سوال اول

جواب مساله $\left\lfloor\frac{2n-1}{5}\right\rfloor$ است:

اثبات کمتر مساوی بودن جواب مساله از $\frac{2n-1}{5}$:

اگر فرض کنیم k جفت انتخاب کرده باشیم و S برابر جمع اعداد انتخاب شده باشد.

چون $2k$ عدد متمایز انتخاب شده پس:

$$1+2+3+\cdots+2k \le S \to \frac{2k(1+2k)}{2} \le S$$

از طرفی چون مجموع هر جفت کمتر مساوی n هست پس:

$$S \le n+(n-1)+(n-2)+\cdots+(n-k+1) = nk-\frac{k(k-1)}{2}$$

چون جفتی که جمع عددهای آن ماکسیمم باشد کمتر مساوی n است. جفتی که دومین ماکسیمم باشند کمتر مساوی $n-1$ و ...(جمع جفت‌ها باید متمایز باشند).

پس از دو معادله بالا نتیجه می شود:

$$k(1+2k) \le S \le nk-\frac{k(k-1)}{2}$$

$$\to (1+2k) \le n-\frac{k-1}{2}$$

$$\to 5k+1 \le n$$

$$k \le \frac{n-1}{5}$$

پس جواب مساله کمتر مساوی $\frac{n-1}{5}$ است.

مثال برای $\left\lfloor\frac{2n-1}{5}\right\rfloor$:

اگر $n = 5m+1\,,5m+2$ باشد جواب مساله می شود $2m$ و جفت های زیر را می توانیم انتخاب کنیم:

$$(4m\,,1)\,,(4m-1\,,3)\,,(4m-2\,,5)\,\ldots\,(3m\,,2m+1)$$

و

$$(3m-1\,,4)\,,(3m-2\,,6),(3m-3\,,8)\,\ldots\,(2m+2\,,2m-2)$$

و

$$(2m\,,2)$$

تعداد : دسته اول $m+1$ عضو ، دسته دوم $m-2$ عضو و دسته اخر 1 عضو دارد که در مجموع $2m$ عضو می شود.

هر عدد در حداکثر یک جفت است چون :

دسته اول از اعداد فرد بازه $[1, 2m+1]$ و همه اعداد بازه $[3m, 4m]$ تشکیل شده.

دسته دوم و سوم از اعداد زوج بازه $[1, 2m+1]$ و همه اعداد بازه $[2m+2\,, 3m-1]$ و عدد $2m$ تشکیل شده.

پس هیچ عددی دوباره تکرار نشده .

کمتر بودن جمع اعضای هر عدد از n و متمایز بودن:

جمع اعداد دسته اول به ترتیب

$$4m+1\,, 4m+2\,, 4m+3\,, \dots, 5m+1$$

هستند که همگی کمتر مساوی n هستند.

جمع اعداد دسته دوم به ترتیب

$$3m+3\,, 3m+4\,, 3m+5, \dots, 4m$$

هستند که کمتر مساوی n هستند و با دسته اول اشتراک ندارند.

و اخرین جفت جمع دو عددش $2m+2$ است که باز با بقیه برابر نیست و کمتر از n هست.

پس مثال بالا درست است چون همه ویژگی‌های سوال را دارد.

برای $n = 5m+3, 5m+4, 5m+5$

جواب مساله $2m+1$ می شود:

مثال:

$$(4m+2\,, 1)\,, (4m+1\,, 3)\,, (4m, 5), \dots, (3m+2\,, 2m+1)$$

و

$$(3m+1\,, 2)\,, (3m\,, 4)\,, (3m-1\,, 6), \dots, (2m+2, 2m)$$

تعداد اعداد دسته اول $m+1$ است و دسته دوم m تا پس کل تعداد $2m+1$ است

جمع اعداد دسته دوم به ترتیب

$$3m+3\,,3m+4\,,\dots,4m+2$$

و جمع اعداد دسته اول به ترتیب

$$4m+3,4m+4\,,\dots,5m+3$$

است که چون کوچیک ترین عدد دسته اول از بزرگترین عدد دسته دوم بزرگتر است هیچ دو جفتی جمع عددشان یکسان نمی شود و همه اعداد از n کمتر مساوی هستند.

اعداد استفاده شده در دسته دوم اعداد زوج بازه $[1,2m+1]$ و کل اعداد $[2m+2\,,3m+1]$ است.

و اعداد دسته اول اعداد فرد بازه $[1,2m+1]$ و اعداد بازه $[3m+2\,,4m+2]$ است.

پس هیچ عددی در دو جفت نیامده.

پس مثال بالا ویژگی‌های مساله را دارد.

سوال دوم

به ازای هر $1 \leq i \leq 1000$ تعداد زوج مرتب های ملوس که $b = i$ را میشماریم. میخواهیم حداکثر تعداد زوج مرتب های (a, b) را بشماریم که $p_a > p_b$ و اگر ثابت کنیم این تعداد از 12500 کمتر است، آنگاه با برعکس کردن جایگشت حالت کلی مسئله نیز ثابت میشود.

اعداد $a_1, a_2, \dots, a_k$ را در نظر بگیرید که $a_j < a_{j+1}$، $a_j < i$، $p_{a_j} > p_i$ و جفت های (a_j, i) ملوس اند. اختلاف هرکدام از p_{a_j} ها را با p_i، x_j مینامیم.

لم : $x_{j-1} \geq 2 \times x_j$.

اثبات لم : فرض کنیم به ازای یک j داشته باشیم $x_{j-1} < 2 \times x_j$. آنگاه خواهیم داشت $p_{a_{j-1}} - p_{a_j} < p_{a_{j-1}} - p_i$، در صورتی که جفت (a_{j-1}, i) ملوس است و نباید دو عدد با اختلاف کمتر بینشان باشد.

از آنجایی که x_k حداقل برابر با 1 است و در هر مرحله از کم شدن j، x_j حداقل دو برابر میشود و حداکثر مقدار x_j ها باید 999 باشد، پس k حداکثر برابر با 10 است. پس تعداد جفت های (a, b) ملوس که $p_a > p_b$ حداکثر برابر با 10000 است و حکم مسئله ثابت میشود.

سوال سوم

مساله تنها در حالت $n = 1$ جواب دارد .

اکنون نشان می‌دهیم برای $n > 1$، نمی‌توانیم جدولی با مشخصات داده شده بیابیم.

برهان خلف می‌زنیم، فرض کنید مقسوم علیه‌های عدد n را در جدولی $r * c$ قرار داده‌ایم. بدون کم شدن از کلیت فرض کنید $r >= c$ است.

به سادگی می توان نشان داد که در حالت $n > 1$ حتما $r, c >= 2$ است.

از طرفی چون عدد n خود مقسوم علیه است و باید در جدول ظاهر شود، پس مجموع اعداد هر سطر بیشتر از n است چون سطری که n در آن ظاهر شده است، دارای اعداد دیگری نیز هست پس مجموع اعداد این سطر بیشتر از n است و پس مجموع اعداد هر سطر بیشتر از n است.

اکنون در هریک از r سطر، بزرگترین عدد را در نظر بگیرید. در بین این r عدد، کوچکترین عدد را در نظر بگیرید و آن را x بنامید ،چون عدد n اقلا $r - 1$ مقسوم علیه بزرگتر از x دارد . پس $x <= n / r$ است (در واقع x حداکثر برابر r امین بزگترین مقسوم علیه n است که حداکثر برابر n/r است).

حال سطری را در نظر بگیرید که x در آن آمده است، طبق تعریف x بزرگترین عدد در این سطر است. در این سطر c عدد داریم که همگی کمتر مساوی x هستند، پس مجموع اعداد این سطر حداکثر $c * n/r$ است که چون $r >= c$، پس مجموع اعداد این سطر کمتر مساوی n است، اما قبلا گفتیم که مجموع اعداد هر سطر بیشتر از n است، پس این موضوع با فرض‌ها در تناقض است لذا فرض‌خلف باطل است و برای $n > 1$ جدولی نداریم.

سوال چهارم

جواب سوال برابر با $2k - n$ است.