به نام دوست

آزمون سوم شاازززز - پاسخ

پرسش نخست : ممد نبودی ببینی

مسئله را برای حالت کلی (جدول n×n) بررسی می‌کنیم.

لم1) ادعا می کنیم محیط کل مربع‌های آزاد شده همواره غیرصعودی است، برای اثبات این ادعا کافی است نشان دهیم بعد از آزاد شدن هر مربع دلخواه تغییرات محیط کل کوچک تر از صفر است. یک مربع دلخواه را در نظر می‌گیریم که حداقل دو مربع مجاورش در مراحل قبلی آزاد شده باشند و خودش هنوز آزاد نشده است، بعد از آزادی این مربع به ازای حداقل 2 تا از همسایه‌هایش هر کدام یک واحد از محیط کل کم می‌شود و حداکثر 2 ضلع مربع‌ی آزاد شده‌ی جدید در اشتراک با مربع‌هایی که از قبل آزاد شده‌اند نیست، پس حداکثر تغییرات محیط صفر است.

با توجه به لم 1 مربع‌های اولیه انتخاب شده باید حداقل محیطی به اندازه‌ی n×4 داشته باشند و از آنجایی که هر مربع حداکثر 4 واحد به محیط کل اضافه می‌کند، پس k بهینه بزرگتر مساوی n است.

حالا مثالی با k = n ارائه می‌کنیم. همه‌ی مربع های روی قطر اصلی شهر (جدول n×n) را انتخاب می‌کنیم.

برای راحتی کار اگر ستون ها را از بالا با پایین و سطر ها را از چپ به راست با 1 تا 44 شماره گذاری کنیم ، به هر خانه از جدول قدر مطلق تفاضل شماره سطر و ستونش را نسبت می دهیم. در ابتدا تمام خانه ها یی که عددشان صفر است را سیاه می‌کنیم. با استقرای ریاضی اثبات می‌کنیم که در گام i ام خانه‌هایی که عددشان i است سیاه می شود.

پایه : پایه استقرا برای i=0 که برقرار است.

گام: فرض کنید تا مرحله i برقرار باشد. حال یک خانه که شمار ه اش i+1 است را در نظر می گیریم. فرض کنید این خانه بالای قطر اصلی باشد(به طریق مشابه برای طرف دیگر اثبات می شود.)

خانه های پایین و سمت چپ این خانه شماره i دارند(چرا ؟) پس این خانه در این مرحله سیاه می شود. بنابراین تمام خانه ها که عددشان i+1 است در این مرحله سیاه می شوند و حکم طبق استقرا اثبات شد.

پرسش دوم : دزد که از دزد بزنه شازززدزد میشه!

به ازای هر x دلخواه $f(x)$ را بیشینه‌ی n ایی در نظر می‌گیریم که می‌توانیم با هزینه‌ی حداکثر x در بین n عدد تشخیص بدهیم عدد مورد نظر کدام است. به ازای هر k کمتر از $Max(p, q)$ مقدار $f(k)$ برابر 1 است.(فرض کنید این مقدار بیشتر از 1 باشد، یعنی حداقل 2 است، حالا فرض کنید پاسخ اولین سوال ما جوابی گران قیمت داشته باشد، که هزینه‌ای برابر با $Max(p, q)$ دارد. این یک تناقض است.)

به ازای هر k دلخواه بزرگتر مساوی $Max(p, q)$، یا جواب سوال اول ما بله است (یعنی p تا هزینه دارد) که بازه‌ی باقی مانده می‌تواند حداکثر به اندازه‌ی $f(k-p)$ باشد؛ یا جواب سوال اول ما خیر است (یعنی q تا هزینه دارد) که بازه‌ی باقی مانده می‌تواند حداکثر به اندازه‌ی $f(k-q)$ باشد. پس با فرض دست بودن مقادیر $f(x)$ به ازای x های کوچکتر از k مقدار $f(k)$ برابر با $f(k - q) + f(k - p)$ است.

با توجه با رابطه‌ی بازگشتی ارائه شده پاسخ قسمت *الف* و *ب* اولین k ایی است که شرایط خواسته شده را داشته باشد. جواب قسمت پ هم با توجه به تعریف $f(k)$ است.

برای به دست آوردن رابطه‌ی مستقیم باید از تابع مولد استفاده کنید(البته فقط به دست آوردن و اثبات درستی رابطه‌ی بازگشتی مورد نظر بوده).

پرسش سوم : گویا بُدم گنگ شدم سوختم!

به ازای هر $2n$ عدد دلخواه می‌توانیم گراف G را به صورت زیر بسازیم :

به ازای هر کدام از $2n$ عدد یک راس در G در نظر می‌گیریم(به ازای هر راس v از G، $f(v)$ را عدد متناظر به راس v در نظر می‌گیریم). دو راس u و v مجاورند، اگر و تنها اگر حاصل جمع $f(u)$ و $f(v)$ عددی گویا باشد.

لم1) ادعا می‌کنیم G دور فرد ندارد، برای اثبات این ادعا از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم مجموعه‌ای از $2n$ عدد گنگ وجود داشته باشد که G ساخته شده به ازای آنها حداقل یک دور فرد داشته باشد. فرض می‌کنیم رئوس دور مذکور x_1 و x_2 و ... و x_{2k+1} باشند. باتوجه به اینکه در G دو راس u و v مجاورند، اگر و تنها اگر حاصل جمع آنها عددی گویا باشد گزاره‌های زیر برقرار است.

$$f(x_1) + f(x_2) \in Q$$
$$f(x_2) + f(x_3) \in Q$$
...
$$f(x_{2k}) + f(x_{2k+1}) \in Q$$
$$f(x_{2k+1}) + f(x_1) \in Q$$

میدانیم مجموعه‌ی اعداد Q نسبت به عمل جمع و تفریق بسته است پس می‌توانیم بنویسم :

$$f(x_1) + f(x_2) - f(x_2) - f(x_3) + \dots - f(x_{2k}) - f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+1}) + f(x_1) \in Q$$

یعنی $2 \times f(x_1)$ عددی گویا است که با گنگ بودن $f(x_1)$ در تناقض است. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

می دانیم هر گراف بدون دور فرد دو بخشی است، پس می‌توانیم راس‌های G را به دو بخش تقسیم کنیم که هیچ یالی بین دو راس داخل یک بخش وجود نداشته باشد. طبق اصل لانه‌کبوتری حداقل یکی از بخش‌ها بیشتر مساوی n عضو دارد. یعنی حداقل n عدد در بین اعداد وجود دارد که جمع دو به دوی آنها عددی گنگ است.