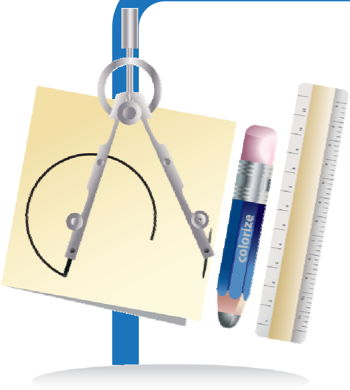
گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی



ریاضی ۳

فصل اول

احتمال:

تعاریف:

آزمایش یا پدیده‌ای را که قبل از رخداد نتیجه‌اش معلوم نباشد ولی نتیجه‌های ممکن آن مشخص باشد، **آزمایش تصادفی** یا **پدیده‌ی تصادفی** می‌نامند.

فضای نمونه‌ای: مجموعه‌ی همه‌ی نتایج ممکن را فضای نمونه‌ای آزمایش تصادفی می‌نامیم و آن را با S نمایش می‌دهیم.

برآمد: هر نتیجه‌ی ممکن یعنی هر عضو S را یک برآمد می‌گوییم. در هر آزمایش تصادفی تنها یکی از عضوهای این مجموعه رخ خواهد داد.

پیشامد: هر پیشامد زیر مجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای است. در هرحال وقتی می‌گوییم پیشامدی رخ خواهد داد به معنای آن است که تنها یکی از برآمدهای آن رخ خواهد داد. دو پیشامد که برآمد مشترکی ندارند را ناسازگار می‌گویند.

منظور از رخداد یک پیشامد، وقوع آن پیشامد، یعنی مشاهده‌ی عضوی از آن پیشامد به عنوان نتیجه‌ی آزمایش است.

پیشامد ناممکن و مطمئن: ϕ را پیشامد ناممکن (نشدنی) و S را پیشامد مطمئن (حتمی) می‌گویند.

انواع فضای نمونه:

تعداد اعضای مجموعه‌ی S، یعنی تعداد برآمدهای فضای نمونه‌ای ممکن است متناهی، شمارا نامتناهی یا ناشمارا باشد. وقتی تعداد برآمدهای فضای نمونه‌ای، متناهی یا شمارای نامتناهی باشد، آن را فضای نمونه‌ای «گسسته» می‌نامند. تعداد برآمدهای فضای نمونه‌ای ممکن است ناشمارا باشد، که در این‌صورت فضای نمونه‌ای گسسته نیست. (مانند انتخاب عددی در بازه‌ی (۲ و ۰).)
(وقتی فضای نمونه‌ای، ناشمارا باشد، آن را فضای نمونه‌ای «پیوسته» می‌نامند.)

فضای نمونه
- شمارا (گسسته)
  - متناهی
  - نامتناهی
- ناشمارا (پیوسته)

مثال: در کیسه‌ای ۷ توپ متمایز وجود دارد. یک توپ به تصادف از آن خارج کرده و بدون مشاهده آن را کنار می‌گذاریم. سپس توپ دیگری را خارج کرده آن را مشاهده می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) $\binom{۷}{۲}$ ۴) ۱۲

حل:

چون اطلاعی از خروج مهره اول در دست نیست، پس توقع ما در مورد خروج مهره دوم تغییر نکرده است. یعنی ما هم‌چنان توقع خروج هر ۷ مهره را داریم و نمی‌توانیم بگوییم مهره‌ی معینی شانس خروج ندارد. پس فضای نمونه‌ای ۷ عضوی است.

اصول موضوع کولموگروف:

وقتی فضای نمونه‌ای S را برای آزمایشی تصادفی داریم، احتمال پیشامدهای فضای S را به صورت مقادیر حقیقی یک تابع مجموعه‌ای P تعریف می‌کنیم که این تابع براساس ۳ اصل موضوع زیر، اعداد حقیقی را به پیشامدها، یعنی به زیر مجموعه‌های S نسبت می‌دهد.

اصل موضوع ۱: احتمال هر پیشامد عددی نامنفی است، یعنی: $\forall A \subseteq S : P(A) \geq ۰$

اصل موضوع ۲: $P(S) = ۱$

اصل موضوع ۳: اگر $A_۱$، $A_۲$، ...و A_n پیشامدهای دوبه‌دو ناسازگار باشند، آن‌گاه:

$$P(A_۱ \cup A_۲ \cup .... \cup A_n) = P(A_۱) + P(A_۲) + ... + P(A_n)$$

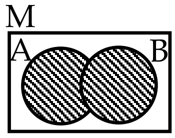
تابعی که در این اصول صادق باشد، به **تابع احتمال** موسوم است. فضای S، تابع P و مجموعه‌ی پیشامدها را **مدل احتمال آزمایش تصادفی** می‌نامند.

عملیات بر روی پیشامدها:

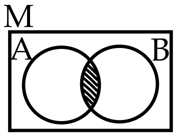
می‌توان بین پیشامدهای یک آزمایش و عبارات مجموعه‌ای یک تناظر یک‌به‌یک ایجاد کرد. در واقع چون پیشامد خود از جنس مجموعه است، می‌توان پیشامدهای جدیدی با استفاده از تلفیق پیشامدهای قبلی ایجاد کرد:

پیشامد وقوع A یا B: $(A\cup B)$

$A\cup B$

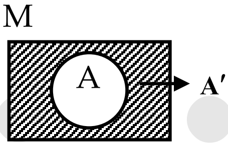


پیشامد وقوع A و B: $(A\cap B)$

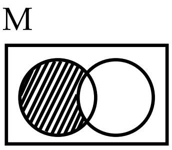


$A\cap B$

پیشامد عدم وقوع A: ($\overline{A}$ یا A')

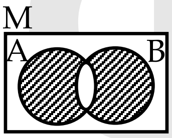


پیشامد وقوع فقط A: (A رخ دهد و B رخ ندهد)



$A-B$

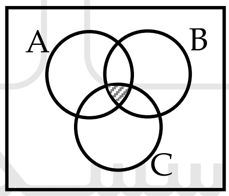
پیشامد وقوع فقط A یا فقط B: (A رخ دهد و B رخ ندهد یا A رخ ندهد و B رخ دهد):



$A\Delta B$

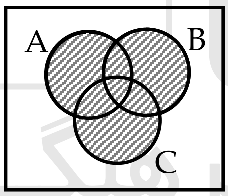
☜**مثال: فرض کنید A , B , C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای باشند. نمودار ون پیشامدهای زیر را رسم کنید:**

الف) هر ۳ پیشامد رخ دهد:



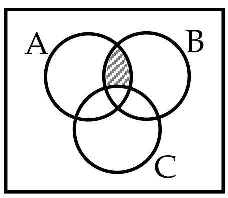
$A\cap B\cap C$

ب) لااقل یکی از پیشامدها رخ دهد:



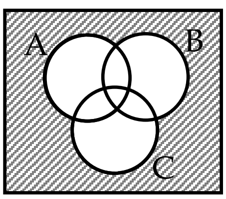
$A\cup B\cup C$

ج) A , B اتفاق بیفتد و C رخ ندهد:



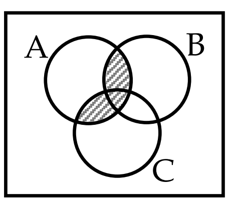
$A\cap B\cap\overline{C}$

د) هیچ یک از پیشامدها رخ ندهد:



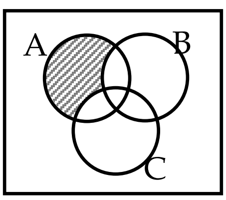
$\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$

هـ) A اتفاق بیفتد و لااقل یکی از پیشامدهای B , C نیز رخ دهد:



$A\cap(B\cup C)$

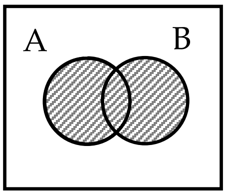
و) فقط A اتفاق بیفتد:



$A\cap\overline{B}\cap\overline{C}=A-(B\cup C)$

مؤسسه آموزشی فرهنگی

ز) A اتفاق بیفتد یا در صورتی که A رخ نداد، B رخ دهد:



این عبارت در واقع $A\cup(B-A)$ است که همان $A\cup B$ می‌باشد.

☜ **مثال: سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو بیاید آن‌گاه تاس را می‌ریزیم و اگر پشت بیاید، سکه را دوبار دیگر پرتاب می‌کنیم. مطلوب است تعیین:**

الف) فضای نمونه‌ای این پیشامد.

ب) پیشامد A که در آن دقیقاً یک‌بار سکه رو بیاید.

ج) پیشامد B به‌طوری که حداقل دوبار ظاهر شدن پشت در پرتاب سکه را نشان دهد.

د) $A\cap B'$

✍ **حل:**

الف) $S=$ { (ر،۱)، (ر،۲)، (ر،۳)، (ر،٤)، (ر،٥)، (ر، ٦)، (پ،ر،ر)، (پ،ر،پ)، (پ،پ،ر)، (پ،پ،پ) }

ب) $A=$ { (ر،۱)، (ر،۲)، (ر،۳)، (ر،٤)، (ر،٥)، (ر، ٦)، (پ،ر،پ)، (پ،پ،ر) }

ج) $B=$ { (پ،ر،پ)، (پ،پ،ر)، (پ،پ،پ) }

د) $B'=$ { (ر،۱)، (ر،۲)، (ر،۳)، (ر،٤)، (ر،٥)، (ر، ٦)، (پ، ر، ر) }

$A\cap B'=$ { (ر،۱)، (ر،۲)، (ر،۳)، (ر،٤)، (ر،٥)، (ر، ٦) }

☜ **مثال: هریک از اعداد فرد طبیعی کوچک‌تر از ۱٦ را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها یکی را به‌طور قرعه برمی‌داریم. مطلوب است تعیین:**

الف) فضای نمونه‌ای این تجربه‌ی تصادفی

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.

پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت یک رقمی باشد.

ت) پیشامد $A\cap B$

✍ **حل:**

الف) $S=\{۱,۳,۵,۷,۹,۱۱,۱۳,۱۵\}$

ب) $A=\{۳,۹,۱۵\}$

پ) $B=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$

ت) $A\cap B=\{۳,۹,۱۵\}\cap\{۱,۳,۵,۷,۹\}=\{۳,۹\}$

☜ **مثال: یک سکه و یک تاس سالم را با هم می‌اندازیم مطلوبست تعیین:**

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی

ب) پیشامد A که تاس عدد زوج یا سکه رو بیاید.

ج) پیشامد B که تاس عدد زوج و سکه رو بیاید.

د) $A'\cup B'$

✍ **حل:**

الف: $S=$ {(۱،ر) و (۲،ر) و (۳،ر) و (٤،ر) و (٥،ر) و (٦،ر) و (۱،پ) و (۲،پ) و (۳،پ) و (٤،پ) و (٥،پ) و (٦،پ)}

ب: $A=$ {(۲،ر) و (٤،ر) و (٦،ر) و (۲،پ) و (٤،پ) و (٦،پ) و (۱،ر) و (۳،ر) و (٥،ر)}

ج: $B=$ {(۲،ر) و (٤،ر) و (٦،ر)}

د: $A'=$ {(۱،پ) و (۳،پ) و (٥،پ)}

$B'=$ {(۱،ر) و (۳،ر) و (٥،ر) و (۱،پ) و (۲،پ) و (۳،پ) و (٤،پ) و (٥،پ) و (٦،پ)}

$A'\cup B'=$ {(۱،پ) و (۲،پ) و (۳،پ) و (٤،پ) و (٥،پ) و (٦،پ) و (۱،ر) و (۳،ر) و (٥،ر)}

☜ **مثال: ارقام ۵،۳،۰،۹ را درنظر بگیرید. مطلوب است تعیین:**

الف) فضای نمونه‌ای S که شامل تمام اعداد دو رقمی ساخته شده با این ارقام و بدون تکرار باشد.

ب) پیشامد A، آن‌که اعداد دورقمی مضرب ۵ باشد.

ج) پیشامد B، آن‌که اعداد دو رقمی بزرگتر از ۵۰ باشد.

د) پیشامد $A\cap B'$

✍ **حل:**

الف)

$$S=\{۳۰,۳۵,۳۹,۵۰,۵۳,۵۹,۹۰,۹۳,۹۵\}$$

ب) اعدادی که به صفر یا ۵ ختم می‌شوند، مضرب ۵ هستند.

$$A=\{۳۰,۳۵,۵۰,۹۰,۹۵\}$$

ج)

$$B=\{۵۳,۵۹,۹۰,۹۳,۹۵\}$$

د) ابتدا B' را مشخص می‌کنیم.

$$B'=\{۳۰,۳۵,۳۹,۵۰\} \qquad A\cap B'=\{۳۰,۳۵,۵۰\}$$

☜ **مثال: در انتخاب سه نفر از بین ۷ نفر پیشامد آن که از بین دو نفر a و b حداقل یکی موجود باشد چند عضو دارد؟**

۱) ۲۵ ۲) ۲۰ ۳) ۱۵ ۴) ۱۰

✍ **حل:**

$$\binom{۷}{۳}-\underbrace{\binom{۵}{۳}}_{\text{حالتی که هیچ‌کدام موجود نباشد.}}=۳۵-۱۰=۲۵$$

احتمال هم شانس (متساوی الاحتمال) در فضای گسسته: (احتمال کلاسیک)

اگر A پیشامدی از فضای نمونه‌ای گسسته‌ی S باشد، $P(A)$ برابر با مجموع احتمال برآمدهایی است که در A هستند. اگر S دارای n برآمد باشد و تابع احتمال به هر برآمد عدد $\frac{1}{n}$ را نسبت دهد، فضای نمونه‌ای حاصل را یکنواخت یا متساوی الاحتمال می‌نامند. اگر در این فضا پیشامد A متشکل از m برآمد باشد، آن‌گاه $P(A)=\frac{m}{n}$ (در واقع فراوانی نسبی پیشامد A را احتمال آن تعریف می‌کنیم.) لذا احتمال رخ دادن پیشامد A در این فضا برابر است با: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$

☜ **مثال: دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم، احتمال آن‌که مجموع ۵ بیاید، کدام است؟**

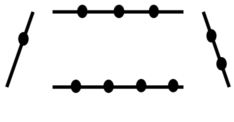
✍ **حل:**

$$A=\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۲),(۴,۱)\}$$

$$|S|=۶\times۶=۳۶$$

$$P(A)=\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱}{۹}$$

☜ **مثال: از میان ۱۰ نقطه‌ی زیر، چهار نقطه به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که با ٤ نقطه‌ی انتخاب شده بتوان یک چهارضلعی ساخت که روی هر خط فقط یک رأس چهارضلعی قرار داشته باشد، کدام است؟**



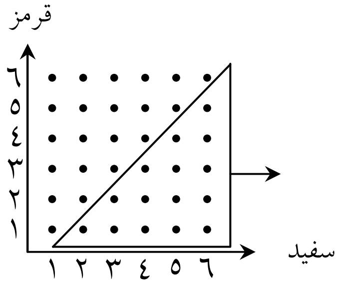
✍ **حل:** از هر کدام از خط‌ها یکی از رئوس را انتخاب می‌کنیم:

$$P(A)=\frac{\binom{۱}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۱}}{\binom{۱۰}{۴}}$$

☜ مثال: دو تاس قرمز و سفید پرتاب می‌شوند، احتمال آن که عدد تاس سفید بزرگ‌تر باشد، چقدر است؟

✍ **حل:**

زوج مرتب‌هایی که مؤلفه سفیدشان بزرگ‌تر است، مطلوبند:



$$P(A)=\frac{\frac{۳۶-۶}{۲}}{۳۶}=\frac{۱۵}{۳۶}$$

☜ مثال: در اتاقی ۱۰ جفت کفش متمایز وجود دارد، هرگاه از میان آن‌ها دو لنگه کفش انتخاب شود، احتمال این‌که این دو لنگه کفش یک جفت کفش تشکیل دهند، کدام است؟

✍ **حل:** از بین جفت‌ها مطلوب است یک جفت را انتخاب کنیم:

$$P(A)=\frac{\binom{۱۰}{۱}}{\binom{۲۰}{۲}}$$

☜ مثال: در پرتاب ٤ سکه با هم، احتمال آنکه فقط ۳ سکه رو یا فقط ۳ سکه پشت بیاید چقدر است؟

✍ **حل:**

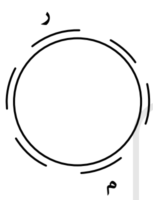
$$P(A)=\frac{۴+۴}{۲^۴}=\frac{۸}{۱۶}=\frac{۱}{۲}$$

A= {(ر، ر، ر، پ)، (پ، پ، پ، ر)}

جایگشت ر ٤ ×   جایگشت پ ٤ ×

☜ مثال: رئیس، معاون و ٤ کارمند دور یک میز گرد می‌نشینند. با کدام احتمال رئیس مقابل معاون قرار می‌گیرد؟

✍ **حل:** رئیس در هر مکانی قرار گیرد، از ۵ مکان باقی‌مانده، مکان روبه‌روی رئیس مطلوبست: $P(A)=\frac{۱}{۵}$



☜ مثال: دو تاس سفید و یک تاس قرمز متمایز را می‌ریزیم. احتمال آن‌که عدد تاس قرمز کوچک‌تر از تاس‌های سفید باشد چقدر است؟

✍ **حل:**

تاس قرمز	تاس‌های سفید	
۱	۵×۵	می‌توانند از ۲ تا ٦ باشند
۲	٤×٤	می‌توانند از ۳ تا ٦ باشند
۳	۳×۳	می‌توانند از ٤ تا ٦ باشند
٤	۲×۲	می‌توانند از ۵ تا ٦ باشند
۵	۱×۱	فقط می‌توانند ٦ باشند

$$P(A)=\frac{۲۵+۱۶+۹+۴+۱}{۶^۳}=\frac{۵۵}{۲۱۶}$$

☜ مثال: بر روی هر یک از چند کارت یکسان اعداد ۳ رقمی حاصل از جایگشت ترکیبات مجموعه‌ی ارقام ۲، ٤، ۵، ٦ و۷ را نوشته و به تصادف کارتی بیرون می‌آوریم. احتمال آنکه دو رقم از ارقام عدد خارج شده فرد باشد چقدر است؟

✍ **حل:** مطلوب است ۲ رقم از بین ارقام فرد و یک رقم از بین ارقام زوج انتخاب کرده و بچینیم.

$$P(A)=\frac{\binom{۲}{۲}\binom{۳}{۱}\times ۳!}{\binom{۵}{۳}\times ۳!}=\frac{۳}{۱۰}$$

مثال: در کیسه‌ای ۵ مهره‌ی قرمز متمایز، ۳ مهره‌ی سفید متمایز و ۷ مهره‌ی آبی متمایز قرار دارد.

الف) دو مهره از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که یکی سفید و یکی قرمز باشد، چقدر است؟

$$P(A)=\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۵}{۲}}$$

ب) دو مهره از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که فقط یکی قرمز باشد، چقدر است؟

$$p(A)=\frac{\binom{۵}{۱}\binom{۱۰}{۱}}{\binom{۱۵}{۲}}$$

ج) دو مهره از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که حداقل یکی قرمز باشد، چقدر است؟

$$P(A)=\frac{\binom{۵}{۱}\binom{۱۰}{۱}+\binom{۵}{۲}}{\binom{۱۵}{۲}}$$

د) دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که یکی سفید و یکی قرمز باشد، چقدر است؟

$$P(A)=\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۱}\times \overset{\text{چون ترتیب خروج مهم است}}{\overset{\uparrow}{۲!}}}{\binom{۱۵}{۱}\binom{۱۴}{۱}}$$

هـ) دو مهره متوالیاً و با جایگذاری از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که یکی سفید و یکی قرمز باشد، چقدر است؟

$$P(A)=\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۱}\times \overset{\text{چون ترتیب خروج مهم است}}{\overset{\uparrow}{۲!}}}{\binom{۱۵}{۱}\binom{۱۵}{۱}\longrightarrow \text{چون مهره خارج شده مجدداً به کیسه بازگشته است}}$$

مثال: ده کارت که بر روی هر کدام از آن‌ها، یکی از اعداد ۱ تا ۱۰ نوشته شده است در درون ظرفی قرار دارند (هیچ دو کارتی شماره‌ی یکسان ندارند). اگر کارت‌های موجود در ظرف را به تصادف و بدون جایگذاری بیرون بیاوریم، احتمال آن که ٤ قبل از ٦ و ٦ قبل از ٢ بیرون آید (نه لزوماً بلافاصله) کدام است؟

حل:

راه حل ۱: این سه رقم در هر جایگاهی که قرار بگیرند، نسبت بهم !۳ حالت جایگشت دارند که حالت ٤٦٢ مطلوب است. لذا همواره یکی از ٦ حالت مطلوبست: $P=\frac{۱}{۶}$

راه حل ۲: ابتدا مکان این سه رقم را تعیین کرده و سپس طبق ترتیب گفته شده می‌چینیم. بقیه ۷ رقم به‌صورت دلخواه چیده می‌شوند.

$$P(A)=\frac{\binom{۱۰}{۳}\times ۷!}{۱۰!}=\frac{\frac{۱۰\times ۹\times ۸}{۳!}}{۱۰\times ۹\times ۸}=\frac{۱}{۶}$$

☜ **مثال: n نفر را در نظر می‌گیریم. احتمال آن‌که روز تولد هیچ دو نفری از آن‌ها در یک روز یکسان از سال ۳۶۵ روزی نباشد، چقدر است؟**

✍ **حل:** نفر اول ۳٦۵ روز برای انتخاب دارد، نفر دوم ۳٦٤ روز و ...

$$P(A)=\frac{365\times 364\times \dots (365-n+1)}{365^n}$$

☜ **مثال: از بین ۵ داوطلب گروه ریاضی و ۳ داوطلب گروه تجربی، به تصادف ۳ نفر برای انجام آزمونی معرفی می‌شوند. با کدام احتمال دو نفر از معرفی شدگان، از گروه ریاضی است؟**

✍ **حل:** باید دو نفر ریاضی باشند و حتماً نفر سوم تجربی و در غیر این صورت ممکن است سه نفر ریاضی شوند.

$$P=\frac{\binom{5}{2}\binom{3}{1}}{\binom{8}{3}}=\frac{10\times 3}{\frac{8\times 7\times 6}{3\times 2}}=\frac{15}{28}$$

☜ **مثال: در ظرفی پنج مهره با شماره‌های ۱,۲,۳,۴,۵ قرار دارند. دو مهره باهم بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال مجموع شماره‌های این دو مهره عددی فرد است؟**

✍ **حل:** برای آن‌که مجموع شماره‌ها فرد باشد. باید یکی زوج و دیگری فرد باشد.

$$P=\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

☜ **مثال: در یک خانواده‌ی ٤ فرزندی احتمال آن‌که فرزندان خانواده از دو پسر و دو دختر تشکیل شده باشد چقدر است؟**

✍ **حل:** فقط کافی است جای پسرها و دخترها را تعیین کنیم:

$$P=\frac{\binom{4}{2}}{2^4}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

قوانین احتمال:

برای تمام پیشامدها: $0\le P(A)\le 1$

۱) $P(\phi)=0$ (پیشامد ناممکن (نشدنی))

$P(S)=1$ (پیشامد حتمی (مطمئن))

۲) قانون جمع احتمال‌ها: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند: $P(A\cap B)=0$ و لذا:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

۳) $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$

٤) $P(A')=1-P(A)$

۵) $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

٦) $P(A\Delta B)=P(A\cup B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=2P(A\cup B)-P(A)-P(B)$

۷) $P(A'\cap B')=P\big((A\cup B)'\big)=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$

مؤسســه آموزشــی فرهنگی

☜ **مثال: احتمال این‌که شخصی در امتحان ریاضی قبول شود برابر $\frac{۲}{۳}$، احتمال این‌که در امتحان فیزیک قبول شود برابر $\frac{۱}{٤}$ و احتمال این‌که در هر دو درس قبول شود برابر $\frac{۱}{٦}$ است. احتمال این‌که در هیچ یک از دو امتحان قبول نشود، چقدر است؟**

✍ **حل:**

$$P(\text{ر}'\cap\text{ف}')=۱-P(\text{ر})-P(\text{ف})+P(\text{ر}\cap\text{ف})=۱-\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴}$$

☜ **مثال: احتمال این که از بین ۳ فرزند یک خانواده حداقل تولد دو نفرشان از لحاظ روزهای هفته مثل هم باشد چقدر است؟**

✍ **حل:**

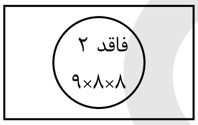
$$P(A)=۱-P(\text{هیچ ۲ تایی مثل هم نباشند})=۱-\frac{۷\times۶\times۵}{۷\times۷\times۷}=\frac{۱۹}{۴۹}$$

☜ **مثال: از بین اعداد طبیعی سه رقمی، به تصادف یک عدد برداشته‌ایم. با کدام احتمال، لااقل یک بار رقم ۲ در این عدد ظاهر شده است؟**

✍ **حل:**

$$\text{تعداد اعداد ۳ رقمی}=n(S)=\boxed{۹}\boxed{۱۰}\boxed{۱۰}=۹\times۱۰\times۱۰=۹۰۰$$

$$\text{تعداد اعداد ۳ رقمی فاقد ۲}=n(A')=\underset{\text{به جز ۰ و ۲}}{\boxed{۸}}\underset{\text{به جز ۲}}{\boxed{۹}}\underset{\text{به جز ۲}}{\boxed{۹}}=۸\times۹\times۹$$

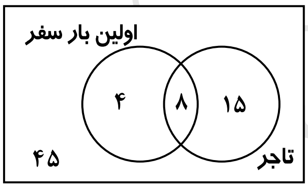


$n(s)=۹\times۱۰\times۱۰$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{۹\times۱۰\times۱۰-۸\times۹\times۹}{۹\times۱۰\times۱۰}=۱-\frac{۸\times۹\times\cancel{۹}}{\cancel{۹}\times۱۰\times۱۰}=۱-۰/۷۲=۰/۲۸$$

☜ **مثال: تعداد مسافرین در یک هتل ۷۲ نفر است که ۲۳ نفر آنان تاجرند و ۱۲ نفر برای اولین‌بار سفر کرده‌اند. ۸ نفر از این تاجرین، برای اولین‌بار سفر کرده‌اند. اگر فردی به تصادف از بین آنان انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد نه تاجر است و نه اولین بار سفر کرده است؟**

✍ **حل:**



۲۳ تاجر:
- ۸ نفر برای اولین بار سفر کرده‌اند.
- ۱۵ نفر برای اولین بار سفر نکرده‌اند

٤۹ نفر تاجر نیستند:
- ٤ نفر برای اولین بار سفر کرده‌اند
- ٤۵ نفر برای اولین بار سفر نکرده‌اند

$$P=\frac{۴۵}{۷۲}=\frac{۵}{۸}$$

☜ **مثال: در کیسه‌ای ۳ مهره‌ی سیاه، ٤ مهره‌ی قرمز و ۳ مهره‌ی آبی وجود دارد. از این کیسه ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن‌که هر سه مهره دارای یک رنگ نباشند؟(مثلاً هر سه قرمز نباشند)**

✍ **حل:**

$$۱-\left(\frac{\binom{۳}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}}+\frac{\binom{۴}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}}+\frac{\binom{۳}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}}\right)=\frac{۱۹}{۲۰}$$

استقلال دو پیشامد:

اگر آگاهی از رخداد پیشامد B در رخداد پیشامد A مؤثر نباشد، A را مستقل از B می‌گوییم، که در این‌صورت: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. هم‌چنین اگر تساوی اخیر برقرار باشد، دو پیشامد A و B مستقل خواهند بود. (این قضیه به چند پیشامد نیز قابل تعمیم است.)

مثال: پدر و مادری هر یک دارای یک ژن رنگ چشم مغلوب (b) و یک ژن رنگ چشم غالب (B)اند و $P(B) = 3P(b)$. اگر این پدر و مادر دارای سه فرزند باشند، با کدام احتمال فقط یکی از فرزندان دارای ژن رنگ چشم مغلوب است؟

حل: در این مسأله با یک توزیع احتمال دو جمله‌ای مواجه‌ایم که در آن $P(b) = \frac{1}{4}$ و $P(B) = \frac{3}{4}$، زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} P(b) + P(B) = 1 \\ P(B) = 3P(b) \end{array}\right\} \Rightarrow P(b) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{3}{4}$$

حال احتمال آن‌که دقیقاً یکی از فرزندان دارای ژن مغلوب (b) باشد، برابر است با: (فرزندان مستقل از هم هستند.)

$$P(X=1) = P\{bBB\} + P\{BbB\} + P\{BBb\} = \frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4} = 3\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64}$$

مثال: در کیسه‌ای ٤ مهره‌ی آبی، ۳ مهره‌ی سبز و ۲ مهره‌ی قرمز وجود دارد. ۳ مهره به تصادف و پی‌درپی و با جایگذاری از این کیسه خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد مهره‌ی اول آبی، دومی سبز و سومی آبی باشد؟ اگر این عمل را بدون جایگذاری انجام دهیم، چقدر احتمال دارد مهره‌ی اول آبی، دومی سبز و سومی آبی باشد؟

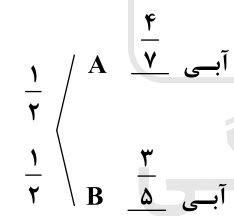
حل: به‌دلیل استقلال پیشامدها، احتمال‌ها را در هم ضرب می‌کنیم:

قسمت اول: $\frac{4}{9}\times\frac{3}{9}\times\frac{4}{9} = \frac{16}{243}$

قسمت دوم: $\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{3}{7} = \frac{1}{14}$

مثال: در جعبه‌ی A، ۳ مهره قرمز و ٤ مهره آبی و در جعبه‌ی B، ۲ مهره قرمز و ۳ مهره آبی وجود دارد. یکی از این دو جعبه را به تصادف انتخاب کرده و ۱ مهره به تصادف از آن جعبه خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد این مهره آبی باشد؟

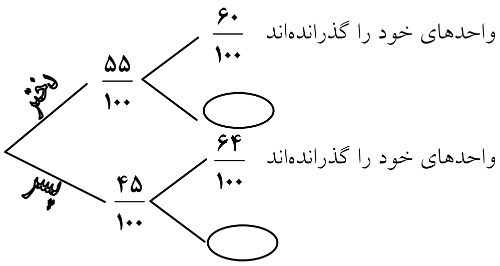
حل: با رسم نمودار درختی و حالت‌بندی مسأله به دو حالت داریم:



$$P(\text{آبی بیاید}) = \frac{1}{2}\times\frac{4}{7} + \frac{1}{2}\times\frac{3}{5} = \frac{41}{70}$$

مثال: ۵۵ درصد دانشجویان سال اول، دختر و بقیه پسر هستند. ٦۰ درصد دختران و ٦٤ درصد پسران، تمام واحدهای درسی خود را گذرانده‌اند. چند درصد کل دانشجویان، تمام واحدهای درسی را گذرانده‌اند؟

حل: با رسم نمودار درختی و حالت‌بندی مسأله به دو حالت و با توجه به استقلال جنسیت از واحدهای گذرانده، برای اینکه بدانیم چند درصد دانشجویان واحدهای درسی خود را گذرانده‌اند باید یک دانشجو چه پسر چه دختر به تصادف انتخاب کنیم و احتمال اینکه واحد درسی خود را گذرانده محاسبه کنیم:



$$P(A) = \frac{55}{100}\times\frac{60}{100} + \frac{45}{100}\times\frac{64}{100} = \frac{618}{1000} = 0/618$$

$0/618 \times 100 = 61/8$ درصد

مؤسسـه آموزشـی فرهنگـی

مثال: در یک شرکت بسته‌بندی کالا، درصد محصولات تولیدی، با سه دستگاه A، B و C به‌ترتیب ۳۰، ٤٥ و ۲۵ می‌باشد. می‌دانیم ۱ درصد از محصولات A، ۲ درصد از محصولات B و ٤ درصد از محصولات C معیوب هستند. اگر یک کالا به تصادف از بین این محصولات انتخاب کنیم، احتمال سالم بودن آن کدام است؟

حل:

نمودار درختی این مسئله به‌صورت زیر است: (دستگاه و نوع محصول مستقل است.)

A: $۰/۳ \xrightarrow{\text{معیوب}} ۰/۰۱$

B: $۰/۴۵ \xrightarrow{\text{معیوب}} ۰/۰۲$

C: $۰/۲۵ \xrightarrow{\text{معیوب}} ۰/۰۴$

برای سهولت در محاسبات ابتدا احتمال معیوب را حساب کرده (احتمال متمم) و سپس از یک کم می‌کنیم. داریم:

$$P(\text{معیوب}) = ۰/۳\times۰/۰۱+۰/۴۵\times۰/۰۲+۰/۲۵\times۰/۰۴ = ۰/۰۰۳+۰/۰۰۹+۰/۰۱ \Rightarrow P(\text{معیوب}) = ۰/۰۲۲$$

$$\Rightarrow P(\text{سالم}) = ۱-P(\text{معیوب}) = ۱-۰/۰۲۲ = ۰/۹۷۸$$

مثال: در ظرفی ٤ مهره‌ی سفید، ۵ مهره‌ی سیاه و ۱ مهره‌ی سبز موجود است. در ظرف دیگر ٦ مهره‌ی سفید و ۲ مهره‌ی سبز قرار دارد. به تصادف از هر ظرف یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال رنگ این دو مهره، متفاوت است؟

حل:

تعداد مهره‌های دو ظرف به‌صورت زیر است:

ظرف اول: $\overset{۵}{B}+\overset{۱}{G}+\overset{۴}{W}$, ظرف دوم: $\overset{۲}{G}+\overset{۶}{W}$

نمودار درختی مسئله به‌صورت مقابل است: (ظرف‌ها مستقل از همند.)

ظرف اول سفید: $\frac{۴}{۱۰} \xrightarrow{\text{ظرف دوم غیرسفید}} \frac{۲}{۸}$

ظرف اول سیاه: $\frac{۵}{۱۰} \xrightarrow{\text{ظرف دوم غیرسیاه}} \frac{۸}{۸}$

ظرف اول سبز: $\frac{۱}{۱۰} \xrightarrow{\text{ظرف دوم غیرسبز}} \frac{۶}{۸}$

$$\Rightarrow P(\text{غیرهمرنگ}) = \frac{۴}{۱۰}\times\frac{۲}{۸}+\frac{۵}{۱۰}\times\frac{۸}{۸}+\frac{۱}{۱۰}\times\frac{۶}{۸} = \frac{۵۴}{۸۰} = \frac{۲۷}{۴۰}$$

مثال: در یک خانواده‌ی سه فرزندی، با انتخاب یکی از فرزندان، مشاهده شده آن فرزند پسر است. با کدام احتمال دو فرزند دیگر دختر است؟

حل:

چون دو فرزند باقی‌مانده مستقل از فرزند انتخاب شده می‌باشند، لذا احتمال آن‌که هر دو فرزند دختر باشند، عبارت است از:

$$P(A) = \underbrace{\frac{۱}{۲}}_{\text{اولی دختر}}\times\overbrace{\frac{۱}{۲}}^{\text{دومی دختر}}$$