



پیش آزمون مستمر تمرین سری ۸



۱ اگر سرعت پله برقی را v_1 فرض کنیم و فاصله بین آن دو نقطه را Δx فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$v_1 = \frac{\Delta x}{0.5}$$

و همین طور اگر در پله ساکن، سرعت شخص را v_2 فرض کنیم:

$$v_2 = \frac{\Delta x}{1}$$

در حالت سوم، سرعت انتقال شخص برابر خواهد شد با:

$$v_3 = v_1 + v_2$$

بنابراین می توان نوشت:

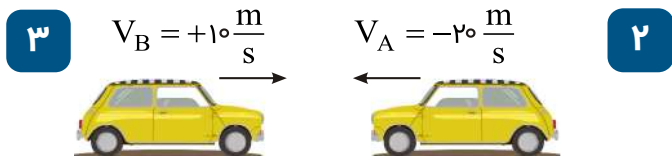
$$\Delta t_3 = \frac{\Delta x}{v_3} = \frac{\Delta x}{v_1 + v_2} = \frac{\Delta x}{\frac{\Delta x}{0.5} + \frac{\Delta x}{1}} \Rightarrow \Delta t_3 = \frac{1}{\frac{1}{0.5} + \frac{1}{1}}$$

$$\Rightarrow \Delta t_3 = \left(\frac{1}{2+1}\right) = \frac{1}{3} \text{ min}$$

با استفاده از تعریف سرعت متوسط می توان نوشت:

$$v_{av} = \frac{\sum \Delta x_i}{\sum \Delta t_i} \Rightarrow v_{av} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 - \Delta x_3}{\frac{\Delta x_1}{v_1} + \frac{\Delta x_2}{v_2} + \frac{\Delta x_3}{v_3}}$$

$$v_{av} = \frac{40 + 30 - 5}{\frac{40}{4} + \frac{30}{3} + \frac{5}{1}} \Rightarrow v_{av} = \frac{65}{25} = 2.6 \text{ m/s}$$



$$x_A = x_B$$

$$\Rightarrow -20t + 600 = +10t$$

$$\Rightarrow 30t = 600 \Rightarrow t = 20 \text{ s}$$

۴ چون فاصله دو شهر ۱ کیلومتر و نقطه شروع حرکت متحرک B برابر با $x_{0B} = 600 \text{ m}$ است، بنابراین نقطه شروع حرکت متحرک A برابر با $x_{0A} = -400 \text{ m}$ است. در لحظه t هر دو متحرک در مبدأ محور x به هم می رسند، بنابراین:

$$\Delta x_A = v_A t \Rightarrow 400 = 20t \Rightarrow t = 20 \text{ s}$$

سرعت پیوسته منفی است. شتاب را حساب می کنیم.

$$\begin{cases} v = at + v_0 \\ v = -\frac{1}{5}t - 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{5} \Rightarrow a < 0 \\ v = -20 \end{cases}$$

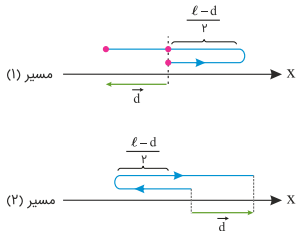
شتاب و سرعت پیوسته منفی هستند یعنی هم علامت هستند، پس حرکت پیوسته تندشونده است.

گزینه ۴

۵

در حرکت کندشونده، بردار شتاب متوسط و بردار جابه‌جایی در خلاف جهت هم هستند؛ بنابراین گزینه "۲" نادرست است. بقیه گزینه‌ها، عبارت‌های درستی را بیان می‌کنند.

می‌توان دو حالت زیر را برای حرکت متحرک در نظر گرفت.



باتوجه به مسیره‌های رسم‌شده، می‌توان نوشت:

$$\left. \begin{array}{l} \text{مسیر (۱):} \\ \text{اندازه جابه‌جایی در جهت محور} = \frac{\ell-d}{2} \\ \text{اندازه جابه‌جایی خلاف جهت محور} = \frac{\ell-d}{2} + d = \frac{\ell+d}{2} \end{array} \right\} \xrightarrow{d=\frac{\ell}{2}} \frac{\text{جابه‌جایی هم‌جهت محور}}{\text{جابه‌جایی خلاف جهت}} = \frac{d}{2d} = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{مسیر (۲):} \\ \text{اندازه جابه‌جایی در جهت محور} = \frac{\ell-d}{2} + d \\ \text{اندازه جابه‌جایی خلاف جهت محور} = \frac{\ell-d}{2} \end{array} \right\} \xrightarrow{d=\frac{\ell}{2}} \frac{\text{جابه‌جایی هم‌جهت محور}}{\text{جابه‌جایی خلاف جهت}} = \frac{2d}{d} = 2$$

چون شیب خط نمودار سرعت-زمان برای هر دو متحرک ثابت است، بنابراین شتاب متوسط و لحظه‌ای با هم برابر است و داریم:

$$(a_{av})_A = \frac{0-v}{t-0} \Rightarrow |(a_{av})_A| = \frac{v}{t}$$

$$(a_{av})_B = \frac{0 - (-\frac{v}{2})}{\frac{2}{3}t - 0} \Rightarrow |(a_{av})_B| = \frac{3v}{4t} \Rightarrow |(a_{av})_A| > |(a_{av})_B|$$

شتاب متوسط در یک حرکت از رابطه $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ به دست می‌آید. لذا برای تعیین شتاب متوسط بین دو لحظه $t_1 = 2s$ و $t_2 = 12s$ ، باید سرعت متحرک را در این دو لحظه به دست آورد.

در بازه زمانی ۵s تا ۱۵s و ۱۴s تا ۱۵s حرکت با شتاب ثابت است. بنابراین شتاب این حرکت‌ها برابر شیب نمودار $v-t$ است. در بازه زمانی ۵s تا ۱۴s:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10-0}{5-0} = 2 \text{ m/s}^2$$

$$v_2 = at_2 + v_0 = 2 \times 2 + 0 = 4 \text{ m/s}$$

در بازه زمانی ۱۵s تا ۱۴s:

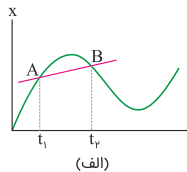
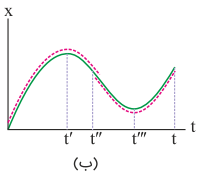
$$a'_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0-10}{14-15} = -\frac{10}{1} \text{ m/s}^2$$

برای نوشتن معادله سرعت v_{12} ، فرض می‌کنیم $t = 15s$ مبدأ زمان باشد، لذا زمان را در رابطه سرعت، $2s$ وارد می‌کنیم:

$$v_{12} = at'_2 + v_{10} = -\frac{10}{1} \times 2 + 10 = 5 \text{ m/s}$$

اکنون شتاب متوسط بین دو لحظه $t = 2s$ و $t = 12s$ را محاسبه می‌کنیم

$$a_{av} = \frac{v_{12} - v_2}{t_{12} - t_2} = \frac{5 - 4}{12 - 2} = \frac{1}{10} \text{ m/s}^2$$



با توجه به نمودار "الف" سرعت متوسط بین دو لحظه t_1 ، t_2 برابر شیب خط AB است.

با توجه به خطوط مماس رسم شده در لحظات مختلف در نمودار "ب" در بازه‌های $(0, t')$ ، (t', t'') اندازه شیب خط

مماس از مقداری بزرگتر از شیب خط AB شروع شده و به صفر می‌رسد. بنابراین در هر یک از این بازه‌ها یک لحظه یافت می‌شود که اندازه شیب خط مماس با شیب خط AB برابر باشد.

همچنین در بازه‌های در بازه‌های (t', t'') ، (t'', t''') اندازه شیب خط مماس از صفر به مقداری بیشتر از شیب خط AB می‌رسد. بنابراین در هر یک از این بازه‌ها نیز یک لحظه یافت می‌شود که اندازه شیب خط مماس با شیب خط AB برابر باشد.

پس در مجموع در ۴ لحظه، تندی متحرک با سرعت متوسط بین t_1 ، t_2 برابر است.

اگر در جابه‌جایی در چند مرحله، زمان حرکت در هر مرحله معلوم نباشد، در ابتدا زمان حرکت در هر مرحله را با استفاده از رابطه $\Delta t = \frac{\Delta x}{v_{av}}$ محاسبه می‌نماییم و بعد از آن با تعیین کل جابه‌جایی و کل زمان، سرعت متوسط را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$v_{av} = \frac{\Sigma \Delta x}{\Sigma \Delta t} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3} \xrightarrow{\substack{\Delta x_1 = x, \Delta x_2 = 2x, \Delta x_3 = 3x \\ v_1 = v, v_2 = 2v, v_3 = 3v, \Delta t = \frac{\Delta x}{v_{av}}}}$$

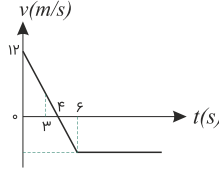
$$v_{av} = \frac{x + 2x + 3x}{\frac{x}{v} + \frac{2x}{2v} + \frac{3x}{3v}} \Rightarrow v_{av} = \frac{6x}{\frac{6x}{3v}} \Rightarrow v_{av} = 2v$$

بزرگی شتاب متوسط در بازه زمانی ۳ تا ۶ ثانیه؟ $a_{av(3s-6s)} = ?$ **گام اول**

چون در بازه زمانی ۰ تا ۶ ثانیه شتاب (شیب) ثابت است، پس شتاب متوسط در تمامی بازه‌های زمانی بین زمان‌های ۰ تا ۶ ثانیه با هم برابر است یعنی:

$$a_{av(0-6s)} = a_{av(0-3s)} = a_{av(3s-6s)}$$

$$|a_{av(3s-6s)}| = |a_{av(0-3s)}| = \frac{|\Delta v|}{|\Delta t|} = \frac{|0 - 12|}{|6 - 0|} = 2 \text{ m/s}^2$$



چند ثانیه در سوی مخالف محور x حرکت کرده؟ $v < 0, \Delta t = ?$ **گام اول**

مطابق نمودار، مدت زمانی که در جهت مخالف حرکت کرده، یعنی علامت سرعتش منفی بوده است، از $t = 14$ تا $t = 0$ ثانیه است. بنابراین t را باید بیابیم: با توجه به نقاط داده شده، از لحظه $t = 2s$ تا $t = 14s$ معادله سرعت (معادله خط) را به دست می‌آوریم:

$$v(m/s) \begin{cases} a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-8 - 4}{14 - 2} = -1 \text{ m/s}^2 \\ t_1 = 2s : v_1 = 4 \text{ m/s} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{معادله خط: } y - y_0 = m(x - x_0) \\ \text{معادله سرعت: } v - v_1 = a(t - t_1) \end{cases} \Rightarrow v = -1(t - 2) + 4 \Rightarrow v = -t + 6$$

برای محاسبه t ، مطابق نمودار، سرعت را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$v = -t + 6 \Rightarrow 0 = -t + 6 \Rightarrow t = 6s$$

پس مدت زمانی که متحرک در جهت مخالف محور x بوده از $t = 6s$ تا $t = 14s$ است یعنی: $14 - 6 = 8s$

در فاصله زمانی $t = 0$ تا $t = 8s$ ، سرعت منفی است. یعنی حرکت در خلاف جهت مثبت محور x است. (سعی کنید برای گزینه‌های دیگر، دلیل پیدا کنید که چرا درست نیستند) **گزینه ۳**

شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان، شتاب حرکت را مشخص می‌کند، بنابراین در نقاط A و B شیب خط مماس مثبت و بنابراین شتاب مثبت و در نقاط D و E شیب خط مماس منفی و شتاب منفی است. از روی نمودار مشخص است که سرعت در نقطه‌های A و E منفی و در نقطه‌های B و D صفر است؛ بنابراین تنها در نقطه A حرکت متحرک کندشونده است. در نقطه‌های B و D متحرک از حال سکون لحظه‌ای شروع به حرکت می‌کند. در نقطه E شتاب و سرعت هر دو منفی است و بنابراین حرکت متحرک تندشونده خواهد بود.

راه اول: چون تندی دو متحرک یکسان است و متحرک A نسبت به متحرک B در مبدأ زمان در فاصله نزدیک‌تری به مبدأ مکان قرار دارد، بنابراین متحرک A سریع‌تر به مبدأ مکان می‌رسد. **گزینه ۱**

$$x_A = v_A t + x_{0A} \xrightarrow{x_A=0, x_{0A}=30 \text{ m}} 0 = v_A t + 30$$

$$t = \frac{-30}{v_A} \xrightarrow{v_A < 0} t = \frac{30}{|v_A|} \quad \text{(I)}$$

$$x_B = v_B t' + x_{0B} \xrightarrow{\substack{t'=t+2/5 \\ x_{0B}=-60 \text{ m}}} 0 = v_B (t + 2/5) - 60$$

$$\Rightarrow t + 2/5 = \frac{60}{|v_B|} \quad \text{(II)}$$

$$2/5 = \frac{60}{|v_B|} - \frac{30}{|v_A|} \xrightarrow{|v_B|=|v_A|} 2/5 = \frac{30}{|v_A|} \Rightarrow |v_A| = |v_B| = \frac{30}{2/5}$$

اگر دو رابطه I و II را از هم کم کنیم، داریم:

$$\Rightarrow |v_A| = |v_B| = 12 \text{ m/s} \begin{cases} x_A = -12t + 30 \\ x_B = 12t - 60 \end{cases}$$

در لحظه‌ای که دو متحرک از کنار هم عبور می‌کنند $x_A = x_B$ است. داریم:

$$-12t + 30 = 12t - 60 \Rightarrow t = \frac{90}{24} = 3.75 \text{ s}$$

$$t = \frac{|x_{نسبی}|}{|v_{نسبی}|} = \frac{x_{نسبی=60+30=90 \text{ m}}}{v_{نسبی=12+12=24 \text{ m/s}}} = \frac{90}{24} = 3.75 \text{ s}$$

راه دوم: باتوجه به اینکه $|v_A| = |v_B| = 12 \text{ m/s}$ ، با استفاده از رابطه سرعت نسبی داریم:

چون معادله مکان تابع درجه اول از زمان است، نوع حرکت، یکنواخت بر روی خط راست است؛ بنابراین سرعت متوسط و لحظه‌ای در تمام بازه‌های زمانی، یکسان و برابر -۴ m/s است که نشان می‌دهد متحرک همواره در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. مسافت طی‌شده در مدت ۱۰ ثانیه برابر است با:

$$d = |x_{10} - x_0| = |-۲۰ - ۲۰| = ۴۰ \text{ m}$$

همچنین چون x_0 مثبت است، متحرک ابتدا به مبدأ حرکت نزدیک و سپس از آن دور می‌شود.

گام اول: متحرک با سرعت ثابت v مسیر مستقیم را طی می‌کند، بنابراین معادله مکان-زمان آن به صورت زیر است:

$$x = vt$$

اکنون با فرض اینکه متحرک، مسیر ۶۰ متری را در مدت t_1 بپیماید، داریم:

$$۶۰ = vt_1 \quad (\text{I})$$

گام دوم: اگر متحرک ۵ m/s به سرعت خود بیفزاید، مسیر موردنظر را ۲ ثانیه زودتر به پایان می‌رساند، پس:

$$۶۰ = (v + ۵)(t_1 - ۲) \quad (\text{II})$$

گام سوم: سمت چپ رابطه‌های (I) و (II) با یکدیگر مساوی است؛ بنابراین سمت راست آن‌ها نیز با یکدیگر مساوی است:

$$vt_1 = (v + ۵)(t_1 - ۲) \Rightarrow vt_1 = vt_1 - ۲v + ۵t_1 - ۱۰$$

$$\Rightarrow ۲v = ۵t_1 - ۱۰ \Rightarrow v = ۲/۵t_1 - ۵ \quad (\text{III})$$

گام چهارم: اکنون کافی است تا v از رابطه (III) را در رابطه (I) قرار بدهیم و مقادیر v و t_1 را به دست آوریم:

$$(\text{I}) : ۶۰ = vt_1 \xrightarrow{(\text{III})} ۶۰ = (۲/۵t_1 - ۵)t_1 \Rightarrow ۶۰ = ۲/۵t_1^2 - ۵t_1$$

$$\Rightarrow t_1^2 - ۲۵t_1 - ۱۵۰ = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = ۶ \text{ s} \\ t_1 = -۴ \text{ s} \end{cases} \text{ غ.ق.ق}$$

$$۶۰ = vt_1 \Rightarrow ۶۰ = v \times ۶ \Rightarrow v = ۱۰ \text{ m/s}$$

بنابراین معادله مکان-زمان متحرک به صورت زیر خواهد شد و با استفاده از آن می‌توان مسافتی که متحرک در مدت ۴ s بپیماید را به دست آورد.

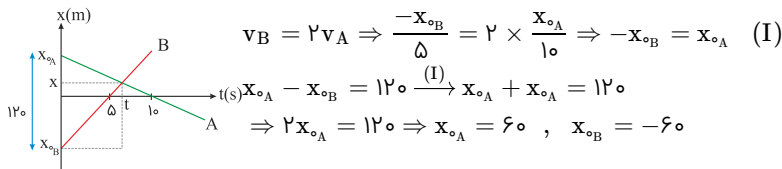
$$x = vt \Rightarrow x = ۱۰t$$

$$x_4 = ۱۰ \times ۴ = ۴۰ \text{ m}$$

و در پایان خواسته سوال را به دست می‌آوریم:

$$\frac{x_4}{x_5} = \frac{۴۰}{۶۰} = \frac{۲}{۳}$$

گام اول: تندی متحرک B، ۲ برابر تندی متحرک A است؛ بنابراین باتوجه به شکل زیر، داریم:



گام دوم: با فرض اینکه دو متحرک در لحظه t و مکان $x = n$ به یکدیگر می‌رسند، باتوجه به شکل بالا، خواهیم داشت:

$$v_B = 2v_A \Rightarrow \frac{n - x_{B0}}{t} = 2 \times \frac{x_{A0} - n}{t} \Rightarrow n - x_{B0} = 2(x_{A0} - n)$$

$$\Rightarrow n + ۶۰ = 2(۶۰ - n) \Rightarrow n + ۶۰ = ۱۲۰ - ۲n \Rightarrow ۳n = ۶۰ \Rightarrow n = ۲۰$$

باتوجه به شیب نمودار مکان-زمان، می‌توان متوجه شد که در لحظه t_1 ، سرعت متحرک (v_1) مثبت است و در لحظه t_2 ، این سرعت منفی است.

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

باتوجه به این که $v_1 > 0$ و $v_2 < 0$ است می‌توان نتیجه گرفت که $a_{av} < 0$ است.

در ابتدا مدت زمانی که طول می‌کشد تا مسافر به ابتدای قطار برسد محاسبه می‌کنیم.

$$x_{\text{مسافر}} = v_{\text{مسافر}} t \Rightarrow t = \frac{۲۰۰}{۴} = ۵۰\text{s}$$

در مدت این ۵۰s قطار نیز نسبت به ناظر ساکن بیرون قطار جابه‌جا شده است در نتیجه:

$$x_{\text{قطار}} = v_{\text{قطار}} t = ۱۰ \times ۵۰ = ۵۰۰\text{m}$$

پس مقدار جابه‌جایی مسافر نسبت به ناظر ساکن بیرون قطار برابر است با:

$$x_{\text{کل}} = x_{\text{مسافر}} + x_{\text{قطار}} = ۲۰۰ + ۵۰۰ = ۷۰۰\text{m}$$

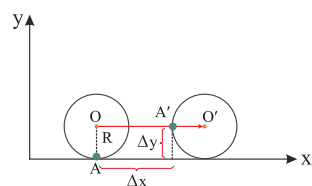
$$v = at = (۲ \times ۱۰) \text{ m/s} = ۲۰ \text{ m/s}$$

$$v = ۲۰ \text{ m/s} = \frac{۲۰ \times ۱۰^{-۳} \text{ km}}{\frac{1}{۳۶۰۰} \text{ h}} = (۲۰ \times ۳(۶) / \text{km/h} = ۷۲ \text{ km/h}$$

با استفاده از تعریف سرعت متوسط، ابتدا لحظه $t_۳$ و سپس سرعت متوسط بین دو لحظه $t_۱$ و $t_۳$ را تعیین می‌کنیم. داریم:

$$v_{\text{av}(t_۳-t_۲)} = \frac{x_۳ - x_۲}{t_۳ - t_۲} \Rightarrow ۴ = \frac{۵ - (-۵)}{t_۳ - ۵} \Rightarrow t_۳ = ۷/۵\text{s}$$

$$v_{\text{av}(t_۳-t_۱)} = \frac{x_۳ - x_۱}{t_۳ - t_۱} = \frac{۵ - ۱۰}{۷/۵ - ۲/۵} \Rightarrow v_{\text{av}(t_۳-t_۱)} = -۱ \text{ m/s}$$



$$\Delta x = OO' - O'A' = \frac{1}{۴}(\pi R) - R = \frac{1}{۴}R$$

جابه‌جایی افقی تکه گل برابر است با:

جابه‌جایی قائم تکه گل برابر $\Delta y = R$ است.

اندازه جابه‌جایی تکه گل برابر است با:

$$d = \sqrt{\Delta x^۲ + \Delta y^۲} = \sqrt{\left(\frac{1}{۴}R\right)^۲ + R^۲} = \frac{\sqrt{۵}}{۴}R = \frac{\sqrt{۵}}{۴} \times ۴۰ = ۲۰\sqrt{۵} \text{ cm}$$

گزینه ۳

به راحتی باتوجه به نمودار سرعت- زمان می‌توان دریافت که متحرک در لحظه

ابتدا نمودار سرعت- زمان را رسم می‌کنیم:

$t = ۳۰\text{s}$ متوقف شده و تغییر جهت می‌دهد و بین دو لحظه ۲۰s و ۳۵s در ابتدا حرکت کندشونده و پس از آن حرکت تندشونده است.

