۱۲۶ گزینه ۱

دنباله جملات اول هر دسته $a_n = 1, 2, 4, 7, \dots, \frac{n(n-1)}{2}+1$

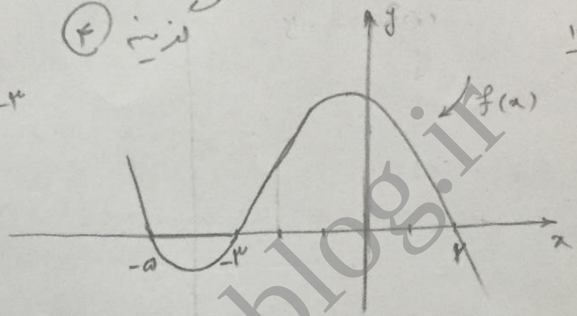
$$\longrightarrow a_{20} = \frac{20(20-1)}{2}+1 = 191$$

مجموع جملات دسته بیستم $S_{20} = \frac{20}{2}\left[2\times191+(20-1)\times1\right] = 10\times401 = \boxed{4010}$

۱۲۷ گزینه ۴

$x f(x) \ge 0$

$$\longrightarrow \begin{cases} x\le 0,\ f(x)\le 0 \longrightarrow -5\le x\le -3 \\ x>0,\ f(x)>0 \longrightarrow 0\le x\le 2 \end{cases}$$



۱۲۸

$$\frac{\sin 250^\circ+\sin 700^\circ}{\cos 560^\circ-\cos 110^\circ} = \frac{\sin(270-20)+\sin(720-20)}{\cos(540+20)-\cos(90+20)} = \frac{-\cos 20^\circ-\sin 20^\circ}{-\cos 20^\circ+\sin 20^\circ}$$

صورت و مخرج تقسیم بر $\cos 20^\circ$ $\quad \frac{-1-\tan 20^\circ}{-1+\tan 20} = \frac{-1-0.4}{-1+0.4} = \frac{-1.4}{-0.6} = \frac{7}{3}$ گزینه ۳

۱۲۹

$$A\times B = \begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3&-2\\-5&4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0\\-1&2\end{bmatrix} \qquad |A\times B| = 2$$

$$(A\times B)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0\\1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0\\0.5&0.5\end{bmatrix}$$

گزینه ۱

۱۳۰

$\alpha = 360-(70+10+80+65) = 135^\circ \quad , \quad \frac{135}{360} = \frac{x}{100} \longrightarrow x = 37.5\%$

گزینه ۴

۱۳۱

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}{n} - \bar{x}^2 = 65.44 - 8^2 = 1.44$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{1.44}}{8} = \frac{1.2}{8} = 0.15$$

گزینه ۲

۱۳۲ گزینه ۳

$$P = \frac{\binom{2}{1}\binom{7}{2}\binom{5}{1}+\binom{2}{1}\binom{7}{3}}{\binom{14}{4}} = \frac{2\times\cancel{21}^{3}\times5+2\times\cancel{35}^{5}}{\cancel{7}\times13\times11} = \frac{40}{143}$$

Email: ali.a.esmaeili@gmail.com

پاسخ به سوالات: مهندس اسمعیلی

۱۳۳

$$\tan\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2}=1 \longrightarrow \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}-\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=1 \longrightarrow \frac{\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}=1$$

$$\longrightarrow \frac{-\cos x}{\frac{1}{2}\sin x}=1 \longrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}=-2 \longrightarrow \tan x=-2$$

گزینه ۳

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\frac{2\times(-2)}{1-(-2)^2}=\frac{-4}{-3}=\boxed{\frac{4}{3}}$$

۱۳۴

گزینه ۱

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R} \mid -1<(\tfrac{1}{4})^x<2\}$$

$$D_g=\mathbb{R} \qquad =\{x\in\mathbb{R} \mid x>-\tfrac{1}{2}\} \longrightarrow D_{fog}=(-\tfrac{1}{2},+\infty)$$

$$D_f: -x^2+x+2>0 \longrightarrow -(x+1)(x-2)>0 \longrightarrow -1<x<2$$

۱۳۵

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+|x-\frac{3}{2}|}{ax^n-6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+x-\frac{3}{2}}{ax^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{ax^n}=-\frac{1}{2} \longrightarrow \begin{cases} n=1 \\ \frac{3}{a}=-\frac{1}{2} \longrightarrow \boxed{a=-6} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{2x+\sqrt{x^2-3x}}{-6x-6}\overset{H}{=}\lim_{x\to-1}\frac{2+\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}}{-6}=\frac{2+\frac{-5}{4}}{-6}=\frac{\frac{3}{4}}{-6}=\boxed{-\frac{1}{8}}$$

گزینه ۲

۱۳۶

گزینه ۴

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\cos 3x}{\cos x}\overset{H}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{-3\sin 3x}{-\sin x}=-3$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\sin 5x-a=1-a$$

$$1-a=-3 \longrightarrow \boxed{a=4}$$

۱۳۷

گزینه ۴

متوسط $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{1.44-1}{\sqrt{1.44}}-\frac{1-1}{\sqrt{1}}}{1.44-1}=\frac{\frac{0.44}{1.2}}{0.44}=\frac{1}{1.2}=\frac{5}{6}$$

لحظه $$f'(x)=\frac{1\times\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\times(x-1)}{(\sqrt{x})^2}\Bigg|_{x=1}=\frac{1\times1-\frac{1}{2\times1}\times(1-1)}{(\sqrt{1})^2}=1$$

$$1-\frac{5}{6}=\boxed{\frac{1}{6}}$$

۱۳۸

گزینه ۲

$\frac{1}{2}$ ، $$\binom{5}{1}\left(\frac{4}{5}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^4=\frac{1}{2}\times5\times\frac{4}{5}\times\frac{16}{625}=\frac{24}{625}$$

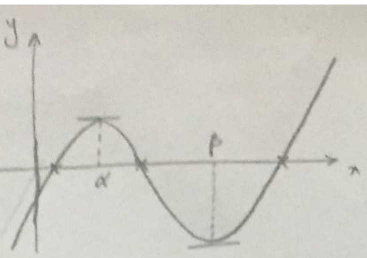
$\frac{1}{2}$ ب $$\binom{3}{1}\left(\frac{3}{5}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{1}{2}\times3\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{25}=\frac{18}{125}=\frac{90}{625}$$

$$\frac{24}{625}+\frac{90}{625}=\frac{114}{625}$$

Email: ali.a.esmaeili@gmail.com

پاسخ به سوالات: مهندس اسمعیلی

۱۳۹



باتوجه به شکل اگر بخواهیم معادله دارای ۳ ریشه حقیقی متمایز و مثبت باشد باید طول نقاط اکسترمم آن حقیقی و مثبت باشند. یعنی در معادله‌ی مشتق باید $\Delta > 0$ ، $\alpha + \beta > 0$ ، $\alpha . \beta > 0$ باشد.

گزینه ۱

$f(x) = x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4$

$f'(x) = 3x^2 + 2(a-1)x + (4-a)$

$\alpha + \beta > 0 \longrightarrow -\frac{b}{a} > 0 \longrightarrow \frac{-2(a-1)}{3} > 0 \longrightarrow a - 1 < 0 \longrightarrow a < 1$

$\alpha . \beta > 0 \longrightarrow \frac{c}{a} > 0 \longrightarrow \frac{4-a}{3} > 0 \longrightarrow 4 - a > 0 \longrightarrow a < 4$

$\xrightarrow{\text{اشتراک}} a < 1$

باتوجه به گزینه‌ها تنها گزینه‌ای که در آن a همواره کوچکتر از ۱ است گزینه ۱ است. البته با درنظر گرفتن شرط $\Delta > 0$ نیز می‌توان به این نتیجه رسید؛ ولی لازم به محاسبه Δ با گزینه‌ها داده نشده است.

۱۴۰

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 6 - x - 1 & x \geq 3 \\ -2x + 6 - x - 1 & -1 \leq x \leq 3 \\ -2x + 6 + x + 1 & x < -1 \end{cases} \longrightarrow f(x) = \begin{cases} x - 7 & x > 3 \\ -3x + 5 & -1 \leq x \leq 3 \\ -x + 7 & x < -1 \end{cases}$$

با بخش مورد نظر

گزینه ۳

$y = x - 7 \longrightarrow x = y + 7 \; ; \; y + 7 > 3 \longrightarrow y > -4 \implies x + 7 \; ; \; x > -4$

۱۴۱

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1 + 3^n}{5 + 3^{n-1}} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{3^n}{3^{n-1}} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{3 \times 3^{n-1}}{3^{n-1}} = 3$ کراندار

گزینه ۲

$a_n = \frac{4}{5}, \frac{10}{8}, \frac{28}{14}, \dots \longrightarrow 3$ صعودی

۱۴۲

$6000 = 5000\, e^{0/025 t} \longrightarrow 1/2 = e^{0/025 t} \longrightarrow \ln 1/2 = 0/025 t$

گزینه ۴

$\longrightarrow \frac{0/18}{0/025} = t \longrightarrow t = \frac{180}{25} = 7/2$

۱۴۳

$\cos 3x + \cos x = 0 \longrightarrow 2\cos\left(\frac{3x + x}{2}\right) \times \cos\left(\frac{3x - x}{2}\right) = 0 \longrightarrow 2\cos 2x \cos x = 0$

گزینه ۱

$\xrightarrow{\cos x \neq 0} \cos 2x = 0 \longrightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \longrightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \longrightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}}$

۱۴۴

$$f'_+(\sqrt{2}) = \lim_{x\to\sqrt{2}^+} \frac{x^3-[2x^2]x-(\sqrt{2})^3+[2(\sqrt{2})^2]\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} = \lim_{x\to\sqrt{2}^+}\frac{x^3-4x+2\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to\sqrt{2}^+}\frac{3x^2-4}{1} = 2$$

هیچکدام از گزینه ها صحیح نیست.

$$f'_-(\sqrt{2}) = \lim_{x\to\sqrt{2}^-} \frac{x^3-[2x^2]x-(\sqrt{2})^3+[2(\sqrt{2})^2]\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} = \lim_{x\to\sqrt{2}^-}\frac{x^3-3x+2\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} = \frac{-3\sqrt{2}}{0^-} = +\infty$$

۱۴۵

$$y = \ln\frac{\sqrt{4x+1}}{x^2-2x+3} = \ln\sqrt{4x+1} - \ln(x^2-2x+3) = \frac{1}{2}\ln(4x+1) - \ln(x^2-2x+3)$$

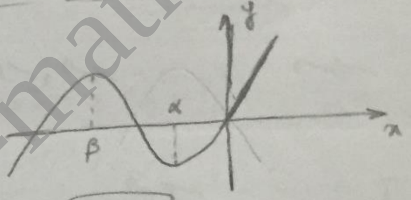
گزینه ۲

$$\to y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{4x+1} - \frac{2x-2}{x^2-2x+3}\Bigg|_{x=2} = \frac{2}{9} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{9}$$

عرض از مبدا

$$y-y_0 = m(x-x_0) \longrightarrow y-0 = -\frac{4}{9}(x-2) \longrightarrow y = -\frac{4}{9}x + \frac{8}{9}$$

۱۴۶



$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - (m-1)x^2 + 8x$$

$$f'(x) = 2x^2 - 2(m-1)x + 8$$

$$\alpha+\beta<0 \longrightarrow -\frac{-2(m-1)}{2}<0 \longrightarrow m-1<0 \longrightarrow \boxed{m<1}$$

$$\alpha\cdot\beta>0 \longrightarrow \frac{8}{2}>0 \checkmark$$

$$\Delta'>0 \longrightarrow (m-1)^2-16>0 \longrightarrow (m-1)^2>16 \longrightarrow \begin{cases} m-1>4 \longrightarrow \boxed{m>5} \\ m-1<-4 \longrightarrow \boxed{m<-3} \end{cases}$$

$-3 \quad 0 \quad 1 \quad 5$

$$\Longrightarrow \boxed{m<-3}$$

$$f''(x) = 4x - 2(m-1) = 0 \longrightarrow x = \frac{m-1}{2}$$ طول نقطه عطف

گزینه ۳

$$m<-3 \longrightarrow m-1<-4 \longrightarrow \frac{m-1}{2}<-2 \longrightarrow x_{\text{عطف}} \in (-\infty,-2)$$

۱۴۷ گزینه ۱

$$\lim_{x\to\frac{1}{\sqrt{a}}^+}\frac{x}{ax^2+1} = -\infty$$

$b=0$ با فرض $\longrightarrow f(x) = \dfrac{x}{ax^2+1}$

ریشه های مخرج: $ax^2+1=0 \longrightarrow x^2 = -\dfrac{1}{a}$, $a<0 \longrightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{a}}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{a}}$	$\frac{1}{\sqrt{a}}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$\frac{-}{0}+\frac{+}{0}$	$-$	

Email: ali.a.esmaeili@gmail.com

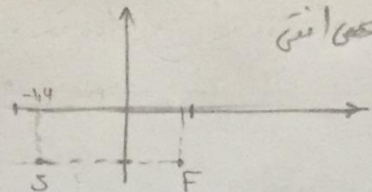
پاسخ به سوالات: مهندس اسمعیلی

۱۴۸

$S(-1,6,-1)$

$F(0,9,-1)$

$P = x_F - x_S = 0,9 - (-1,6) = 2,5$



همانطور که مشخص است سهمی افقی رو به راست است.

$(y+1)^2 = 4\times 2,5(x+1,6)$

$\xrightarrow{x=0} (y+1)^2 = 10\times 1,6 = 16$

$\longrightarrow \begin{cases} y+1 = 4 \longrightarrow \boxed{y=3} \\ y+1 = -4 \longrightarrow \boxed{y=-5} \end{cases}$

گزینه ۲

۱۴۹

$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2x+b}{8y+a} \longrightarrow 0 = -\frac{2(3)+b}{8(0)+a} \longrightarrow b+6=0 \longrightarrow \boxed{b=-6}$

$(-1,-2) \in$ بیضی $\longrightarrow (-1)^2+4(-2)^2+a(-2)-6(-1)+\cancel{c}^{\,9}=0 \longrightarrow -2a+32=0 \longrightarrow \boxed{a=16}$

$(3,0) \in$ بیضی $\longrightarrow (3)^2+4(0)^2+a(0)-6(3)+c=0 \longrightarrow \boxed{c=9}$

گزینه ۳

$C: x^2+4y^2+16y-6x+9=0 \longrightarrow x^2-6x+9+4y^2+16y+16-16=0$

$\longrightarrow (x-3)^2+4(y+2)^2=16 \longrightarrow \frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$

$a^2=b^2+c^2 \longrightarrow 16=4+c^2 \longrightarrow c^2=12 \longrightarrow c=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

راه تستی: در بیضی به معادله $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ داریم:

$e=\sqrt{1-\frac{\min(A,B)}{\max(A,B)}}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۵۰ گزینه ۲

$\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos x}\,dx=\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos x)}\,dx=\int_0^{2\pi}\sqrt{2\times 2\sin^2\frac{x}{2}}\,dx$

$=\int_0^{2\pi}2\left|\sin\frac{x}{2}\right|dx=\int_0^{2\pi}2\sin\frac{x}{2}\,dx=-4\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{2\pi}=-4(-1-1)=\boxed{4}$

۱۵۱ گزینه ۳

$\int\frac{4x^2-1}{\sqrt[3]{x}}dx=\int(4x^{\frac{5}{3}}-x^{-\frac{1}{3}})dx=4\times\frac{1}{\frac{5}{3}+1}x^{\frac{5}{3}+1}-\frac{1}{-\frac{1}{3}+1}x^{-\frac{1}{3}+1}+c$

$=\cancel{4}\times\frac{3}{\cancel{8}_2}x^{\frac{8}{3}}-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+c=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}(x^2-1)+c$

$f(x)=x^2-1$

۱۵۲ گزینه ۱ ۱۵۳ گزینه ۴ ۱۵۴ گزینه ۱ ۱۵۵ گزینه ۴

پاسخ به سوالات: مهندس اسمعیلی
Email: ali.a.esmaeili@gmail.com

اصلاحیه: سؤال ۱۴۴

در این سؤال مقدار مشتق چپ و راست تابع $f(x) = x^{3} - [2x^{2}]x$ در نقطه‌ای بطول $\sqrt{2}$ مدنظر است. برای استفاده از تعریف مشتق ($f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ و $f'_-(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$)، باید تابع در آن نقطه پیوسته باشد، که این تابع در نقطه $x = \sqrt{2}$ ناپیوسته است. که برای این نقاط باید تعریف مشتق راست و چپ به شکل زیر استفاده گردد:

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a^+)}{x-a} \qquad \text{و} \qquad f'_-(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a^-)}{x-a}$$

که با استفاده از این تعاریف داریم،

$$f'_+(\sqrt{2}) = \lim_{x\to\sqrt{2}^+} \frac{f(x)-f\left(\sqrt{2}^+\right)}{x-\sqrt{2}} = \lim_{x\to\sqrt{2}^+} \frac{x^{3}-[2x^{2}]x-f\left(\sqrt{2}^+\right)}{x-\sqrt{2}} = \lim_{x\to\sqrt{2}^+} \frac{x^{3}-4x-(-2\sqrt{2})}{x-\sqrt{2}} = 2$$

$$f'_-(\sqrt{2}) = \lim_{x\to\sqrt{2}^-} \frac{f(x)-f\left(\sqrt{2}^-\right)}{x-\sqrt{2}} = \lim_{x\to\sqrt{2}^-} \frac{x^{3}-[2x^{2}]x-f\left(\sqrt{2}^-\right)}{x-\sqrt{2}} = \lim_{x\to\sqrt{2}^-} \frac{x^{3}-3x-(-\sqrt{2})}{x-\sqrt{2}} = 3$$

پس برای جواب سؤال خواهیم داشت، $f'_+(\sqrt{2}) - f'_-(\sqrt{2}) = 2 - 3 = -1$

و گزینه ۲ پاسخ صحیح است.