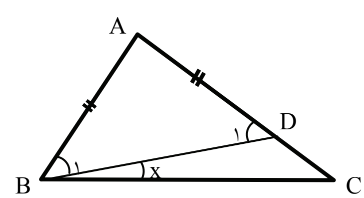
$$\left.\begin{array}{l} BC=CD\Rightarrow \hat{D}_۱=\hat{B} \\ AB=AC\Rightarrow \hat{C}=\hat{B}\Rightarrow \frac{\hat{C}}{۲}=\frac{\hat{B}}{۲}\Rightarrow \hat{C}_۱=\frac{\hat{B}}{۲} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \hat{B}+\hat{D}_۱+\hat{C}_۱=۱۸۰°$$

$$\hat{B}+\hat{B}+\frac{\hat{B}}{۲}=۱۸۰°\Rightarrow \frac{۵\hat{B}}{۲}=۱۸۰°\Rightarrow \hat{B}=۷۲°$$

$$\Rightarrow \hat{A}=۱۸۰°-۷۲°-۷۲°=۳۶°$$

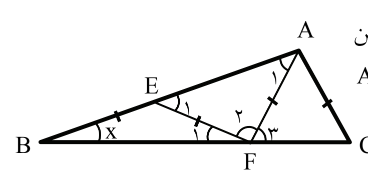
۱۱ ـ گزینه ۱



$$\left.\begin{array}{r} x=\hat{B}-\hat{B}_۱=\hat{B}-\hat{D}_۱ \\ \text{BCD زاویه‌ی خارجی } \hat{D}_۱=C+x \end{array}\right\}\Rightarrow x=B-(C+x)$$

$$\Rightarrow ۲x=B-C=۲۰\Rightarrow x=۱۰°$$

۱۲ ـ گزینه ۳ با توجه به متساوی‌الساقین بودن مثلث‌های BEF، EFA و AFC داریم:

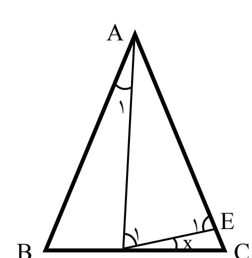


$$\left.\begin{array}{r} F_۱=x \\ \overset{\Delta}{EBF}\text{ زاویه‌ی خارجی } E_۱=x+F_۱ \end{array}\right\}\left.\begin{array}{r}\Rightarrow E_۱=۲x \\ E_۱=A_۱\end{array}\right\}\Rightarrow A_۱=۲x$$

$$\left.\begin{array}{r} \overset{\Delta}{AFB}\text{ زاویه‌ی خارجی } F_۳=A_۱+x=۳x \\ C=F_۳ \end{array}\right\}\Rightarrow C=۳x$$

$$\Rightarrow A+x+۳x=۱۸۰°\Rightarrow ۱۰۰+۴x=۱۸۰°\Rightarrow x=\frac{۸۰}{۴}=۲۰°$$

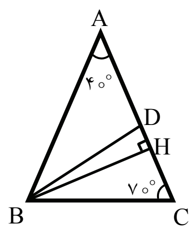
۱۳ ـ گزینه ۲ با توجه به متساوی‌الساقین بودن مثلث‌های ABC و ADE داریم:



$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \overset{\Delta}{ABD}\text{ زاویه‌ی خارجی } (D_۱+x)=A_۱+B=۳۰+B \\ AB=AC\Rightarrow B=C \\ AD=AE\Rightarrow D_۱=E_۱ \end{array}\right\}\Rightarrow E_۱+x=۳۰+C \\ \overset{\Delta}{EDC}\text{ زاویه‌ی خارجی } E=C+x \end{array}\right\}$$

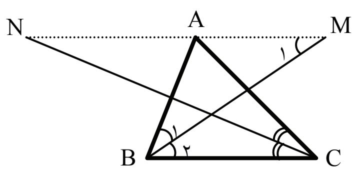
$$\Rightarrow (C+x)+x=۳۰+C\Rightarrow x=۱۵°$$

۱۴ ـ گزینه ۲ زاویه‌ی بین نیم‌ساز و ارتفاع رأس B برابر نصف تفاضل دو زاویه‌ی دیگر مثلث است. با توجه به این که $\hat{C}=۷۰°$ است، در نتیجه $\hat{A}=۴۰°$ و داریم:



$$\angle HBD=\frac{\hat{C}-\hat{A}}{۲}=\frac{۷۰°-۴۰°}{۲}=۱۵°$$

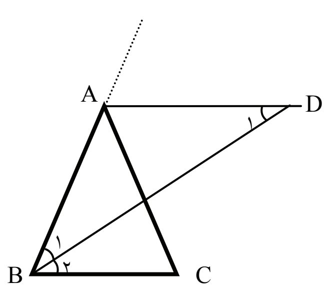
۱۵ ـ گزینه ۳



$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} MN \parallel BC \\ \text{مورب } BM \end{array}\right\}\Rightarrow M_۱=B_۲ \\ B_۲=B_۱ \end{array}\right\}\Rightarrow M_۱=B_۱\Rightarrow AM=AB \\ \text{به همین‌ترتیب ثابت می‌شود. } AN=AC \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$AM+AN=AB+AC\Rightarrow MN=b+c$$

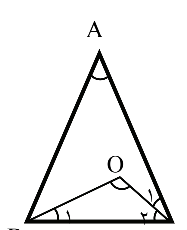
۱۶ ـ گزینه ۱ می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین، نیم‌ساز خارجی رأس A موازی قاعده است، پس داریم:



$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} AD \parallel BC \\ \text{مورب } BD \end{array}\right\}\Rightarrow B_۲=D_۱ \\ B_۲=B_۱ \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$D_۱=B_۱\Rightarrow AD=AB=AC$$

۱۷ ـ گزینه ۳ در شکل مقابل $B_۱=C_۱$ است. با توجه به این که $\hat{A}=۴۰°$ است، زاویه‌های B و C برابر $۷۰°$ خواهند بود. اکنون داریم:

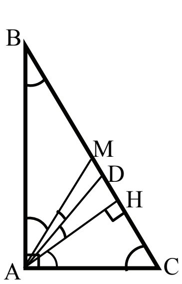


$$\overset{\Delta}{BOC}:\hat{B}_۱+\hat{O}+\hat{C}_۲=۱۸۰°$$

$$\Rightarrow \hat{C}_۱+\hat{O}+\hat{C}_۲=۱۸۰°$$

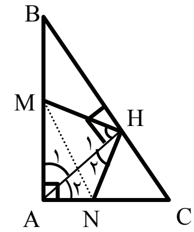
$$\Rightarrow \hat{C}+\hat{O}=۱۸۰°\Rightarrow ۷۰°+\hat{O}=۱۸۰°\Rightarrow \hat{O}=۱۱۰°$$

۱۸ ـ گزینه ۳ می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه، نیم‌ساز زاویه‌ی رأس، نیم‌ساز زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر نیز می‌باشد، پس در شکل مقابل داریم:



$$H\hat{A}D=D\hat{A}M$$

۱۹ ـ (۳) با توجه به این که HM و HN به‌ترتیب میانه‌های وارد بر وتر در مثلث‌های AHB و AHC هستند، داریم:

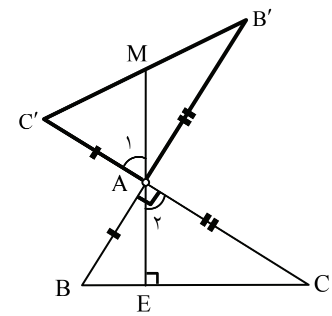


$$\left.\begin{array}{l} HM=\frac{AB}{۲}\Rightarrow HM=AM\Rightarrow H_۱=A_۱\\ HN=\frac{AC}{۲}\Rightarrow HN=AN\Rightarrow H_۲=A_۲\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$H_۱+H_۲=A_۱+A_۲=۹۰^\circ$$

پس مثلث HMN، قائم‌الزاویه است.

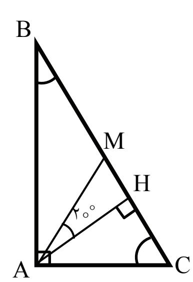
۲۰ ـ (۲) روشن است مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی ABC و $AB'C'$ به‌حالت (ض‌زض) با یک‌دیگر هم‌نهشت‌اند، پس:



$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r} C'=B\\ \left.\begin{array}{r} \text{متقابل به رأس } A_۱=A_۲\\ A_۲=B\end{array}\right\}\Rightarrow A_۱=B\end{array}\right\}\Rightarrow C'=A_۱\Rightarrow AM=MC'\\ \text{به همین ترتیب ثابت می‌شود. } AM=MB'\end{array}\right\}$$

پس M وسط $B'C'$ و AM میانه‌ی وارد بر وتر مثلث $AB'C'$ است.

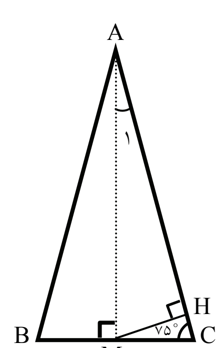
۲۱ ـ (۱) می‌دانیم زاویه‌ی بین میانه و ارتفاع، برابر تفاضل دو زاویه‌ی حاده‌ی مثلث است، پس:



$$\left.\begin{array}{r} H\hat{A}M=\hat C-\hat B\Rightarrow \hat C-\hat B=۲۰^\circ\\ \hat C+\hat B=۹۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\hat C=۵۵^\circ\ ,\ \hat B=۳۵^\circ\Rightarrow \frac{\hat B}{\hat C}=\frac{۷}{۱۱}$$

۲۲ ـ (۴) اگر از رأس A به نقطه‌ی M وصل کنیم، مثلث AMC قائم‌الزاویه خواهد شد، زیرا در مثلث متساوی‌الساقین، میانه‌ی وارد بر قاعده، ارتفاع و نیم‌ساز نیز می‌باشد. در نتیجه $\hat A_۱=\frac{۳۰^\circ}{۲}=۱۵^\circ$ می‌باشد.

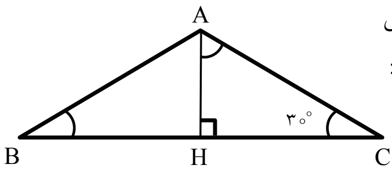


و چون مثلث قائم‌الزاویه‌ی AMC دارای یک زاویه‌ی حاده‌ی ۱۵° می‌باشد، ارتفاع وارد بر وتر آن، یک‌چهارم وتر است، پس داریم:

$$MH=\frac{AC}{۴}\Rightarrow ۵=\frac{AC}{۴}\Rightarrow AC=۲۰$$

$$\Rightarrow AB=۲۰\Rightarrow AC+AB=۴۰$$

۲۳ ـ (۲) با توجه به مساوی بودن زاویه‌های C و B داریم:

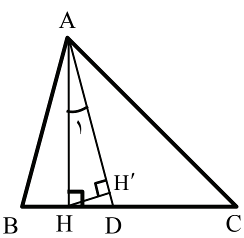


$$\hat B=\hat C=\frac{۱۸۰^\circ-\hat A}{۲}=\frac{۱۸۰^\circ-۱۲۰^\circ}{۲}=۳۰^\circ$$

چون ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی ۳۰° نصف وتر است، در مثلث AHC داریم:

$$AH=\frac{AC}{۲}$$

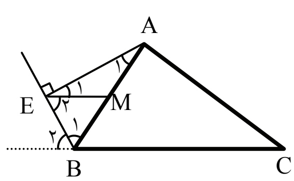
۲۴ ـ (۲) با توجه به این که زاویه‌ی میان ارتفاع AH و نیم‌ساز AD برابر نصف تفاضل دو زاویه‌ی دیگر مثلث، یعنی تفاضل B و C است، داریم:



$\hat A_۱=\frac{\hat B-\hat C}{۲}=\frac{۳۰^\circ}{۲}=۱۵^\circ$ در مثلث AHD ارتفاع وارد بر وتر ربع وتر است.

$$\Rightarrow HH'=\frac{AD}{۴}$$

۲۵ ـ (۴) **روش اول:** $\hat B_۱=\frac{\hat A+\hat C}{۲}$



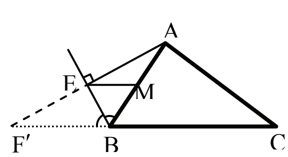
$$\hat A_۱=۹۰^\circ-\hat B_۱=۹۰^\circ-\frac{\hat A+\hat C}{۲}=\frac{\hat B}{۲}$$

چون در مثلث قائم‌الزاویه‌ی AEB، EM میانه‌ی وارد بر وتر است، پس $EM=\frac{AB}{۲}=AM$ است، در نتیجه $\hat E_۱=\hat A_۱=\frac{\hat B}{۲}$، بنابراین گزینه‌های ۲ و ۳ درست‌اند و جواب تست نمی‌باشند.

$$EM=MB\Rightarrow \hat E_۲=\hat B_۱\xrightarrow{\hat B_۱=\hat B_۲}\hat E_۲=\hat B_۲\xrightarrow{\text{مورب } EB}=EM\parallel BC$$

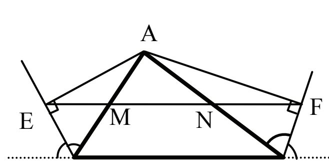
پس گزینه‌ی ۱ نیز درست است و جواب تست نمی‌باشد. در نتیجه جواب تست، گزینه‌ی ۴ است.

روش دوم: اگر محل برخورد امتداد AE با امتداد CB را E' بنامیم، در مثلث ABE' پاره‌خط BE هم‌نیم‌ساز و هم‌ارتفاع است، پس این مثلث متساوی‌الساقین است. یعنی $BE'=AB$ می‌باشد و چون EM میان خط این مثلث است، پس:



$EM\parallel BE'$ و $EM=\frac{BE'}{۲}=\frac{AB}{۲}$

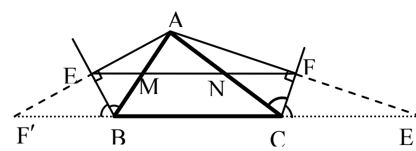
۲۶ ـ (۱) **روش اول:** وسط‌های ضلع‌های AB و AC را به‌ترتیب M و N می‌نامیم. اگر از E و F به‌ترتیب به M و N وصل کنیم.



بنا بر تست ۲۵ (تست قبل) پاره‌خط‌های EM و FN موازی ضلع BC خواهند شد. چون میان‌خط MN نیز موازی BC است، پس این سه پاره‌خط در یک راستا هستند؛ یعنی EF حتماً از وسط‌های AB و AC می‌گذرد.

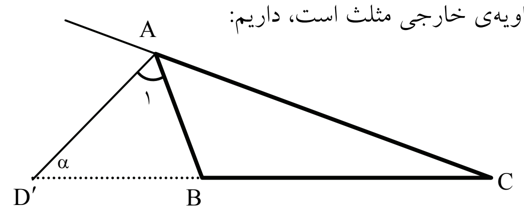
اکنون داریم: $EF = EM + MN + NF = \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} + \frac{AC}{2} = 6$

روش دوم: اگر امتدادهای AE و AF امتداد BC را در E' و F' قطع کنند، با توجه به توضیحی که در روش دوم تست قبل بیان شد مثلث‌های ABE' و ACF' متساوی‌الساقین هستند، پس طول پاره‌خط $E'F'$ برابر محیط مثلث ABC است. از طرفی چون E و F به‌ترتیب وسط‌های پاره‌خط‌های AE' و AF' می‌باشند، EF میان خط مثلث $AE'F'$ است پس:



$$EF = \frac{E'F'}{2} = \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

۲۷ ـ (۲) چون $\hat{B} = 90° + \hat{C}$ و $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$، پس $\hat{A} + 2\hat{C} = 90°$ و A_1 نصف زاویه‌ی خارجی مثلث است، داریم:



$$\hat{A}_1 = \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2}$$

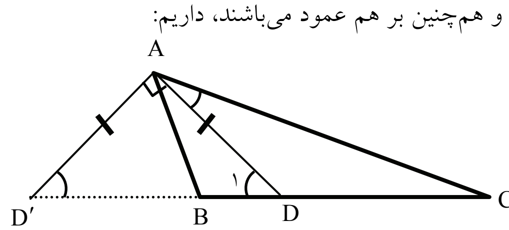
$$\overset{\Delta}{AD'C}: \alpha + \left(\frac{\hat{B} + \hat{C}}{2}\right) + A + C = 180°$$

$$\Rightarrow \alpha + \frac{B}{2} - \frac{C}{2} + C + A + C = 180°$$

$$\Rightarrow \alpha + \left(\frac{B - C}{2}\right) + A + 2C = 180° \Rightarrow \alpha + \left(\frac{90°}{2}\right) + 90° = 180°$$

$$\Rightarrow \alpha = 45°$$

۲۸ ـ (۲) با توجه به این که نیم‌ساز داخلی AD و نیم‌ساز خارجی AD' با یک‌دیگر برابر و هم‌چنین بر هم عمود می‌باشند، داریم:

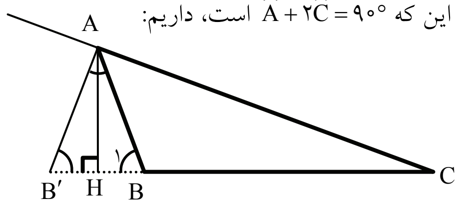


$$AD = AD' \Rightarrow \hat{D}' = \hat{D}_1 = 45°$$

ADC خارجی مثلث $\hat{D}_1 \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} + \hat{C} = 45° \Rightarrow \hat{A} + 2\hat{C} = 90°$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = 90° - \hat{C} \Rightarrow 180° - \hat{B} = 90° - \hat{C} \Rightarrow \hat{B} - \hat{C} = 90°$$

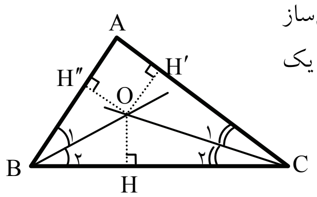
۲۹ ـ (۴) با توجه به این که $\hat{A} + 2\hat{C} = 90°$ است، داریم:



$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC \text{ زاویه‌ی خارجی } \hat{B}_1 = \hat{A} + \hat{C} \\ \text{ متساوی الساقین } ABB' \Rightarrow \hat{B}' = \hat{B}_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B}' = \hat{A} + \hat{C}$$

$$\Rightarrow \hat{B}' + \hat{C} = (\hat{A} + \hat{C}) + \hat{C} = \hat{A} + 2\hat{C} = 90° \Rightarrow C\hat{A}B' = 90°$$

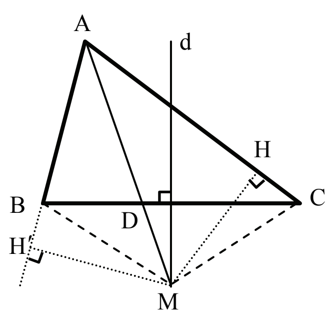
۳۰ ـ (۴) می‌دانیم هر نقطه روی نیم‌ساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است، پس داریم:



$$\left.\begin{array}{l} \text{روی نیم‌ساز زاویه‌ی B قرار دارد. } O \Rightarrow OH = OH'' \\ \text{روی نیم‌ساز زاویه‌ی C قراردارد. } O \Rightarrow OH = OH' \end{array}\right\} \Rightarrow OH = OH' = OH''$$

پس نقطه‌ی O از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

۳۱ ـ (۴) از آن‌جا که نقطه‌ی M روی عمودمنصف BC است، پس فاصله‌ی آن تا دو سر پاره‌خط BC برابر است؛ یعنی $MB = MC$ و در نتیجه گزینه‌ی ۱ درست است و پاسخ تست نمی‌باشد.



از آن‌جا که نقطه‌ی M روی نیم‌ساز زاویه‌ی A قرار دارد، پس فاصله‌ی آن تا دو ضلع این زاویه، برابر است، در نتیجه $MH = MH'$ و گزینه‌ی ۲ نیز درست است و جوابِ تست نمی‌باشد.

از درستیِ گزینه‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌شود، مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی MCH و MBH'، به‌حالت وتر و یک ضلع، هم‌نهشت‌اند، پس $CH = BH'$؛ یعنی گزینه‌ی ۳ نیز درست می‌باشد.

پس گزینه‌ی ۴ جواب تست است، زیرا در شکل داریم:

$$\left.\begin{array}{l} AH' > AB \\ \overset{\Delta}{AHM} \cong \overset{\Delta}{AH'M} \Rightarrow AH' = AH \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه‌ی حاده}} AH > AB$$

پلکان آزمون

آزمون یکم

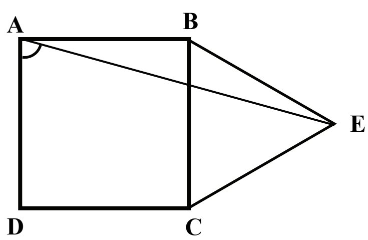
۲۷ دقیقه

۱ ـ یکی از زاویه‌های مثلث متساوی‌الساقین برابر ۱۰۰ درجه است. نیم‌ساز خارجی یکی از زاویه‌ها، ضلع مقابل را با کدام زاویه قطع می‌کند؟

(سراسری ـ ریاضی و تجربی ـ ۷۶)

۱) ۲۰°
۲) ۲۵°
۳) ۳۰°
۴) ۴۰°

۲ ـ مربع ABCD و مثلث متساوی‌الاضلاع BEC در شکل داده شده است. زاویه‌ی $D\widehat{A}E$ چه‌قدر است؟ *(آزاد ـ تجربی ـ ۷۷)*



۱) ۷۵°
۲) ۶۰°
۳) ۴۵°
۴) ۷۰°

۳ ـ در مثلث قائم‌الزاویه‌ای یکی از زاویه‌ها ۵۲ درجه است. زاویه‌ی حاده‌ی بین وتر و میانه‌ی وارد بر آن چند درجه است؟

(آزمایشی سنجش ـ ریاضی ـ ۸۷)

۱) ۶۲°
۲) ۶۴°
۳) ۷۶°
۴) ۷۸°

۴ ـ زاویه‌های مثلثی متناسب با اعداد ۵، ۳ و ۲ است. نسبت میانه‌ی وارد بر ضلع بزرگ‌تر به همان ضلع کدام است؟ *(آزمایشی سنجش ـ ریاضی ـ ۸۲)*

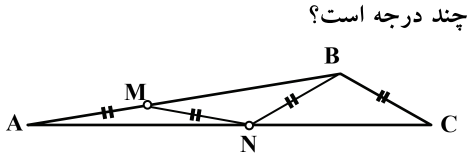
۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۵}$

۵ ـ در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$ و $\widehat{A} = ۴۲^\circ$) قاعده‌ی BC را به‌اندازه‌ی ساق تا نقطه‌ی E امتداد می‌دهیم. A را به E وصل می‌کنیم. کوچک‌ترین زاویه‌ی بزرگ‌ترین مثلث حاصل، چند درجه است؟

(آزمایشی سنجش ـ ریاضی ـ ۸۹)

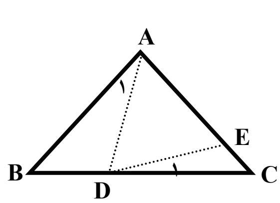
۱) ۳۴°
۲) $۳۴/۵^\circ$
۳) $۳۵/۵^\circ$
۴) ۳۶°

۶ ـ اگر در مثلث شکل روبه‌رو، $BN = BC = AM = MN$ و $\angle C = ۳۰^\circ$ باشد، آن‌گاه $\angle MBN$ چند درجه است؟



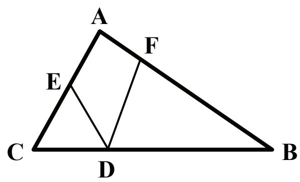
۱) ۵°
۲) ۱۰°
۳) ۱۵°
۴) ۲۰°

۷ ـ در مثلث شکل روبه‌رو، $AB = AC$ و $AD = AE$ است. اگر $D_۱ = ۱۴^\circ$، آن‌گاه $A_۱$ چند درجه است؟



۱) ۷°
۲) ۱۴°
۳) ۲۱°
۴) ۲۸°

۸ ـ در مثلث ABC، $\angle A=۸۰^\circ$ است و نقطه‌های D، E و F به‌ترتیب برضلع‌های BC،AC و AB چنان قرار دارند که $CE=CD$ و $BF=BD$. اندازه‌ی زاویه‌ی $\angle EDF$ کدام است؟



۱) ۳۰°
۲) ۴۰°
۳) ۵۰°
۴) ۶۵°

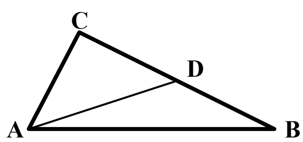
۹ ـ در مثلث ABC از نقطه‌ی M محل برخورد نیم‌سازهای داخلی زاویه‌های B و C، خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم تا ضلع‌های AB و AC را به‌ترتیب در D و E قطع کند. اگر $AB=۴$ و $AC=۵$ باشند، محیط مثلث AED برابر کدام است؟

۱) ۹
۲) ۴/۵
۳) ۵
۴) ۱۰

۱۰ ـ یکی از زاویه‌های مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۳۰° است. از نقطه‌ی وسط وتر، عمودی بر وتر وارد می‌کنیم. طول پاره‌خطی از این عمود که درون مثلث قرار دارد، کدام است؟

۱) برابر ضلع کوچک‌تر مجاور به زاویه‌ی قائمه است.
۲) یک وتر سوم ضلع بزرگ‌تر مجاور به زاویه‌ی قائمه است.
۳) نصف ضلع بزرگ‌تر مجاور به زاویه‌ی قائمه است.
۴) نصف ضلع کوچک‌تر مجاور به زاویه‌ی قائمه است.

۱۱ ـ در مثلث ABC، $AC=CD$ و $\angle CAB-\angle ABC=۳۰^\circ$. اندازه‌ی $\angle BAD$ کدام است؟



۱) $۷/۵^\circ$
۲) ۱۵°
۳) $۲۲/۵^\circ$
۴) ۴۵°

۱۲ ـ در مثلث ABC، $CA=CB$. مربع $BCDE$ بر ضلع BC و در خارج مثلث ساخته می‌شود. اگر $\angle DAB=x$ برحسب درجه باشد، آن‌گاه:

۱) $x=۶۰^\circ$
۲) $x=۴۵^\circ$
۳) $x=۳۰^\circ$
۴) x به مثلث ABC بستگی دارد.

۱۳ ـ در مثلث ABC با فرض $\angle C<\angle B$، برای آن که طول نیم‌سازهای درونی و بیرونی نظیر رأس A برابر باشند، باید: *(آزاد ـ ۶۵)*

۱) $\angle B-\angle C=\frac{\pi}{۳}$
۲) $\angle B-\angle C=\frac{\pi}{۶}$
۳) $\angle B-\angle C=\frac{\pi}{۲}$
۴) $\angle B-\angle C=\frac{\pi}{۴}$

۱۴ ـ یک ساق مثلث متساوی‌الساقین را از طرف رأس مثلث به‌اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم. نقطه‌ی حاصل و قاعده‌ی مثلث، چه نوع مثلثی تشکیل می‌دهد؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۶۸)*

۱) قائم‌الزاویه
۲) قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین
۳) متساوی‌الساقین
۴) منفرجه‌الزاویه

۱۵ ـ در مثلث متساوی‌الساقین ABC که در آن $\hat{B}=\hat{C}$ می‌باشد، مقدار $\frac{b}{a}\sin\frac{A}{۲}$ چه‌قدر است؟ *(سراسری ـ تجربی ـ ۷۱)*

۱) ۲
۲) $\sqrt{۲}$
۳) ۱
۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۶ ـ در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع وارد بر ساق، نصف ساق است. زاویه‌ی بین این ارتفاع و قاعده‌ی مثلث کدام است؟

۱) ۶۰°
۲) ۴۵°
۳) ۱۵°
۴) ۳۰°

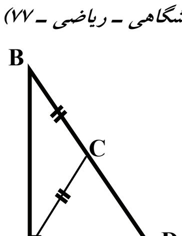
آزمون دوم

۲ ـ ۲۵ دقیقه

۱ ـ اندازه‌ی زاویه‌های مثلثی ۳۵° و ۵۵° است. زاویه‌ی بین میانه و ارتفاع وارد بر بزرگ‌ترین ضلع آن چند درجه است؟ *(آزمایشی سنجش ـ ریاضی و تجربی ـ ۸۱)*

۱) ۱۰°
۲) ۱۵°
۳) ۲۰°
۴) ۲۵°

۲ ـ در شکل مقابل، زاویه‌ی A برابر ۹۰° است. اگر $AC=AD=BC$ باشد، زاویه‌ی C چند درجه است؟ *(آزمون پیش‌دانشگاهی ـ ریاضی ـ ۷۷)*



۱) ۱۰۵°
۲) ۱۱۵°
۳) ۱۲۰°
۴) ۱۳۵°

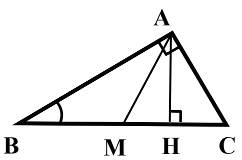
۳ ـ زاویه‌های مثلثی متناسب با اعداد ۳، ۱ و ۱ هستند. ضلع بزرگ‌تر را از هر دو طرف به‌اندازه‌ی ضلع دیگر امتداد می‌دهیم. دو نقطه‌ی حاصل را به رأس سوم وصل می‌کنیم. بزرگ‌ترین زاویه‌ی مثلث حاصل، چند برابر کوچک‌ترین زاویه‌ی آن است؟ *(آزمایشی سنجش ـ ریاضی ـ ۸۸)*

۱) ۶   ۲) ۷   ۳) ۸   ۹) ۴

۴ ـ در مثلث ABC نقطه‌ی M وسط BC است و $2AM = BC$. اندازه‌ی زاویه‌ی خارجی C، $\frac{5}{2}$ برابر اندازه‌ی زاویه‌ی داخلی B است. زاویه‌ی داخلی C از این مثلث چند درجه است؟ *(آزمایشی سنجش ـ تجربی ـ ۸۶)*

۱) 20° ۲) 30° ۳) 40° ۴) 50°

۵ ـ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\widehat{A} = 90^\circ$)، AH ارتفاع و AM میانه و زاویه‌ی $\widehat{B} = 30^\circ$ است. کدام گزینه درست است؟ *(آزاد ـ تجربی ـ ۷۳)*



۱) $AH = MH = \frac{BC}{4}$

۲) $AH = \frac{AM}{4} = \frac{AB}{4}$

۳) $AH = \frac{MC}{2} = \frac{AC}{2}$

۴) $MH = \frac{AM}{2} = \frac{BC}{4}$

۶ ـ در مثلث ABC که در رأس A قائم‌الزاویه است، از رأس A، خطی چنان رسم می‌کنیم که با ضلع AB، زاویه‌ای برابر با زاویه‌ی B بسازد و وتر BC را در نقطه‌ی M قطع کند. طول AM کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}BC$ ۲) $\frac{1}{2}BC$

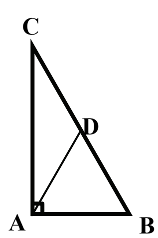
۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}BC$ ۴) $\frac{1}{3}BC$

۷ ـ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC که در آن $A = 90^\circ$ و $AB < AC$ است، ارتفاع AH رسم می‌شود. روی وتر، نقطه‌ی D چنان انتخاب می‌شود که $DH = HB$ و عمود CE بر AD رسم می‌شود. کدام درست است؟

۱) BC نیم‌ساز زاویه‌ی ACE است.   ۲) ED نیم‌ساز زاویه‌ی CEH است.

۳) ED نیم‌ساز زاویه‌ی CEB است.   ۴) هیچ‌یک از این‌ها

۸ ـ در شکل روبه‌رو $A = 90^\circ$ و مثلث ABD متساوی‌الاضلاع است. اگر $AC = 6$ باشد، طول BC کدام است؟



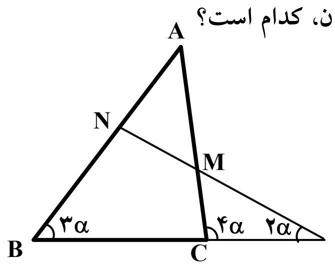
۱) $4\sqrt{3}$

۲) $5\sqrt{3}$

۳) $3\sqrt{3}$

۴) $2\sqrt{3}$

۹ ـ در شکل روبه‌رو، اگر AN=NM، آن‌گاه با توجه به اندازه‌های روی شکل، اندازه‌ی $\angle ANM$ برحسب رادیان، کدام است؟



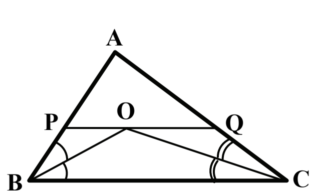
۱) $\frac{3\pi}{7}$

۲) $\frac{9\pi}{14}$

۳) $\frac{5\pi}{7}$

۴) $\frac{11\pi}{14}$

۱۰ ـ در شکل روبه‌رو، O نقطه‌ی برخورد سه نیم‌ساز درونی مثلث ABC است. اگر از O پاره‌خط PQ موازی BC رسم شود، کدام گزینه درست است؟

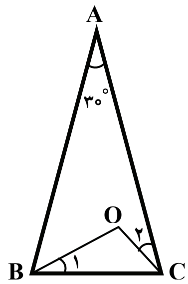


۱) $AP + AQ = PQ$

۲) $BP + BQ = PQ$

۳) $BQ + AP = PQ$

۴) $BP + QC = PQ$



۱۱ ـ اگر در شکل روبه‌رو، داشته باشیم $AB = AC$ و $\angle B_1 = \angle C_2$، آن‌گاه زاویه‌ی $\angle BOC$ چند درجه است؟

۱) 95°

۲) 100°

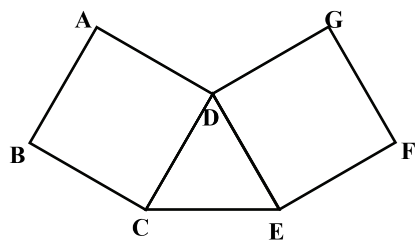
۳) 105°

۴) 110°

۱۲ ـ دو زاویه از مثلثی برابر ۵۰ درجه‌اند، نیم‌ساز زاویه‌ی خارجی یکی از زاویه‌ها با امتداد ضلع مقابل، زاویه‌ای برابر چند درجه می‌سازد؟

۱) 15° ۲) 20° *(آزمایشی سنجش ـ ریاضی ـ ۸۱)*

۳) 25° ۴) 30°



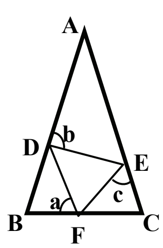
۱۳ ـ در شکل روبه‌رو، CDE مثلث متساوی‌الاضلاع و ABCD و DEFG مربع هستند. اندازه‌ی $\angle GDA$ چند درجه است؟

۱) 90°

۲) 105°

۳) 120°

۴) 135°



۱۴ ـ در شکل روبه‌رو ، مثلث ABC در رأس A متساوی‌الساقین است و در آن مثلث متساوی‌الاضلاع EFD محاط شده است. کدام رابطه درست است؟

۱) $2b = a + c$

۲) $2b = a - c$

۳) $2a = b + c$

۴) $2c = b - a$

۱۵ ـ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) زاویه‌ی $\hat{C} = 34^\circ$ است. زاویه‌ی بین میانه‌ی وارد بر وتر و نیم‌ساز رأس B چه‌قدر است؟

۱) 84° ۲) 85° ۳) 86° ۴) 87°

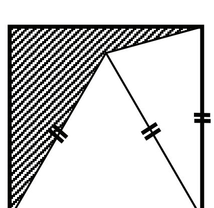
آزمون سوم

۲۵ دقیقه

۱ ـ در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC ضلع BC را از طرف C به‌اندازه‌ی خود تا نقطه‌ی D امتداد می‌دهیم. در مثلث ABD نسبت زاویه‌ها کدام است؟

۱) ۱، ۲ و ۳   ۲) ۱، ۲ و ۴   *(آزمایشی سنجش ـ تجربی ـ ۸۶)*

۳) ۱، ۳ و ۴   ۴) ۲، ۳ و ۵



۲ ـ در شکل مقابل، چهارضلعی مربع است و مثلث‌ها متساوی‌الاضلاع و دیگری متساوی‌الساقین هستند.

بزرگ‌ترین زاویه‌ی چهارضلعی سایه‌زده شده چند درجه است؟   *(آزمایشی سنجش تجربی ـ ۸۶)*

۱) 25°

۲) 240°

۳) 235°

۴) 225°

۳ ـ در مثلثی اندازه‌ی دو زاویه 40° و 80° است. با امتداد ضلع بزرگ‌تر، مثلث متساوی‌الساقینی با ساق ضلع کوچک‌تر از مثلث مفروض می‌سازیم.

کوچک‌ترین زاویه‌ی ایجادشده چند درجه است؟   *(آزمایشی سنجش ـ ریاضی ـ ۸۲)*

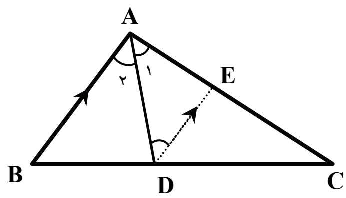
۱) 20° ۲) 25° ۳) 30° ۴) 40°

۴ ــ در مثلث ABC داریم $\hat{B}=\hat{C}$. ضلع AB را از طرف A به‌اندازه‌ی خود تا نقطه‌ی D امتداد می‌دهیم. زاویه‌ی $B\hat{C}D$ چه‌گونه است؟

۱) حاده ۲) منفرجه *(آزمایشی سنجش ــ تجربی ــ ۸۴)*

۳) قائمه ۴) نامشخص

۵ ــ در شکل مقابل $DE \parallel AB$ و AD نیم‌ساز زاویه‌ی A است. کدام تساوی درست است؟ *(آزمایشی سنجش ــ تجربی ــ ۸۸)*



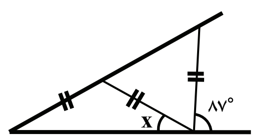
۱) $AD = DB$

۲) $AD = AB$

۳) $EC = DC$

۴) $DE = AE$

۶ ــ در شکل مقابل با توجه به‌اندازه‌های مشخص‌شده، مقدار زاویه‌ی x کدام است؟



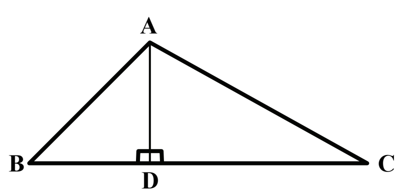
۱) ۲۹° ۲) ۳۰°

۳) ۳۱° ۴) ۳۲°

۷ ــ در مثلث ABC، $\hat{B}=\hat{C}=۵۰°$ است. زاویه‌ی بین میانه‌ی رأس A و ارتفاع رأس B کدام است؟

۱) ۳۰° ۲) ۴۰° ۳) ۵۰° ۴) ۶۰°

۸ ــ در شکل روبه‌رو، $\frac{AB}{AD}=۲$ و $\frac{AC}{AD}=\sqrt{۲}$ است. زاویه‌ی $\angle BAC$ چند برابر زاویه‌ی $\angle ACD$ است؟ *(آزاد ــ ۸۳)*



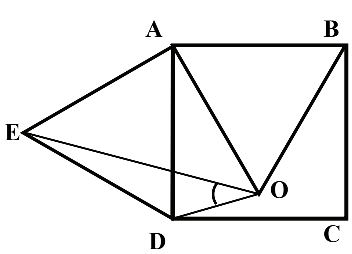
۱) ۳

۲) ۲

۳) $\frac{۷}{۳}$

۴) $\frac{۷}{۲}$

۹ ــ در شکل مقابل، ABCD مربع و مثلث‌های ABO و ADE متساوی‌الاضلاع هستند؛ اندازه‌ی زاویه‌ی $\angle DOE$ چند درجه است؟



۱) ۳۰°

۲) ۲۲/۵°

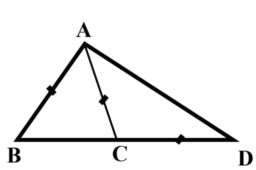
۳) ۱۵°

۴) ۴۵°

۱۰ ــ در مثلث ABC روی ضلع AC، طول AD را برابر AB جدا می‌کنیم طوری که AD و AC هم‌جهت باشند. اگر I نقطه‌ی برخورد AC با عمودمنصف BC باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی $\angle ABI$ برابر کدام زاویه‌ی زیر است؟

۱) $\angle DBC$ ۲) $۲(\angle DBC)$ ۳) $\frac{۱}{۲}(\angle DBC)$ ۴) $\frac{۲}{۳}(\angle DBC)$

۱۱ ــ در شکل روبه‌رو، AC نیم‌ساز زاویه‌ی A و $AB = AC = CD$ است. زاویه‌ی A چند درجه است؟



۱) ۷۵° ۲) ۶۵°

۳) ۶۰° ۴) ۷۲°

۱۲ ــ در مثلث ABD، زاویه‌ی B قائمه است. نقطه‌ی C روی AD به گونه‌ای است که $AB = BC$ و $AC = CD$. زاویه‌ی $\angle DAB$ چند درجه است؟

۱) ۶۷/۵° ۲) ۶۰° ۳) ۴۵° ۴) ۲۲/۵°

۱۳ ــ در چهار ضلعی ABCD، ضلع AB را از طرف B تا نقطه‌ی E امتداد می‌دهیم طوری که $AB = BE$، خط‌های AC و CE رسم شده‌اند تا زاویه‌ی $\angle ACE$ به‌دست آید. برای این که زاویه، قائمه باشد، لازم است که چهارضلعی دارای کدام ویژگی زیر باشد؟

۱) دو زاویه‌اش برابر باشند. ۲) زاویه‌هایش دو به‌دو، برابر باشند. *(مسابقات دبیرستان آمریکا)*

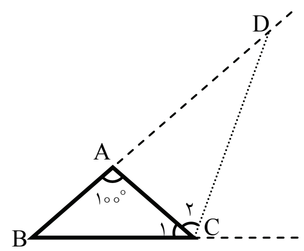
۳) دو ضلعش برابر باشند. ۴) ضلع‌هایش دو به‌دو برابر باشند.

پاسخ‌های پلکان آزمون

پاسخ تست‌های آزمون یکم

۱ ـ ۳ می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین نیم‌ساز خارجی زاویه‌ی رأس با قاعده موازی است، پس اگر گزینه‌ی صفر وجود می‌داشت صحیح بود.

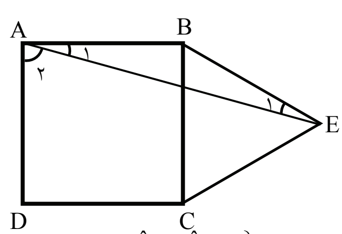
برای پیدا کردن زاویه‌ی حاصل از برخورد نیم‌ساز خارجی B یا C با ضلع مقابل، مطابق شکل روبه‌رو فرض می‌کنیم محل تلاقی نیم‌ساز خارجی C با امتداد ضلع AB، نقطه‌ی D باشد، داریم:



$$\hat{D}+\hat{B}+(\hat{C}_1+\hat{C}_2)=۱۸۰°$$

$$\Rightarrow \hat{D}+۴۰°+(۴۰°+\frac{۱۰۰°+۴۰°}{۲})=۱۸۰° \Rightarrow \hat{D}=۳۰°$$

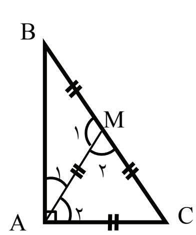
۲ ـ ۱ با توجه به این که مثلث BEC و مربع ABCD در ضلع BC مشترک‌اند و تمامی ضلع‌ها این دو شکل با یک‌دیگر هم‌اندازه‌اند، پس:



$$\left.\begin{matrix} AB=BE \Rightarrow \hat{A}_1=\hat{E} \\ A\hat{B}E=۹۰°+۶۰°=۱۵۰° \end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{A}_1=\frac{۱۸۰°-۱۵۰°}{۲}=۱۵°$$

$$\Rightarrow \hat{A}_2=۹۰°-۱۵°=۷۵°$$

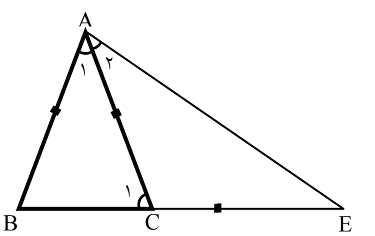
۳ ـ ۳ اگر یکی از زاویه‌های حاده‌ی مثلث قائم‌الزاویه ۵۲° باشد، زاویه‌ی حاده دیگر آن برابر ۳۸° خواهد بود. در ضمن با توجه به این که میانه‌ی وارد بر وتر، نصف وتر است، در شکل مقابل، مثلث‌های AMB و AMC متساوی‌الساقین‌اند، پس:



$M_2=B+A_1=۲B=۲\times ۳۸°=۷۶°$ (زاویه‌ی خارجی مثلث AMB)

۴ ـ ۱ با توجه به این که زاویه‌های مثلث با اعداد ۵، ۳ و ۲ متناسب‌اند و مجموعشان برابر ۱۸۰° است، این زاویه‌ها ۵x، ۳x و ۲x هستند، پس $۲x+۳x+۵x=۱۸۰°$ یا $x=۱۸°$؛ یعنی زاویه‌ها عبارت‌اند از ۹۰°، ۵۴°، ۳۶°، پس مثلث قائم‌الزاویه است و ضلع بزرگ‌تر آن، همان وتر مثلث است و می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه، نسبت میانه‌ی وارد بر وتر به وتر، برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

۵ ـ ۲ در شکل مقابل بزرگ‌ترین مثلث، مثلث ABE است که زاویه‌های آن عبارت‌اند از E ، B و (A_1+A_2).

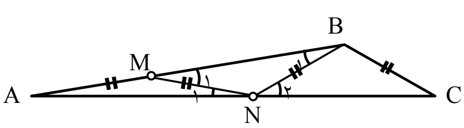


داریم:

$$\hat{A}_1=۴۲° \Rightarrow \hat{B}=\hat{C}_1=\frac{۱۸۰°-۴۲°}{۲}=۶۹°$$

$$\hat{E}=\hat{A}_2=\frac{\hat{C}_1}{۲}=\frac{۶۹°}{۲}=۳۴/۵°$$

۶ ـ ۴ اگر در شکل مقابل، زاویه‌ی A را برابر α در نظر بگیریم، خواهیم داشت:



$AM=MN \Rightarrow A=N_1=\alpha$

ΔAMN زاویه‌ی خارجی $M_1=A+N_1=۲\alpha$

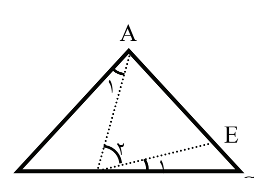
$MN=NB \Rightarrow M_1=B_1=۲\alpha$

ΔANB زاویه‌ی خارجی $N_2=A+B_1=\alpha+۲\alpha=۳\alpha$

$$\left.\begin{matrix} BN=BC \Rightarrow C=N_2=۳\alpha \\ C=۳۰° \end{matrix}\right\} \Rightarrow ۳\alpha=۳۰ \Rightarrow \alpha=۱۰°$$

$$\Rightarrow B_1=۲\times ۱۰°=۲۰°$$

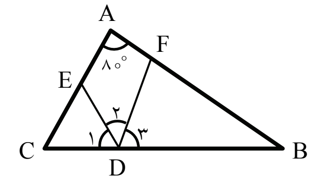
۷ ـ ۴



$$\left.\begin{matrix} \left.\begin{matrix} \hat{E}=\hat{D}_2 \\ \hat{E}=\hat{C}+\hat{D}_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{D}_2=\hat{C}+\hat{D}_1 \Rightarrow \hat{D}_1+\hat{D}_2=۲\hat{D}_1+C=۲۸+C \\ \Delta ABD \text{ زاویه‌ی خارجی } (\hat{D}_1+\hat{D}_2)=A_1+B \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$۲۸+\hat{C}=A_1+\hat{B} \xRightarrow{\hat{B}=\hat{C}} \hat{A}_1=۲۸°$$

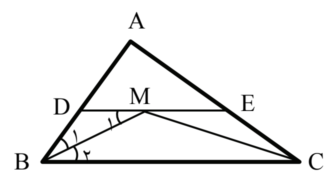
۸ ـ (۳)



$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} C = ۱۸۰ - ۲D_۱ \\ B = ۱۸۰ - ۲D_۳ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = ۳۶۰ - ۲(\hat{D}_۱ + \hat{D}_۳) \\ \hat{A} = ۸۰° \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = ۱۰۰° \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$۱۰۰° = ۳۶۰° - ۲(\hat{D}_۱ + \hat{D}_۳) \Rightarrow \hat{D}_۱ + \hat{D}_۳ = \frac{۲۶۰°}{۲} = ۱۳۰° \Rightarrow \hat{D}_۲ = ۵۰°$$

۹ ـ (۱)

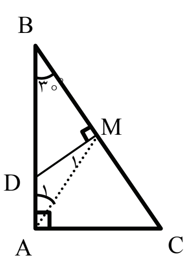


$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r} DE \parallel BC \\ \text{مورب } BM \end{array}\right\} \Rightarrow M_۱ = B_۲ \\ \text{نیم‌ساز } BM \Rightarrow B_۱ = B_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow M_۱ = B_۱ \Rightarrow DM = DB \\ ME = EC \text{ به همین‌ترتیب ثابت می‌شود.} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\text{محیط مثلث } \overset{\Delta}{ADE} = AD + DM + ME + AE$$

$$= AD + DB + EC + AE = AB + AC = ۴ + ۵ = ۹$$

۱۰ ـ (۲) اگر میانه‌ی وارد بر وتر را رسم کنیم، خواهیم داشت:

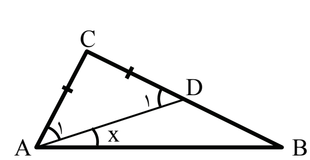


$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} \text{میانه‌ی وارد بر وتر} AM = \frac{BC}{۲} = BM \Rightarrow A_۱ = B = ۳۰° \\ \angle BMA = ۱۲۰° \Rightarrow ۹۰° + \hat{M}_۱ = ۱۲۰° \Rightarrow \hat{M}_۱ = ۳۰° \end{array}\right\} \Rightarrow AD = DM \\ \hat{B} = ۳۰° \Rightarrow DM = \frac{BD}{۲} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow DM = AD = \frac{BD}{۲} \Rightarrow AB = AD + BD = DM + ۲DM = ۳DM$$

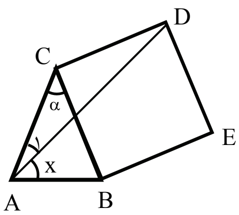
$$\Rightarrow DM = \frac{AB}{۳}$$

۱۱ ـ (۲) اگر زاویه‌ی BAD را x در نظر بگیریم، داریم:



$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} AC = CD \rightarrow A_۱ = D_۱ \\ \text{زاویه‌ی خارجی } D_۱ = B + x \end{array}\right\} \Rightarrow A_۱ = B + x \Rightarrow \\ A_۱ = A - x = B + x \Rightarrow A - B = ۲x \\ \text{طبق فرض}: A - B = ۳۰° \end{array}\right\} \Rightarrow ۲x = ۳۰° \Rightarrow x = ۱۵°$$

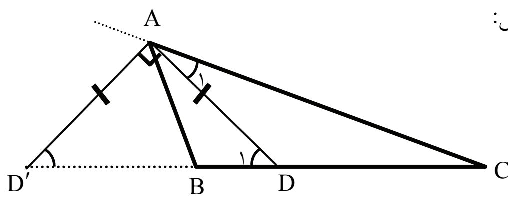
۱۲ ـ (۲) اگر زاویه‌ی رأس مثلث ACB را برابر α در نظر بگیریم با توجه به متساوی‌الساقین بودن مثلث‌های ACB و ACD داریم:



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ACB}: x + A_۱ = \frac{۱۸۰ - \alpha}{۲} = ۹۰ - \frac{\alpha}{۲} \\ \overset{\Delta}{ACD}: A_۱ = D = \frac{۱۸۰ - (۹۰ + \alpha)}{۲} = ۴۵ - \frac{\alpha}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$x = A - A_۱ = (۹۰ - \frac{\alpha}{۲}) - (۴۵ - \frac{\alpha}{۲}) = ۴۵°$$

۱۳ ـ (۳) با توجه به این که نیم‌ساز درونی و بیرونی هر رأس مثلث بر هم عمودند، مثلث ADD' قائم‌الزاویه و البته طبق فرض متساوی‌الساقین نیز می‌باشد، پس:

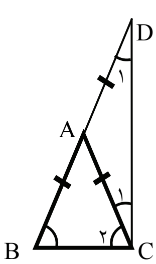


$$\left.\begin{array}{l} \hat{D}_۱ = \hat{D}' = ۴۵° \\ \text{زاویه‌ی خارجی } \hat{D}_۱ = A_۱ + C = \frac{A}{۲} + C \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{\hat{A}}{۲} + \hat{C} = ۴۵° \Rightarrow \hat{A} + ۲\hat{C} = ۹۰° \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = ۹۰° - \hat{C}$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۹۰° - \hat{C} + \hat{B} \Rightarrow ۱۸۰° = ۹۰° - \hat{C} + \hat{B} \Rightarrow \hat{B} - \hat{C} = ۹۰°$$

۱۴ ـ (۱) در شکل مقابل ساق AB را به‌اندازه‌ی خودش امتداد داده‌ایم تا به نقطه‌ی D برسیم. از D به C وصل می‌کنیم، داریم:



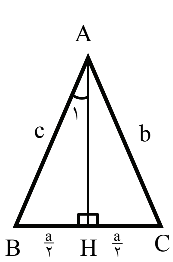
$$\left.\begin{array}{l} AC = AD \Rightarrow \hat{C}_۱ = \hat{D}_۱ \\ AC = AB \Rightarrow \hat{C}_۲ = \hat{B} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\hat{C} + \hat{D} + \hat{B} = \hat{C}_۲ + \hat{C}_۱ + \hat{C}_۱ + \hat{C}_۲ = ۱۸۰°$$

$$\Rightarrow ۲(\hat{C}_۱ + \hat{C}_۲) = ۱۸۰° \Rightarrow \hat{C}_۱ + \hat{C}_۲ = ۹۰°$$

$\Rightarrow$ مثلث BCD قائم‌الزاویه است.

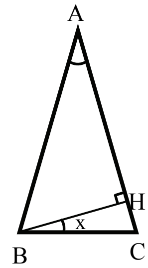
۱۵ ـ (۴) می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع، نیم‌ساز و میانه‌ی وارد بر قاعده بر هم منطبق هستند، با رسم ارتفاع AH در شکل مقابل و با توجه به این که منظور از a، b و c به‌ترتیب ضلع‌های BC، AC و AB است، در شکل مقابل داریم:



$$A_۱ = \frac{A}{۲} \Rightarrow \sin\frac{A}{۲} = \sin A_۱ = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{BC}{۲}}{AB} = \frac{\frac{a}{۲}}{c} = \frac{a}{۲c}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a}\sin\frac{A}{۲} = \frac{b}{a} \times \frac{a}{۲c} = \frac{b}{۲c} = \frac{۱}{۲}$$

۱۶ – (۳) طبق فرض، ارتفاع BH نصف ساق مثلث است، بنابراین داریم:



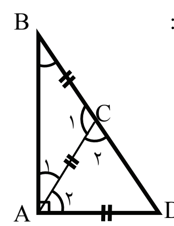
$$BH=\frac{۱}{۲}AB \Rightarrow \hat{A}=۳۰^\circ \Rightarrow \hat{C}=\frac{۱۸۰^\circ-۳۰^\circ}{۲}=۷۵^\circ$$

$$\Rightarrow x=۹۰^\circ-۷۵^\circ=۱۵^\circ$$

پاسخ تست‌های آزمون دوم

۱ – (۳) روشن است مثلث مورد نظر قائم‌الزاویه است و در مثلث قائم‌الزاویه، زاویه‌ی بین میانه و ارتفاع وارد بر وتر، برابر تفاضل دو زاویه‌ی دیگر مثلث است، پس در این مثلث زاویه‌ی بین میانه و ارتفاع وارد بر بزرگ‌ترین ضلع، برابر $۵۵^\circ-۳۵^\circ=۲۰^\circ$ می‌باشد.

۲ – (۳) با توجه به برابری دو زاویه‌ی B و $A_۱$ داریم:

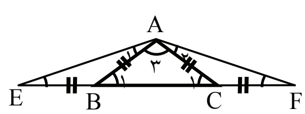


$$\left.\begin{array}{r} \text{زاویه‌ی خارجی } C_۲=B+A_۱=۲B \\ AC=AD \Rightarrow C_۲=D \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow ۲B=D \xrightarrow{B+D=۹۰^\circ} D=۶۰^\circ,\ B=۳۰^\circ$$

$$\Rightarrow C_۱=۱۸۰^\circ-۲\times۳۰^\circ=۱۲۰^\circ$$

۳ – (۳) با توجه به این که زاویه‌های مثلث ABC با اعداد ۳، ۱ و ۱ متناسب‌اند، آن‌ها را به‌صورت ۳α، α و α در نظر می‌گیریم. داریم:



$$۳\alpha+\alpha+\alpha=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{۱۸۰^\circ}{۵}=۳۶^\circ \Rightarrow \hat{B}_۱=\hat{C}_۱=۳۶^\circ, \hat{A}_۳=۱۰۸^\circ$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{زاویه‌ی خارجی } \hat{B}_۱=\hat{A}_۱+\hat{E}=۳۶^\circ \\ BE=BA \Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{E} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{E}=۱۸^\circ$$

بنابراین زاویه‌های مثلث AEF عبارت‌اند از:

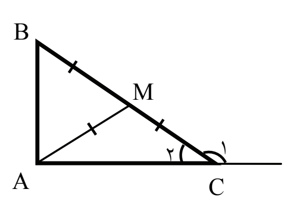
$$E\hat{A}F=۱۸^\circ+۱۰۸+۱۸^\circ=۱۴۴^\circ$$

$$A\hat{E}F=۱۸^\circ$$

$$A\hat{F}E=۱۸^\circ$$

پس نسبت بزرگ‌ترین زاویه‌ی آن به کوچک‌ترین زاویه‌اش، برابر $\frac{۱۴۴}{۱۸}=۸$ است.

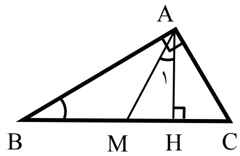
۴ – (۲) از این که $AM=\frac{BC}{۲}$، نتیجه می‌گیریم مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است، چرا که تنها در مثلث قائم‌الزاویه است که میانه، نصف ضلع مقابلش می‌باشد، بنابراین داریم:



$$\left.\begin{array}{r} \text{زاویه‌ی خارجی } \hat{C}_۱=\hat{A}+\hat{B}=۹۰^\circ+\hat{B} \\ \text{طبق فرض } \hat{C}_۱=\frac{۵}{۲}\hat{B} \end{array}\right\} \Rightarrow ۹۰^\circ+\hat{B}=\frac{۵}{۲}\hat{B}$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۲}\hat{B}=۹۰^\circ \Rightarrow \hat{B}=۶۰^\circ \Rightarrow C_۲=۳۰^\circ$$

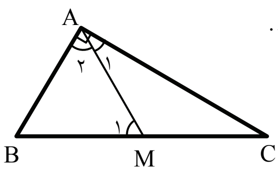
۵ – (۴) با توجه به این که در مثلث قائم‌الزاویه، زاویه‌ی بین میانه و ارتفاع وارد بر وتر، برابر تفاضل دو زاویه‌ی حاده‌ی مثلث است و $\hat{C}=۶۰^\circ$، داریم:



$$\hat{A}_۱=\hat{C}-\hat{B}=۶۰^\circ-۳۰^\circ=۳۰^\circ$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{ضلع مقابل به زاویه‌ی } ۳۰^\circ\ MH=\frac{AM}{۲} \\ \text{میانه‌ی وارد بر وتر } AM=\frac{BC}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow MH=\frac{AM}{۲}=\frac{BC}{۴}$$

۶ – (۲) چون $M_۱=B$، پس $AB=AM$. از طرفی:

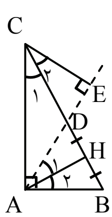


$$\left.\begin{array}{r} \text{زاویه‌ی خارجی AMC } M_۱=C+A_۱ \Rightarrow A_۱=B-C \\ A_۲=\frac{۱۸۰^\circ-B}{۲}=۹۰^\circ-\frac{B}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$A_۱+A_۲=۹۰ \Rightarrow ۹۰+\frac{B}{۲}-C=۹۰ \Rightarrow B=۲C$$

و چون $B+C=۹۰^\circ$، پس $B=۶۰^\circ$ و $C=۳۰^\circ$، پس $AM=AB=\frac{BC}{۲}$.

۷ – (۱) چون در مثلث ADB ارتفاع و میانه بر هم منطبق‌اند این مثلث متساوی‌الساقین است. پس AH نیم‌ساز آن نیز می‌باشد؛ یعنی $A_۱=A_۲$ و چون $A_۲$ متمم B است، پس با متمم آن، یعنی $C_۱$ برابر است، پس $A_۱=A_۲=C$.



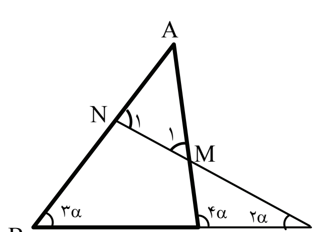
از طرفی در مقایسه‌ی زاویه‌های دو مثلث AHD و CDE چون دو زاویه متقابل به رأس و دو زاویه ۹۰° وجود دارند باید زاویه‌ی سوم آن‌ها نیز برابر باشد؛ یعنی $C_۲=A_۱$، پس $C_۲$ نیز با $C_۱$ برابر است، در نتیجه BC نیم‌ساز زاویه‌ی ACE است.

۸ – (۱)

$$\text{متساوی‌الاضلاع } \overset{\Delta}{ABD} \Rightarrow \hat{B}=۶۰^\circ \Rightarrow \sin\hat{B}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{BC}=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \frac{۶}{BC}=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow BC=\frac{۱۲}{\sqrt{۳}}=۴\sqrt{۳}$$

۹ – (۳)



$$\text{زاویه‌ی خارجی } C=A+B \Rightarrow ۴\alpha=A+۳\alpha \Rightarrow A=\alpha$$

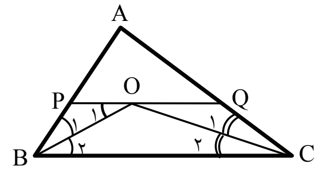
$$\text{زاویه‌ی خارجی } N_۱=۳\alpha+۲\alpha=۵\alpha$$

$$AN=NM \Rightarrow M_۱=A=\alpha$$

$$\hat{A}+\hat{N}_۱+\hat{M}_۱=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha+۵\alpha+\alpha=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha=\frac{۱۸۰^\circ}{۷}$$

$$\Rightarrow \hat{N}_۱=۵\times\frac{۱۸۰^\circ}{۷}=\frac{۵\pi}{۷}$$

۱۰ - ۴

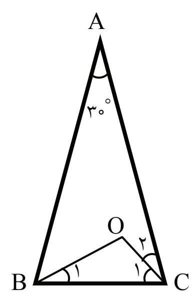


$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}PQ \parallel BC\\ \text{مورب } BO\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O}_۱ = \hat{B}_۲\\ \text{نیمساز است } BO \Rightarrow \hat{B}_۲ = \hat{B}_۱\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O}_۱ = \hat{B}_۱ \Rightarrow BP = PO$$

$QC = OQ$ به همین ترتیب ثابت می‌شود. $\Rightarrow$

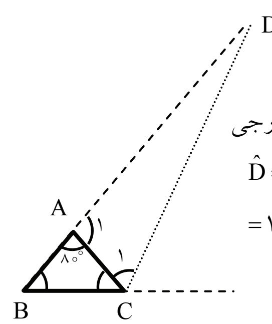
$BP + QC = PO + OQ = PQ$

۱۱ - ۳



$$\hat{O} = ۱۸۰° - \hat{B}_۱ - \hat{C}_۱$$
$$= ۱۸۰° - \hat{C}_۲ - \hat{C}_۱ = ۱۸۰° - \hat{C}$$
$$= ۱۸۰° - (\frac{۱۸۰ - ۳۰°}{۲}) = ۱۸۰° - ۷۵° = ۱۰۵°$$

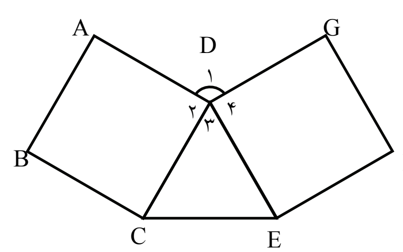
۱۲ - ۱



نصف زاویه‌ی خارجی $\hat{C}_۱ = \frac{۸۰° + ۵۰°}{۲} = ۶۵°$

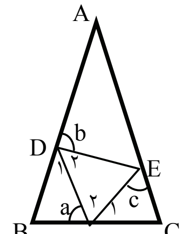
$$\hat{D} = ۱۸۰° - \hat{C}_۱ - \hat{A}_۱$$
$$= ۱۸۰° - ۶۵° - ۱۰۰° = ۱۵°$$

۱۳ - ۳



$$\hat{D}_۱ = ۳۶۰° - \hat{D}_۲ - \hat{D}_۳ - \hat{D}_۴ = ۳۶۰° - ۹۰° - ۶۰° - ۹۰° = ۱۲۰°$$

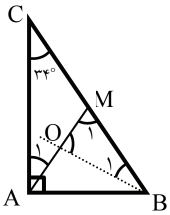
۱۴ - ۳ اگر دو زاویه‌ی B و C را برابر β در نظر بگیریم، با توجه به این که زاویه‌های $D_۲$ و $F_۲$ برابر $۶۰°$ هستند، داریم:



$$\left.\begin{array}{l} b + D_۱ = ۱۲۰° \Rightarrow b + (۱۸۰° - \beta - a) = ۱۲۰° \Rightarrow b - a = \beta - ۶۰°\\ a + F_۱ = ۱۲۰° \Rightarrow a + (۱۸۰ - \beta - c) = ۱۲۰° \Rightarrow a - c = \beta - ۶۰°\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$b - a = a - c \Rightarrow b + c = ۲a$$

۱۵ - ۱

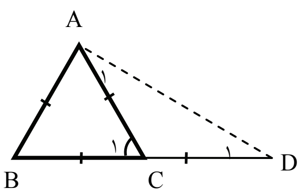


$$\left.\begin{array}{l}\hat{C} = ۳۴° \Rightarrow \hat{B} = ۵۶° \Rightarrow \hat{B}_۱ = \frac{۵۶°}{۲} = ۲۸°\\ AM = \frac{BC}{۲} = CM \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{C} = ۳۴° \Rightarrow \hat{M}_۱ = ۳۴° + ۳۴° = ۶۸°\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\hat{O} = ۱۸۰° - \hat{M}_۱ - \hat{B}_۱ = ۱۸۰° - ۶۸° - ۲۸° = ۸۴°$$

پاسخ تست‌های آزمون سوم

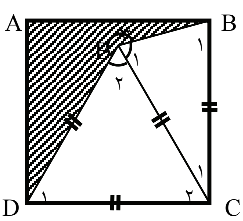
۱ - ۱



$$\left.\begin{array}{l}\text{زاویه‌ی خارجی } \hat{C}_۱ = \hat{A}_۱ + \hat{D}_۱ = ۶۰°\\ \hat{A}_۱ = \hat{D}_۱\end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{D}_۱ = ۳۰°$$

بنابراین زاویه‌های مثلث ABD عبارت‌اند از ۹۰°، ۶۰° و ۳۰°، که نسبت آن برابر است با ۳، ۲ و ۱.

۲ - ۴ در شکل مقابل، بزرگ‌ترین زاویه‌ی چهارضلعی ABED زاویه‌ی $E_۳$ است. با توجه به متساوی‌الساقین بودن مثلث EBC و متساوی‌الاضلاع بودن مثلث DEC داریم:

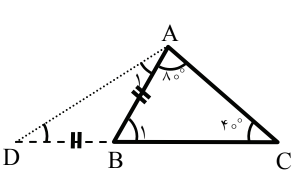


$$\left.\begin{array}{l}\hat{E}_۱ = \hat{B}_۱ \Rightarrow \hat{E}_۱ = \frac{۱۸۰° - \hat{C}_۱}{۲} = ۹۰° - \frac{\hat{C}_۱}{۲}\\ \hat{E}_۲ = \hat{D}_۲ \Rightarrow \hat{E}_۲ = \frac{۱۸۰ - \hat{C}_۲}{۲} = ۹۰° - \frac{\hat{C}_۲}{۲}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \hat{E}_۱ + \hat{E}_۲ = ۱۸۰ - (\frac{\hat{C}_۱ + \hat{C}_۲}{۲}) = ۱۸۰° - \frac{۹۰°}{۲} = ۱۳۵°$$

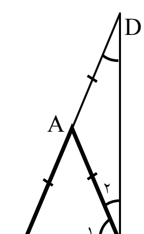
$$\Rightarrow \hat{E}_۳ = ۳۶۰° - ۱۳۵° = ۲۲۵°$$

۳ - ۳ با توجه به شکل مقابل داریم:



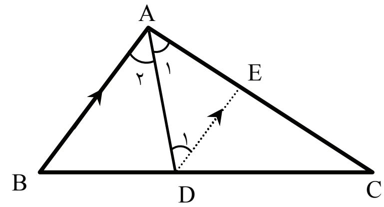
$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_۱ + \hat{D} = \hat{B}_۱\\ \hat{A}_۱ = \hat{D}\end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{D} = \frac{\hat{B}_۱}{۲} = ۳۰°$$

۴ - ۳ با توجه به شکل مقابل داریم:



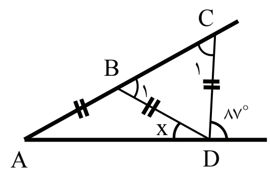
$$\left.\begin{array}{l}AC = AD \Rightarrow C_۲ = D\\ \text{طبق فرض : } C_۱ = B\\ \hat{B} + \hat{C}_۱ + \hat{C}_۲ + \hat{D} = ۱۸۰°\end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow \hat{C}_۱ + \hat{C}_۱ + \hat{C}_۲ + \hat{C}_۲ = ۱۸۰°$$
$$\Rightarrow \hat{C}_۱ + \hat{C}_۲ = \frac{۱۸۰°}{۲} = ۹۰°$$

۵ - ④



$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}AB \parallel DE\\ \text{مورب } AD\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}_۲=\hat{D}_۱\\ \text{نیم‌ساز است. } AD \Rightarrow \hat{A}_۲=\hat{A}_۱\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{D}_۱=\hat{A}_۱\Rightarrow AE=ED$$

۶ - ① مطابق شکل روبه‌رو داریم:



متساوی الساقین است $ABD \Rightarrow \hat{A}=x$

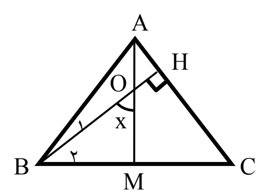
$\Rightarrow \hat{B}_۱ = x+x = ۲x$

متساوی الساقین است $BDC \Rightarrow \hat{B}_۱=\hat{C}_۱$

$\Rightarrow \hat{C}_۱ = ۲x$

$$۸۷^\circ = \hat{C}_۱+\hat{A} = ۲x + x \Rightarrow x = \frac{۸۷^\circ}{۳} = ۲۹^\circ$$

۷ - ③ با توجه به این که مثلث، در رأس A متساوی‌الساقین است، میانه‌ی AM، ارتفاع نیز می‌باشد، پس مثلث BOM قائم‌الزاویه است و داریم:

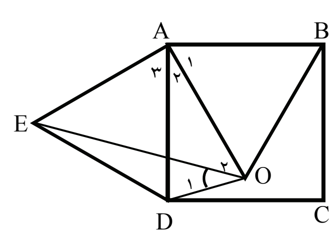


$$\hat{B}=\hat{C}=۵۰^\circ \Rightarrow \hat{A}=۸۰^\circ$$
$$\hat{B}_۱+\hat{A}=۹۰^\circ \Rightarrow \hat{B}_۱ = ۹۰^\circ - ۸۰^\circ = ۱۰^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{B}_۲ = ۵۰^\circ - ۱۰^\circ = ۴۰^\circ \Rightarrow x = ۹۰^\circ - ۴۰^\circ = ۵۰^\circ$$

۸ - ④ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ACD داریم $AC = ۲AD$، پس $\angle C = ۳۰^\circ$ و در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABD، داریم $AB = \sqrt{۲}AD$، پس $\angle B = ۴۵^\circ$. در مثلث ABC خواهیم داشت $\angle BAC = ۱۰۵^\circ$، بنابراین:

$$\frac{\angle BAC}{\angle ACD} = \frac{۶۰+۴۵}{۳۰} = \frac{۷}{۲}$$

۹ - ① روشن است در شکل مقابل، تمامی ضلع‌های مثلث‌های ABO و ADE و مربع ABCD هم‌اندازه هستند، داریم:

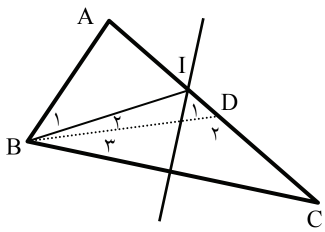


$$\hat{A}_۱ = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۲ = ۳۰^\circ \Rightarrow \hat{O}_۱+\hat{O}_۲ = \frac{۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ}{۲} = ۷۵^\circ$$

متساوی‌الساقین است. $\overset{\Delta}{AEO} \Rightarrow \hat{O}_۲ = \frac{۱۸۰^\circ - (\hat{A}_۲+\hat{A}_۳)}{۲} \Rightarrow$

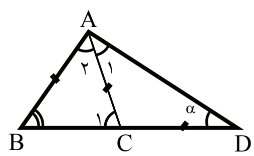
$$\hat{O}_۲ = \frac{۱۸۰^\circ - (۳۰^\circ + ۶۰^\circ)}{۲} = ۴۵^\circ \Rightarrow \hat{O}_۱ = ۷۵^\circ - ۴۵^\circ = ۳۰^\circ$$

۱۰ - ② چون I روی عمودمنصف BC است، پس $B_۲+B_۳=C$ (۱) و چون $AD = AB$، بنابراین داریم $D_۱ = B_۱ + B_۲$ (۲). از طرفی $D_۱$ زاویه‌ی خارجی مثلث BDC است، پس: $\hat{D}_۱ = \hat{B}_۳ + \hat{C}$ (۳)



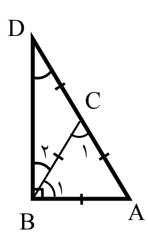
$$(۱),(۲),(۳) \Rightarrow \hat{B}_۱+\hat{B}_۲ = \hat{B}_۳+\hat{B}_۲+\hat{B}_۳$$
$$\Rightarrow \hat{B}_۱ = ۲\hat{B}_۳$$
$$\Rightarrow \angle ABI = ۲\angle DBC$$

۱۱ - ④ اگر زاویه‌ی D را برابر α در نظر بگیریم، خواهیم داشت:



$$\left.\begin{array}{r}\hat{A}_۱=\hat{D}=\alpha \Rightarrow \hat{A}_۲=\alpha\\ \text{زاویه‌ی خارجی } \hat{C}_۱=\hat{A}_۱+\hat{D}=۲\alpha \Rightarrow \hat{B}=۲\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow$$
$$\hat{B}+\hat{A}_۲+\hat{A}_۱+\hat{D} = ۲\alpha+\alpha+\alpha+\alpha = ۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow \alpha = \frac{۱۸۰^\circ}{۵} = ۳۶^\circ$$
$$\hat{A} = \hat{A}_۱+\hat{A}_۲ = \alpha+\alpha = ۷۲^\circ$$

۱۲ - ② با توجه به این که در مثلث قائم‌الزاویه، میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتر است، داریم:



$$\left.\begin{array}{r}AC = \frac{AD}{۲} = AC = CD\\ \text{طبق فرض}: AB = BC\end{array}\right\}\Rightarrow AB = BC = AC$$

بنابراین مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است، پس $\angle DAB = ۶۰^\circ$ است.

۱۳ - ③ روشن است در مثلث ACE، پاره‌خط BC میانه است. برای این که این مثلث در رأس C قائم‌الزاویه باشد، باید میانه‌ی CB نصف ضلع مقابلش باشد؛ یعنی $CB = \frac{AE}{۲} = AB$، پس در چهارضلعی ABCD دو ضلع AB و BC باید برابر باشند.