educo.ir

دانلود سوالات آزمون‌های مختلف

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

ماخ

دفترچه سوالات
مرحله دوم
چهاردهمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر سال ۱۳۸۲

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله‌های تشریحی	سوالات چند گزینه‌ای
۴۲۰	۸	–

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۸ مسألەی تشریحی** و وقت آن **۵۴۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

۱- لیوان بازی (۲۰ نمره)

یک میز چرخان مربع شکل را در نظر بگیرید که در هر یک از چهار گوشه‌ی آن یک عدد لیوان قرار دارد. هر لیوان یا رو به بالا $(\cup)$ است یا رو به پایین $(\cap)$. «محمد» که چشمانش بسته است، می‌خواهد با توجه به قواعد زیر با حداقل تعداد «حرکت» همه‌ی لیوان‌ها را یا رو به بالا کند و یا همه را رو به پایین. این کار زیر نظر یک داور انجام می‌شود. هر حرکت شامل همه‌ی مراحل زیر است که به ترتیب اجرا می‌شوند:

۱) داور میز را به دل‌خواه می‌چرخاند تا هر لیوانی که بخواهد در گوشه‌ی موردنظرش قرار گیرد.

۲) محمد دو گوشه‌ی میز را انتخاب می‌کند. اگر این دو گوشه دو سر یک ضلع مربع باشند آن‌ها را گوشه‌های مجاور و اگر دو سر یک قطر باشند آن‌ها را گوشه‌های روبه‌رو می‌گوییم.

۳) محمد دو لیوان در گوشه‌های انتخابی را لمس می‌کند و می‌فهمد که هر یک رو به بالاست یا رو به پایین.

٤) محمد با برعکس کردن تعدادی (شاید هیچ‌کدام) از این دو لیوان آن دو را به هر صورتی که لازم ببیند در می‌آورد.

۵) داور به محمد می‌گوید که آیا همه‌ی لیوان‌ها هم‌جهت هستند یا خیر. اگر هم‌جهت باشند که محمد موفق شده است و کار تمام است، وگرنه باید حرکت بعدی را انجام دهد.

آیا محمد می‌تواند با تعداد محدودی حرکت این کار را انجام دهد؟ در صورتی که جواب شما منفی است آن را اثبات کنید. برای جواب مثبت، حداقل تعداد حرکت‌ها را به دست آورید و نشان دهید که آن تعداد حرکت کمینه است.

نکته‌ی مهم: برای بیان استدلال یا الگوریتم خود حتماً از نمادهای $\cup, \cap$ و یا $?$ استفاده کنید و وضعیت لیوان‌ها را به صورت دنباله‌ی چهارتایی از این نمادها نشان دهید. مثلاً در ابتدا وضعیت $????$ است، یعنی محمد نمی‌داند که لیوان‌ها در چه وضعی قرار دارند. اگر او در اولین حرکت دو لیوان مجاور را رو به پایین کند، وضعیت به صورت $\cap\cap??$ ، $?\cap\cap?$، $??\cap\cap$ یا $\cap??\cap$ در می‌آید و اگر وضعیت مثلاً $?\cap\cup?$ باشد و این دو لیوان روبه‌رو را به سمت بالا در آورد وضعیت به صورت $\cup\cap\cup?$ یا $?\cup\cup\cup$ در می‌آید.

۲- مهره‌ها (۲۵ نمره)

تعدادی مهره داریم که روی هر کدام یک عدد طبیعی نوشته شده است. هربار می‌توانیم یک مهره به شماره‌ی n را برداریم و به جای آن دو مهره‌ی جدید، یکی به شماره‌ی $n+1$ و یکی به شماره‌ی $2n$ قرار دهیم. آیا همیشه، به ازای هر تعداد مهره‌ی اولیه (که ممکن است بعضی از آن‌ها شماره‌ی یکسان داشته باشند)، می‌توان با در پیش گرفتن روش مناسب به جایی رسید که هیچ دو مهره‌ای شماره‌ی برابر نداشته باشند؟

۳- سیاره‌ی آلفا (۳۰ نمره)

در سیاره‌ی آلفا که اخیراً کشف شده، $m \times n$ کشور وجود دارد. اطلاعات زیر درباره‌ی این کشورها کشف شده است:

- $n \geq 3$ و $m \geq 3$.
- هر کشور با یک زوجِ مرتب از اعداد طبیعی به صورت (i, j) که $1 \leq j \leq n$ و $1 \leq i \leq m$ نام‌گذاری شده است.
- دو کشور (i_1, j_1) و (i_2, j_2) به هم جاده دارند، اگر و تنها اگر:

-- $i_1 = i_2$ و $|j_1 - j_2| = 1$.

-- و یا اینکه $i_1 = i_2$ و $|j_1 - j_2| = n - 1$.

-- و یا اینکه $j_1 = j_2$ و $|i_1 - i_2| = 1$.

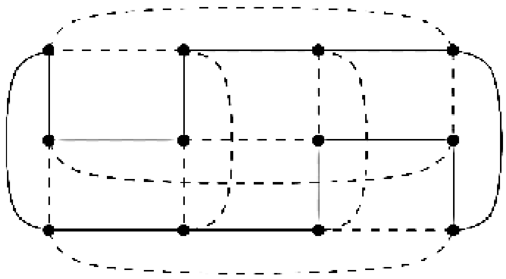
-- و یا اینکه $j_1 = j_2$ و $|i_1 - i_2| = m - 1$.

(در واقع هر کشوری به چهار کشورِ دیگر جاده دارد.)

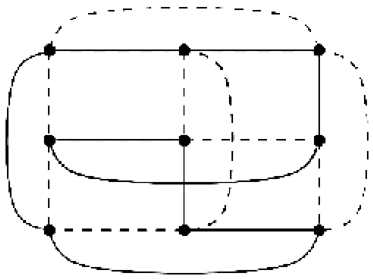
دو جهانگرد قصد دارند با شروع از یک کشورِ دلخواه، هر کدام سفری را به تمامِ کشورها انجام دهند و از هر کشوری در طول سفر دقیقاً یک بار عبور کنند و سرانجام به کشور شروعِ سفر بازگردند. اما آن دو به دلایلی مایل نیستند از هیچ جاده‌ای که قبلاً جهانگردِ دیگر از آن عبور کرده و یا در حال عبور است، عبور کنند.

ثابت کنید این دو نفر همواره می‌توانند سفرهای خود را با موفقیت برنامه‌ریزی کنند و به انجام برسانند.

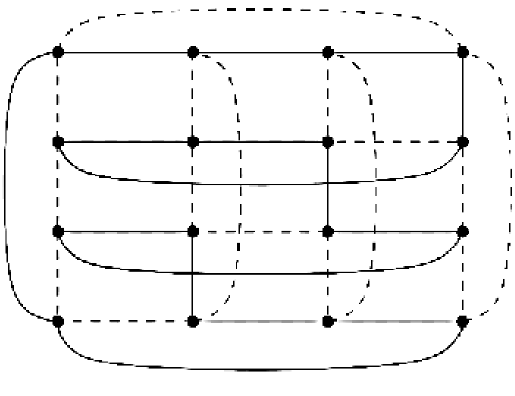
در شکل زیر، ۳ مثال برای حالت‌های $n = ۳$, $m = ۳$ و $n = ٤$, $m = ۳$ و $n = ٤$, $m = ٤$ کشیده شده است. خطوطِ نقطه‌چین مسیرِ سفرِ یکی و خطوطِ پررنگ مسیرِ سفرِ جهانگردِ دیگر است. در هر شکل، شهر (i, j) در سطر i و ستون j قرار دارد.



$m = ۳, n = ۴$



$m = ۳, n = ۳$



$m = ۴, n = ۴$

۴- ماخ خاطره‌نویسی بارون (**۲۵ نمره**)

پس از این‌که «ویولانته دو ریوالنده» (Violante de Rivalonde) برای همیشه از نزد «بارون کوزیمو لاورس دو روندو» (Baron Cosimo Laverse du Rondo) رفت، بارون از فرط ناراحتی خاطره‌نویسی‌های روزانه خود را متوقف کرد. اما پس از مدتی تصمیم گرفت دوباره آن را آغاز کند. اما این بار می‌خواست طوری بنویسد که تنها خودش بفهمد. بنابراین یک

زبان رمز ابداع کرد که فقط از دو علامت X و O تشکیل شده بود و از این علائم برای نشان دادن حروف، فواصل خالی و نشانه‌های سجاوندی زبان مادری خود (که از این به بعد به آن‌ها هم حروف می‌گوییم) استفاده می‌کرد. به این ترتیب که برای هر کدام از این حروف، رمزی از علائم X و O تعیین کرد؛ مثلاً برای حرف d از رمز OX، برای s از رمز OOX، برای n از OXO، برای l از XO، برای a از XX، برای p از OO و برای e از X استفاده کرد. او برای نشان دادن یک کلمه، رمزهای تک تک حروف آن کلمه را به ترتیب پشت سر هم می‌نوشت.

یک روز که بارون یادداشت‌هایش را مرور می‌کرد به کلمه‌ی OOXXXOXOOX برخورد و نفهمید که این کلمه در اصل sa$n$d بوده یا pales. (شما هم امتحان کنید)

پس تصمیم گرفت رمزهای حروف را طوری تغییر دهد که هیچ دو ترتیب متفاوت از حروف (با معنی یا بی معنی) پس از رمز شدن به رشته‌ی یکسانی از علائم تبدیل نشود و در این کار موفق شد.

اگر در زبان مادری بارون k حرف وجود داشته باشد، و طول رمزهای جدید مربوط به این حروف برابر $l_1, l_2, \ldots, l_k$ شده باشند، نشان دهید:

$$\frac{1}{2^{l_1}} + \frac{1}{2^{l_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{l_k}} \le 1$$

۵- تحول و تطور (**۲۵ نمره**)

به دنباله‌ای متناهی از حروف a و b که پشت سر هم قرار گرفته باشند یک کلمه می‌گوییم. مثلاً bbab یا aaaaa هر کدام یک کلمه هستند. قاعده‌ای به نام «قاعده‌ی تحول» وجود دارد که طبق آن با داشتن کلمه‌ای مثل W، اگر جایی در W، ab مشاهده کردیم می‌توانیم آن را به bba تبدیل کنیم و به این ترتیب کلمه‌ی جدیدی مثل W' به وجود بیاوریم. مثلاً کلمه‌ی aabab را می‌توان با قاعده‌ی تحول به هر یک از کلمات abbaab یا aabbba تبدیل کرد (بر حسب این‌که قاعده را روی اولین یا دومین ab اجرا کنیم).

یک متخصص دستور زبان ادعا کرده است که «قاعده‌ی تحول توقف‌پذیر است.» یعنی اگر با هر کلمه‌ی دل‌خواه مثل W_1 شروع کنیم، با قاعده‌ی تحول آن را به کلمه‌ای مثل W_2 تبدیل کنیم، سپس مجدداً با قاعده‌ی تحول W_2 را به کلمه‌ای مثل W_3 تبدیل کنیم، و همین‌طور ادامه دهیم، به جایی می‌رسیم که دیگر روی کلمه‌ی به دست آمده نمی‌توان قاعده‌ی تحول را اجرا کرد.

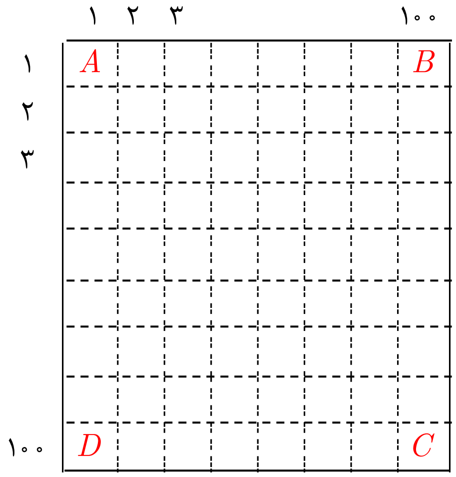
الف) درستی یا نادرستی این ادعا را اثبات کنید. (۱۵ نمره)

ب) قانون دیگری به نام «قانون تطور» وجود دارد که شبیه به قاعده‌ی تحول است با این تفاوت که اگر در کلمه‌ی W، رشته‌ی ab را مشاهده کردیم، می‌توانیم آن را به bbaa تبدیل کنیم. آیا قانون تطور توقف‌پذیر است؟ (۱۰ نمره)

۶- حلزونِ آزمایشگاهی (**۲۵ نمره**)

محققی بر روی رفتار نوعی حلزون تحقیق می‌کند. او دستگاهی شامل یک جدول ۱۰۰×۱۰۰ ساخته است و حلزون را روی آن قرار داده است. حلزون هر روز صبح شروع به حرکت می‌کند و هنگام شب به یکی از خانه‌های مجاور آن می‌رسد (اگر دو خانه ضلع مشترک داشته باشند می‌گوییم مجاورند) و شب را در آن‌جا استراحت می‌کند. فردا صبح دوباره حرکت را شروع

می‌کند. در ضمن حلزون نمی‌تواند از جدول خارج شود. جدول در شکل زیر نشان داده شده است. نام چهار گوشه‌ی جدول را مطابق شکل خانه‌های A، B، C و D می‌گذاریم.



در هر یک از خانه‌های B، C و D یک دستگاه پرتاب کننده قرار دارد. این ۳ دستگاه هر شب فعال شده و در صورتی که حلزون در یکی از آن خانه‌ها باشد، آن را به خانه‌ی A پرتاب می‌کند. در نتیجه در نیمه‌ی شب حلزون در خانه‌ی A قرار می‌گیرد و هنگام صبح حرکت را از آن‌جا ادامه می‌دهد.

محقق ما می‌خواهد بداند که حلزون چند بار و هر بار از چه خانه‌ای پرتاب شده است. بدین منظور بعضی روزها، هنگامی که حلزون می‌خواهد شروع به حرکت کند سر دستگاه می‌آید و یادداشت می‌کند که حلزون در کدام خانه قرار دارد.

فرض کنید که محقق صبحِ روز اول، صبح روز $k+۱$ ام، صبح روز $۲k+۱$ ام، ... (یعنی هر k روز یک بار، از روز اول) به سراغ دستگاه می‌آید و هر بار، پس از دادن غذا به او، مکان حلزون را یادداشت می‌کند.

هدف محقق این است که تنها از اطلاعات یادداشت شده‌ی خود جواب سؤال را پیدا کند. یعنی همه‌ی دفعاتی که حلزون پرتاب شده و این‌که هربار از کدام خانه پرتاب شده را محاسبه کند. از طرف دیگر چون محقق سرش شلوغ است، می‌خواهد خیلی کم به حلزون سر بزند، یا به عبارت دیگر می‌خواهد مقدار k را بیشینه کند.

k را طوری محاسبه کنید که محقق بتواند به هدف خود برسد و نیز ثابت کنید جواب شما بزرگترین kی ممکن است.

در ابتدای جواب خود در برگه، مقداری را که برای k به دست آورده‌اید بنویسید.

۷- ماخ اعداد نحس (**۲۵ نمره**)

منظور از یک رشته عددیِ «از راست نامتناهی» دنباله‌ای بی‌پایان از رقم‌هاست که از سمت راست پشت سر هم قرار گرفته باشند. اگر دنباله‌ی رقم‌ها نه فقط از سمت راست، بلکه از سمت چپ نیز بدون توقف ادامه داشته باشد، آن رشته‌ی عددی را «از دو طرف نامتناهی» می‌گوییم.

می‌گوییم عدد N در یک رشته‌ی عددی وجود دارد، اگر در قسمتی از آن رشته عیناً ظاهر شده باشد. مثلاً عدد ۱۳۸۳ در رشته‌ی از راست نامتناهیِ زیر

.... ۱۰۰۹۹۷۱۳۸۳۳۰۵

و عدد ۲۰۰۴ در رشته‌ی از دو طرف نامتناهیِ زیر

.... ۹۳۲۲۰۰۲۰۰۴۰۱۵ ....

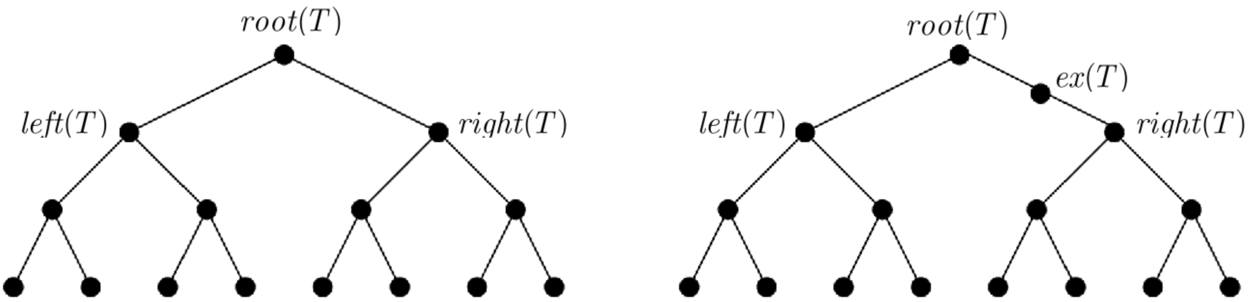
وجود دارد.

در یک تحقیق، تمام اعدادی را به دست آورده‌اند که از نظر ساکنین قبایل استوایی «نحس» شمرده می‌شوند. فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ این اعداد باشند. نشان دهید اگر یک رشته‌ی عددیِ از راست نامتناهی موجود باشد که هیچ‌کدام از اعداد نحسِ فوق در آن وجود نداشته باشند، آن‌گاه یک رشته‌ی عددیِ از دو طرف نامتناهی با این خاصیت هم وجود دارد.

۸- نشاندن درخت پُرگل (**۲۵ نمره**)

در این مسئله نیاز به موجودی به نام «گراف» داریم؛ ولی فقط به شکل آن نه به مفاهیم نظریه‌ی گراف. گراف شکلی است شامل تعدادی «رأس» که با علامت ● نشان داده می‌شوند و تعدادی یال بین برخی از رأس‌ها که با خطوط بین آن یال‌ها نشان داده می‌شوند. هر یال دقیقاً دو رأس را به هم وصل می‌کند که به آن رأس‌ها رئوس مجاور می‌گوییم.

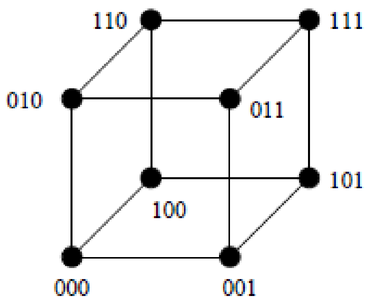
درخت پُرِ T گرافی است با $2^n - 1$ رأس که یک رأس آن ریشه است که $root(T)$ خوانده می‌شود. $root(T)$ دو رأس مجاور دارد به نام‌های $left(T)$ و $right(T)$ که هر کدام ریشه‌ی درخت پُری با $2^{n-1} - 1$ رأس هستند. اگر یک رأس بین ریشه و یکی از دو فرزند درخت پُرِ T اضافه کنیم، درختی با 2^n رأس به دست می‌آید که آن را «پُرگل» و رأس اضافه را $ex(T)$ می‌نامیم. شکل زیر یک درخت پر با ۱۵ رأس و یک درخت پرگل با ۱۶ رأس را نشان می‌دهد.

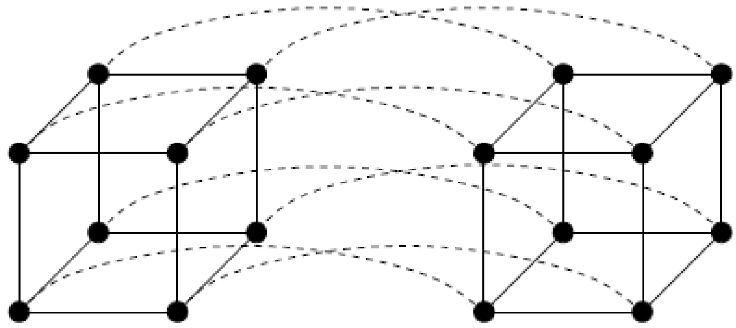


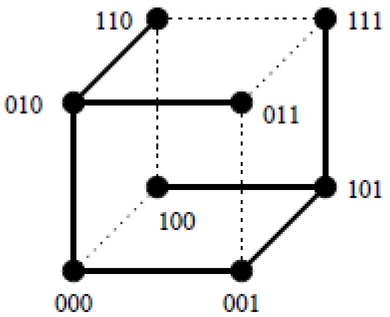
درخت پُر T   درخت پُر گل T

فوق مکعب از درجه‌ی n هم گرافی است با 2^n رأس، که اگر هر رأس آن را با یک عدد n رقمی متمایز در مبنای ۲ نشان دهیم، هر رأس $a_1a_2 \ldots a_n$ (که a_i یا صفر است و یا ۱) به n رأس دیگر وصل است. دو رأس به هم متصل‌اند اگر نمایش دودویی آن دو دقیقاً در یک رقم اختلاف داشته باشد. می‌توان دید که اگر دو فوق مکعب از درجه‌ی n را بگیریم و بین هر دو رأس از هر دو فوق مکعب با نمایش بیتی یکسان یک یال اضافه کنیم، یک فوق مکعب از درجه‌ی $n + 1$ به دست می‌آید.

شکل زیر یک فوق مکعب از درجه‌ی ۳ و فوق مکعب درجه‌ی ٤ را نشان می‌دهد.







نشان دهید که می‌توان یک درخت پرگل T با ۲^n رأس را در یک فوق مکعب ۲^n رأسی Q نشاند. یعنی می‌توان هر رأس T را در یک رأس Q قرار داد به‌طوری‌که دو رأس مجاور در T در Q نیز مجاور هم باشند. به شکل مقابل برای $n = ۳$ دقت کنید. روشن است که مسئله جواب‌های مختلف دارد و یکی کافی است.

الف) فقط با رسم شکل نشان دهید که چه‌گونه درخت پرگل ۱۶ رأسی را می‌توان در فوق مکعبی با ۱۶ رأس نشاند. (۱۰ نمره)
ب) این مسئله را برای حالت کلی حل کنید. (۱۵ نمره، ولی مشکل!)