

۱۱. اندازه‌ی مشتق تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{3 + 2 \sin \frac{\pi}{x}}$  به ازای  $x = 6$  کدام است؟ (مشابه سراسری تجربی فارغ از کشور ۸۵)

(۱)  $\frac{1}{48}$  (۲)  $-\frac{1}{12}$  (۳)  $\frac{1}{54}$  (۴)  $-\frac{1}{48}$

۱۲. مقدار مشتق تابع  $f(x) = \frac{1 + \cos 4x}{\cos 4x}$  به ازای  $x = \frac{\pi}{24}$  کدام است؟ (مشابه سراسری تجربی فارغ از کشور ۸۹)

(۱)  $\frac{4}{3}$  (۲)  $\frac{8}{3}$  (۳)  $-\frac{8}{3}$  (۴)  $-\frac{4}{3}$

۱۳. اگر  $f(x) = \sin \pi(x^2 - \tan \pi x)$ ، آن‌گاه  $f'(1)$  کدام است؟

(۱)  $\frac{\pi(\pi-2)}{2}$  (۲)  $\pi(\pi-3)$  (۳)  $\frac{\pi(\pi-3)}{2}$  (۴)  $\pi(\pi-2)$

۱۴. مشتق تابع  $y = \cos^2 \sqrt{x}$  در نقطه‌ی به طول  $x = \frac{\pi^2}{16}$  کدام است؟ (مشابه سراسری تجربی ۸۳)

(۱)  $-\frac{3\sqrt{2}}{\pi}$  (۲)  $-\frac{3}{4}\pi$  (۳)  $-\frac{3\sqrt{2}}{4}\pi$  (۴)  $-\frac{3\sqrt{2}}{2\pi}$

۱۵. تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \sin^2(x + 2\sqrt{x})$  و مشتق آن با ضابطه‌ی  $f'(x) = g(x)\cos(x + 2\sqrt{x})\sin^2(x + 2\sqrt{x})$  مفروض است. ضابطه‌ی  $g(x)$  کدام است؟

(۱)  $g(x) = -3\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$  (۲)  $g(x) = -3\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$   
(۳)  $g(x) = 3\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$  (۴)  $g(x) = 3\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

۱۶. اگر  $f(x) = k \sin\left(\cos \frac{x}{\pi}\right)$  و  $f'\left(\frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{-2}{\pi}$  باشد، مقدار عددی  $k$  کدام است؟

(۱)  $-1$  (۲)  $2$  (۳)  $\pi$  (۴)  $-2\pi$

مشتق توابع ساده شدند

۱۷. مقدار مشتق تابع  $y = \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$  در نقطه‌ای به طول  $x = 1$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{5}{6}$  (۴)  $-\frac{5}{6}$

۱۸. اگر مشتق تابع  $y = \frac{x^a + a}{x^b}$  برابر  $y' = \frac{bx^a - 10}{x^6}$  باشد، مقدار  $a + b$  کدام است؟

(۱)  $3$  (۲)  $2$  (۳)  $5$  (۴)  $10$

۱۹. مقدار مشتق تابع  $y = \frac{\sqrt[6]{x^5} + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[2]{x+1}}$  در نقطه‌ای به طول  $x = 1$  کدام است؟ (مشابه آزاد پزشکی-۸۹)

(۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳)  $\frac{1}{6}$  (۴)  $\frac{5}{6}$



(مشابه آزاد تیربی- ۸۰)

۲۰. مشتق عبارت  $f(x) = \frac{x\sqrt{\lambda+x} - (\lambda+x)\sqrt{x}}{\sqrt{\lambda x + x^2}}$  به ازای  $x=1$  کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (۴) \qquad -\frac{1}{2} \quad (۳) \qquad \frac{1}{6} \quad (۲) \qquad -\frac{1}{4} \quad (۱)$$

۲۱. مشتق تابع  $f(x) = x^2 \left(2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \left(2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$  در  $x=1$ ، کدام است؟

$$۵۷ \quad (۴) \qquad ۴۱ \quad (۳) \qquad ۵۰ \quad (۲) \qquad ۳۹ \quad (۱)$$

۲۲. اگر  $f(x) = \frac{۵}{x + \sqrt{x^2 + ۳}}$ ، آن گاه مقدار  $f'(1)$  کدام است؟

$$-\frac{۵}{۶} \quad (۴) \qquad \frac{۷}{۵} \quad (۳) \qquad \frac{۲}{۳} \quad (۲) \qquad -\frac{۳}{۴} \quad (۱)$$

(مشابه آزاد تیربی ۹۰)

۲۳. مشتق تابع  $f(x) = \frac{x\sqrt{x+1}}{x - \sqrt{x+1}}$  به ازای  $x=4$  کدام است؟

$$۲ \quad (۴) \qquad ۸ \quad (۳) \qquad \frac{1}{2} \quad (۲) \qquad \frac{1}{4} \quad (۱)$$

۲۴. مشتق تابع  $f(x) = \sqrt[۵]{x^3 \sqrt[۴]{x^2 \sqrt[۳]{x}}}$  ( $x > 0$ )، کدام است؟

$$\frac{۳}{۵\sqrt[۵]{x^7}} \quad (۴) \qquad \frac{۲۳}{۳۰\sqrt[۳]{x^7}} \quad (۳) \qquad \frac{۲۳}{۳۰\sqrt[۳]{x^{19}}} \quad (۲) \qquad \frac{۶}{۵\sqrt[۵]{x^7}} \quad (۱)$$

۲۵. حاصل مشتق عبارت  $1 + x + \dots + x^{10}$  به ازای  $x=2$  کدام است؟

$$9 \times 10^2 + 10 \quad (۴) \qquad 12 \times 10^2 + 10 \quad (۳) \qquad 9 \times 10^2 + 1 \quad (۲) \qquad 12 \times 10^2 + 1 \quad (۱)$$

۲۶. مقدار مشتق تابع  $f(x) = \cos 2x \sqrt{\cos 2x}$  در نقطه‌ی  $x = \frac{\pi}{6}$  کدام است؟

$$\frac{3\sqrt{6}}{2} \quad (۴) \qquad \frac{3\sqrt{6}}{4} \quad (۳) \qquad -\frac{3\sqrt{6}}{4} \quad (۲) \qquad -\frac{3\sqrt{6}}{2} \quad (۱)$$

(مشابه سراسری ریاضی فارغ از کشور ۸۸)

۲۷. اگر  $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x}$ ، مقدار  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) + 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$  برابر کدام است؟

$$۱ \quad (۴) \qquad ۲ \quad (۳) \qquad ۳ \quad (۲) \qquad ۴ \quad (۱)$$

۲۸. اگر  $f(x) = \frac{\sin^2 x + 3 \cos^2 x - 9}{2 + \cos x}$ ، آن گاه  $f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)$  کدام است؟

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۴) \qquad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۳) \qquad -\sqrt{2} \quad (۲) \qquad \sqrt{2} \quad (۱)$$

(مشابه آزاد تیربی ۹۰)

۲۹. مشتق تابع  $f(x) = \sin^2 x (1 + \cot^2 x)$  در  $x = \frac{\pi}{12}$  کدام است؟

$$۱ \quad (۴) \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۳) \qquad \sqrt{3} \quad (۲) \qquad \frac{1}{2} \quad (۱)$$

۳۰. مقدار مشتق  $\sqrt{1 + \cot^2\left(\frac{1}{x}\right)}$  به ازای  $x = \frac{\pi}{6}$  کدام است؟ (مشابه سراسری تجربی فارج از کشور ۹۱)

$$\frac{\pi^2 \sqrt{3}}{18} \quad (۴) \quad \frac{-2\pi^2 \sqrt{3}}{9} \quad (۳) \quad -\frac{\pi^2 \sqrt{3}}{18} \quad (۲) \quad \frac{2\pi^2 \sqrt{3}}{9} \quad (۱)$$

۳۱. اگر  $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{10} - 2x\right)$  ،  $f'(x)$  کدام است؟

$$4 \sin\left(4x - \frac{2\pi}{15}\right) \quad (۴) \quad \sin\left(4x - \frac{2\pi}{15}\right) \quad (۳) \quad 4 \cos\left(4x - \frac{2\pi}{15}\right) \quad (۲) \quad \cos\left(4x - \frac{2\pi}{15}\right) \quad (۱)$$

۳۲. مقدار مشتق  $f(x) = \sin^2 \frac{\pi}{3x}$  به ازای  $x = 4$  کدام است؟ (مشابه سراسری تجربی فارج از کشور ۹۰)

$$-\frac{\pi}{72} \quad (۴) \quad -\frac{\pi}{96} \quad (۳) \quad \frac{\pi}{72} \quad (۲) \quad \frac{\pi}{96} \quad (۱)$$

۳۳. مشتق تابع  $f(x) = 8 \sin x \cos x \sin 4x \cos 2x$  در نقطه‌ی  $x = \frac{\pi}{16}$  کدام است؟ (مشابه آزاد غیر پزشتگی- ۸۱)

$$-16 \quad (۴) \quad 8 \quad (۳) \quad -8 \quad (۲) \quad 16 \quad (۱)$$

۳۴. مشتق تابع  $f(x) = 3 \sin x \cos x (1 - 2 \cos^2 x)$  به ازای  $x = \frac{\pi}{6}$  کدام است؟

$$-\frac{3}{4} \quad (۴) \quad \frac{3}{2} \quad (۳) \quad -\frac{3\sqrt{2}}{2} \quad (۲) \quad \frac{3\sqrt{2}}{8} \quad (۱)$$

۳۵. مقدار مشتق تابع  $y = \sin^2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{4}\right)$  به ازای  $x = \frac{\pi}{6}$  کدام است؟ (مشابه سراسری تجربی ۹۰)

$$-\frac{\sqrt{2}}{8} \quad (۴) \quad -\frac{\sqrt{2}}{4} \quad (۳) \quad \frac{\sqrt{2}}{8} \quad (۲) \quad \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (۱)$$

۳۶. مشتق تابع  $f(x) = \frac{(\sin 2x + \cos 2x)^2}{1 + \sin 4x}$  به ازای  $x = \frac{\pi}{16}$  کدام است؟

$$2\sqrt{2} \quad (۴) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۳) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۲) \quad \sqrt{2} \quad (۱)$$

۳۷. اگر  $f(x) = \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \sin^2 x}$  و  $g(x) = (1 + \sin^2 x)^2 f'(x)$  ، آن‌گاه ضابطه‌ی تابع  $g(x)$  کدام است؟

$$3 \cos 2x \quad (۴) \quad -3 \cos 2x \quad (۳) \quad -3 \sin 2x \quad (۲) \quad 3 \sin 2x \quad (۱)$$

۳۸. مشتق تابع  $f(x) = \cos^4 2x + \sin^4 2x - 2 \sin^2 2x \cos^2 2x$  در  $x = \frac{\pi}{48}$  کدام است؟ (مشابه آزاد پزشتگی ۸۸)

$$-3 \quad (۴) \quad -4 \quad (۳) \quad -2 \quad (۲) \quad -1 \quad (۱)$$

۳۹. مقدار مشتق تابع  $f(x) = \frac{\cos 2x + \sin 2x}{\cos 2x - \sin 2x}$  در نقطه‌ای به طول  $x = \frac{\pi}{8}$  کدام است؟ (مشابه سراسری تجربی ۸۹)

$$2 \quad (۴) \quad 1 \quad (۳) \quad -2 \quad (۲) \quad -1 \quad (۱)$$

۴۰. مشتق تابع  $y = \frac{\tan \sqrt{x}}{1 - \tan^2 \sqrt{x}}$  کدام است؟

$$\frac{1}{\sqrt{x} \cos^2(\sqrt{x})} \quad (۴) \quad \frac{1}{2\sqrt{x} \cos^2(2\sqrt{x})} \quad (۳) \quad \frac{\tan^2(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \quad (۲) \quad \frac{\tan^2 \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \quad (۱)$$



۴۱. مقدار مشتق  $f(x) = \frac{\tan \frac{x}{4}(1 - \tan^2 \frac{x}{4})}{(\tan^2 \frac{x}{4} + 1)^2}$  در  $x = \pi$  کدام است؟

(۱)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $-\frac{1}{4}$  (۴)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

۴۲. اگر  $f(x) = 2 \sin(\cos^2 x) \cos(\sin^2 x)$ ، آن‌گاه  $f'(\frac{\sqrt{3}\pi}{4})$  کدام است؟

(۱) -۲ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) -۱

۴۳. مشتق  $f(x) = \sqrt{\cos^2 2x + 4 \sin^2 2x}$  در  $x = \frac{\pi}{24}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{2}$  (۲) ۱ (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۴)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

۴۴. اگر  $f(x) = \sqrt{x^\Delta \sqrt{x}}$  و  $g(x) = \frac{1}{x^\Delta \sqrt{x}}$  حاصل  $f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$  در  $x = 1$  کدام است؟

(مشابه آزاد ریاضی فارغ از کشور (۸۷))

(۱)  $\frac{6}{5}$  (۲)  $\frac{11}{4}$  (۳)  $\frac{11}{20}$  (۴)  $\frac{31}{20}$

۴۵. اگر  $f(x) = 2^{2x+1}(x^2 \cos \frac{\pi}{x})$  و  $g(x) = \frac{1}{x^2}(\frac{1}{27})^x$ ، آن‌گاه حاصل  $f'(2)g(2) + f(2)g'(2)$  کدام است؟

(۱)  $\frac{4\pi}{3}$  (۲)  $\frac{3\pi}{4}$  (۳)  $\frac{\pi}{4}$  (۴)  $\frac{4\pi}{5}$

۴۶. اگر  $f(x) = (\sqrt{x^2 - 4} + 2x)^3$  و  $g(x) = (\frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 4} + 2x})^3$ ، آن‌گاه حاصل  $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$  کدام است؟

(۱)  $6x(x^2 + 1)^2$  (۲)  $12x(x^2 + 1)^2$  (۳)  $\frac{-12x}{(x^2 + 1)^2}$  (۴)  $\frac{6x}{(x^2 + 1)^2}$

۴۷. اگر  $f(x) = (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})^{12}$  و  $g(x) = (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1})^{11}$  حاصل  $f'g + g'f$  در  $x = 1$  کدام است؟

(مشابه آزاد ریاضی (۸۵))

(۱)  $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{6}}$  (۲)  $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{6}}$  (۳)  $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2\sqrt{6}}$  (۴)  $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2\sqrt{6}}$

۴۸. اگر  $f(x) = \cos^2 x$  و  $g(x) = \sin^2 \sqrt{x}$ ، آن‌گاه  $(f'g')(1)$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{3} \sin 4$  (۲)  $\frac{1}{3} \cos 4$  (۳)  $-\sin 4$  (۴)  $-\cos 4$

۴۹. اگر  $f(x) = (\sqrt{1+x} - \sqrt{x})^2$  و  $g(x) = \frac{1}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{x})^2}$ ، آن‌گاه مقدار مشتق عبارت  $\frac{f(x)}{g(x)}$  کدام است؟

(۱) -۸ (۲) -۴ (۳) ۶ (۴) صفر

۷- گزینه‌ی «۲»

$$y = \cos \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = -\left(\frac{1}{x}\right)' \sin \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\left(-\frac{1}{x^2}\right) \sin \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{2}} y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \sin \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{36} \times \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\pi^2}{36} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi^2}{72}$$

۸- گزینه‌ی «۲»

$$y = \sin^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{x}}\right) \Rightarrow y' = 2\pi\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{x}}\right) \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{x}}\right) \xrightarrow{x=9} y'(9) = 2\pi\left(-\frac{1}{9}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow y'(9) = \frac{-2\pi}{3 \times 9} \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{-2\pi}{27} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{-\pi\sqrt{3}}{108}$$

۹- گزینه‌ی «۴»

$$f(x) = \cos \sqrt{x} + \cot \sqrt{x} \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = -(\sqrt{x})' \sin \sqrt{x} - (\sqrt{x})'(1 + \cot^2 \sqrt{x})$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(1 + \cot^2 \sqrt{x}) \xrightarrow{x=\frac{\pi^2}{36}} f'\left(\frac{\pi^2}{36}\right) = \frac{-1}{2 \times \frac{\pi}{6}} \sin \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2 \times \frac{\pi}{6}}(1 + \cot^2 \frac{\pi}{6})$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi^2}{36}\right) = -\frac{3}{\pi} \times \frac{1}{2} - \frac{3}{\pi}(1+3) = \frac{-3}{2\pi} - \frac{12}{\pi} = \frac{-3-24}{2\pi} = \frac{-27}{2\pi}$$

۱۰- گزینه‌ی «۲»

$$f(x) = \sqrt{2 \cos \pi x^2} \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = \frac{(2 \cos \pi x^2)'}{2\sqrt{2 \cos \pi x^2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2(\pi x^2)' \sin \pi x^2}{2\sqrt{2 \cos \pi x^2}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-4\pi x \sin \pi x^2}{2\sqrt{2 \cos \pi x^2}} \xrightarrow{x=\frac{1}{\sqrt{3}}} f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-2\pi \times \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\pi}{3}}{\sqrt{2 \cos \frac{\pi}{3}}} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2 \times \frac{1}{2}}} = -\pi$$

۱۱- گزینه‌ی «۴»

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \sqrt{3 + 2 \sin \frac{\pi}{x}} \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \times \frac{(3 + 2 \sin \frac{\pi}{x})'}{2\sqrt{3 + 2 \sin \frac{\pi}{x}}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \times \frac{0 + 2\left(\frac{\pi}{x}\right)' \cos \frac{\pi}{x}}{2\sqrt{3 + 2 \sin \frac{\pi}{x}}} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \times \frac{-\frac{\pi}{x^2} \cos \frac{\pi}{x}}{\sqrt{3 + 2 \sin \frac{\pi}{x}}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{x}}{x^2 \sqrt{3 + 2 \sin \frac{\pi}{x}}} \xrightarrow{x=6} f'(6) = \frac{-\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6}}{36 \sqrt{3 + 2 \sin \frac{\pi}{6}}} \Rightarrow f'(6) = \frac{-\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{36 \sqrt{3+1}} = \frac{-\frac{3}{2}}{36 \times 2} = -\frac{3}{36 \times 4} = -\frac{1}{48}$$



۱۲- گزینه‌ی «۲»

یادآوری

$$\left(\frac{au+b}{cu+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cu+d)^2} \times u' \quad (\text{u بر حسب x است})$$

$$f(x) = \frac{\cos 4x + 1}{\cos 4x} \xrightarrow{u = \cos 4x} f'(x) = \frac{1 \times 0 - 1 \times 1}{\cos^2 4x} \times (-4 \sin 4x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{4 \sin 4x}{\cos^2 4x} \xrightarrow{x = \frac{\pi}{24}} f'\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{4 \sin \frac{\pi}{6}}{\left(\cos \frac{\pi}{6}\right)^2} = \frac{4 \times \frac{1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{3}$$

۱۳- گزینه‌ی «۴»

$$f(x) = \sin \pi(x^2 - \tan \pi x) \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = (\pi(x^2 - \tan \pi x))' \cos \pi(x^2 - \tan \pi x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = (\pi(2x - \pi(1 + \tan^2 \pi x))) \cos \pi(x^2 - \tan \pi x) \xrightarrow{x=1} \Rightarrow f'(1) = (\pi(2 - \pi(1 + 0))) \cos \pi(1 - \tan \pi)$$

$$\Rightarrow f'(1) = (2\pi - \pi^2)(-1) \Rightarrow f'(1) = \pi^2 - 2\pi = \pi(\pi - 2)$$

۱۴- گزینه‌ی «۴»

$$y = (\cos \sqrt{x})^2 \Rightarrow y' = 2(\cos \sqrt{x})' (\cos \sqrt{x})^2 \Rightarrow y' = 2\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin \sqrt{x}\right) (\cos^2 \sqrt{x}) \xrightarrow{x = \frac{\pi}{16}}$$

$$y'\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{-2}{\sqrt{x}} \sin \frac{\pi}{4} \cos^2 \frac{\pi}{4} \Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{-2}{\pi} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{-2\sqrt{2}}{2\pi} \times \frac{1}{2} = \frac{-\sqrt{2}}{\pi}$$

۱۵- گزینه‌ی «۳»

$$f(x) = \sin^2(x + 2\sqrt{x}) \Rightarrow f(x) = (\sin(x + 2\sqrt{x}))^2 \Rightarrow f'(x) = 2(\sin(x + 2\sqrt{x}))' (\sin(x + 2\sqrt{x}))^2 \Rightarrow$$

$$f'(x) = 2(x + 2\sqrt{x})' \cos(x + 2\sqrt{x})(\sin(x + 2\sqrt{x}))^2$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cos(x + 2\sqrt{x}) \sin^2(x + 2\sqrt{x}) \Rightarrow g(x) = 2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

۱۶- گزینه‌ی «۲»

$$f(x) = k \sin\left(\cos \frac{x}{\pi}\right) \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = k\left(\cos \frac{x}{\pi}\right)' \cos\left(\cos \frac{x}{\pi}\right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-k}{\pi} \sin \frac{x}{\pi} \cos\left(\cos \frac{x}{\pi}\right) \xrightarrow{x = \frac{\pi}{2}} f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-k}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} \cos\left(\cos \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{k}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} \cos\left(\cos \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-k}{\pi} \times 1 \times 1 = -\frac{k}{\pi} \xrightarrow{f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi}} -\frac{k}{\pi} = \frac{-2}{\pi} \Rightarrow k = 2$$

## ۱۷- گزینه‌ی «۳»

$$y = \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \xrightarrow{\text{تفکیک کسر}} y = \frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$y = x^{1-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1-1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} + x^0 \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 0 \xrightarrow{x=1} y'(1) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

## ۱۸- گزینه‌ی «۳»

$$y = \frac{x^\lambda + a}{x^\delta} = \frac{x^\lambda}{x^\delta} + \frac{a}{x^\delta} = x^\lambda + ax^{-\delta} \Rightarrow y = x^\lambda + ax^\delta \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = \lambda x^{\lambda-1} - \delta ax^{-\delta-1} = \lambda x^{\lambda-1} - \frac{\delta a}{x^{\delta+1}} = \frac{\lambda x^{\lambda-1} - \delta a}{x^{\delta+1}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{فرض مسئله: } y' = \frac{bx^\lambda - 1}{x^\delta} \\ y' = \frac{\lambda x^{\lambda-1} - \delta a}{x^{\delta+1}} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{bx^\lambda - 1}{x^\delta} = \frac{\lambda x^{\lambda-1} - \delta a}{x^{\delta+1}} \Rightarrow b = \lambda, \quad -1 = -\delta a \Rightarrow a = \frac{1}{\delta} \Rightarrow a + b = \lambda + \frac{1}{\delta}$$

## ۱۹- گزینه‌ی «۲»

عبارت  $\sqrt{x^5}$  را می‌توانیم به صورت  $\sqrt{x^4} \times \sqrt{x}$  بنویسیم داریم:

$$y = \frac{\sqrt{x^5} + \sqrt{x^2}}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x^4}(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{x^4}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{x^4} \Rightarrow y = x^{\frac{4}{2}} = x^2 \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = 2x^{2-1} \Rightarrow y' = 2x^1 \xrightarrow{x=1} y'(1) = 2$$

## ۲۰- گزینه‌ی «۴»

ابتدا تابع  $f$  را تا حد امکان ساده می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{x\sqrt{\lambda+x} - (\lambda+x)\sqrt{x}}{\sqrt{\lambda x + x^2}} \xrightarrow{\text{تفکیک}} \frac{x\sqrt{\lambda+x}}{\sqrt{\lambda x + x^2}} - \frac{(\lambda+x)\sqrt{x}}{\sqrt{\lambda x + x^2}}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x\sqrt{\lambda+x}}{\sqrt{x}\sqrt{\lambda+x}} - \frac{(\lambda+x)\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{\lambda+x}} = \frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{\lambda+x}{\sqrt{\lambda+x}} \xrightarrow{\text{گویا کردن}} f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{\lambda+x} \xrightarrow{\text{مشتق}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda+x}} \xrightarrow{x=1} f'(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow f'(1) = 0$$

## ۲۱- گزینه‌ی «۴»

یادآوری

$$1) (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$2) a^n b^n = (ab)^n$$

$$f(x) = x^2 \left( \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 \left( \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 \Rightarrow f(x) = x^2 \left( \left( \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \left( \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \right)^2$$



$$\Rightarrow f(x) = x^2 \left(4x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 \left(16x^2 + \frac{1}{x^2} - 8\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = 16x^4 + x - 8x^2 \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = 16 \times 4x^3 + 1 - 24x^2 \xrightarrow{x=1} f'(1) = 16 \times 4 + 1 - 24 = 57$$

۲۲- گزینه‌ی «۴»

صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم تا تابع  $f$  ساده‌تر شود.

$$f(x) = \frac{5}{x + \sqrt{x^2 + 3}} \times \frac{x - \sqrt{x^2 + 3}}{x - \sqrt{x^2 + 3}} \Rightarrow f(x) = \frac{5(x - \sqrt{x^2 + 3})}{x^2 - x^2 - 3} = -\frac{5}{3}(x - \sqrt{x^2 + 3})$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = -\frac{5}{3} \left(1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 3}}\right) \xrightarrow{x=1} f'(1) = -\frac{5}{3} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{3} \times \frac{1}{2} = -\frac{5}{6}$$

۲۳- گزینه‌ی «۱»

## یادآوری

$$۱) a^r + b^r = (a+b)(a^r - ab + b^r)$$

$$۲) a^{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{a^n b} \quad (a > 0, \text{ اگر } n \text{ زوج باشد، باید } a > 0)$$

$$۳) (\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$$

تابع  $f$  را بازنویسی می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x+1}}{x-\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x+1}} = \frac{(\sqrt{x})^2+1}{x-\sqrt{x+1}}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{(\sqrt{x+1})(x-\sqrt{x+1})}{(x-\sqrt{x+1})} \Rightarrow f(x) = \sqrt{x+1} \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x=4} f'(4) = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$$

۲۴- گزینه‌ی «۳»

## یادآوری

$$\sqrt[m]{\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}} = \sqrt[m \cdot p \cdot n]{a}$$

تابع  $f$  را ساده‌تر می‌کنیم.

$$f(x) = \sqrt[4]{\sqrt{x^{12} x^3} \sqrt{x}} = \sqrt[4]{\sqrt{x^{15} x^3} \sqrt{x}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{x^{18} x^4} \sqrt{x}} \Rightarrow f(x) = \sqrt[4]{\sqrt[3]{x^{22} x^4}} \Rightarrow f(x) = \sqrt[6]{x^{46}}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt[6]{x^{46}} \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = \frac{23}{3 \cdot \sqrt[6]{x^{46-23}}} = \frac{23}{3 \cdot \sqrt[6]{x^{23}}}$$

توضیح: تمامی عملیات بالا به علت مثبت بودن  $x$  قابل اجرا می‌باشد.



۲۵- گزینه‌ی «۲»

یادآوری

مجموع  $n$  جمله‌ای اول در یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول  $a_1$  و قدر نسبت  $q$  برابر است با:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

عبارت  $1+x+\dots+x^{10}$  در واقع مجموع یازده‌ی جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول یک و قدر نسبت  $x$  است. در نتیجه:

$$1+x+\dots+x^{10} = \frac{1 \times (1-x^{11})}{1-x}$$

حال  $y = \frac{1-x^{11}}{1-x}$  فرض کنیم و از آن مشتق می‌گیریم:

$$y = \frac{1-x^{11}}{1-x} \Rightarrow y' = \frac{-11x^{10}(1-x) + (1-x^{11})}{(1-x)^2} \quad x=2 \rightarrow$$

$$y'(2) = \frac{-11 \times 2^{10}(1-2) + (1-2^{11})}{(1-2)^2} = 11 \times 2^{10} - 2 \times 2^{10} + 1 = 9 \times 2^{10} + 1$$

۲۶- گزینه‌ی «۲»

$$f(x) = \cos 2x \sqrt{\cos 2x} = \cos 2x (\cos 2x)^{\frac{1}{2}} = (\cos 2x)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f(x) = (\cos 2x)^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2} (\cos 2x)^{\frac{1}{2}} (-2 \sin 2x) \xrightarrow{x=\frac{\pi}{6}} f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2} \times \sqrt{\frac{1}{2}} \times (-2) \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-3\sqrt{6}}{4}$$

۲۷- گزینه‌ی «۲»

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3} (*)$$

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x} \xrightarrow{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x} f(x) = \frac{-\cos^2 x + 1}{\cos^2 x + 1} \xrightarrow{u = \cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{(-1 \times 1) - (1 \times 1)}{(\cos^2 x + 1)^2} \times (-2 \sin x \cos x) \xrightarrow{\sin 2x = 2 \sin x \cos x}$$

$$f'(x) = \frac{2 \sin 2x}{(\cos^2 x + 1)^2} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2 \sin \frac{\pi}{2}}{(\cos^2 \frac{\pi}{4} + 1)^2} = \frac{2}{(1 + \frac{1}{2})^2} = \frac{8}{9} (**)$$

$$(*), (**) \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) + 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3} + 3 \times \frac{8}{9} = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = \frac{9}{3} = 3$$



۲۸- گزینه‌ی «۱»

$$f(x) = \frac{\sin^2 x + 3 \cos^2 x - 9}{2 + \cos x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \cos^2 x - 9}{2 + \cos x}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1 + 2 \cos^2 x - 9}{2 + \cos x} = \frac{2 \cos^2 x - 8}{2 + \cos x} = \frac{2(\cos^2 x - 4)}{\cos x + 2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2(\cos x - 2)(\cos x + 2)}{\cos x + 2} = 2(\cos x - 2) \Rightarrow f(x) = 2(\cos x - 2)$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = 2(-\sin x) = -2 \sin x \xrightarrow{x = \frac{\pi}{4}} f'(\frac{\pi}{4}) = -2(\frac{\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow f'(\frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}$$

۲۹- گزینه‌ی «۱»

یادآوری

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$f(x) = \sin^4 x (1 + \cot^2 x) = \sin^4 x \times \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^4 x}{\sin^2 x} = \sin^2 x$$

$$\Rightarrow f(x) = \sin^2 x \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x = 2 \sin x \cos x \rightarrow$$

$$f'(x) = \sin 2x \xrightarrow{x = \frac{\pi}{12}} f'(\frac{\pi}{12}) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

۳۰- گزینه‌ی «۴»

با استفاده از رابطه‌ی  $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ ، عبارت را ساده‌تر می‌کنیم.

$$\sqrt{1 + \cot^2(\frac{1}{x})} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2(\frac{1}{x})}} = \left| \frac{1}{\sin(\frac{1}{x})} \right|$$

وقتی  $x = \frac{\pi}{6}$  باشد، آن‌گاه  $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{6}$  بوده و در همسایگی  $\frac{\pi}{6}$ ، مقدار سینوس مثبت است، لذا خواهیم داشت:

$$y = \frac{1}{\sin(\frac{1}{x})} \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = \frac{-(\sin(\frac{1}{x}))'}{\sin^2(\frac{1}{x})} = \frac{-(-\frac{1}{x^2})\cos(\frac{1}{x})}{\sin^2(\frac{1}{x})} \Rightarrow y'(\frac{\pi}{6}) = \frac{\frac{\pi^2}{36} \cos \frac{\pi}{6}}{\sin^2(\frac{\pi}{6})}$$

$$y'(\frac{\pi}{6}) = \frac{\frac{\pi^2}{36} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{\pi^2 \sqrt{3}}{2 \times 36}}{\frac{1}{4}} = \frac{4 \pi^2 \sqrt{3}}{2 \times 36} = \frac{\pi^2 \sqrt{3}}{18} \Rightarrow y'(\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi^2 \sqrt{3}}{18}$$

۳۱- گزینه‌ی «۲»

یادآوری

$$۱) \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \cos \beta \quad (\text{قانون متمم‌ها})$$

$$۲) \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

با توجه به قانون متمم‌ها داریم  $\cos(\frac{3\pi}{10} - 2x) = \sin(2x + \frac{\pi}{10})$ ؛ زیرا  $\frac{3\pi}{10} - 2x + 2x + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$ ؛ پس:

$$f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3}) \cos(2x + \frac{\pi}{6}) + \cos(2x - \frac{\pi}{3}) \sin(2x + \frac{\pi}{6})$$

$$\Rightarrow f(x) = \sin((2x - \frac{\pi}{3}) + (2x + \frac{\pi}{6})) = \sin(4x - \frac{2\pi}{6}) \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = 4 \cos(4x - \frac{2\pi}{6})$$

۳۲- گزینه‌ی «۳»

یادآوری

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$f(x) = \sin^2 \frac{\pi}{3x} \Rightarrow f(x) = (\sin \frac{\pi}{3x})^2 \xrightarrow{\text{مشتق}}$$

$$f'(x) = 2(\sin \frac{\pi}{3x})' (\sin \frac{\pi}{3x}) = 2(\frac{\pi}{3x})' (\cos \frac{\pi}{3x}) (\sin \frac{\pi}{3x}) \Rightarrow f'(x) = \frac{-2\pi}{3x^2} \cos \frac{\pi}{3x} \sin \frac{\pi}{3x} = (\frac{-\pi}{3x^2}) 2 \cos \frac{\pi}{3x} \sin \frac{\pi}{3x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-\pi}{3x^2} \sin \frac{2\pi}{3x} \xrightarrow{x=4} f'(4) = \frac{-\pi}{48} \times \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow f'(4) = \frac{-\pi}{48} \times \frac{1}{2} = \frac{-\pi}{96}$$

۳۳- گزینه‌ی «۲»

$$f(x) = 4(2 \sin x \cos x) \sin 4x \cos 2x = 4 \sin 2x \cos 2x \sin 4x \Rightarrow f(x) = 2 \sin 4x \sin 4x = 2 \sin^2 4x \xrightarrow{\text{مشتق}}$$

$$f'(x) = 16 \cos 4x \sin 4x = 8 \sin 8x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{16}} f'(\frac{\pi}{16}) = 8 \sin(\frac{-\pi}{2}) \Rightarrow f'(\frac{\pi}{16}) = -8$$

۳۴- گزینه‌ی «۲»

یادآوری

$$۱) \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$۲) \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

ابتدا تابع را با استفاده یادآوری ذکر شده ساده می‌کنیم.

$$f(x) = 3 \sin x \cos x (1 - 2 \cos^2 x) = 3(\frac{1}{2} \sin 2x)(-\cos 2x) = \frac{-3}{2} (\frac{1}{2} \sin 4x)$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{3}{4} \sin 4x \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = -3 \cos 4x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{16}}$$

$$f'(\frac{\pi}{16}) = -3 \cos(\frac{\pi}{4}) = -3 \cos(\frac{\pi}{4}) = -3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-3\sqrt{2}}{2}$$



۳۵- گزینه‌ی «۲»

یادآوری

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$y = \sin^2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{4}\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{x}{2}\right)) \Rightarrow y = \frac{1}{2}(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{x}{2}\right)) \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{x}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{8}\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{x}{2}\right) \xrightarrow{x=\frac{\pi}{6}} y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{8}\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{12}\right)$$

$$\Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{8}\sin\left(\frac{9\pi}{12}\right) = \frac{1}{8}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{8}\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{8}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{8} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{16}$$

۳۶- گزینه‌ی «۴»

یادآوری

$$\sin^2 x = 2 \sin x \cos x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$f(x) = \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x} = \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}$$

$$\Rightarrow f(x) = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 \Rightarrow f(x) = \overbrace{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x}^1$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 + \sin 2x \Rightarrow f'(x) = 2 \cos 2x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{6}} f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

۳۷- گزینه‌ی «۲»

یادآوری

$$\sin^2 x = 2 \sin x \cos x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$f(x) = \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \sin^2 x} \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = \frac{-2 \sin x \cos x (1 + \sin^2 x) - (2 \sin x \cos x)(1 + \cos^2 x)}{(1 + \sin^2 x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-\sin 2x(1 + \cos^2 x) - \sin 2x(1 + \sin^2 x)}{(1 + \sin^2 x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-\sin 2x(1 + \cos^2 x + 1 + \sin^2 x)}{(1 + \sin^2 x)^2} = \frac{-2 \sin 2x}{(1 + \sin^2 x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-2 \sin 2x}{(1 + \sin^2 x)^2} \Rightarrow (1 + \sin^2 x)^2 f'(x) \Rightarrow g(x) = (1 + \sin^2 x)^2 \times \frac{-2 \sin 2x}{(1 + \sin^2 x)^2} = -2 \sin 2x$$

۳۸- گزینه‌ی «۲»

یادآوری

$$1) \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

$$2) \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$f(x) = \cos^2 2x + \sin^2 2x - 2 \sin^2 2x \cos^2 2x = (\cos^2 2x - \sin^2 2x)^2$$

$$\Rightarrow f(x) = (\cos 4x)^2 \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = 2(\cos 4x)'(\cos 4x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = -2 \times 4 \sin 4x \cos 4x \Rightarrow f'(x) = -4 \sin 8x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{48}} f'(\frac{\pi}{48}) = -4 \sin \frac{\pi}{6} = -4 \times \frac{1}{2} = -2$$

۳۹- گزینه‌ی «۲»

صورت و مخرج تابع را بر  $\cos 2x$  تقسیم می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{\frac{\cos 2x}{\cos 2x} + \frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{\frac{\cos 2x}{\cos 2x} - \frac{\sin 2x}{\cos 2x}} = \frac{1 + \tan 2x}{1 - \tan 2x} \xrightarrow{\tan(\frac{\pi}{4} + x) = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}}$$

$$f(x) = \tan(\frac{\pi}{4} + 2x) \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = 2(1 + \tan^2(\frac{\pi}{4} - 2x))$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{8}} f'(\frac{\pi}{8}) = 2(1 + \tan^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4})) = 2(1 + \tan^2(0)) \Rightarrow f'(\frac{\pi}{8}) = 2$$

۴۰- گزینه‌ی «۳»

یادآوری

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \text{ و } 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y = \frac{\tan \sqrt{x}}{1 - \tan^2 \sqrt{x}} = \frac{1}{2} \times \frac{2 \tan \sqrt{x}}{1 - \tan^2 \sqrt{x}} = \frac{1}{2} \tan(2\sqrt{x}) \xrightarrow{\text{مشتق}}$$

$$y' = \frac{1}{2} (2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} (1 + \tan^2(2\sqrt{x}))) = \frac{1}{2\sqrt{x} \cos^2(2\sqrt{x})}$$

۴۱- گزینه‌ی «۳»

یادآوری

$$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \text{ و } \sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

$$f(x) = \frac{\tan \frac{x}{4} (1 - \tan^2 \frac{x}{4})}{(1 + \tan^2 \frac{x}{4})^2} = \frac{1}{2} \times \frac{2 \tan \frac{x}{4}}{1 + \tan^2 \frac{x}{4}} \times \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{4}}{1 + \tan^2 \frac{x}{4}} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \times \sin \frac{x}{2} \times \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin x = \frac{1}{4} \sin x$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4} \sin x \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = \frac{1}{4} \cos x \xrightarrow{x=\pi} f'(\pi) = -\frac{1}{4}$$



۴۲- گزینه‌ی «۲»

یادآوری

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$f(x) = 2 \sin(\cos^2 x) \cos(\sin^2 x) \xrightarrow{\text{حاصل جمع}} f(x) = \sin(\cos^2 x + \sin^2 x) + \cos(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$\Rightarrow f(x) = \sin(1) + \sin(\cos 2x) \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = \cos(\cos 2x)(-2 \sin 2x)$$

$$\xrightarrow{x = \frac{3\pi}{4}} f'(\frac{3\pi}{4}) = \cos(0)(-2 \sin(\frac{3\pi}{2})) = 1 \times (-2)(-1) = 2$$

۴۳- گزینه‌ی «۲»

یادآوری

$$1) \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$2) 0 \leq \cos^{2k} x \leq 1, (k \in \mathbb{N})$$

$$f(x) = \sqrt{\cos^4 2x + 4(1 - \cos^2 2x)} = \sqrt{\cos^4 2x - 4 \cos^2 2x + 4} \Rightarrow f(x) = \sqrt{(\cos^2 2x - 2)^2} = |\cos^2 2x - 2|$$

اتحاد مربع کامل

حال با توجه به آن که  $0 \leq \cos^2 2x \leq 1$  داخل قدر مطلق را تعیین علامت می‌کنیم.

$$0 \leq \cos^2 2x \leq 1 \xrightarrow{-2} -2 \leq \cos^2 2x - 2 \leq -1 \Rightarrow |\cos^2 2x - 2| = -(\cos^2 2x - 2) = 2 - \cos^2 2x$$

$$f(x) = 2 - (\cos 2x)^2 \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = -2(\cos 2x)'(\cos 2x)$$

بنابراین:

$$f'(x) = 4 \sin 2x \cos 2x = 2 \sin 4x \xrightarrow{x = \frac{\pi}{24}} f'(\frac{\pi}{24}) = 2 \sin \frac{\pi}{6} = 2(\frac{1}{2}) = 1$$

۴۴- گزینه‌ی «۴»

ابتدا تابع  $f, g$  را ساده می‌کنیم، سپس حاصل  $fg$  را به دست می‌آوریم و از آن مشتق می‌گیریم.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^5} \sqrt{x} = \sqrt{x^5 \times x} = \sqrt{x^6} = x^{\frac{6}{2}} = x^3 \\ g(x) &= \frac{1}{x \times x^{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{x^{\frac{6}{5}}} = x^{-\frac{6}{5}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$f(x)g(x) = x^{\frac{6}{2}} \times x^{-\frac{6}{5}} = x^{\frac{55-24}{10}} \Rightarrow f(x)g(x) = x^{\frac{31}{10}} \xrightarrow{\text{مشتق}}$$

$$(f(x)g(x))' = \frac{31}{10} x^{\frac{31}{10}-1} = \frac{31}{10} x^{\frac{21}{10}} \xrightarrow{x=1} (f'g + g'f)(1) = \frac{31}{10}$$