

۱- الف - سری فوریه تابع $f(x) = x$, $-\pi \leq x \leq \pi$ را محاسبه کنید.

ب- به کمک قسمت الف و انتگرالگیری سری فوریه $g(x) = x^2$, $-\pi \leq x \leq \pi$ را محاسبه کنید.

$$\text{ج) به کمک قسمت ب نشان دهید که } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

توجه: همه توابع را در این سوال متناوب با دوره تناوب 2π در نظر بگیرید

۲- به کمک اتحاد پارسوال انتگرال $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^4 x dx$ را حساب کنید.

۳- تابع $f(x)$, $x \geq 0$ را چنان بیابید که در معادله انتگرال $\int_0^{\infty} f(x) \sin(wx) dx = \begin{cases} w, & 0 \leq w < 1 \\ 0, & w > 1 \end{cases}$ صدق کند.

۴- توضیح دهید چرا انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin(wx - wv) dv dw$ در صورت وجود برابر صفر است.

۵- PDE زیر را به کمک روش های معادلات دیفرانسیل معمولی حل کنید.

$$t \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} = x^2$$

۶- مسئله زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$\frac{\partial w}{\partial x} + x \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad w(x, 0) = 0, \quad w(0, t) = t, \quad t \geq 0$$

۷- معادله گرمای زیر را به کمک سریهای فوریه حل کنید.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

۸- PDE زیر را در نظر بگیرید و به کمک روش مشخصه ها، تغییر متغیرهای مناسب v, w را معرفی کنید.

$$xu_{xx} - yu_{xy} = 0$$

۹- توضیح دهید در معادله زیر چگونه می توان B_{mn} ها را تعیین نمود.

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y = f(x, y)$$

۱۰- یک نخ کشسان را که در لحظه $t = 0$ روی محور x ها قرار دارد در نظر بگیرید. اگر فرض کنیم معادله حرکت نقطه x در لحظه t به صورت $u(x, t)$ باشد.

الف) اگر به شما گفته شود که شتاب در لحظه $t = 0$ برای این نخ (تار) برابر $f(x)$ است. این شرط را به صورت ریاضی چگونه اعمال می کنید؟

ب) معادله حرکت این نخ به صورت $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ است، که اگر آن را به کمک روش تفکیک متغیرها حل کنیم یعنی

قرار دهیم $u(x, t) = F(x)G(t)$ آنگاه ما به معادلاتی به صورت زیر می رسیم:

$$\frac{G''(t)}{c^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = k$$

فرض کنید ما هیچ اطلاعی از وضعیت نخ در انتهاها نداریم فقط این را می دانیم که بعد از شروع نوسان هیچ نیروی خارجی بر نخ اثر نمی کند با این فرضیات توضیح دهید که چرا باید k یک عدد منفی باشد؟

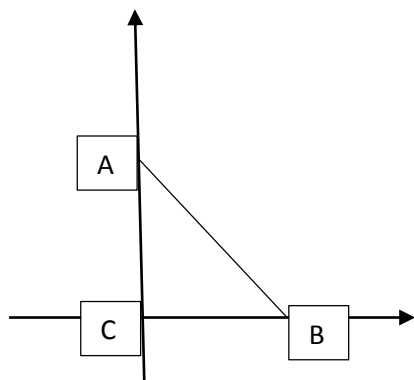
۱۱- یک پوسته در حال نوسان را در نظر بگیرید که در روی مربع واحد در حال نوسان است و $u(x, y, t)$ مقعیت نقطه (x, y) را در لحظه t نمایش می دهد. تعبیر فیزیکی هر یک از معادلات زیر را توضیح دهید:

$$u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, t\right) = 0, \forall t \geq 0 \quad \text{الف}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(0,y,0)} = 5 \quad \text{ب}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, y, t) = 0 \quad \text{ج}$$

۱۲- یک ورقه فلزی که دو طرف آن عایق است را به صورت زیر در نظر بگیرید.



فرض کنید دما در هر نقطه (x, y) و در زمان t برابر $u(x, y, t)$ باشد.

الف) اگر به شما گفته شود که روی ضلع CB دما همواره ثابت و برابر ۰ درجه است این موضوع را به صورت ریاضی چگونه اعمال می کنید؟

ب) اگر به شما گفته شود ضلع AC عایق است این موضوع را به صورت ریاضی چگونه اعمال می کنید؟

ج) اگر به شما گفته شود که ضلع AB عایق است این موضوع را شما به صورت ریاضی چگونه اعمال می کنید؟

د) آیا این مسئله می تواند جوابی به صورت $u(x, y, t) = \sin(t) \sin(xy)$ داشته باشد؟