پاسخ تمرین سری سوم

سوال اول)

الف) $\sum_{i} \delta_{ij}\, \varepsilon_{ijk} = 0$

$$\begin{cases} i=j \Rightarrow \varepsilon_{iik}=0 \Rightarrow \sum \overset{1}{\cancel{\delta_{ij}}} \times 0 = 0 \\ i\neq j \Rightarrow \delta_{ij}=0 \Rightarrow \sum 0\times \varepsilon_{ijk} = 0 \end{cases}$$

پس برقرار است!

ب) $\sum_{pq} \varepsilon_{ipq}\, \varepsilon_{jpq} = 2\delta_{ij}$

1) $i=j \Rightarrow \sum_{pq} (\varepsilon_{ipq})^2 =$

$$\left.\begin{matrix} (1)\ i=1 & (\varepsilon_{123})^2 + (\varepsilon_{132})^2 = 2 \\ (2)\ i=2 & (\varepsilon_{213})^2 + (\varepsilon_{231})^2 = 2 \\ (3)\ i=3 & (\varepsilon_{312})^2 + (\varepsilon_{321})^2 = 2 \end{matrix}\right\} \underset{\delta_{ij}=1}{\overset{i=j}{\Longrightarrow}} \sum_{pq} \varepsilon_{ipq}\,\varepsilon_{jpq} = 2\delta_{ij}$$

2) $i \neq j$

در این حالت هم می‌دانیم δ_{ij} برابر صفر می‌شود و هم برای هر مجموعه حالتی مشابه حالت زیر را داریم که نتیجه بازهم صفر است، پس در این حالت هم صورت مسئله صادق است.

مثلا:

$$\begin{matrix} i=1 \\ j=2 \end{matrix} \Rightarrow \sum \varepsilon_{123}\, \underset{0}{\cancel{\varepsilon_{223}}} = 0$$

ج) $\sum_{k} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$

① $i=p \ , \ j \neq q \Rightarrow \sum_{k} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{iqk} = ۰$

② $i=p \ , \ j=q \Rightarrow \sum \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = ۱ = \delta_{ip}\delta_{jq}$

③ $i=q \ , \ j \neq p \Rightarrow \sum \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pik} = ۰$

④ $i=q \ , \ j=p \Rightarrow \sum \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jik} = -۱ = -\delta_{iq}\delta_{jp}$

با چک کردن این حالات در سمت راست صورت مسئله در می‌یابیم که صادق اند.

سوال دوم)

$I_۱ = I_۲ + I_۳$

$۲ - ۱۰ I_۱ - ۵ I_۳ - ۲ I_۱ = ۰$

$-۵ I_۳ - ۳ + ۵ I_۲ = ۰$

$$\begin{cases} I_۱ - I_۲ - I_۳ = ۰ \\ -۱۲ I_۱ - ۵ I_۳ = -۲ \\ ۵ I_۲ - ۵ I_۳ = ۳ \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۱ \\ -۱۲ & ۰ & -۵ \\ ۰ & ۵ & -۵ \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} I_۱ \\ I_۲ \\ I_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

هر دو طرف را در ماتریس وارون A ضرب کنیم ماتریس مجهول ها بدست می آید.

$\det(A) = ۱(+۲۵) - ۱(۶۰) - ۱(-۶۰) = +۲۵$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} ۱ & -\frac{۲}{۵} & \frac{۱}{۵} \\ -\frac{۱۲}{۵} & -\frac{۱}{۵} & \frac{۱۷}{۲۵} \\ -\frac{۱۲}{۵} & -\frac{۱}{۵} & -\frac{۱۲}{۲۵} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_۱ \\ I_۲ \\ I_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & -\frac{۲}{۵} & \frac{۱}{۵} \\ -\frac{۱۲}{۵} & -\frac{۱}{۵} & \frac{۱۷}{۲۵} \\ -\frac{۱۲}{۵} & -\frac{۱}{۵} & -\frac{۱۲}{۲۵} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ \\ -۲ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۷}{۵} \\ \frac{۲۷}{۲۵} \\ -\frac{۲۴}{۲۵} \end{bmatrix}$$

سوآل سوم)

(الف

(I) $(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}$

(II) $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 2AB = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 7 & 16 \end{bmatrix}$

می‌بینیم که مقدار دو قسمت I و II باهم برابر نیست.

$(A+B)(A-B) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$

$A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ که این دوهم باهم برابر نیستند.

ب) $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA + B^2$

پ) دلیل برابر نبودن سمت چپ و راست این معادلات، و درواقع برقرار نبودن اتحادها در جبر ماتریس‌ها
این است که عمل ضرب در حالت کلی خاصیت جابجایی ندارد یعنی لزوما $AB = BA$ نیست
و در این مسئله در حالتی اتحادها درست خواهند بود که دو ماتریس A, B باهم جابجا شوند.

$[A, B] = 0$

سوآل چهارم)

$e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$ بسط تیلور

$$e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} = \left(1 + \lambda A + \frac{(\lambda A)^2}{2!} + \dots\right) B \left(1 - \lambda A + \frac{(\lambda A)^2}{2!} + \dots\right) =$$

$$\left(1 + \lambda A + \frac{(\lambda A)^2}{2!} + \dots\right)\left(B - \lambda BA + \frac{\lambda^2 BA^2}{2!} + \dots\right) = \left(B - \lambda BA + \frac{\lambda^2 BA^2}{2!} + \dots + \lambda BA\right.$$

$$- \lambda^2 BA^2 + \frac{\lambda^4 BA^3}{2!} + \dots + \frac{\lambda A^2 B}{2!} - \frac{\lambda^3 BA^3}{2!} + \frac{\lambda^4 BA^4}{4!} + \dots =$$

$$= B + \lambda(-BA + AB) + \frac{\lambda^2}{2!}(-BA^2 + A^2B) + \cdots = B + \lambda(AB - BA) + \frac{\lambda^2}{2!}(A^2B - BA^2) + \cdots$$

$$= B + \lambda[A,B] + \frac{\lambda^2}{2!}[A,[A,B]] + \cdots$$

سوال پنجم)

I) $$M^+ = M_x + iM_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^- = M_x - iM_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

II)

الف) $[M_x, M_y] = iM_z$

$$[M_x, M_y] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix} = i\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = iM_z$$

و به همین ترتیب برای دو حالت دیگر!

ب) $M^2 \equiv M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = 2I$

$$M_x^2 = M_x M_x = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_y^2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_z^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2I$$

ج) $[M^2, M_i]=0$

$$[M^2,M_i]=M^2M_i-M_iM^2 \xlongequal{M^2=2I} 2IM_i-M_i2I$$

$$AI=IA=A \quad *$$

$$\overset{*}{\Longrightarrow} [M^2,M_i]=2M_i-2M_i=0$$

د) $[M_z, M^{\pm}]=\pm M^{\pm}$

$$[M_z,M^+]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}=M^+$$

$$[M_z,M^-]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0\\2&0&0\\0&2&0\end{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0\\2&0&0\\0&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0\\2&0&0\\0&2&0\end{bmatrix}$$

$$=-M^-$$

ه) $[M^+,M^-]=2M_z$

$$[M^+,M^-]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\2&0&0\\0&2&0\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&0\\2&0&0\\0&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{bmatrix}\right)=2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}=2M_z$$

و) $(M^+)^{\dagger}=M^-$

$$(M^+)^T=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0\\2&0&0\\0&2&0\end{bmatrix} \rightsquigarrow (M^+)^{\dagger}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0\\2&0&0\\0&2&0\end{bmatrix}=M^-$$

$$(M^-)^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow M^+ = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} = M^+$$

j)

$$M_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_y^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow (M_y^*)^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} = M_y$$

$$\Rightarrow M_y = M_y^+$$

و به همین ترتیب برای M_x و M_z .