

آمادگی برای المپیاد ریاضی



هندسه مسطحه

مقدمه‌ای بر هندسه نوین
 مثلث و دایره

تألیف ناتان آلتشیلر کورت
ترجمه محمود دیانی

بخش اصلی کتاب هندسه مسطحه از مباحث مربوط به مثلث و دایره تشکیل می شود. سطح مطالب فراتر از هندسه دیبرستانی است و در واقع می تواند ادامه درس هندسه دیبرستان به حساب آید. به همین دلیل این کتاب برای افراد علاقه مند به هندسه و کسانی که خود را برای امتحانهایی از نوع المپیادهای ریاضی آماده می کنند، بسیار مفید است.

کتاب به رغم کمی حجم، مطالب وسیعی را در بردارد. در این کتاب پس از بررسی همه مطالب کلاسیک مربوط به مثلث و دایره (تشابه، تجانس، دایره های سهماس، دایره نه نقطه، موربها، خط سیمسون، تقسیم توافقی، مسئله آپولونیوس وغیره)، بخشهایی نیز به یافته های نوین در مورد دایره و مثلث اختصاص یافته است.

تعداد مسائل کتاب آنقدر زیاد است که می تواند افرادی را که به پژوهش قوای فکری خود علاقه مندند، مدت‌ها سرگرم کند.

هندسه مسطحه از کتابهای دسته دوم مجموعه آمادگی برای المپیاد ریاضی (کتابهای نارنجی) است.



آمادگی برای المپیاد ریاضی

هندسه مسطح

مقدمه‌ای بر هندسه نوبن
 مثلث و دایره

تألیف ناتان آتشیلرکورت
ترجمه محمود دیانتی

زیرنظر:

پیش از

عضو هیأت علمی دانشگاه شهید چمران (اهواز)
عضو کمیته ملی المپیاد ریاضی



امید علی کرمزاده
عضو هیأت علمی دانشگاه شهید چمران (اهواز)
عضو کمیته ملی المپیاد ریاضی

College Geometry

An Introduction To The Modern Geometry Of The Triangle And The Circle

Nathan Altshiller Court

Barnes & Noble, Inc.

هندسه مسطوحه / مقدمه‌ای بر هندسه نوین مثلث و دایره

مؤلف: ناثان آلتشیلر کورت

مترجم: محمود دیانی

ویراستار: مهران اخباریفر

ناشر: مؤسسه فرهنگی فاطمی

چاپ چهارم، ۱۳۸۴

شاید ۹۶۴-۳۱۸-۲۲۲-۳

ISBN 964-318-222-3

تیراز: ۲۰۰۰ نسخه

آماده‌سازی پیش از چاپ: واحد تولید مؤسسه فرهنگی فاطمی
طرح جلد: زهرا قورچیان، انتیه مؤسسه فرهنگی فاطمی

چاپ و صحافی: چاپخانه خاشع

کلیه حقوق برای مؤسسه فرهنگی فاطمی محفوظ است.

مؤسسه فرهنگی فاطمی تهران، کدبستی ۱۴۱۴۶ - خیابان دکتر فاطمی، شماره ۱۵۹

تلفن: ۸۸۹۶۱۴۲۲ - ۸۸۹۶۴۷۷۰ - ۸۸۹۵۶۲۵۸ نمبر: 

info@fatemti.ir

Altshiller-Court, Nathan

هندسه مسطوحه: مقدمه‌ای بر هندسه نوین مثلث و دایره / تألیف ناثان آلتشیلر کورت؛ ترجمه محمود دیانی؛ ویراستار مهران اخباریفر - تهران: فاطمی، ۱۳۷۶.

۲۶۱ ص: مصور - (مجموعه کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی).

ISBN 964-318-222-3

فهرستویسی براساس اطلاعات فیبا.

عنوان اصلی: College geometry: an introduction to the modern geometry of the triangle and the circle.

وازنامه.

نمایه.

چاپ چهارم: ۱۳۸۴.

۱. هندسه مسطوحه جدید. ۲. مثلث. ۳. دایره. الف. دیانی، محمود، ۱۳۲۹ - . مترجم. ب. عنوان.

۵۱۶/۲۲

۷۶-۲۲۵۵

QA۴۷۴/۷۶۹

کتابخانه ملی ایران

فهرست

۳	آمادگی برای المپیاد ریاضی
۵	سخنی با خواننده
۷	۱. ترسیم‌های هندسی
۷	الف. مقدمات
۸	ب. روش عمومی حل مسائل ترسیمی
۱۵	ج. مکانهای هندسی
۲۴	د. اجزای غیرمستقیم
۳۰	تمرینهای تکمیلی
۳۰	تمرین برای مرور
۳۶	۲. تشابه و تجانس
۳۶	الف. تشابه
۳۹	ب. تجانس
۵۱	تمرینهای تکمیلی
۵۲	۲. ویژگیهای مثلث
۵۲	الف. مقدمات
۵۵	ب. دایرة محیطی
۶۲	ج. میانه‌ها
۶۸	د. دایره‌های سه‌مماس
۸۸	ه. ارتفاعها
۹۶	و. دایرة نهنجطه
۱۰۰	ز. چهارضلعی مرکز ارتفاعی
۱۰۵	تمرین برای مرور
۱۱۰	تمرینهای گوناگون
۱۱۴	۴. چهارضلعیها
۱۱۴	الف. چهارضلعی در حالت کلی
۱۱۷	ب. چهارضلعی محاطی
۱۲۳	ج. چهارضلعیهای دیگر
۱۲۶	تمرینهای تکمیلی
۱۲۷	۵. خط سیمسون
۱۲۴	تمرینهای تکمیلی
۱۳۷	۶. موربها
۱۳۷	الف. مقدمه

۱۳۸	ب. قضیهٔ استوارت
۱۳۹	ج. قضیهٔ میلانوس
۱۴۳	د. قضیهٔ سوا
۱۴۹	تمرینهای تکمیلی
۱۵۱	۷. تقسیم همساز
۱۵۶	تمرینهای تکمیلی
۱۵۷	۸. دایره
۱۵۷	الف. نقاط وارون
۱۵۹	ب. دایره‌های متعامد
۱۶۱	ج. قطب و قطبی
۱۶۷	د. مرکز تشبیه
۱۷۲	ه. قوت یک نقطه نسبت به یک دایره
۱۷۵	و. محور اصلی دو دایره
۱۸۱	ز. دایره‌های هم محور
۱۹۴	ح. سه دایره
۱۹۹	ط. مسئله آپولونیوس
۲۰۳	تمرینهای تکمیلی
۲۰۶	۹. انعکاس
۲۱۷	۱۰. هندسهٔ نوین مثلث
۲۱۷	الف. قطب و خط قطبی نسبت به یک مثلث
۲۱۹	ب. هندسهٔ لوموان
۲۳۰	ج. دایره‌های آپولونیوسی
۲۳۶	د. خطوط همزاویه
۲۴۱	ه. هندسهٔ بروکار
۲۵۰	و. دایره‌های تاکر
۲۵۲	ز. قطب ارتفاعی
۲۵۵	تمرینهای تکمیلی
۲۵۸	واژه‌نامه
۲۵۹	نها

به نام خدا

آمادگی برای المپیاد ریاضی

تلashهای گستره‌ای که در سالهای اخیر برای بهبود آموزش ریاضیات در سطوح مختلف صورت گرفته است دو هدف عمده پیش روی خود دارد: عمومی کردن ریاضیات، و تربیت نخبگان. هدف اول از آن رو اهمیت دارد که در آستانه قرن بیست و یکم میلادی «سوانح ریاضی» ضرورتی عام پیدا کرده است، و هدف دوم نیز از هدفهای ارزشمند جوامع مدنی است. لذا کاملاً ضروری است که در پی پیشرفت‌های بیشتری در این جهت باشیم و ابراهای جدیدی را برای شناسایی و پرورش استعدادهای بالقوه جامعه خود جستجو کنیم.

آموزش‌های رسمی با توجه به گستردگی پهنه عملکرد، معمولاً میانگین دانش‌آموزان را از جهت علاقه و استعدادهای ویژه مخاطب خود قرار داده است، از این رو آموزش‌های جانی و غیررسمی و برنامه‌هایی نظری المپیاد ریاضی اهمیت ویژه‌ای برای پرورش استعدادها و شکوفایی خلاقیتها داراست.

اگر به تاریخ نگاهی بیفکنیم سال ۱۸۹۴ شاید نقطه آغاز مسابقات علمی در عصر جدید باشد. در این سال مسابقه اتووش به نام بارون لوراند اتووش^۱ به صورت یک مسابقه ریاضی دانش‌آموزی در مجارستان شروع شد. مسائل این مسابقه به خاطر سادگی مفاهیم به کار گرفته شده، هنوز هم جذاب است. پس از آن طی سالها، مسابقات ریاضی در کشورهای مختلف جهان شکل گرفت و جایگاه ویژه‌ای پیدا کرد تا این که در سال ۱۹۵۹، رومانی پیشگام راه‌اندازی المپیاد بین‌المللی ریاضی شد و از ۷ کشور اروپایی شرقی برای شرکت در این المپیاد دعوت کرد و اولین المپیاد از ۲۰ تا ۳۰ زوئیه ۱۹۵۹ در بخارست برگزار شد. کم کم کشورهای دیگر نیز به المپیاد بین‌المللی پیوستند و در حال حاضر این مسابقه، که هر سال در یک کشور برگزار می‌شود، معتبرترین مسابقه بین‌المللی دانش‌آموزی است.

مسابقات دانش‌آموزی در کشور ما نیز رفته رفته جایگاه ویژه‌ای یافته است، اولین مسابقة ریاضی دانش‌آموزی در فروردین ۱۳۶۲ بین دانش‌آموزان برگزیده سرتاسر کشور برگزار شد و برای اولین بار در سال ۱۳۶۶ تیمی از کشورمان به المپیاد بین‌المللی اعزام گردید. پس از آن دانش‌آموزان زیادی در سرتاسر کشور مشتاقانه به این رقابت روی آوردند.

در المپیاد ریاضی آنچه که اهمیت دارد توانایی حل مسئله است، ولی باید توجه داشت که حل یک

مسئله با ارزش به ندرت آسان و بدون رحمت به دست می‌آید. بلکه حاصل ساعتها تلاش فکری است. تلاشی که ذهن‌های شاداب و جوان برای انجام آن تمایل سیاری نشان می‌دهند.

بدیهی است که این تلاشها اگر با برنامه‌ای دقیق و منظم شکل گیرد، سریعتر و بهتر به شکوفایی استعدادهای خلاق می‌انجامد. از این رو مؤسسه انتشارات فاطمی به انتشار مجموعه آمادگی برای المپیاد ریاضی اهتمام ورزیده است. این مجموعه شامل سه دسته کتاب است:

دسته اول (کتابهای زرد) شامل کتابهای مقدماتی با پیشناخت ریاضی ۲ نظام جدید است و شامل کتابهایی در زمینه‌های ترکیبیات، هندسه، نظریه اعداد، آنالیز، و جبر است.

دسته دوم (کتابهای نارنجی) شامل کتابهای پیشرفته‌تر و مجموعه مسائل و کتابهای کلاسیک المپیاد ریاضی در سطح بین‌المللی است، و بالاخره

دسته سوم (کتابهای قرمز) شامل کتابهای پیشرفته در زمینه المپیاد ریاضی است. مجموعه آمادگی برای المپیاد ریاضی مجموعه‌ای است منظم و برنامه‌ریزی شده برای همه چالشگرانی که در ریاضیات زیبا شناختی خاصی می‌بینند و در جهت نوآوریهای ذهنی تلاش می‌کنند.

کتاب حاضر از دسته دوم است که در زمینه هندسه مسطحه یکی از منابع اصلی المپیاد ریاضی در سطح جهان به شمار می‌رود.

سخنی با خواننده

متن. برخی اوقات کسانی که در هنر اثبات ریاضی مبتدی هستند، تصور می‌کنند که حافظه در ریاضیات نقشی ندارد. اینان بر این باورند که نتایج ریاضی از استدلال حاصل می‌شوند، و همیشه می‌توان این نتایج را با استدلال مناسب دوباره به دست آورد. روشن است که چنین عقیده‌ای کوتاه‌نظرانه است. برهان ریاضی هر گزاره، کوششی است برای نشان دادن اینکه این گزاره جدید نتیجه‌ای از تعريفها و قضیه‌هایی است که قبل از اعتبارشان پذیرفته شده است. اگر شخص استدلال کننده گزاره‌های مناسبی را در ذهن نداشته باشد، کاری که پیش رو دارد اگر ناممکن نباشد، بسیار دشوار است.

دانش آموزی که مطالعه این کتاب را آغاز می‌کند باید کتابهای هندسه دوره دبیرستان را در دسترس داشته باشد. هرگاه در کتاب حاضر، به طور ضمنی یا صریح، به گزاره‌ای از هندسه مقدماتی ارجاع می‌شود، دانش آموز باید گزاره مورد نظر را بیابد و بیان دقیق آن را در دفتری که به همین منظور تهیه کرده است یا در حاشیه کتاب، یادداشت کند. بهتر است در حاشیه کتاب هندسه مقدماتی نیز گزاره‌هایی که در کتاب حاضر به آنها ارجاع شده است، مشخص شوند.

در جای جای این کتاب به بخش‌های قبلی ارجاع شده است. مثلاً در بند ۱۸۹ به بند ۷۳ ارجاع شده است. وقتی بند ۱۸۹ را می‌خوانید بهتر است در حاشیه بند ۷۳ این مطلب را یادداشت کنید. این گونه سیستم ارجاع به مطالب بعدی در دوره کدن مطلب سودمند است و ممکن است موجب شود که مطالب کتاب با سهولت بیشتر فهمیده شوند.

شکلها. اگر دانش آموز هنگام مطالعه کتاب شخصاً شکلها را رسم کند و برای هر گزاره شکل جداگانه‌ای بکشد، بهره فراوانی خواهد برد. در بیشتر موارد طرح خامی که فقط با دست رسم می‌شود، کفایت می‌کند. وقتی که شکل پیچیده‌تری مورد نیاز است، می‌توان این شکل را در کتاب به عنوان راهنمایی برای ایجاد نظم در بین اجزا و عناصر مسئله دیدنظر قرار داد. این نوع تمرینها گزاره‌ها را در ذهن خواننده ثبت می‌کنند.

تمرینها. معمولاً تمرینها در ریاضیات دو هدف را دنبال می‌کنند. خواننده با انجام تمرینها میزان سلط خود را بر مطالبی که مطالعه کرده است محک می‌زند و نیز این فرصت را می‌یابد که با اعمال روش‌های عرضه شده در کتاب، توانایی خود را در به کارگیری این مطالب بسنجد.

ناگفته روشن است که اگر دانش آموز نداند مسئله‌ای را که می‌خواهد حل کند چیست، احتمالاً نمی‌تواند آن را حل کند. حتی تصور اینکه کسی خلاف این نظر را داشته باشد، مضحك است. اما تجربه نشان می‌دهد که ممکن است تأکید بر این نکته سودمند باشد. ما کار حل مسئله را با گزاره‌های ساده‌ای آغاز می‌کنیم که در درک محتواشان تردیدی نداریم. وقتی که به مرور زمان شرایط به طور قابل ملاحظه‌ای تغییر می‌کند، بنابر عادت، فرض می‌کنیم که فوراً بیان مسئله را فهمیده‌ایم.

مسائل کتاب حاضر نیز همانند مسائل بسیاری از کتابهای هندسه، توصیفی‌اند. به هر حال، اگر چه

ممکن است شنگفتانگیز به نظر برسد، ولی غالباً درک مفهوم یک مسئله مفروض کار دشواری است و اغلب لازم است که کم و پیش برای درک معنی آن تلاش کنیم. روش است که چنین تلاشی باید در ابتدای کار و پیش از برداشتن هرگامی برای حل مسئله صورت گیرد. در واقع، ممکن است تسلاط پیدا کردن بر معنی مسئله، بخشی اساسی و اغلب دشوارترین بخش حل مسئله باشد.

دانشآموز باید برای حصول اطمینان از درک مسئله، صورت آن را بدون استفاده از کتاب تکرار کند، یا بهتر آن است که صورت مسئله را از حفظ بنویسد. گذشته از این، باید معنی جمله‌هایی را که نوشته یا بیان شده‌اند به قدری خوب بداند که بتواند با بیان خود، مسئله را برای کسی که اطلاعات لازم را دارد اما قبل هرگز صورت مسئله را نشنیده است، شرح دهد.

سرنجام، ترسیم شکل مربوط به مسئله امری ضروری است. معمولاً شکل ساده‌ای که فقط با دست رسم شود، کفایت می‌کند. در بعضی موارد، ممکن است شکل دقیق بسیار الهام‌بخش باشد.

روشن است که هیچ قاعدة مطمئنی که منجر به حل همه مسائل شود، وجود ندارد. وقتی که دانشآموز از معنی مسئله اطمینان حاصل کرده باشد، فهرست دقیقی از عناصر مفروض و عناصر مطلوب مسئله تهیه کرده و شکل مناسبی پیش رو داشته باشد، ابزارهای کافی را برای حمله به مسئله در اختیار دارد و با چنین تجهیزاتی می‌تواند با سرسرخت‌ترین مسائل نیز دست و پنجه نرم کند.

دانشآموز نباید انتظار داشته باشد که همواره بتواند به محض خواندن صورت مسئله، راه حل آن را بیابد. اگر چنین باشد، که گاهی هم هست، چه بهتر از این. اما در بیشتر موارد، برای حل کردن مسئله بیش از هر چیز ضیر و حوصله لازم است. اگر چند بار شروع به حل مسئله کردید و موفق نشدید، دلسرب شوید، زیرا مسائل ریاضی خصلتاً این طور هستند. کسی در حل مسئله موفق است که هنگام روبرو شدن با موضع، عزم و اراده بیشتری در از میان برداشتن آنها از خود نشان دهد. در این صورت، هنگامی که نور امید جلوه‌گر می‌شود و به مقصود دست می‌باید، پاداشی مسربت‌بخش از احساس پیروزی و موفقیت نصیبتان خواهد شد.

ترسیم‌های هندسی

الف. مقدمات

۱. نمادگذاری. نمادهای زیر را اغلب به کار خواهیم برد:

C, B, A ... برای نشان دادن رأسها و زاویه‌های متناظر آنها در چندضلعی؛

c, b, a ... برای نشان دادن اضلاع چندضلعی (در مثلث، هر ضلع و زاویه رو به رویش را با یک

حرف نشان می‌دهیم منتها ضلع را با حرف کوچک و زاویه را با حرف بزرگ)؛

۲p برای نشان دادن محیط مثلث:

m_a, m_b, m_c برای نشان دادن ارتفاعها و h_a, h_b, h_c برای نشان دادن میانه‌های متناظر با اضلاع a, b, c در مثلث ABC ؛

t_a, t_b, t_c برای نشان دادن نیمسازهای داخلی زاویه‌های A, B, C و t'_a, t'_b, t'_c برای نشان دادن نیمسازهای خارجی آنها؛

R برای نشان دادن شعاع دایره‌های محیطی و محاطی؛

(A, r) برای نشان دادن دایره‌ای به مرکز A که پاره خط r شعاع آن است؛

$M = (PQ, RS)$ برای نشان دادن اینکه M نقطه تلاقی دو خط PQ و RS است.

۲. ترسیم‌های اصلی. ترسیم‌های زیر را اغلب به کار خواهیم گرفت:

ترسیم یک پاره خط به چند بخش مساوی به تعداد معین.

ترسیم یک پاره خط به نسبت مفروض به صورت (i) داخلی؛ (ii) خارجی (§۵۴).

ترسیم پاره خطی که با سه پاره خط مفروض یک تناسب تشکیل دهد.

ترسیم واسطه هندسی دو پاره خط مفروض.

ترسیم مربعی هم‌ارز با (i) مستطیل مفروض؛ (ii) مثلث مفروض.

ترسیم مربعی هم‌ارز با مجموع دو، سه، یا چند مربع مفروض.

ترسیم دو پاره خط که مجموع و تقاضلشان مفروض باشد.

ترسیم مماس از نقطه‌ای بر دایره.

ترسیم مماس مشترکهای داخلی و خارجی دو دایره مفروض.

تمرین

مثلثی رسم کنید که سه جزء زیر از آن مفروض باشند:

$$a, h_a, B \quad (۴)$$

$$a, B, C \quad (۳)$$

$$A, h_a, t_a \quad (۷)$$

$$a, b, C \quad (۲)$$

$$a, b, a \quad (۱)$$

$$a, B, t_b \quad (۶)$$

$$a, b, m_a \quad (۵)$$

مثلث قائم‌الزاویه‌ای، با زاویه قائمة A، را با مفروض بودن اجزای زیر از آن رسم کنید:

$$b, c \quad b, a \quad b, C \quad B, a \quad B, C \quad (۹) \quad (۱۰) \quad (۱۱)$$

متوازی الاضلاع ABCD را با مفروض بودن اجزای زیر از آن رسم کنید:

$$\angle ABD, BD, AB \quad (۱۲) \quad B, AC, AB \quad (۱۳) \quad AB, BC, AC \quad (۱۴)$$

چهارضلعی ABCD را با مفروض بودن اجزای زیر از آن رسم کنید:

$$CD, AD, C, B, A \quad (۱۷) \quad C, B, CD, BC, AB \quad (۱۶) \quad AD, AB, C, B, A \quad (۱۵)$$

(۱۸) دایره‌ای با شعاع مفروض رسم کنید که در نقطه مشخصی بر (i) خطی مفروض؛ (ii) دایره‌ای مفروض، مماس باشد.

(۱۹) دایره‌ای رسم کنید که از دو نقطه مفروض بگذرد و (i) شعاع آن مفروض باشد؛ (ii) مرکز آن روی خط مفروضی قرار داشته باشد.

(۲۰) مماسی با راستای مفروض بر یک دایره مفروض رسم کنید.

(۲۱) پاره‌خط مفروضی را به طور داخلی و خارجی به نسبت مربعهای دو پاره‌خط مفروض p و q تقسیم کنید.
(راهنمایی: اگر AD بروتر BC از مثلث قائم‌الزاویه ABC عمود باشد، آنگاه $.AB^t : AC^t = BD : DC$

(۲۲) مثلث قائم‌الزاویه‌ای را رسم کنید که وتر و نسبت مربعهای دو ضلع زاویه قائمة آن مفروض است.

(۲۳) پاره‌خط‌های a، p، و q مفروض‌اند. پاره‌خط x را طوری رسم کنید که داشته باشیم $x^t = p : a^t = q$.

(۲۴) مثلث قائم‌الزاویه‌ای را هم‌ارز با مثلث مفروضی رسم کنید.

۳. پیشنهاد. اکثر مسائل بالا با استفاده از نمادهای قراردادی بیان شده‌اند. بیان این مسائل با کلمات بسیار آموزende است. مثلاً تمرین ۴ را می‌توان به این صورت بیان کرد: مثلثی رسم کنید که قاعده، ارتفاع متاظر با آن قاعده و یکی از دو زاویه قاعدة آن مفروض باشد.

ب. روش عمومی حل مسائل ترسیمی

۴. روش تحلیلی. بعضی از مسائل ترسیمی کاربرد مستقیم قضیه‌های معروفی هستند و راه حل آنها تقریباً واضح است. مثال: یک مثلث متساوی الاضلاع رسم کنید.

اگر حل مسئله‌ای پیچیده‌تر باشد، با این حال راه حل را بدانید، این راه حل را می‌توان به این طریق ارائه کرد: از یک عمل که می‌دانید چگونه انجام دهید شروع کنید، و به دنبال آن رشته‌ای از این‌گونه عملیات را بیان کنید تا به هدف برسید.

این شیوه روش سازنده حل مسئله نام دارد. این روشی است که در کتابها برای بیان حل مسائل به کار می‌رود.

ولی اگر با مسئله‌ای رو به رو شوید که حل آن واضح نباشد، نمی‌توانید این شیوه را دنبال کنید. زیرا هیچ سرنخی وجود ندارد که اولین گام ممکن است چه باشد، و تعداد عملهایی که ممکن است به عنوان اولین گام انتخاب شوند آنقدر زیاد است که نمی‌توان آنها را به طور تصادفی آزمود.

از طرف دیگر، مشخصاً می‌دانیم که مسئله چیست، یعنی می‌دانیم که نهایتاً باید چه شکلی را به دست آوریم. بنابراین شروع از این شکل نهایی، که فرض می‌کنیم قبلاً رسم شده است، مفید است. با بررسی دقیق و سنجیده این شکل ممکن است راهی را کشف کنیم که به حل مطلوب منجر شود. این شیوه را روش تحلیلی حل مسئله می‌نامند. این روش به طور خلاصه شامل گامهای زیر است:

تحلیل. فرض کنید مسئله حل شده است: شکلی رسم کنید که تقریباً شرایط بیان شده در مسئله را ارضا کند؛ بررسی کنید که بین بخش‌های مفروض و بخش‌های نامعلوم در شکل چه ارتباطی وجود دارد، تا رابطه‌ای را کشف

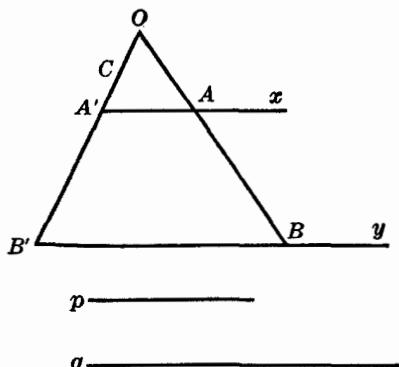
کنید که احتمالاً بتوان برای ترسیم شکل موردنظر بهکار برد.

ترسیم. شکل خواسته شده را با استفاده از اطلاعات به دست آمده در تحلیل رسم کنید.

اثبات. نشان دهید که شکل رسم شده تمامی شرایط را ارضاء می‌کند.

بحث. در مورد شرایط امکان ترسیم شکل خواسته شده، تعداد جوابها و غیره بحث کنید.

۵. مسئله. دو نقطه A و B روی دو خط موازی مفروض x و y مشخص شده‌اند. از نقطه مفروض C ، که روی هیچ‌کدام از این خطها قرار ندارد، قاطع $CA'B'$ را، طوری رسم کنید که خطهای x و y را در نقاط A' و B' قطع کند و پاره‌خطهای AA' و BB' با دو پاره‌خط مفروض p و q متناسب باشند.



شکل ۱

تحلیل. فرض کنید $CA'B'$ خط مطلوب باشد، به طوری که (با توجه به شکل ۱)

$$AA' : BB' = p : q$$

فرض کنید $O = (AB, A'B')$. دو مثلث OAA' و OBB' متشابه‌اند، پس

$$AO : BO = AA' : BB'$$

نسبت دوم معلوم است؛ پس نقطه O پاره‌خط معلوم AB را به نسبت مفروض $q : p$ تقسیم می‌کند. پس می‌توانیم O را رسم کنیم و OC خط مطلوب است.

ترسیم. نقطه O را طوری رسم می‌کنیم که

$$AO : BO = p : q$$

نقاط O و C خط مطلوب را تعیین می‌کنند.

اثبات. به خواننده واگذار می‌شود.

بحث. دو نقطه، O و O' ، وجود دارد که پاره‌خط AB را به نسبت $q : p$ تقسیم کند، یکی داخلی و یکی خارجی، و همیشه می‌توانیم این دو نقطه را رسم کنیم؛ بنابراین اگر هیچ‌کدام از خطهای CO و CO' با خطهای مفروض x و y موازی نباشند، مسئله دو جواب دارد.

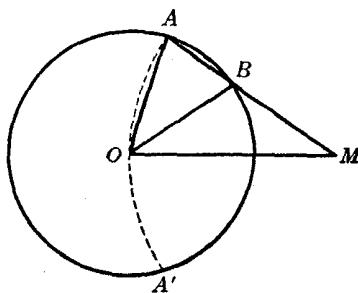
حالی را که $p = q$ در نظر بگیرید.

۶. مسئله. از نقطه‌ای مفروض در خارج دایره‌ای مفروض قاطعی رسم کنید به طوری که زاویه حاده بین این قاطع و خطی که مرکز دایره را به نقطه مفروض وصل می‌کند برابر باشد با زاویه‌ای که وتر ایجاد شده در دایره توسط قاطع مطلوب، از مرکز دایره به آن زاویه دیده می‌شود.

تحلیل. فرض کنید MBA قاطع مورد نظر باشد (شکل ۲) که از نقطه مفروض M می‌گذرد و دایرة مفروض به مرکز O را در A و B قطع می‌کند. زاویه A در دو مثلث AOM و AOB مشترک است و بنابر فرض $\angle AOB = \angle AMO$; پس زاویه‌های این دو مثلث دویده مساوی‌اند. مثلث AOB متساوی الساقین است، پس مثلث AOM هم متساوی الساقین است و $MA = MO$. اما طول MO معلوم است؛ پس MA ، یعنی فاصله نقطه A از M معلوم است و می‌توان نقطه A را تعیین و قاطع MA را رسم کرد.

ترسیم. دایرة (M, MO) را رسم کنید. اگر A یکی از نقطه‌های تقاطع دو دایره باشد، خط MA شرایط مسئله را برآورده می‌کند.

اثبات. فرض کنید خط MA دایرة مفروض را در نقطه دیگر B قطع کند. مثلثهای AOM و AOB متساوی الساقین‌اند. زیرا OA و OB شعاع‌های یک دایره، و MA و MO نیز شعاع‌های دایرة دیگرند. و در نتیجه، $MA = MO$ و $OA = OB$. زاویه A در هر دو مثلث یکی از زاویه‌های قاعده است؛ پس زاویه‌های AOB و M که به ترتیب روپروری قاعدة AB و قاعدة AO در دو مثلث متساوی الساقین هستند نیز برابرند. پس MA خط مطلوب است.



شکل ۲

بحث. همیشه می‌توانیم دایرة (M, MO) را که دایرة مفروض را در دو نقطه A و A' قطع می‌کند رسم کنیم؛ پس مسئله همیشه دو جواب دارد که نسبت به خط MO متقاضاند.

آیا می‌توانستیم خط MBA را طوری رسم کنیم که زاویه AOB با زاویه منفرجه بین MO و MBA برابر باشد؟ اگر چنین کاری ممکن بود باید می‌دانستیم

$$\angle AOB + \angle OMA = 180^\circ$$

که از آنجا،

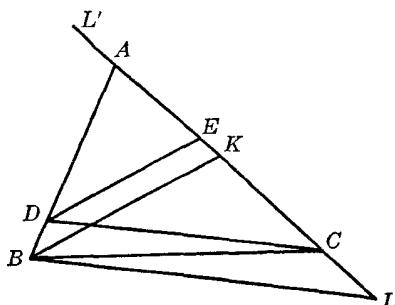
$$\angle OMA = \angle OAB + \angle OBA$$

ولی در مثلث OBM داریم

$$\angle M < \angle OBA$$

پس به تناقض می‌رسیم؛ یعنی نمی‌توان خطی رسم کرد که شرایط خواسته شده را برآورده کند.

- مسئله را در حالتی که M درون دایره مفروض یا بر روی آن باشد بررسی کنید.
۷. مسئله. بر روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC (یا امتداد آنها) دو نقطه D و E را طوری تعیین کنید که پاره‌خطهای DE ، AD و EC برابر باشند (شکل ۳).



شکل ۳

تحلیل. فرض کنید نقاط D و E شرایط مسئله را ارضا کنند، و فرض کنید خطهایی که از نقطه B به ترتیب به موازات خطهای DC و DE رسم می‌شوند، AC را در K و L قطع کنند. دو مثلث ABK و ADE متشابه‌اند و چون بنابر فرض، $AB = BK$ و نقطه K را به آسانی می‌توان تعیین کرد. همچنین مثلثهای BKL و DEC متشابه‌اند و چون بنابر فرض، $DE = EC$ داریم $BK = KL$ و $BK = KL$ هم معلوم است.

ترسیم. دایره (B, BA) را رسم کنید تا AC را در K قطع کند. دایره (K, BA) را رسم کنید تا AC را در L قطع کند. خطی که از C به موازات BL رسم می‌شود، خط AB را در نقطه D ، که اولین نقطه مطلوب است، قطع می‌کند و خطی که از D به موازات BK رسم می‌شود AC را در دومین نقطه مطلوب، یعنی E ، قطع می‌کند. اثبات. گامهای اثبات همان گامهای تحلیل هستند ولی از آخر به اول.

بحث. همیشه یک و فقط یک موضع برای نقطه K وجود دارد. پس از ترسیم K ، برای L دو موضع می‌باشیم؛ بنابر این برای مسئله دو جواب DE و $D'E'$ وجود دارد.

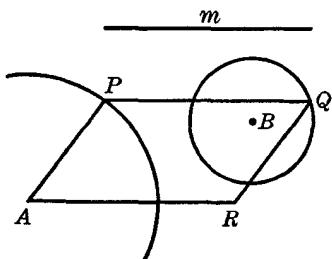
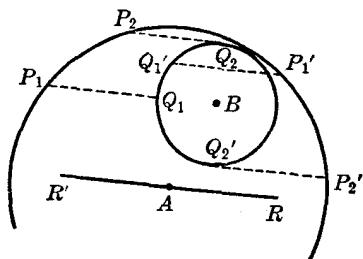
اگر A قائم باشد مسئله به یک مسئله بدیهی تبدیل می‌شود.

۸. مسئله. بر روی دو دایره مفروض، دو نقطه تعیین کنید که فاصله معینی از هم داشته باشند و خطی که از آنها می‌گذرد راستای مفروضی داشته باشد.

تحلیل. فرض کنید P و Q نقاط مطلوب بر روی دو دایره مفروض (A) و (B) باشند. از مرکز دایره (A) یعنی نقطه A (شکل ۴) خطی به موازات PQ رسم کنید و نقطه R را بر روی آن طوری مشخص کنید که $AR = PQ$. در متوازی‌الاضلاع $APQR$ داریم $AP = RQ$. $AP = RQ$ شاعع دایره مفروض است؛ پس طول RQ مشخص است. از طرف دیگر نقطه R معلوم است زیرا هم راستا و هم طول AR مشخص است. پس نقطه Q را می‌توان مشخص کرد. سپس به آسانی می‌توان نقطه P را یافت.

ترسیم. از A ، مرکز یکی از دو دایره مفروض، (A) ، خطی در راستای مفروض رسم کنید و AR را بر روی آن به اندازه طول مفروض، m ، تعیین کنید. دایره (A') را به مرکز R و شعاعی برابر شاعع دایره (A) رسم کنید تا دایره

مفروض دوم را در Q قطع کند. از نقطه Q خطی به موازات AR رسم و QP را برابر AR روی آن جدا کنید، تا یک متوازی‌الاضلاع به ضلع AR (نه به قطر AR) درست شود. نقاط P و Q شرایط مسئله را برآورده می‌کنند. اثبات. در ترسیم فوق، طول پاره‌خط PQ همان طول مفروض و راستای آن نیز راستای مفروض است. نقطه Q روی دایرة (B) قرار دارد. برای اینکه نشان دهیم نقطه P روی دایرة (A) قرار دارد کافی است متذکر شویم که در متوازی‌الاضلاع $ARQP$ داریم $AP = RQ$ و RQ طوری رسم شده است که با شعاع (A) برابر باشد.



شکل ۵

شکل ۴

بحث. همیشه می‌توان از نقطه A خطی را در راستای مفروض رسم کرد. نقطه R را می‌توان در هر یک از دو طرف A مشخص کرد؛ بنابراین برای R دو موضع، R و R' می‌توان یافت. دایره‌ای که مرکزش یکی از این دو نقطه و شعاعش برابر شعاع (A) باشد ممکن است (B) را در دو نقطه قطع کند، بر (B) مماس باشد یا اصلاً (B) را قطع نکند. بنابراین مسئله ممکن است چهار، سه، دو یا یک جواب داشته باشد، یا اصلًاً جواب نداشته باشد.

شکل ۵ حالتی را نشان می‌دهد که مسئله چهار جواب دارد.

۹. مسئله. مربعی رسم کنید که هر ضلع، یا امتداد هر ضلع آن از نقطه مفروضی بگذرد.

تحلیل. فرض کنید $PQRS$ مربعی است که اضلاع آن، یعنی PQ ، QR ، RS و SP به ترتیب از نقاط مفروض A ، B ، C و D می‌گذرند (شکل ۶).

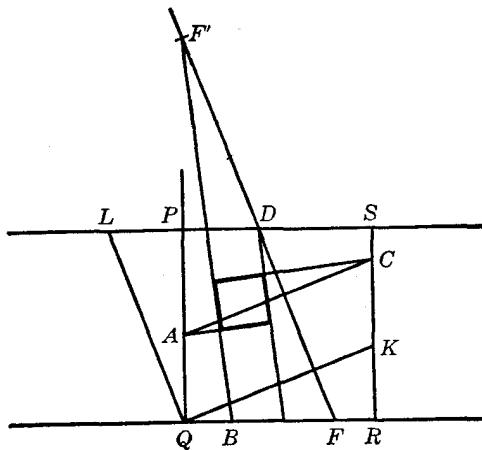
اگر خطی که از D بر AC عمود می‌شود خط OR را در F قطع کند، آنگاه $DF = AC$. در واقع اگر خط DF را ثابت نگاه داریم و مریغ، و به همراه آن خط AC را حول مرکزش به اندازه 90° بچرخانیم به طوری که اضلاع PQ ، RS ، QR ، SP به ترتیب در وضعیت فعلی اضلاع SP ، RS ، QR و PQ قرار گیرند، خط DF با AC موازی می‌شود؛ پس $DF = AC$.

برابری DF و AC را از راه دیگری هم می‌توان نشان داد. فرض کنید خطهایی که از Q به موازات AC و DF رسم می‌شوند، RS و SP را به ترتیب در نقطه‌های K و L قطع کنند. در مثلثهای QAL و QPL قائم‌الزاویه و QRK داریم

$$\angle PQL = \angle LQR - \angle PQR = \angle LQR - \angle LQK = \angle KQR$$

پس زاویه‌های دو مثلث دوبعد برابرند و چون بنابر فرض، $PQ = QR$ ، دو مثلث همنهشت‌اند؛ پس $AC = DF$. ولی $QL = DF$ و $QL = AC$ ؛ پس $DF = AC$.

برابری این دو پاره‌خط را حل زیر را برای مسئله به ذهن می‌رساند:



شکل ۶

رسیم. از نقطه مفروض D خط DF را برابر DF عمود کنید و روی آن پاره خط AC را برابر DF جدایی کنید. F را به نقطه چهارم مفروض، یعنی B وصل و خطی از D به موازات BF رسم کنید. این دو خط موازی و خطهایی که از A و C بر آنها عمود می‌شوند مربع مطلوب $PQRS$ را تشکیل می‌دهند.

اثبات. از روش بیان شده در ترسیم به آسانی نتیجه می‌شود که $PQRS$ مستطیل است که اضلاع آن از نقاط مفروض A ، C ، B و D می‌گذرند.

برای اینکه نشان دهیم این مستطیل مربع است، باز هم مثلثهای PQL و QRK را در نظر می‌گیریم، و مانند آنچه در تحلیل انجام دادیم نشان می‌دهیم که زاویه‌های این دو مثلث دو به دو برابرند. حال همان‌طور که در ترسیم گفته شد $DF = AC$ ؛ $QL = QK$ ؛ پس مثلثها همنهشت‌اند و $QP = QR$.

بحث. اگر نقطه F' را قرینه F نسبت به D در نظر بگیریم و نقش F' را به آن بدهیم، برای مسئله جواب دومی به دست خواهیم آورد.

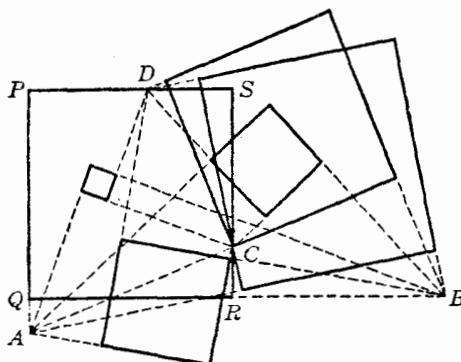
به علاوه، می‌توانیم از نقطه D بر هر یک از دو ضلع دیگر مثلث ABC ، یعنی AB و BC نیز عمود وارد کنیم، و به این ترتیب، دو جفت جواب دیگر به دست می‌آوریم. پس در حالت کلی مسئله ۶ جواب متفاوت دارد. البته تفاوتی ندارد که کدام‌یک از چهار نقطه مفروض را نقطه D فرض کنیم.

اگر نقطه F بر نقطه B مطابق شود، راستای BF نامعین خواهد بود، یعنی هر خطی را که از B می‌گذرد می‌توان ضلع مربع مطلوب در نظر گرفت و شکل را با لین انتخاب تکمیل کرد. پس اگر پاره خطی که دو نقطه از چهار نقطه مفروض را به هم وصل می‌کند بر پاره خطی که دو نقطه دیگر را به هم وصل می‌کند عمود و با آن برابر باشد، مسئله بی‌نهایت جواب دارد.

شکل ۷ حالتی را نشان می‌دهد که مسئله شش جواب دارد.

۱۰. پیشنهاد. شکل لازم برای تحلیل را می‌توانید بدون استفاده از وسائل رسم کنید و اجزای مفروض را طوری ترتیب دهید که شکل تصور درستی را از مسئله الفا کند و روابط بین اجزا را نشان دهد.

رسیم باید با خطکش و پرگار انجام شود. اندازه‌های مفروض، مثل پاره خطها و زاویه‌ها باید قبل از شروع ترسیم مشخص شوند و در ترسیم به کار روند. اگر مسئله شامل نقاط و خطوطی در موضع معین باشد، باید



شکل ۷

قبل از شروع عملیات ترسیم این داده‌ها را در شکل مشخص کرد.
در هنگام بحث باید تعداد روش‌های ممکن برای انجام هر گام و تعداد خطوط یا نقاط تلاقی حاصل از گام مورد نظر بررسی شود.

جنبهای مختلفی که مسئله می‌تواند داشته باشد، و در هنگام بحث روشن می‌شود، باید با شکل‌های مناسب نشان داده شوند. به عنوان قاعده‌ای کلی، برای هر مسئله یا شکل امکاناتی بیشتر از آنچه در وهله اول به نظر می‌رسد وجود دارد. مطالعه دقیق مسئله غالباً دیدگاه‌هایی را روشن می‌سازد که در بررسی سرسری ممکن است از نظر دور بماند.

تمرین

- ۱) از نقطه‌ای مفروض خطی رسم کنید که با دو ضلع زاویه‌ای مفروض، زاویه‌های مساوی بسازد.
- ۲) از نقطه‌ای مفروض خطی رسم کنید که دو خط موازی مفروض روی آن پاره خطی با طول مشخص جدا کنند.
- ۳) از یکی از دو نقطه تلاقی دو دایره مساوی در هر دایره یک وتر رسم کنید به‌طوری که دو وتر مساوی باشند و زاویه مفروضی را تشکیل دهند.
- ۴) از نقطه‌ای مفروض واقع بر روی یک دایره وتری رسم کنید به‌طوری که طول آن دو برابر فاصله‌اش تا مرکز دایره باشد.
- ۵) روی امتداد قطری از یک دایرة مفروض نقطه‌ای چنان بیابید که طول مماسهای رسم شده از آن نقطه بر دایره با شعاع دایره برابر باشد.
- ۶) به مرکز نقطه‌ای مفروض دایره‌ای رسم کنید که دایرة مفروضی را نصف کند، یعنی وتر مشترک دو دایره قطر دایرة مفروض باشد.
- ۷) دایره‌ای رسم کنید که از دو نقطه مفروض بگذرد و وتر مشترک آن با دایره‌ای مفروض موازی خطی مفروض باشد.
- ۸) متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که نقاط وسط سه ضلع آن، سه نقطه مفروض باشند.
- ۹) بر روی یک ضلع مفروض زاویه قائمه از یک مثلث قائم‌الزاویه نقطه‌ای بیابید که از رأس قائمه و وتر مثلث هم فاصله باشد.
- ۱۰) به مرکزهای دو نقطه مفروض دو دایرة مساوی رسم کنید به‌طوری که یکی از مماسهای مشترک آنها (i) از

- نقطه (سوم) مفروضی بگزرد؛ (ii) بر دایره مفروضی مماس باشد.
- ۱۱) از یک نقطه مفروض خطی رسم کنید به طوری که دو وتری که توسط آن در دو دایره مفروض متساوی ایجاد می‌شود، مساوی باشند.
- ۱۲) بر دایرة مفروضی که بین دو خط موازی قرار دارد مماسی رسم کنید به طوری که پاره خط جدا شده بر روی آن توسط دو خط موازی مفروض طول مفروضی داشته باشد.
- ۱۳) مثلث قائم الزاویه‌ای را رسم کنید که وتر و فاصله نقطه وسط وتر تا یکی از دو ضلع زاویه قائمه از آن مفروض است.
- ۱۴) مثلثی را رسم کنید که یک ارتفاع آن و شعاع‌های دایره‌های محیطی دو مثلثی که این ارتفاع در مثلث مطلوب جدا می‌کند، مفروض است.

ج. مکانهای هندسی

- ۱۱) مکانهای هندسی مهم. در موارد متعددی راه حل یک مسئله هندسی به یافتن نقطه‌ای که شرایط خاصی را داشته باشد بستگی دارد. مثلاً برای رسم دایره‌ای که از سه نقطه مفروض بگزرد باید نقطه‌ای (مرکز دایره) را بیابیم که از سه نقطه مفروض به یک فاصله باشد.
- مسئله رسم یک مماس از یک نقطه مفروض بر دایره‌ای مفروض، وقتی حل می‌شود که نقطه تماس، یعنی نقطه‌ای بر روی دایره که پاره خط محدود به نقطه مفروض و مرکز دایره مفروض از آن نقطه با زاویه قائمه دیده شود، را بیابیم.

اگر یکی از شرایطی را که نقطه مطلوب باید داشته باشد کنار بگذاریم، مسئله ممکن است جوابهای متعددی داشته باشد ولی این به معنی آن نیست که موضع نقطه مطلوب دلخواه است، بلکه این نقطه روی مسیر معنی که مکان هندسی نقطه نام دارد حرکت می‌کند. حال با در نظر گرفتن شرط کنار گذاشته شده و کنار گذاشتن یک شرط دیگر، کاری می‌کنیم که نقطه مورد نظر مکان هندسی دیگری را بیابیم. نقطه‌ای که بین این دو مکان هندسی مشترک باشد نقطه‌ای است که در جستجوی آن بوده‌ایم.

باز هم مسئله ترسیم دایره‌ای که از سه نقطه مفروض بگزرد برای روشن کردن موضوع بمکار می‌آید. برای یافتن نقطه‌ای که از سه نقطه مفروض A , B , C ، هم فاصله باشد، یکی از نقاط مفروض، مثلاً C ، را کنار می‌گذاریم و سعی می‌کنیم نقطه‌ای را بیابیم که از A و B هم فاصله باشد. این مسئله جوابهای بسیاری دارد؛ نقطه مطلوب می‌تواند هر نقطه‌ای واقع بر عمود منصف پاره خط AB باشد. حال نقطه C را در نظر می‌گیریم و نقطه A را کنار می‌گذاریم؛ نقطه مطلوب عمود منصف پاره خط BC را می‌بیابیم. نقطه مطلوب محل برخورد دو عمود منصف است.

ماهیت مکانهای هندسی حاصل به شرط حذف شده بستگی دارد. در هندسه مقدماتی این شرایط باید به گونه‌ای باشند که مکانهای هندسی از خطوط و دایره‌ها تشکیل شود. سادگی و سر راستی راه حل بستگی زیادی به انتخاب سنجیده مکانهای هندسی دارد.

شناخت مکانهای هندسی متعدد ما را قادر می‌سازد که اغلب فوراً تشخیص دهیم که نقطه مطلوب باید در کجا واقع باشد.

مکانهای هندسی زیر مهمترین و پرکاربردترین مکانهای هندسی هستند.

مکان هندسی ۱. مکان هندسی نقطه‌ای در صفحه که از یک نقطه مفروض به فاصله مفروضی باشد، دایره‌ای است به مرکز نقطه مفروض و به شعاع فاصله مفروض.

مکان هندسی ۲. مکان هندسی نقطه‌ای که بتوان از آن مماسهایی با طول مفروض بر یک دایرهٔ مفروض رسم کرد، دایره‌ای است هم مرکز با دایرهٔ مفروض.

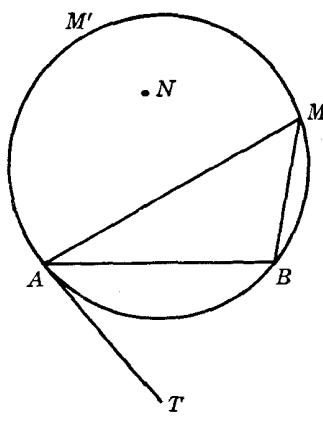
مکان هندسی ۳. مکان هندسی نقطه‌ای که به فاصلهٔ مفروضی از یک خط مفروض باشد، مرکب است از دو خط موازی با خط مفروض.

مکان هندسی ۴. مکان هندسی نقطه‌ای که از دو نقطهٔ مفروض هم فاصله باشد، عمودمنصف پاره‌خط واصل بین آن دو نقطه است.

مکان هندسی ۵. مکان هندسی نقطه‌ای که از دو خط متقاطع هم فاصله باشد، نیمسازهای دو زاویه‌ای است که این دو خط ایجاد می‌کنند.

مکان هندسی ۶. مکان هندسی نقطه‌ای که مماسهایی که از آن نقطه بر دایرهٔ مفروضی رسم می‌شوند زاویهٔ مفروضی را تشکیل دهند، یا به طور خلاصه، مکان هندسی نقطه‌ای که یک دایرهٔ مفروض از آن نقطه با زاویهٔ مفروضی دیده شود، دایره‌ای هم مرکز با دایرهٔ مفروض است.

مکان هندسی ۷. مکان هندسی نقطه‌ای واقع در یک طرف یک پاره‌خط مفروض، که پاره‌خط از آن نقطه با زاویهٔ مفروضی دیده شود، کمانی از یک دایره است که از نقاط انتهایی آن پاره‌خط می‌گذرد.



شکل ۸

فرض کنید نقطهٔ M (شکل ۸) نقطه‌ای واقع بر مکان هندسی باشد، به طوری که زاویه AMB برابر با زاویهٔ مفروض باشد. دایره‌ای رسم می‌کنیم که از سه نقطه A , B , M بگذرد. از هر نقطه M' واقع بر کمان AMB پاره‌خط AB با همان زاویه‌ای دیده می‌شود که نقطه M پاره‌خط AB را می‌بیند؛ پس هر نقطهٔ واقع بر کمان AMB ، نقطه‌ای از مکان هندسی مطلوب است. از طرف دیگر، هر نقطه N غیر واقع بر کمان AMB یا درون این کمان قرار دارد یا بیرون از آن، زاویه ANB در حالت اول از زاویه AMB بزرگتر و در حالت دوم از زاویه AMB کوچکتر است. پس N متعلق به مکان هندسی نیست.

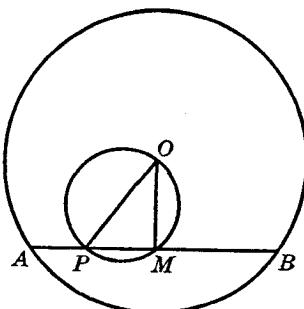
مماس AT که در نقطه A بر دایره AMB رسم می‌شود با AB زاویه‌ای برابر با زاویه AMB می‌سازد. پس AT را می‌توان رسم کرد. بنابر این، ترسیم دایرة AMB معادل ترسیم دایره‌ای است که در نقطه A بر خط AT مماس باشد و از نقطهٔ مفروض دیگر B بگذرد.

اگر این شرط را که نقطه M در یک طرف مفروض پاره‌خط AB واقع باشد کثارتگذاریم، مکان هندسی مطلوب دو کمان از دو دایرةٔ همنهشت است که در دو طرف AB قرار دارند.

اگر زاویه مفروض 90° باشد، دو کمان دو نیم‌دایره باشعاع‌های یکسان خواهد بود، و در نتیجه: مکان هندسی نقطه‌ای که پاره‌خط مفروضی از آن نقطه با زاویه قائمه دیده شود، دایره‌ای است که پاره‌خط مفروض قطري از آن است.

مکان هندسی ۸. مکان هندسی نقاط وسط وترهایی از یک دایره مفروض که از نقطه ثابتی می‌گذرند، در صورتی که این نقطه ثابت درون یا روی دایره باشد، یک دایره است.

فرض کنید P (شکل ۹) نقطه مفروض، و M نقطه وسط وتر AB از دایره مفروض (O) باشد؛ AB وتری از دایره است که از نقطه مفروض P می‌گذرد. پاره‌خط OP از نقطه M با زاویه قائمه دیده می‌شود؛ پس روی دایره‌ای به قطر OP قرار دارد (مکان هندسی ۲). از طرف دیگر، هر نقطه M واقع بر این دایره در صورتی که به P وصل شود وتری از دایره (O) را مشخص می‌سازد، که در نقطه OM بر آن عمود است. پس M نقطه وسط این وتر است، و بنابراین به مکان هندسی تعلق دارد.



شکل ۹

اگر نقطه P خارج از (O) باشد، هر نقطه M از مکان هندسی باید روی دایره‌ای به قطر OP قرار داشته باشد؛ ولی تمامی نقاط این دایره متعلق به مکان هندسی نیستند. مکان هندسی بخشی از دایره (O) است که درون دایره مفروض (O) قرار دارد.

مکان هندسی ۹. مکان هندسی نقاط وسط همه وترهایی از یک دایره مفروض که طول مفروضی داشته باشند، دایره‌ای هم مرکز با دایره مفروض است.

همه وترها در نقطه وسط خود بر این دایره مماس‌اند.

مکان هندسی ۱۰. مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع مربعهای فاصله‌های آن از دو نقطه مفروض برابر مقدار ثابت مفروضی باشد، دایره‌ای است به مرکز نقطه وسط پاره‌خط واصل بین دو نقطه مفروض.

فرض کنید M (شکل ۱۰) نقطه‌ای واقع بر مکان هندسی باشد. M را به O ، نقطه وسط پاره‌خط AB که توسط دو نقطه مفروض A و B تعیین می‌شود، وصل می‌کنیم و MD را از M عمود بر AB رسم می‌کنیم. با توجه به مثلثهای AOM و BOM داریم

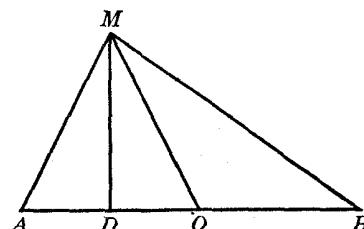
$$AM^2 = OM^2 + OA^2 - 2OA \cdot OD, \quad BM^2 = OM^2 + OB^2 + 2OB \cdot OD$$

ولی،

$$OA = OB = \frac{1}{2}AB$$

پس با جمع کردن این رابطه‌ها به دست می‌آوریم

$$AM^2 + BM^2 = 2OM^2 + 2OA^2$$



شکل ۱۰

بنابر فرض، $AM^2 + BM^2$ برابر مقدار ثابت مفروضی مانند s^2 است و $OA^2 = a^2$ که در آن a طول پاره خط مفروض AB است. پس

$$OM^2 = \frac{1}{2}s^2 - a^2 \quad (1)$$

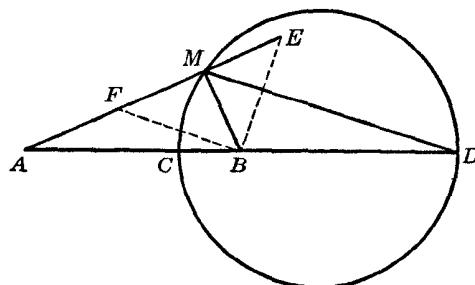
پس نقطه M به فاصله ثابت OM از نقطه O واقع است و بنابراین، مکان هندسی M دایره‌ای است به مرکز O .

شعاع OM را می‌توان با توجه به رابطه (۱) به صورت زیر رسم کرد. OM یک ضلع زاویه قائم مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که طول ضلع دیگر زاویه آن نصف طول پاره خط مفروض AB است، و وتر آن ضلع مربعی است که طول قطر آن برابر s است.

مکان هندسی ۱۱. مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌هایش از دو نقطه ثابت مقدار ثابتی باشد، دایره‌ای است که دایره آپولونیوس یا دایره آپولونیوسی نام دارد.

فرض کنید A و B دو نقطه مفروض باشند (شکل ۱۱) و $p : q$ نسبت مفروض باشد. فرض کنید نقطه‌های C و D پاره خط AB را به ترتیب، به صورت داخلی و خارجی به نسبت مفروض $p : q$ تقسیم کنند و M نقطه‌ای واقع بر مکان هندسی باشد. پس داریم

$$AC : CB = AD : DB = AM : MB = p : q$$



شکل ۱۱

خطهای MC و MD از مثلث ABM را به ترتیب، به صورت داخلی و خارجی به نسبت ضلعهای MA و MB تقسیم می‌کنند؛ پس $MC : MD = p : q$. نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه AMB هستند و بنابراین، برهم عمودند. پس از هر نقطه M واقع بر مکان هندسی مطلوب، پاره خط معلوم CD با زاویه قائم دیده می‌شود و در نتیجه، M روی دایره‌ای به قطر CD دارد (شکل ۱۱)، مکان هندسی (۷).

برای اثبات عکس این موضوع، نقطه دلخواه M را روی این دایره برمی‌گزینیم و نشان می‌دهیم که این نقطه متعلق به مکان هندسی مطلوب است. از نقطه B خطهای BE و BF را به موازات خطهای MC و MD رسم می‌کنیم تا AM را به ترتیب، در E و F قطع کنند. پس داریم

$$AM : ME = AC : CB , \quad AM : FM = AD : BD . \quad (1)$$

نسبتها دوم در این تناسبها بنابر نحوه ترسیم فوق، با هم برابرند. پس

$$AM : ME = AM : FM ;$$

بنابراین،

$$ME = MF$$

در نتیجه، M وسط پاره خط EF است. زاویه EBF قائم است، زیرا دو ضلع این زاویه بادو ضلع زاویه قائم CMD موازی‌اند، و در مثلث قائم الزاویه EBF ، طول پاره خط MB که میانه وارد بر وتر است، با نصف طول وتر EF برابر است؛ پس اگر در اولین تناسب (۱) به جای پاره خط ME پاره خط MB را که با آن مساوی است قرار دهیم، به دست می‌آوریم

$$AM : MB = AC : CB = p : q$$

که نشان می‌دهد M متعلق به مکان هندسی است.

در اثبات عکس، کجا از این واقعیت که M نقطه‌ای از دایره است، استفاده کردہایم؟

نکته. نقطه C پاره خط AB را به صورت داخلی به گونه‌ای تقسیم می‌کند که $p : q$ نباشد. $AC : CB = p : q$. ولی همچنین می‌توانیم C' را طوری برگزینیم که $BC' : C'A = p : q$ و بهمین ترتیب در مورد نقطه تقسیم بیرونی. بنابراین، مکان هندسی در واقع از دو دایره آپولونیوسی تشکیل می‌شود، مگر اینکه ترتیب در نظر گرفتن دو نقطه مفروض در بیان مکان هندسی مشخص شده باشد.

در کاربردهای واقعی، غالباً ماهیت مسئله ترتیب در نظر گرفتن نقاط را مشخص می‌کند.

مکان هندسی ۱۲. مکان هندسی نقطه‌ای که تفاضل مربع فاصله‌هایش از دو نقطه معلوم ثابت باشد، خط راستی عمود بر خط واصل بین دو نقطه مفروض است.

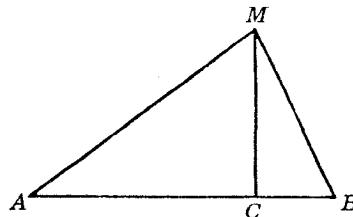
فرض کنید A و B (شکل ۱۲) دونقطه مفروض باشند و M نقطه‌ای باشد به طوری که

$$AM^2 - BM^2 = d^2$$

که d مقدار مفروض است.

اگر MC را از M بر AB عمود کنیم، از مثلثهای قائم الزاویه خواهیم داشت

$$AM^2 - AC^2 = MC^2 = MB^2 - BC^2$$



شکل ۱۲

پس

$$AM^r - MB^r = AC^r - BC^r = d^r$$

با

$$(AC - BC)(AC + BC) = d^r$$

پس اگر $AC + BC = AB$ را با a نشان دهیم،

$$AC - BC = d^r \div a$$

این تساوی تفاضل دو پاره خط AC و BC را به دست می‌دهد و در آن a مجموع دو پاره خط است. پس این پاره خط‌ها را می‌توان رسم و نقطه C را روی پاره خط AB مشخص کرد. پس پای عتمد وارد از هر نقطه C متعلق به مکان هندسی بر AB ، نقطه ثابتی از AB است. پس نقطه M روی عتمد بر AB در نقطه C واقع است. به سادگی می‌توان نشان داد که بر عکس، هر نقطه این خط عمود متعلق به مکان هندسی است. نکته. اگر $BM^r - AM^r = d^r$ را در نظر بگیریم، مکان هندسی متفاوتی برای نقطه M بدست می‌آوریم. در واقع مکان هندسی از دو خط تشکیل می‌شود، مگر این که ترتیب در نظر گرفتن در نقطه مفروض در بیان مکان هندسی مشخص شود.

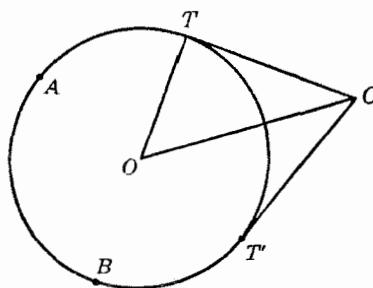
تمرین

- (۱) خطی موازی با قاعده BC از مثلث ABC دو ضلع AB و AC را به ترتیب، در D و E قطع می‌کند. نشان دهید که اگر این خط موازی تغییر کند، مکان هندسی (BE, CD) را یک خط راست است.
 - (۲) روی دو ضلع AB و AC از مثلث ABC دو پاره خط موازی AB' و AC' را جدا می‌کنیم. دو خط عمود بر AB و AC در نقاط B' و C' یکدیگر را در D قطع می‌کنند. نشان دهید که اگر طول مشترک AB' و AC' تغییر کند، مکان هندسی نقطه D یک خط راست است. مکان هندسی تصویر D نسبت به پاره خط $B'C'$ را به دست آورید.
 - (۳) مکان هندسی نقطه‌ای را به دست آورید که دو پاره خط متواالی AB و BC واقع بر روی یک خط راست از آن نقطه با زاویه‌های برابر دیده شوند.
 - (۴) قاعده BC از مثلث متغیر ABC ثابت است و مجموع $AB + AC$ نیز مقداری ثابت است. خطی که از نقطه D ، وسط قاعده BC ، به موازات AB رسم می‌شود، خطی را که از نقطه C به موازات نیمساز داخلی زاویه A رسم می‌شود، در نقطه P قطع می‌کند. نشان دهید که مکان هندسی نقطه P دایره‌ای به مرکز D است.
- در زیر مثالهای از کاربرد مکانهای هندسی در حل مسائل نشان داده شده است.
۱۲. مسئله. دایره‌ای رسم کنید که از دو نقطه مفروض بگذرد و از نقطه مفروض سومی با زاویه مفروضی دیده شود.

تحلیل. فرض کنید (O) دایرة مطلوب باشد که از دو نقطه مفروض A و B می‌گذرد (شکل ۱۳). اندازه زاویه بین ماسهای CT و CT' که از نقطه مفروض C بر (O) رسم می‌شوند مفروض است؛ بنابر این، از مثلث قائم‌الزاویه OCT زاویه حاده OCT را داریم؛ به عبارت دیگر، شکل این مثلث معلوم است. پس نسبت $OT : OC$ و همچنین نسبتی $OA : OC$

$$OA : OC = OB : OC$$

نیز معلوم‌اند. درنتیجه، دو مکان هندسی برای نقطه O داریم (دو دایرة آپولونیوسی) و این نقطه را می‌توانیم بیابیم.



۱۳

ترسیم. نقطه دلخواه Q را روی نیمساز داخلی زاویه مفروض P در نظر می‌گیریم و از آن نقطه عمود QR را بر یکی از دو ضلع زاویه رسم می‌کنیم. هر دو پاره خط مفروض AC و BC را به نسبت $QP : QR = 1 : 2$ حصورت داخلی و خارجی تقسیم می‌کنیم، تا به ترتیب نقاط E , F و G , H به دست آید. هر نقطه مشترک O بین دو دایره‌ای که EF و GH قطرهای آنها هستند مرکز دایرة مطلوب است.

۱۳. مسئله. از دو نقطه مفروض بر روی یک دایره دو وتر موازی رسم کنید به طوری که مجموع طولهای شان مقدار مفروضی باشد.

تحلیل. فرض کنید A و B دو نقطه مفروض بر روی دایره‌ای به مرکز O , و AC و BD وترهای مطلوب باشند. در ذوزنقه متساوی الساقین $ABDC$ (شکل ۱۴) $CD = AB$ و طول AB معلوم است؛ پس CD در F ,
یعنی نقطه وسط آن، بر دایرة معلومی به مرکز O مماس است(۱۱)، مکان هندسی ۹).

اگر E وسط AB باشد، داریم

$$EF = AC + BD$$

پس نقطه E و طول $AC + BD$ معلوم است؛ پس یک مکان هندسی دیگر برای F داریم.

ترسیم. دایرة (O, OE) را رسم کنید. اگر طول مفروض $2s$ باشد، دایرة (E, s) را رسم کنید تا در نقطه F قطع کند. خط مماس بر (O, OE) در نقطه F ، دایرة مفروض (O) را در C و D قطع می‌کند. خطهای AC و BD وترهای مطلوب هستند.

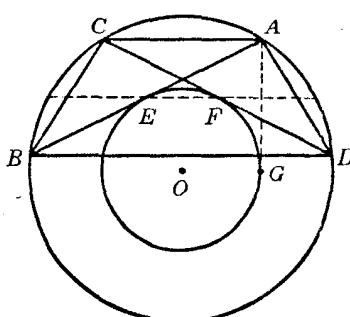
ایک ذوزنقہ متساوی الساقین است و در نتیجه $ABDC$ دو وتر AB و CD برابرند، زیرا از O ، یعنی مرکز دایرة مفروض (O) به یک فاصله‌اند. پس

$$AC + BD = \gamma EF$$

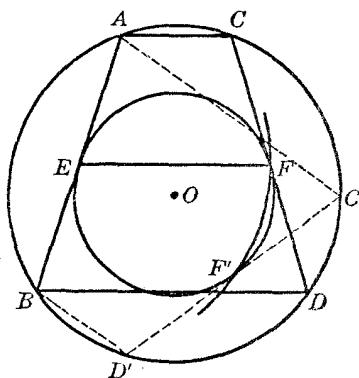
چون در هنگام ترسیم EF را برابر s گرفتیم، $AC + BD$ دارای طول مطلوب است.

بحث. دایرة (E, s) در صورتی که s از $2OE$ بزرگتر باشد، دایرة (O, OE) را قطع نمی‌کند. اگر $s < 2OE$ دو نقطه تلاقی F و F' را خواهیم داشت و مسئله دو جواب دارد.

خط مماس بر دایرة (O, OE) در نقطه F دو نقطه C و D را روی دایرة (O) تعیین می‌کند. این دو نقطه و نقاط مفروض A و B چهار خط را مشخص می‌کنند که دو ضلع و دو قطر ذوزنقه متساوی‌الساقین هستند. شکل نشان می‌دهد که از این چهار خط کدام دو خط، خطوط مطلوب هستند.



شکل ۱۵



شکل ۱۶

فرض کنید G (شکل ۱۵) نقطه تماس مماس دومی باشد که از A بر دایره (O, OE) رسم می‌شود. اگر $EG < s$, مماس بر (O, OE) در F وتر AB را قطع می‌کند، و خط AB یک قطر از ذوزنقه حاصل خواهد بود. خط EF با نصف تفاضل دو قاعده برابر است. حالی را در نظر بگیرید که تفاضل دو وتر مقدار مفروضی باشد.

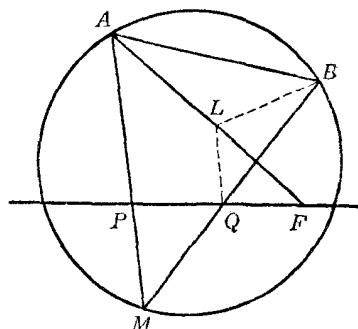
۱۴. مسئله. بر روی یک دایره مفروض نقطه‌ای بیاید به طوری که خطوطی که این نقطه را به دو نقطه مفروض واقع بر همین دایره وصل می‌کنند، خط مفروضی را در دو نقطه که نسبت فاصله‌هایشان از نقطه مفروض دیگری واقع بر همین خط مقدار مفروضی باشد قطع کنند.

فرض کنید خطهای AM و BM که نقاط مفروض A و B واقع بر دایره را به نقطه مطلوب M وصل می‌کنند خط مفروض FPQ را در دو نقطه P و Q قطع کنند (شکل ۱۶). اگر F نقطه ثابت مفروض باشد و خط QL که از نقطه Q موازی با MA رسم می‌شود، خط FA را در L قطع کند خواهیم داشت $\angle LQB = \angle AMB$ و چون وتر AB مفروض است، زاویه AMB معلوم است.

از طرف دیگر، داریم

$$FL : FA = FQ : FP$$

و نسبت دوم مفروض است؛ پس نقطه L معلوم است. پس پاره خط معلوم LB از نقطه Q با زاویه مفروض دیده می‌شود؛ به این ترتیب، یک مکان هندسی برای Q به دست می‌آید (§ ۱۱، مکان هندسی ۷). نقطه Q در



محل برخورد این مکان هندسی و خط مفروض FPQ قرار دارد. خط BQ دایره را در نقطه مطلوب M قطع می‌کند.

اثبات و بحث به عهده خواننده واگذار می‌شود.

تمرین

مثلثی را رسم کنید که اجزای زیر از آن معلوم باشد:

$$m_a, h_a, a \quad (۳)$$

$$b : c, t_a, a \quad (۶)$$

$$h_b, c, a \quad (۲)$$

$$b : c, m_a, a \quad (۵)$$

$$A, b, a \quad (۱)$$

$$b : c, h_a, a \quad (۴)$$

متوازی‌الاضلاعی را رسم کنید که اجزای زیر از آن معلوم باشد:

۷) یک ارتفاع و دو قطر.

۸) دو ارتفاع و یک زاویه.

۹) دو ارتفاع و یک قطر.

۱۰) یک ضلع، یک زاویه، و یک قطر.

۱۱) یک ضلع، ارتفاع متناظر با آن ضلع، و زاویه بین قطرها.

چهارضلعی $ABCD$ را که اجزای زیر از آن معلوم‌اند رسم کنید:

۱۲) قطر AC و زاویه‌های A, ABC, ADC و BAC .

۱۳) اضلاع AB و BC ، قطر CA و زاویه‌های ADB و BDC .

۱۴) اضلاع AB و AD ، زاویه DAB و شعاع دایره محاطی.

۱۵) یک چهارضلعی رسم کنید که سه ضلع و شعاع دایره محیطی آن مفروض است. در مورد جواب بحث کنید.

۱۶) سه نقطه مفروض‌اند. نقطه چهارمی را در صفحه آن سه نقطه بباید به‌طوری که فاصله‌هایش از آن سه نقطه مفروض نسبتی‌های مفروضی را داشته باشد.

۱۷) دایره‌ای با شعاع مفروض رسم کنید که بر دایره مفروضی مماس و مرکز آن بر خط مفروضی واقع باشد.

۱۸) دایره‌ای با شعاع مفروض رسم کنید که از نقطه مفروضی بگذرد و مماسهایی که از یک نقطه مفروض دیگر بر آن رسم می‌شوند، دارای طول مفروضی باشند.

۱۹) در یک دایره مفروض مثلث قائم‌الزاویه‌ای محاط کنید، به طوری که هر ضلع زاویه قائمه مثلث از نقطه مفروضی بگذرد.

۲۰) مثلثی را رسم کنید که از آن، قاعده، زاویه روی‌به قاعده، و نقطه تقاطع نیمساز آن زاویه با قاعده مفروض است.

۲۱) مثلثی را رسم کنید که از آن، قاعده و زاویه‌هایی که میانه وارد بر قاعده با دو ضلع دیگر می‌سازد مفروض است.

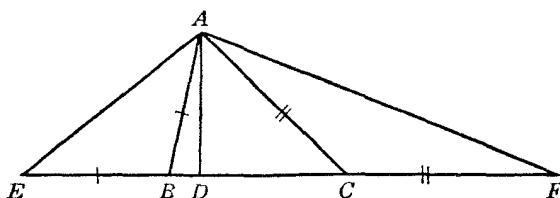
۲۲) دایره‌ای مفروض است. مثلثی بر این دایره محیط کنید که از آن، یک ضلع و یکی از زاویه‌های مجاور آن ضلع مفروض باشد و رأس این زاویه بر روی خط مفروضی قرار داشته باشد.

۲۳) مثلثی را با مفروض بودن قاعده، یک زاویه مجاور قاعده، و زاویه‌ای که میانه رسم شده از رأس این زاویه با ضلع روی‌به این زاویه می‌سازد، رسم کنید.

د. اجزای غیرمستقیم

در میان شرایطی که لازم است شکلی که می‌خواهیم ترسیم کنیم دارا باشد، ممکن است اجزایی مفروض باشند که مستقیماً در شکل مورد بحث قرار نداشته باشند. مثلاً، ممکن است لازم باشد که مجموع دو ضلع یک مثلث طول مفروضی داشته باشد یا تفاضل دو زاویه قاعده مقدار مفروضی باشد، وغیره. برای یافتن راه حل این‌گونه مسائل، باید این «اجزای غیرمستقیم» را در تحلیل مسئله وارد کنیم.

۱۵. مسئله. مثلثی را رسم کنید که از آن، محیط، زاویه روپرتو به قاعده و ارتفاع وارد بر قاعده $(2p, A, h_a)$ مفروض است.



شکل ۱۷

فرض کنید ABC (شکل ۱۷) مثلث مطلوب باشد. BC را از دو طرف امتداد دهید و BE را برابر CF را برابر CA روی آن جدا کنید. پس $2p = BA + EF = CA$ و متساوی الساقین $EAB \cong FCA$ هست.

$$\angle E = \angle EAB = \frac{1}{2} \angle ABC, \quad \angle F = \angle FAC = \frac{1}{2} \angle ACB \quad \text{پس}$$

$$\angle EAF = \frac{1}{2} B + A + \frac{1}{2} C = \frac{1}{2} (A + B + C) + \frac{1}{2} A = 90^\circ + \frac{1}{2} A$$

و بنابراین، زاویه EAF معلوم است. ارتفاع AD از مثلث ABC ارتفاع AEF هم هست. پس از مثلث AEF ، قاعده، $EF = 2p$ ، زاویه روپرتو آن، $\angle EAF = 90^\circ + \frac{1}{2} A$ و ارتفاع، $AD = h_a$ معلوم است؛ بنابراین می‌توانیم این مثلث را رسم کنیم. رأس A از این مثلث رأس مثلث مطلوب ABC نیز هست. چون $BA = AF$ و $AE = CA = CF$ و $EF = BA + AF$ ، نقاط B و C رأسهای BA و AF را بخورد عمودمنصفهای AE و AF با EF هستند. مسئله ممکن است دو جواب متقابن نسبت به عمودمنصف EF ، یا یک جواب داشته باشد، یا اصلاً جوابی نداشته باشد.

نکته. برای ترسیم مثلث مطلوب ABC ، به عنوان یک گام میانی مثلث دیگری، یعنی مثلث EAF ، را رسم کردیم. استفاده از یک مثلث کمکی غالباً می‌تواند بسیار مفید باشد.

۱۶. ملاحظه. زاویه‌های مثلث EAF به سادگی بر حسب زاویه‌های ABC بیان شدند و یکی از ارتفاعهای EAF ارتفاع ABC نیز هست. این روابط راه ساده‌ای را برای حل مسائل زیر در اختیارمان می‌گذارد. نکته. بقیه مسائل مربوط به محیط مثلث را بعداً بررسی خواهیم کرد (بندهای ۱۵۷ تا ۱۷۳).

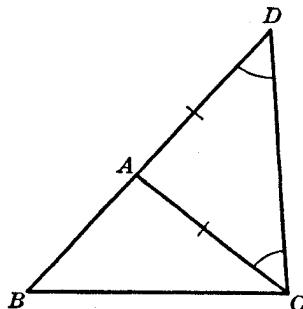
تمرین

مثلثی را رسم کنید که اجزای زیر از آن معلوم باشد:

$$(C, B, h_a, 2p) \quad (2) \quad B, A, 2p \quad (1)$$

۱۷. مسئله. مثلثی را رسم کنید که از آن، قاعده، زاویه روبرو به قاعده و مجموع دو ضلع دیگر $(b+c, A, a)$ مفروض است.

فرض کنید ABC (شکل ۱۸) مثلث مطلوب باشد. BA را امتداد دهید و روی آن AD را برابر AC جدا کنید. در مثلث متساوی الساقین ACD داریم $\angle ACD = \frac{1}{2} \angle BAC$. $\angle D = \angle ACD = \frac{1}{2} \angle BAC$ معلوم است؛ بنابراین می‌توانیم این مثلث را قاعده، $BC = a$ ، یک ضلع، $BD = b+c$ و زاویه $D = \frac{1}{2}A$ رسم کنیم. رأسهای B و C رأسهای مثلث مطلوب نیز هستند، و رأس سوم A ، محل برخورد BD و عمودمنصف پاره خط CD است.



شکل ۱۸

بحث. حل این مسئله ممکن نیست مگر اینکه داشته باشیم $(b+c) < a$. بافرض برقرار بودن این شرط، در مثلث کمکی BCD زاویه روبرو به ضلع کوچکتر را داریم، بنابراین ممکن است بتوانیم دو یا یک مثلث با شرایط مفروض برای BCD رسم کنیم، یا ممکن است چنین مثلثی قابل ترسیم نباشد. از هر مثلث کمکی یک و تنها یک مثلث مطلوب به دست می‌آید؛ پس ممکن است مسئله دو جواب داشته باشد یا یک جواب داشته باشد یا جواب نداشته باشد.

نکته. در مثلث کمکی BCD داریم

$$\angle D = \frac{1}{2} \angle A, \quad B = B$$

$$\begin{aligned} \angle BCD &= \angle BCA + \angle ACD = C + \frac{1}{2}A \\ &= \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}B \\ &= \frac{1}{2}(A+B+C) - \frac{1}{2}(B-C) = 90^\circ - \frac{1}{2}(B-C) \end{aligned}$$

در مثلث BCD ارتفاع h از مثلث ABC نیز هست.
گاهی به جای امتداد دادن ضلع AB بهتر است ضلع AC را امتداد دهیم.
این روابط را حل ساده‌ای برای مسائل زیر در اختیارمان قرار می‌دهند.
مسائل دیگری را که به مجموع دو ضلع یک مثلث مربوط می‌شوند بعداً (بندهای ۱۵۷ تا ۱۷۳) بررسی خواهیم کرد.

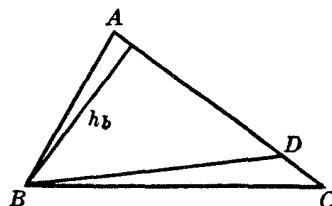
تمرین

مثلثی را رسم کنید که اجزای زیر از آن معلوم باشد:

$$\begin{array}{lll} a, C, b + c & h_c, B, b + c & B, a, b + c \\ (3) & (2) & (1) \\ B - C, a, b + c & (h_c \text{ یا } h_b), a, b + c & B, A, b + c \\ (6) & (5) & (4) \\ & B - C, h_b, b + c & B - C, h_c, b + c \\ & (8) & (7) \end{array}$$

۹. راهنمایی: $b + c$ را رسم کنید. در مثلث BCD رأسهای B و D معلوم‌اند و یک مکان هندسی برای C داریم. BA را برابر c رسم کنید. نقطه C روی دایره (A, b) نیز واقع است.
۱۰. مسئله. مثلثی را رسم کنید که از آن، قاعده، زاویه روبروی قاعده، و تقاضل دو ضلع دیگر $(b - a, A, a)$ مفروض است.

فرض کنید ABC (شکل ۱۹) مثلث مطلوب باشد. روی AC ، AD را برابر AB جدا کنید، به طوری که $CD = b - c$



شکل ۱۹

در مثلث متساوی الساقین ADB داریم

$$\angle ADB = \angle ABD = \frac{1}{2}(180^\circ - A) = 90^\circ - \frac{1}{2}A$$

$\angle BDC = 90^\circ + \frac{1}{2}A$. یعنی در مثلث BCD قاعده $BC = a$ ، زاویه مقابل آن، A ، زاویه مقابله با BCD را می‌دانیم، پس می‌توانیم این مثلث را رسم کنیم. دو رأس B و C از این مثلث رأسهای مثلث مطلوب ABC نیز هستند؛ رأس سوم این مثلث، یعنی A ، روی امتداد ضلع CD و عمودمنصف BD قرار دارد.

اگر شرط $a > b - c$ برقرار نباشد، رسم مثلث ناممکن است. اگر این شرط برقرار باشد، زاویه مفروض مثلث BCD روبروی ضلع بزرگتر قرار دارد، و رسم چنین مثلثی به یک و تنها یک طریق ممکن است. پس مسئله مورد نظر یک جواب دارد.

نکته. زاویه BCD از مثلث کمکی BCD برابر است با زاویه C از مثلث ABC .

و

$$\begin{aligned} \angle CBD &= \angle ABC - \angle ABD = B - (90^\circ - \frac{1}{2}A) \\ &= B + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}C - 90^\circ \\ &= \frac{1}{2}(A + B + C) + \frac{1}{2}(B - C) - 90^\circ = \frac{1}{2}(B - C) \end{aligned}$$

همچنین ارتفاع وارد بر CD همان ارتفاع h_b از مثلث ABC است. با استفاده از این رابطه‌ها می‌توان مسائل زیر را حل کرد.

تمرین

مثلثی را رسم کنید که اجزای زیر از آن معلوم باشد:

$$C, h_b, b - c \quad (۳)$$

$$A, h_b, b - c \quad (۴)$$

$$B - C, a, b - c \quad (۲)$$

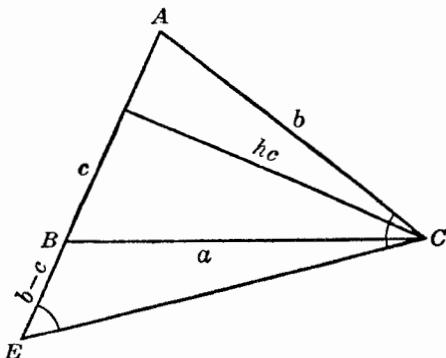
$$B, A, b - c \quad (۵)$$

$$C, a, b - c \quad (۱)$$

$$B - C, h_b, b - c \quad (۶)$$

۱۹. مسئله. مثلثی را رسم کنید که از آن، قاعده، تفاضل دو ضلع دیگر، و ارتفاع وارد بر یکی از این دو ضلع $(h_c, b - c, a)$ مفروض است.

فرض کنید ABC (شکل ۲۰) مثلث مطلوب باشد. AB را امتداد دهید و روی آن AE را برابر با AC کنید، به طوری که $BE = b - c$. در مثلث BCE داریم $BC = a$ و ارتفاع وارد بر BC برابر h_c است؛ پس این مثلث را می‌توان رسم کرد و از این مثلث به آسانی می‌توان به مثلث مطلوب رسید.



شکل ۲۰

نکته. زاویه‌های مثلث BCE به همان روشی که برای تعیین زاویه‌های مثلث BCD در مسئله قبل (§۱۸) به کار گرفته شد تعیین می‌شوند و به کمک این رابطه‌ها می‌توان مسائل زیر را حل کرد. مسائل دیگری مربوط به تفاضل دو ضلع یک مثلث را بعداً بررسی خواهیم کرد (بندهای ۱۵۷ تا ۱۷۳).

تمرین

مثلثی را رسم کنید که اجزای زیر از آن معلوم باشد:

$$A, h_c, b - c \quad (۲)$$

$$B - C, h_c, b - c \quad (۱)$$

$B - C, a, b - c \quad (۳)$ راهنمایی: BCE یا BCD را به عنوان مثلث کمکی به کار ببرید.

۲۰. مسئله. مثلثی را رسم کنید که از آن، قاعده، زاویه رو برو به قاعده و مجموع ارتفاعهای وارد بر دو ضلع دیگر $(h_b + h_c, A, a)$ مفروض است.

فرض کنید ABC (شکل ۲۱) مثلث مطلوب باشد. ارتفاع BE را امتداد دهید و EG را برابر با ارتفاع روی آن جدا کنید. از نقطه G خط GH را موازی AC رسم می‌کنیم تا امتداد BA را در H قطع کند. پس،

$$\angle BHG = \angle BAC = A, \quad \angle BGH = \angle BEA = ۹۰^\circ$$

پس در مثلث قائم‌الزاویه BHG ، یک ضلع زاویه قائم، $BG = h_b + h_c$ ، و زاویه‌حداً $\angle BHG = A$ را می‌دانیم؛ پس می‌توانیم این مثلث را رسم کنیم و طول BH را تعیین کنیم.

به آسانی می‌توان نشان داد که $BH = b + c$. خط AI را موازی BG رسم می‌کنیم تا HG را در I قطع

کند. $AIGE$ مستطیل است و بنابراین، $AI = EG = h_c$. حال در مثلثهای قائم‌الزاویه AHF و ACF داریم

$$AI = CF = h_c, \angle AHI = \angle CAF = A$$

پس دو مثلث همنهشت‌اند، و $AH = AC = b$: بنابراین،

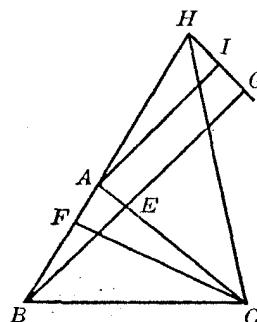
$$BH = BA + AH = b + c$$

اکنون از مثلث مطلوب $b + c, A, a, ABC$ را می‌دانیم و به مسئله‌ای می‌رسیم که حل آن را می‌دانیم (§ ۱۷).

ولی می‌توان به طور مستقیم از مثلث کمکی BGH در شکل ۲۱ به مثلث مطلوب ABC رسید. رأس

از مثلث BGH رأس مثلث ABC هم هست. برای یافتن C ملاحظه می‌کنیم که در مثلث متساوی‌الساقین AHC داریم

$$\angle AHC = \angle ACH = \frac{1}{2}A$$



شکل ۲۱

و چون $\angle AHG = A$ ، خط HC نیمساز زاویه H است و این خط مکان هندسی نقطه C را تشکیل می‌دهد. دایرة (B, a) مکان هندسی دیگری برای C است. پس رأس A بر روی ضلع BH از مثلث BGH و همچنین روی عمودمیان CH قرار دارد.

اگر زاویه مفروض A منفرجه باشد، مثلث BGH به جای A ، شامل مکمل A خواهد بود، و مسئله به همان ترتیب حل می‌شود.

۲۱. **تعریف.** مثلث قائم‌الزاویه BGH شامل اجزای زیر است:

$$b + c, h_b + h_c, A$$

بنابراین، با داشتن هر دو جزء از این اجزا، جزء سوم را می‌توان تعیین کرد. مجموعه‌ای از اجزای مثلث را که دارای این ویگی باشد معلومات مثلث می‌نامند.

تمرین

مثلثی را رسم کنید که اجزای زیر از آن مفروض باشد:

$$c, b, h_b + h_c \quad (2) \qquad C, B, h_b + h_c \quad (1)$$

$$a, b + c, h_b + h_c \quad (3) \qquad A, b, h_b + h_c$$

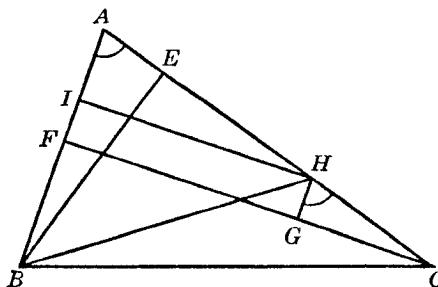
$B - C, b + c, h_b + h_c$ را به دست می‌دهد، و بنابراین، راهنمایی: مثلث BGH زاویه A را

نیز معلوم است؛ پس می‌توان زاویه‌های B و C را رسم کرد.

$$A, b - c, h_b + h_c \quad (4)$$

۲۲. مسئله. مثلثی را رسم کنید که از آن، قاعده، زاویه رو برو به قاعده و تفاضل ارتفاعهای وارد بر دو ضلع دیگر ($A, a - h_c - h_b$) مفروض است.

فرض کنید ABC (شکل ۲۲) مثلث مطلوب باشد. ارتفاعهای BE و CF را رسم کنید و FG را برابر CF روی BE جدا کنید، به طوری که $GH = h_c - h_b$. $CG = h_c - h_b$ را موازی با AB رسم کنید. در مثلث قائم الزاویه CHG ، قاعده $CH = A$ و $CG = h_c - h_b$ را می‌دانیم و بنابراین، می‌توانیم آنرا رسم و طول CH را تعیین کنیم.



شکل ۲۲

اکنون نشان می‌دهیم که $HI = FG = BE$ را از H بر AB عمود می‌کنیم. داریم $HI : CH = b - c$ و $BE : CH = b - c$ پس دو مثلث قائم الزاویه AHI و ABE همنهشت‌اند، زیرا زاویه A در آنها مشترک است و $BE = HI$ و $AH = AB$ و $BH = AH$ بنابراین،

$$CH = CA - AH = CA - AB = b - c$$

چون $c - b$ را می‌دانیم، این مسئله به مسئله‌ای که قبلاً حل کردۀ‌ایم (§۱۸) تبدیل می‌شود.

ولی مثلث مطلوب را می‌توان مستقیماً از مثلث CHG در شکل ۲۲ به دست آورد. رأس C از مثلث CHG رأس مثلث مطلوب نیز هست. از مثلث متساوی‌الساقین ABH داریم $\angle AHB = \frac{1}{2}(180^\circ - A)$ اما

$$\angle AHG = 180^\circ - \angle GHG = 180^\circ - A$$

پس BH نیمساز زاویه AHG است و یک مکان هندسی برای رأس B از مثلث ABC به دست می‌آید؛ مکان هندسی دیگر دایره (C, a) است. اکنون رأس A را می‌توان از محل برخورد عمود منصف BH و امتداد CH به دست آورد.

اگر زاویه مفروض A منفرجه باشد، مثلث CGH به جای زاویه A ، شامل مکمل A خواهد بود و مسئله را می‌توان به همان روش حل کرد. نکته. بحث بالا نشان می‌دهد که اجزای $(A, a - h_c - h_b)$ یک دسته از معلومات مثلث را تشکیل می‌دهند.

تمرین

مثلثی را رسم کنید که اجزای زیر از آن معلوم باشد:

$$c, b, h_c - h_b \quad (2)$$

$$b + c, A, h_c - h_b \quad (3)$$

$$C, B, h_c - h_b \quad (1)$$

$$B - C, b - c, h_c - h_b \quad (3)$$

تمرینهای تکمیلی

- (۱) از نقطه‌ای مفروض دایره‌ای مماس بر دو خط موازی رسم کنید.
- (۲) از نقطه‌ای مفروض خطی رسم کنید که از نقطه دور از دسترس محل پرخورد دو خط مفروض بگذرد.
- (۳) خطی با راستای مفروض رسم کنید که دو ضلع AB و AC از مثلث مفروض ABC را در نقطه‌های B' و $C' = CC'$ قطع کند، به طوری که $BB' = CC'$.
- (۴) از نقطه‌ای مفروض خطی رسم کنید به طوری که مجموع (یا تفاضل) فاصله‌هایش از دو نقطه مفروض برابر با طول مفروضی باشد. در مورد این دو حالت بحث کنید: وقتی قرار باشد دو نقطه مفروض در یک طرف خط مطلوب واقع باشند، وقتی قرار باشد دو نقطه مفروض در دو طرف خط مطلوب واقع باشند.
- (۵) در یک مثلث متساوی‌الاضلاع مفروض، مثلث متساوی‌الاضلاع دیگری را که یکی از رأسهای آن مفروض است محاط کنید.
- (۶) در یک مربع مفروض، مربع دیگری را که یکی از رأسهای آن مفروض است، محاط کنید.
- (۷) روی ضلع CD از متساوی‌الاضلاع مفروض $ABCD$ نقطه P را چنان تعیین کنید که زاویه‌های BPA و BPC برابر باشند.
- (۸) متساوی‌الاضلاعی رسم کنید که دو نقطه مفروض دو رأس مقابل در آن باشند و دو رأس دیگر آن روی دایرة مفروضی واقع باشند.
- (۹) از یک نقطه تقاطع دو دایرة مفروض خطی چنان رسم کنید که دو وتری که دو دایره روی آن جدا می‌کنند (i) برابر باشند؛ (ii) دارای نسبت مفروضی باشند.
- (۱۰) از یک نقطه تقاطع دو دایرة مفروض خطی چنان رسم کنید که مجموع دو وتری که دو دایره روی آن جدا می‌کنند برابر طول مفروضی باشد.
- (۱۱) از یک نقطه تقاطع دو دایرة مفروض خطی چنان رسم کنید که زاویه‌های مرکزی متناظر با دو وتری که دایرها روی این خط جدا می‌کنند، برابر باشند.
- (۱۲) یک زاویه و نقطه‌ای واقع بر روی یک ضلع آن مفروض است. نقطه دومی روی این ضلع بیاید به طوری که از نقطه اول و ضلع دوم زاویه به یک فاصله باشد.
- (۱۳) یک زاویه مفروض است، دایره‌ای به شعاع مفروض رسم کنید که مرکزش روی یک ضلع این زاویه باشد و ضلع دیگر زاویه وتری با طول مفروض در آن جدا کند.
- (۱۴) دایره‌ای به مرکز نقطه‌ای مفروض رسم کنید که مجموع وترهایی که روی دو خط موازی مفروض جدا می‌کند برابر با طول مفروضی باشد.
- (۱۵) خطی به موازات قاعده BC از مثلث مفروض ABC رسم کنید تا دو ضلع AB و AC را در نقطه‌های B' و C' قطع کند، به طوری که ذوزنقه $BB'C'C$ محیط مفروضی داشته باشد.
- (۱۶) مثلثی رسم کنید به طوری که اضلاعش از سه نقطه مفروض ناهمخط بگذرند و توسط این نقطه‌ها به طور داخلی به نسبتها مفروض تقسیم شوند.

تمرین برای مرور

ترسیم

- (۱) در یک دایرة مفروض قطری رسم کنید به طوری که از نقطه‌ای مفروض با زاویه مفروضی دیده شود.
- (۲) خطی رسم کنید که دو دایرة مفروض روی آن وترهایی با طولهای مفروض جدا کنند.
- (۳) دو دایرة مفروض را طوری نسبت به هم قرار دهید که مماسهای مشترک داخلی (یا خارجی) آنها زاویه‌ای

- با اندازه مفروض تشکیل دهنده.
- ۴) مثلث قائم الزاویه را با مفروض بودن ارتفاع وارد بر وتر، و یک نقطه روی هر یک از دو ضلع زاویه قائم آن رسم کنید.
- ۵) یک مثلث قائم الزاویه و نقطه‌ای واقع بر امتداد ارتفاع وارد بر وتر آن مفروض‌اند. خطی رسم کنید که از این نقطه بگذرد و نقطه وسط پاره‌خطی که توسط دو ضلع زاویه قائمه روی آن جدا می‌شود روی وتر باشد.
- ۶) دو نقطه، که با مرکز دائرة مفروضی همخط هستند، مفروض‌اند. از این دو نقطه دو خط رسم کنید که یکدیگر را روی دائیره قطع کنند و وترهایی که دائیره روی آنها جدا می‌کند برابر باشند.
- ۷) از یک نقطه مفروض خطی رسم کنید، به طوری که پاره‌خط جدا شده روی این خط توسط دو خط موازی مفروض از نقطه مفروض دیگری با زاویه مفروضی دیده شود.
- ۸) از یک مثلث قاعده، یک زاویه مجاور به قاعده و نقطه تقاطع قاعده و قطعی از دائیره محیطی مثلث که از رأس مقابل به قاعده می‌گذرد، مفروض است. این مثلث را رسم کنید.
- ۹) مثلثی را که دائیره محاطی آن رسم شده است، و نقطه وسط قاعده و یک نقطه از نیمساز خارجی یکی از زاویه‌های قاعده آن مفروض‌اند رسم کنید.
- ۱۰) مثلث ABC را که از آن، محل خطی که قاعده BC روی آن قرار دارد و محل نقطه‌ای واقع بر دائیره محیطی مثلث و محل نقطه‌ای واقع بر ضلع AB و همچنین، شعاع دائیره محیطی و طول قاعده BC مفروض است رسم کنید.
- ۱۱) در یک مثلث مفروض، مثلث متساوی‌الاضلاعی با مساحت مفروض محاط کنید.
- ۱۲) دائیره‌ای با شعاع مفروض رسم کنید که از یک نقطه مفروض بگذرد و روی خط مفروضی وتری با طول مفروض جدا کند.
- ۱۳) دائیره‌ای رسم کنید که بر دو دائیره هم‌مرکز مماس باشد و از نقطه مفروضی بگذرد.
- ۱۴) مثلث قائم الزاویه‌ای را با مفروض بودن ارتفاع وارد بر وتر، و فاصله رأس زاویه قائمه از محل برخورد نیمساز داخلی یک زاویه حاده با ضلع مقابله رسم کنید.
- ۱۵) مستطیلی رسم کنید که یک رأس آن بر یکی از رأسهای مثلث مفروضی منطبق باشد و سه رأس دیگر آن بر روی سه دائیره به قطعه‌ای اضلاع این مثلث واقع باشند.
- ۱۶) مثلثی را با مفروض بودن یک میانه و شعاعهای دائیره‌های محیطی دو مثلثی که از تقسیم مثلث توسط این میانه به دست می‌آیند رسم کنید.
- ۱۷) مثلث ABC را با مفروض بودن $b = a - h_b + h_c$ و $A = h_b \cdot h_c$ رسم کنید.
- ۱۸) روی خط مفروض AB نقطه P را طوری تعیین کنید که اگر PT و PT' مساهای رسم شده از نقطه P بر یک دائیره مفروض باشند، داشته باشیم $\angle APT = \angle BPT'$.
- ۱۹) روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC دو نقطه P و Q را طوری تعیین کنید که خط PQ راستای PQ را مفروضی داشته باشد و $k = (BP + CQ) : (PQ)$ که k عدد (نسبت) مفروضی است.
- ۲۰) خطی عمود بر قاعده مثلث مفروضی رسم کنید، به طوری که مساحت مثلث به نسبت مفروض $p : q$ تقسیم شود.
- ۲۱) از نقطه‌ای مفروض خطی رسم کنید که مساحت مثلث مفروضی را نصف کند.
- ۲۲) خطی رسم کنید که راستای مفروضی داشته باشد و طول دو پاره‌خطی که توسط یک دائیره مفروض و دو ضلع یک زاویه مفروض روی آن جدا می‌شوند نسبت مفروضی داشته باشند.
- ۲۳) خطی رسم کنید که از یک رأس مثلثی بگذرد و حاصل ضرب فاصله‌هایش از دو رأس دیگر مثلث برابر

مقدار مفروض k^2 باشد.

(۲۴) از دو نقطه مفروض A و B دو خط AP و BQ را رسم کنید که خط مفروض PQ را در نقاط P و Q قطع کنند، به طوری که $AP = BQ$ و $AF = AF$ زاویه‌ای با اندازه مفروض تشکیل دهد.

(۲۵) از نقطه مفروض R خطی رسم کنید که خط مفروضی را در D و یک دایره مفروض را در E و F قطع کند، به طوری که $RD = EF$.

(۲۶) دایره‌ای به مرکز نقطه‌ای مفروض رسم کنید، به طوری که دو نقطه حاصل از تقاطع آن با دو دایره هم مرکز باشند.

(۲۷) مربعی در یک چهار ضلعی مفروض محاط کنید.

تماسیها

(۲۸) دایره‌ای که از رأسهای A و B و C از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ می‌گذرد ضلع DA را در A' و ضلع DC را در C' قطع می‌کند. ثابت کنید که $A'D : A'C' = A'C : A'B$.

(۲۹) ثابت کنید که از سه پاره‌خط واصل بین رأسهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع و یک نقطه واقع بر دایره محیطی آن مثلث، یکی با مجموع دو تای دیگر برابر است.

(۳۰) سه خط موازی از سه رأس A , B و C از مثلث ABC رسم شده است. این خطها اضلاع مقابل رأسهای A , B و C را به ترتیب، در نقطه‌های X , Y و Z قطع می‌کنند. نشان دهید که مساحت مثلث XYZ دو برابر مساحت مثلث ABC است.

(۳۱) نشان دهید که اگر فاصله بین دو نقطه با مجموع (یاتفاضل) طول مساهایی که از این نقاط بر یک دایره رسم می‌شود برابر باشد، خطی که از آن دو نقطه می‌گذرد نیز بر دایره مماس است.

(۳۲) دو خط موازی AE و BD که از دو رأس A و B از مثلث ABC رسم شده‌اند خطی را که از رأس C می‌گذرد در نقطه‌های E و D قطع می‌کنند. اگر خطی که از E به موازات BC رسم می‌شود، AB را در F قطع کند، نشان دهید که DF با AC موازی است.

(۳۳) وتر متغیر AB از یک دایرة مفروض با قطر ثابتی از آن دایره که از نقطه مفروض P می‌گذرد موازی است. نشان دهید که مجموع مربع فاصله‌های P از دو انتهای AB ثابت و برابر است با دو برابر مربع فاصله P از وسط کمان AB .

(۳۴) نقطه‌های A' , B' , C' و AB , BC , CA از مثلث ABC را به طور داخلی به نسبت یکسان تقسیم می‌کنند. نشان دهید که سه مثلث ABC' , $AB'C'$ و $BC'A'$ هم‌ازنده. نسبت مساحت‌های $A'B'C'$ و ABC را بیابید.

(۳۵) اضلاع BA و CD از چهار ضلعی $ABCD$ یکدیگر را در O و اضلاع CB و DA یکدیگر را در O' قطع می‌کنند. روی خطوط OA , OC , $O'A$, OC و $O'C$ به ترتیب $O'E'$, OF , OE , $O'F'$ را برابر با $O'E'$, $O'F'$ و $O'C$ را برابر با $O'A$, OB و BC می‌گردند. اگر AD , DC و BC جدا می‌کنیم. ثابت کنید EF با $E'F'$ موازی است.

(۳۶) نقطه N تصویر نقطه P از دایره‌ای به مرکز O روی قطر AOB از آن دایره است. روی امتداد PO پاره‌خط PQ را برابر با $2AN$ جدا می‌کنیم. اگر AQ دایره را در نقطه دیگری مانند R قطع کند، ثابت کنید که $\angle AOR = 3\angle AOP$.

(۳۷) اگر P نقطه دلخواهی از یک نیم‌دایره به قطر AB , CD و BC دو کمان مساوی باشند، و اگر $F = (AD, PC)$ و $E = (CA, PB)$ ثابت کنید که AD بر EF عمود است.

(۳۸) در مثلث ODE ضلع OD کوچکتر از OE است و زاویه O قائم است. A و B دو نقطه از وتر DE

هستند به طوری که $\angle AOD = \angle BOD = 45^\circ$. نشان دهید که خط MO که از O به M و سطح DE می‌رسد بر دایره OAB مماس است.

(۳۹) از نقطه S دو مماس SA و SB و قاطع SPQ را برابر دایره رسم می‌کنیم. ثابت کنید که $AP : AQ = BP : BQ$.

(۴۰) روی امتداد شعاع OA از یک دایره نقطه دلخواه P را انتخاب می‌کنیم؛ از نقطه P مماس PT را بر دایره رسم می‌کنیم $OP = PT$ را تا نقطه Q را باز کنید. به طوری که $PQ = PT$ امتداد می‌دهیم و مماس QV را بر دایره رسم می‌کنیم؛ اگر VR را از V عمود بر OA رسم کنیم تا OA را در R قطع کند، ثابت کنید که $PR = PQ = PT$.

(۴۱) خطی که از رأس B از مثلث ABC موازی با ضلع AC رسم می‌شود، مماس بر دایره محیطی (O) از مثلث ABC در C را در B' ، و خطی که از رأس C موازی با AB رسم می‌شود، مماس بر (O) در B را در C' قطع می‌کند. ثابت کنید که $BC' = BC \cdot B'C$.

(۴۲) دو قاطع متغیر PQ و $P'Q'$ بر روی دو خط ثابت OPP' و QQ' دو پاره خط PP' و QQ' با طولهای ثابت را جدا می‌کنند. اگر L و M دو نقطه روی PQ و $P'Q'$ باشند، به طوری که $PL : LQ = P'M : MQ'$ و این دو نسبت برابر مقداری ثابت باشند، ثابت کنید که LM اندازه و جهت ثابتی دارد.

(۴۳) نقطه M بر نیمساز داخلی زاویه A از مثلث ABC واقع است. اگر Q و R تصویرهای نقطه M به ترتیب بر اضلاع AC و AB باشند، نشان دهید که عمود MP از M بر ضلع QR ، BC را در N قطع می‌کند که روی میانه AA' از مثلث ABC قرار دارد.

(۴۴) دایره‌ای در B بر ضلع AB از مثلث ABC مماس است و از مرکز دایرة محاطی داخلی مثلث می‌گذرد. این دایره AC را در H و K قطع می‌کند. ثابت کنید که IC نیمساز زاویه HIK است.

(۴۵) دو وتر از یک دایره‌اند، و خطوطی که از A و B به وسط CD رسم می‌شوند با CD زاویه‌های برابر می‌سازند. نشان دهید خطوطی که از C و D به وسط AB رسم می‌شوند با AB زاویه‌های مساوی می‌سازند.

(۴۶) سه جفت دایره $(B), (C), (D)$ ، $(A), (B), (C)$ در E, D, F و G, H بر هم مماس‌اند. خطوط DE و DF و DE و DF دایره (A) را در G و H نیز قطع می‌کنند. نشان دهید که GH از مرکز (A) می‌گذرد و با خط‌المرکزین (B) و (C) موازی است.

(۴۷) عمودمنصفهای اضلاع AB و AC از مثلث ABC اضلاع AB و AC را در P و Q قطع می‌کنند. ثابت کنید که نقاط B, C, P و Q روی یک دایره قرار دارند و آن دایره از مرکز دایرة محیطی مثلث ABC می‌گذرد.

(۴۸) $M'N'P'$ و MNP دو مماس بر دایره PQP' هستند، و AM' ، BN ، AM و BN' به ترتیب از دو نقطه‌مفروض A و B بر آنها عمود شده‌اند. اگر $MP : PN = M'P' : P'N'$ ، ثابت کنید که دو مماس موازی‌اند.

(۴۹) مثلثی محاط شده در یک دایره است؛ DE قطری از دایره است که BC را در G نصف می‌کند؛ از E عمود EK را بر یکی از اضلاع مثلث رسم می‌کنیم و عمودی که از رأس A بر DE رسم می‌کنیم DE را در H قطع می‌کند. نشان دهید که EK بر دایره GHK مماس است.

(۵۰) اگر نیمساز داخلی یک زاویه از مثلثی با یکی از دو ضلع آن زاویه برابر باشد، نشان دهید که تصویر ضلع دیگر بر روی این نیمساز بانصف مجموع دو ضلع زاویه برابر است.

(۵۱) از دو نقطه که هر کدام روی یکی از دو ضلع روبرو به هم در یک متوازی‌الاضلاع قرار دارند، خطوطی به رأسهای اضلاع مقابل رسم می‌کنیم. ثابت کنید خط راستی که از نقاط برخورد این خطوط می‌گذرد مساحت متوازی‌الاضلاع را نصف می‌کند.

(۵۲) نقطه B وسط پاره‌خط AC است؛ دایره (A, AB) را رسم می‌کنیم و از C عمودی بر یک مماس دلخواه آن دایره رسم می‌کنیم. نشان دهید که $\angle LABD = 3\angle BDC$.

(۵۳) ارتفاع وارد بر وتر در یک مثلث قائم‌الزاویه، آن مثلث را به دو مثلث قائم‌الزاویه تقسیم می‌کنند. نشان دهید که خط‌مرکزین دایره‌های محاطی این دو مثلث با فاصله مرکز دایره محاطی مثلث اصلی از رأس قائمۀ این مثلث برابر است.

(۵۴) یک مثلث متساوی‌الاضلاع است؛ D نقطه‌ای روی BC است به طوری که BD یک سوم BC است و E نقطه‌ای روی AB به فاصله برابر از A و D است. نشان دهید که $CE = EB + BD$.

(۵۵) وسط پاره‌خط AB و D نقطه‌ای از خط AB است که آن را به صورت داخلی یا خارجی به طور نامساوی تقسیم می‌کند. ثابت کنید که $AD^3 + DB^3 = 2(AC^3 + CD^3)$.

(۵۶) وسط وتر AB از دایره‌ای به مرکز O است؛ دایره‌ای به قطر OM رسم می‌کنیم و از نقطه دلخواه T بر روی این دایره مماسی بر آن رسم می‌کنیم تا دایره خارجی (O) را در E قطع کند. ثابت کنید که $AE^3 + BE^3 = 4ET^3$.

(۵۷) P, N, M و Q به ترتیب، وسط اضلاع AB, CD, BC و DA از مربع $ABCD$ هستند. ثابت کنید که از برخورد AN, CQ, BP و DM مربعی به دست می‌آید که مساحتش یک پنجم مربع $ABCD$ است.

(۵۸) M و N نقاطی روی اضلاع AC و AB از مثلث ABC هستند و خطوط BM و CN یکدیگر را روی ارتفاع AD از مثلث قطع می‌کنند؛ نشان دهید که AD نیمساز $\angle MDN$ است.

مکانهای هندسی

(۵۹) A, B, C ، و D نقاط ثابتی روی دایرة (O) هستند. خطوطی که از C و D به نقطه متغیر P وصل می‌شوند، (O) را در Q و R نیز قطع می‌کنند. مکان هندسی S ، نقطه دوم برخورد دو دایرة PQB و PRA را بیابید.

(۶۰) مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که دو دایرة مفروض از آن نقطه با زاویه‌های برابر دیده شوند.

(۶۱) دو نقطه A و B همخط با O ، مرکز یک دایرة مفروض، و قطر متغیر PQ از این دایرة مفروض اند. مکان هندسی نقطه دوم برخورد دو دایرة APO و BQO را بیابید.

(۶۲) روی اضلاع OA و OB از زاویه مفروض O دو نقطه متغیر A' و B' را مشخص می‌کنیم به طوری که نسبت $'AA' : BB'$ مقدار ثابتی باشد، و روی پاره‌خط $A'B'$ نقطه I را طوری برمی‌گزینیم که نسبت $I'A'I : B'I'$ ثابت باشد. ثابت کنید که مکان هندسی نقطه I یک خط راست است.

(۶۳) دایرة متغیری که از رأس یک زاویه مفروض می‌گذرد، دو ضلع این زاویه را در نقطه‌های A و B قطع می‌کند. نشان دهید مکان هندسی دو انتهای قطر موازی با وتر AB از این دایرة مشکل از دو خط راست است.

(۶۴) دو قطر عمود بر هم از دایرة مفروض (O) هستند. وتر متغیری که از B می‌گذرد (O) را در M و AA' را در N قطع می‌کند. نشان دهید که نقطه برخورد مماسی که در M بر دایرة (O) رسم شود، و خطی که در N بر AA' عمود می‌شود یک خط راست را می‌پساید.

(۶۵) دایرة متغیر (C) که از مرکز O و یک نقطه ثابت A از دایرة (O) می‌گذرد، دایرة (O) را در D نیز قطع

می‌کند. مکان هندسی نقطه M ، نقطه برخورد مماسهای رسم شده بر (C) در O و D ، را به دست آورید. نشان دهید که خط MC بر دایره ثابتی هم مرکز با (O) ، مماس است.

(۶۶) دایره متغیری در B و D بر دو ضلع OB و OD از زاویه‌ای ثابت مماس است؛ E نقطه تماس این دایره با مماس دومی است که از نقطه ثابت A روی خط OB ، بر دایره رسم می‌شود. نشان دهید که خط DE از نقطه ثابتی می‌گذرد.

(۶۷) خط متغیر PAB که از نقطه ثابت P می‌گذرد دو ضلع OA و OB از زاویه مفروض O را در نقاط A و B قطع می‌کند. روی خطهای OA و OB نقطه‌های A' و B' را طوری برمی‌گزینیم که نسبت‌های $OA' : OB'$ و $OA : OB$ ثابت باشند. ثابت کنید که خط $A'B'$ از نقطه ثابتی می‌گذرد.

(۶۸) نشان دهید مکان هندسی نقطه‌ای درون یک زاویه مفروض که نسبت فاصله‌هایش از دو ضلع این زاویه مقدار مفروض k است، خط راست ثابتی است که از رأس این زاویه می‌گذرد.

(۶۹) نشان دهید که مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌هایش از دو خط متقاطع مفروض مقدار ثابتی است، متشکل از چهار خط راست است که از نقطه برخورد این دو خط مفروض می‌گذرند.

تشابه و تجانس

الف. تشابه

۲۳. روش تشابه. با در نظر نگرفتن یکی از شرایط مسئله می‌توان شکلی شبیه شکل مطلوب رسم کرد. معمولاً می‌توان با توجه به شکل رسم شده و شرط حذف شده جزئی را تعیین کرد که ما را قادر به حل مسئله کند. مثالهای زیر این روش را نشان می‌دهند.

۲۴. مسئله. مربعی را رسم کید که مجموع ضلع و قطرش مفروض باشد. چون همه مربعها مشابه‌اند، از رسم یک مریع دلخواه شروع می‌کنیم. فرض کنید a' و d' به ترتیب، ضلع و قطر این مریع باشند و a و d را اجزاء متاظر از مریع مطلوب در نظر بگیرید. با توجه به تشابه دو شکل داریم

$$\frac{a+d}{a'+d'} = \frac{a}{a'} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{a'} = \frac{d}{d'}$$

سه جزء از تناسب اخیر را می‌دانیم، زیرا $a + d$ مفروض است؛ بنابراین، پاره خط a را می‌توان به عنوان چهارمین جزء تناسب رسم کرد و مسئله به رسم مربعی با ضلع مفروض تبدیل می‌شود.

۲۵. مسئله. مثلثی را رسم کنید که مشابه یک مثلث مفروض باشد و مساحت آن برابر مساحت یک مریع مفروض باشد.

با چشمیوشی از مساحت، مثلث $A'B'C'$ را مشابه مثلث مطلوب ABC رسم می‌کنیم. اگر $a' = B'C'$, $a = B'C$, a', h' ارتفاع وارد بر این ضلع، و m' ضلع مربعی باشد که مساحتش برابر $A'B'C'$ است، داریم

$$m'^2 = a' \times \frac{1}{2} h'$$

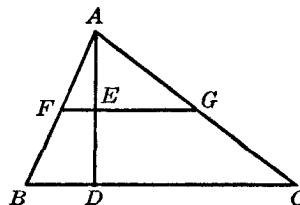
پس m' را می‌توان به عنوان جزء سوم یک تناسب رسم کرد.

اکنون می‌توان ضلع $BC = a$ را با توجه به تناسب زیر تعیین کرد

$$\frac{a}{a'} = \frac{m}{m'}$$

که در آن m ضلع مریع مفروض است، و مثلث مطلوب به آسانی رسم می‌شود. روی ضلع $B'C$, $B'C'$ را برابر a جدا می‌کنیم. از C خطی به موازات $A'C'$ رسم می‌کنیم تا ضلع $A'B'$ را در رأس سوم مثلث مطلوب $AB'C$ قطع کند. مسئله یک و تنها یک جواب دارد.

۲۶. مسئله. دو ضلع جانبی و نسبت قاعده به ارتفاع وارد بر قاعده از یک مثلث ($a : h_a = p : q, c, b$) مفروض است. مثلث را رسم کنید.



شکل ۲۳

فرض کنید ABC مثلث مطلوب باشد (شکل ۲۳). روی ارتفاع AD پاره خط AE را برابر q جدا می‌کنیم و از نقطه E خط FEG را به موازات BC رسم می‌کنیم. با توجه به مثلثهای متشابه ABC و AFG داریم

$$\frac{AF}{AG} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}, \quad \frac{FG}{AE} = \frac{BC}{AD} = \frac{p}{q}$$

$$FG = p$$

پس در مثلث AFG که با مثلث مطلوب متشابه است، قاعده p ، ارتفاع q و نسبت دو ضلع $b : AF : AG = c : b$ می‌دانیم؛ پس می‌توانیم این مثلث را رسم کنیم. پس از رسم AFG روی پاره خط AB را برابر c جدا می‌کنیم. خطی که از B به موازات FG رسم می‌شود، امتداد AG را در C ، یعنی رأس سوم مثلث مطلوب ABC قطع می‌کند.

مسئله مسکن است دو یا یک جواب داشته باشد، یا اصلًا جواب نداشته باشد.

۲۷. مسئله. از ذوزنقه‌ای طول دو ضلع ناموازی، زاویه بین آنها و نسبت دو ضلع موازی مفروض است. ذوزنقه را رسم کنید.

فرض کنید $ABCD$ (شکل ۲۴) ذوزنقه مطلوب، و E نقطه برخورد دو ضلع ناموازی AD و BC باشد. مثلثهای DCE و ABE متشابه‌اند، پس

$$\frac{EC}{EB} = \frac{ED}{EA} = \frac{CD}{BA} = \frac{p}{q} \quad (\text{نسبت مفروض})$$

$$\frac{EC}{EB - EC} = \frac{ED}{EA - ED} = \frac{p}{q - p}$$

$$\frac{EC}{CB} = \frac{ED}{DA} = \frac{p}{q - p}$$

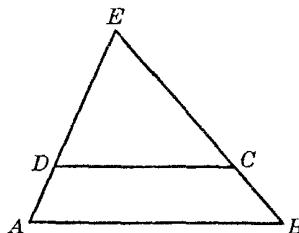
یا

یا

پس پاره خط‌های EC و ED ، و در نتیجه مثلث DCE را که دو ضلع و زاویه بین آنها را ازان می‌دانیم می‌توان رسم کرد.

پس از رسم این مثلث، ED را امتداد می‌دهیم و طول مفروض DA را روی آن جدا می‌کنیم؛ خطی که از A به موازات CD رسم می‌شود، روی امتداد EC رأس چهارم B ، از ذوزنقه مطلوب $ABCD$ ، را تعیین می‌کند.

۲۸. مسئله. بر یک دایره مفروض مثلث متساوی الساقینی محیط کنید که نسبت ساق به قاعده آن مقدار مفروضی باشد.



شکل ۲۴

همه مثلثهای متساوی الساقینی که نسبت ساق به قاعده یکسانی دارند، متشابه‌اند، زیرا ارتقای وارد بر قاعده آنها را به مثلثهای قائم الزاویه متشابهی تقسیم می‌کند.
روی قاعده $A'B'C'$ ، که طول دلخواهی دارد، مثلث متساوی الساقین $A'B'C'$ را طوری رسم کنید که

$$\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{p}{q} \quad (\text{نسبت مفروض})$$

فرض کنید r' و h' شعاع دایره محاطی و ارتفاع وارد بر قاعده این مثلث باشند و فرض کنید که r و h اجزای منتظر از مثلث مطلوب ABC باشند. با توجه به تشابه دو مثلث داریم

$$\frac{h}{h'} = \frac{r}{r'}$$

از این تناسب، سه جزء h', r', r معلوم‌اند، پس می‌توانیم h را رسم کیم.
از نقطه دلخواه D بر روی دایره مفروض، مماس t را رسم، و روی خطی که از D به مرکز دایره رسم می‌شود، DA را برابر h جدا کنید. مماسهایی که از A بر دایره رسم می‌شوند و مماس t مثلث مطلوب ABC را تشکیل می‌دهند.

۲۹. مسئله. پاره خط مفروض m را به سه قسمت a ، b و c تقسیم کنید، به‌طوری که $a : b = p : q$ و $b : c = r : s$ ، در صورتی که p, q, r و s پاره خط‌های مفروضی باشند.

اگر t را با توجه به تناسب

$$\frac{q}{t} = \frac{r}{s}$$

تعیین کنیم، خواهیم داشت

$$a : b : c = p : q : t$$

روی یک ضلع زاویه دلخواه A پاره خط AM را برابر m و روی ضلع دیگر آن پاره خط AP را برابر PQ را برابر q جدا می‌کنیم. خطوطی که از نقاط P و Q به موازات خط MT رسم می‌شوند، $YM = c$ و $XY = b$ ، $AX = a$ و AM را در نقاط X و Y قطع می‌کنند، به‌طوری که $a : b : c = p : q : t$.

۳۰. تعریف. دو مثلث ABC و $A'B'C'$ مفروض‌اند، به‌طوری که $\angle C = \angle C'$ ، $\angle B = \angle B'$ ، $\angle A = \angle A'$. اگر دورانی که نقاط A ، B و C را به همین ترتیب، مشخص می‌کند پادساعتگرد باشد و دورانی که نقاط A' ، B' و C' مشخص می‌کند ساعتگرد باشد، یا برعکس؛ می‌گوییم دو مثلث متشابه معکوس هستند (یا دارای تشابه عکس هستند).

اگر جهت دوران ABC و $A'B'C'$ یکسان باشد می‌گوییم دو مثلث متشابه مستقیم هستند (یا دارای تشابه مستقیم هستند).

تمرين

(۱) اگر دو ضلع از یک مثلث با دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، و زاویه روپروری ضلع بزرگتر (از دو ضلع مورد بحث) در یک مثلث با زاویه متناظر در مثلث دیگر نیز برابر باشد، ثابت کنید که دو مثلث مشابه‌اند. حالتی را که زاویه مفروض روپروری ضلع کوچکتر است بررسی کنید.

(۲) نشان دهید که اگر اضلاع متناظر از دو مثلث برحمنود باشند، آن دو مثلث مشابه‌اند. مثلثی رارسم کنید که اجزای زیر از آن مفروض است:

$$h_a - h_b, B, A \quad (۵) \quad b + c, B, A \quad (۴) \quad 2p, B, A \quad (۳)$$

$$2p, a : b, A \quad (۸) \quad h_c, a : c, A \quad (۷) \quad R, a : b : c \quad (۶)$$

$$t_a + t_b - t_c, b : c, a : b \quad (۱۰) \quad m_a + m_b, a : (b + c), B - C \quad (۹)$$

(۱۱) مثلثی را بافرض بودن یک زاویه، نیمساز آن زاویه و نسبت دو پاره خطی که این نیمساز روی ضلع روپروری زاویه مفروض جدا می‌کند، رسم کنید.

(۱۲) محیط و نسبت مربعهای دو ضلع زاویه قائم یک مثلث قائم الزاویه مفروض است. مثلث رارسم کنید.

(۱۳) از یک مثلث مساحت و زاویه‌هایی که یک میانه با دو ضلع واقع در دو طرف آن می‌سازد مفروض است. مثلث رارسم کنید.

(۱۴) متوازی‌الاضلاعی را با مفروض بودن نسبتهای یک ضلع به دو قطر و مساحت آن رسم کنید.

(۱۵) یک دایره و امتداد دو شعاع از آن مفروض است. بین این دو شعاع خطی رسم کنید که بر دایره مماس باشد و توسط نقطه تماس به نسبت مفروضی تقسیم شود.

(۱۶) در یک دایره مفروض، مثلث متساوی الساقینی را که مجموع قاعده و ارتفاع وارد بر قاعده از آن مفروض است، محاط کنید.

(۱۷) از مثلثی $a, b, c = mb + nc$ مفروض است، و m و n دو مقدار ثابت مفروض‌اند. مثلث رارسم کنید.

(۱۸) اگر یک زاویه از مثلثی با زاویه‌ای از مثلث دیگر برابر باشد و زاویه دیگری از مثلث اول مکمل زاویه دیگری از مثلث دوم باشد، نشان دهید که اضلاع روپروری زاویه‌های برابر با اضلاع روپروری زاویه‌های مکمل متناسب‌اند.

ب. تجانس

۳.۱. تعریف. اگر اضلاع متناظر در دو چندضلعی مشابه موازی باشند، می‌گوییم دو چندضلعی به‌طور مشابه قرار گرفته‌اند یا متجانس‌اند.

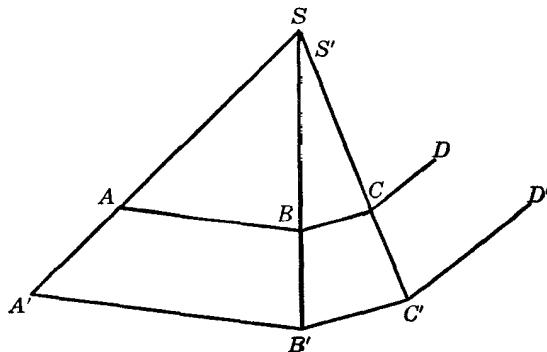
۳.۲. قضیه. خطوطی که رأسهای متناظر دو چندضلعی متجانس را به هم وصل می‌کنند هرمس‌اند (یعنی همه در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند).

فرض کنید ... $ABCD$ و ... $A'B'C'D'$ دو چندضلعی متجانس باشند و $S \equiv (AA', BB')$ (شکل ۲۵). برای اثبات قضیه باید نشان دهیم که خط واصل بین دو رأس متناظر بعدی C و C' از S نیز از CC' از S نگذرد، فرض می‌کنیم S' محل برخورد این خط با BB' باشد. با توجه به دو مثلث مشابه SAB و $S'A'B'$ ، و همچنین دو مثلث مشابه $S'BC$ و $S'B'C'$ داریم

$$\frac{SB'}{SB} = \frac{A'B'}{AB}, \quad \frac{S'B'}{S'B} = \frac{B'C'}{BC}$$

ولی بنابر فرض،

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{A'B'}{AB}$$



شکل ۲۵

پس،

$$\frac{SB'}{SB - SB'} = \frac{S'B'}{S'B - S'B'} \quad \text{یا} \quad \frac{SB'}{SB} = \frac{S'B'}{S'B}$$

یا

$$\frac{SB'}{BB'} = \frac{S'B'}{BB'}$$

پس S' بر S منطبق است.

۳۳. تعریف. نقطه S (§۳۲) را مرکز تشابه یا مرکز تجانس دو چندضلعی می‌نامند.
نسبت ثابت

$$\frac{SA'}{SA} = \dots = \frac{A'B'}{AB} = \dots = k$$

را نسبت تشابه یا نسبت تجانس دو شکل می‌نامند. این نسبت با یک عدد یا به صورت نسبت دو پاره خط مفروض، مثلاً p و q ، داده می‌شود.
رابطه بین دو شکل تجانس نامیده می‌شود.

۳۴. مسئله. چندضلعی ... $ABCD$ مفروض است. چندضلعی ... $A'B'C'D'$ را طوری رسم کنید که با چندضلعی اول متجانس باشد و نسبت تجانس مقدار مفروض k و مرکز تجانس نقطه مفروض S باشد.
روی خطوط SA , SC , SB , SC , SB , SC , SC , SB , SC (شکل ۲۶) که رأسهای A , B , C , D , ... از چندضلعی مفروض را به مرکز تجانس مفروض S وصل می‌کنند، نقاط A' , B' , C' , D' , ... را طوری تعیین می‌کنیم که

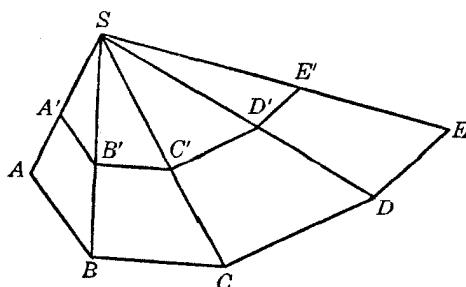
$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \dots = k$$

چندضلعی ... $A'B'C'D'$ که به این ترتیب رسم می‌شود شرایط مسئله را دارد.
در واقع، مثلثهای SAB و SAB' متشابه‌اند، پس AB موازی است و

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{SA'}{SA} = k$$

و به همین ترتیب این رابطه برای جفتهای دیگر اصلاح دو چندضلعی نیز برقرار است. چون جفتهای متناظر دو چندضلعی باهم موازی‌اند، زاویه‌های متناظر با هم برابرند. پس دو چندضلعی متشابه‌اند، به طور متشابه قرار گرفته‌اند و نسبت تشابه آنها برابر مقدار مفروض k است و روشن است که همه خطوط وصل بین رأسهای متناظر

دو چندضلعی از نقطه S می‌گذرند.



شکل ۲۶

۳۵. تعریف. نقاط A و A' , B و B' , ... (§۳۴) نقاط متاظر، یا نقاط همتا یا نقاط متجانس در تجانس نامیده می‌شوند.

نسبت تجانس، k ، ممکن است مثبت یا منفی باشد. در صورت مثبت بودن نسبت تجانس، نقاط همتا در یک طرف مرکز تجانس قرار دارند و می‌گوییم دو چندضلعی دارای تجانس مستقیم هستند؛ در صورت منفی بودن نسبت تجانس، نقاط همتا در دو طرف مرکز تجانس قرار دارند و می‌گوییم دو چندضلعی دارای تجانس معکوس هستند.

حالات مربوط به $-1 = k$ مورد توجه خاص است. در این حالت مرکز تجانس S وسط پاره خط‌های واصل بین نقاط متاظر دو چندضلعی است. در این حالت می‌گوییم که چندضلعیها نسبت به نقطه S متقاضاند، و نقطه S مرکز تقارن آنها نامیده می‌شود.

تجانس به مرکز S و به نسبت k را برای اختصار به صورت (S, k) نشان می‌دهیم.

۳۶. تعمیم. روش است که اگر مرکز تجانس S و نسبت تجانس k مفروض باشند، چه نقاط مفروض A, B, C, \dots رأس‌های یک چندضلعی محدب باشند و چه نباشند می‌توان نقاط A', B', C', \dots را تعیین کرد. بنابراین، می‌توانیم مفهوم شکلهای متجانس را به صورت زیرگسترش دهیم. با مفروض بودن شکل (F) مشکل از نقاط A, B, C, \dots ، که به صورت دلخواهی در صفحه توزیع شده‌اند، نقطه ثابت S و نسبت ثابت k را برمی‌گزینیم و نقاط A', B', C', \dots را روی خطوط SA, SB, SC, \dots طوری تعیین می‌کنیم که

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \dots = k$$

شکل (F') مشکل از نقاط جدید A', B', C', \dots که به این ترتیب تعیین شده‌اند بنابر تعریف، با شکل (F) متجانس است و S و k به ترتیب، مرکز تجانس و نسبت تجانس هستند.

مفهوم شکلهای متجانس را می‌توان بیش از این نیز گسترش داد. به هیچ وجه لازم نیست که شکل مفروض (F) ، چنانچه تاکنون فرض کردۀایم، از نقاط مجرماً تشکیل شده باشد. می‌توانیم فرض کنیم که نقطه M از شکل (F) روی خم پیوسته (C) حرکت می‌کند. اگر برای همه مواضع نقطه M ، نقطه متجانس M' را بیاییم، خم (C') از شکل (F') را خواهیم یافت، و این خم را متجانس خم (C) می‌نامیم.

به خصوص، مواردی را که نقطه M یک خط راست یا یک دایره را می‌پیماید، مورد توجه قرار می‌دهیم.

۳۷. قضیه. دو شکل متجانس مفروض‌اند. اگر نقطه‌ای متعلق به یکی از شکلهای یک خط راست را بپیماید، نقطه همتا در شکل دوم هم یک خط راست را می‌پیماید و این دو خط موازی‌اند.

فرض کنید نقطه M خط راست u را در شکل (F) بیماید. فرض کنید P, Q, R و R' سه موضع M و P', Q', R' نقاط متناظر در شکل متجانس (F') باشند. با توجه به دو مثلث متشابه SPQ و $SP'Q'$ همچنین دو مثلث متشابه SQR و $SQ'R'$ نتیجه می‌گیریم که $PQ \parallel P'Q'$ و $QR \parallel Q'R'$ و $Q'R'$ دارای نقطه مشترک Q' نیز دو خط موازی‌اند. حال چون P, Q ، و R همخطاطاند، و دو خط $P'Q'$ و $P'Q$ دارای نقطه مشترک P' هستند، سه نقطه P', Q', R' هم خطاطاند. اما خط PQ توسط دو نقطه P و Q ، و خط $P'Q'$ توسط دو نقطه P' و Q' تعیین می‌شود؛ پس استدلال فوق نشان می‌دهد که برای هر نقطه R از خط u ، نقطه متناظر، یعنی R' باید روی خط $P'Q'$ باشد، و این اثبات قضیه را کامل می‌کند.

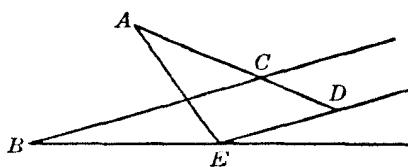
۳۸. ملاحظه ۱. این قضیه معمولاً به صورت خلاصه‌تر زیر بیان می‌شود: شکل متجانس یک خط راست، خط راستی موازی با آن است.

۳۹. ملاحظه ۲. اگر دو شکل (F) و (F') دارای تجانس مستقیم باشند، ترتیب PQR و $P'Q'R'$ روی دو خط موازی یکسان است. اگر دو شکل (F) و (F') دارای تجانس معکوس باشند، ترتیب PQR و $P'Q'R'$ روی دو عکس یکدیگرند.

۴۰. نتیجه. زاویه‌های متناظر در دو شکل متجانس برابرند، زیرا هر دو ضلع متناظر در دو زاویه موازی‌اند و در هر دو جفت از این خطاهای متناظر، یا دو خط در یک جهت‌اند یا در جهت‌های عکس یکدیگرند.

۴۱. مسئله. از یک نقطه مفروض خطی رسم کنید به طوری که پاره‌خطی که دو ضلع زاویه مفروضی روی آن جدا می‌کنند، توسط آن نقطه به نسبتی مفروض تقسیم شود.

روی خط AC (شکل ۲۷) که نقطه مفروض A را به نقطه دلخواه C روی ضلع BC از زاویه مفروض CBE وصل می‌کند، پاره‌خط AD را طوری جدا می‌کنیم که نسبت $AC : AD = p : q$ برابر نسبت مفروض $q : p$ باشد. پس نقاط C و D در تجانس $(A, p : q)$ متناظر با یکدیگرند؛ بنابراین، وقتی نقطه C خط مفروض BC را می‌بیماید، نقطه D خطی موازی BC را می‌بیماید. اگر نقطه B خود را با ضلع دیگر زاویه مفروض را بنامیم، AE خط مطلوب خواهد بود.

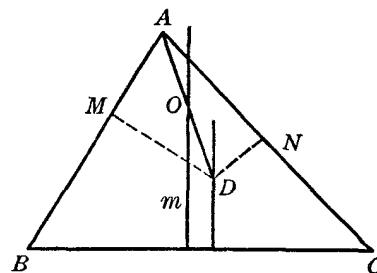


شکل ۲۷

۴۲. مسئله. از نقطه متغیر D داخل مثلث ABC عمودهای DM و DN را به ترتیب، بر اضلاع AB و AC رسم می‌کنیم. اگر $CN \cdot AC = BM \cdot AB$ ، مکان هندسی نقطه D را بیابیم.

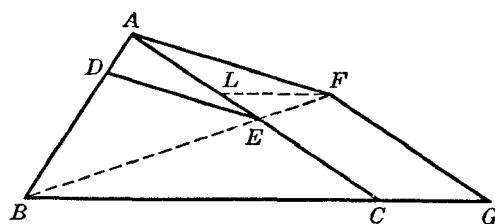
نقاط A, M, D, N, B و C (شکل ۲۸) روی دایره (O) ، که مرکزش وسط پاره‌خط AD است، قرار دارند. از طرف دیگر برابری مفروض نشان می‌دهد که مربع مماسهایی که از نقاط B و C بر (O) رسم می‌شوند $BO = CO$ ؛ پس مکان هندسی نقطه O ، عمودمنصف ضلع BC برابرند؛ پس m مکان هندسی نقطه O است (خط m). بنابراین، مکان هندسی نقطه D خط راستی است متناظر با خط m در تجانس $(A, ۲)$.

۴۳. مسئله. خطی رسم کنید که دو ضلع AB و AC از مثلث مفروض ABC را به ترتیب در نقاط D و E قطع کند، به طوری که $BD = DE = EC$.



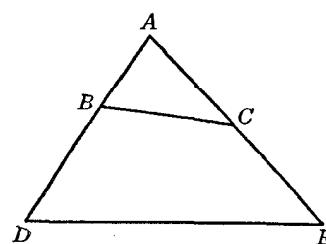
شکل ۲۸

فرض کنید $ABCDE$ (شکل ۲۹) شکل مطلوب باشد. اگر خطی که از نقطه A به موازات DE رسم می‌شود، خط BE را در نقطه F قطع کند، و خطی که از F به موازات AC رسم می‌شود، G را در BC قطع کند، روشی است که چهارضلعی‌های $BAFG$ و $BDEC$ متجانساند و B مرکز تجانس آنهاست؛ پس $BA = AF = FG$. حال می‌توان چهارضلعی $BAFG$ را به روش زیر رسم کرد. روی CA پاره‌خط CL را برابر با AB جدا می‌کنیم و اگر خطی که از L به موازات BC رسم می‌شود دایره (A, AB) را در F قطع کند، خطی که از F به موازات AC رسم می‌شود BC را در G که رأس چهارم از چهارضلعی مطلوب است قطع می‌کند.



شکل ۲۹

خطی که از نقطه $E = (AC, BF)$ به موازات AF رسم می‌شود، قاطع مطلوب است. ۴۴. مسئله. از مثلثی زوایه مقابل قاعده و مجموع قاعده با هر یک از دو ضلع دیگر مفروض است (ا). این مثلث را رسم کنید.



شکل ۳۰

فرض کنید ABC (شکل ۳۰) مثلث مطلوب باشد. AB و AC را امتداد می‌دهیم. BD را برابر BC و CE را برابر BC جدا می‌کنیم؛ پس $AD = a + b$ و $AE = a + c$ و مثلث DAE را می‌توان رسم کرد، زیرا دو

ضلع و زاویه بین آنها از این مثلث معلوم است. برای رسیدن از این مثلث به مثلث مطلوب ABC باید خط BC را طوری رسم کنیم که داشته باشیم $DB = BC = CE$: پس مسئله به مسئله قبل (§۴۳) تبدیل می‌شود.

تمرین

(۱) نشان دهید که هر تجانس را می‌توان بامفروض بودن: (الف) مرکز تجانس و یک جفت از نقطه‌های متناظر؛ (ب) نسبت تجانس و یک جفت از نقطه‌های متناظر؛ (ج) دو جفت از نقطه‌های متناظر؛ تعیین کرد.

(۲) شکل‌های متجانس با متوازی‌الاضلاع، متجانس با مستطیل، و متجانس با مرربع، چه شکل‌هایی هستند؟

(۳) A, A', B, B' دو جفت از نقطه‌های همتا در دو شکل متجانس (F) و (F') هستند، و M نقطه‌ای از شکل (F) است. خطوطی که از نقاط A' و B' به ترتیب، به موازات خطوط AM و BM رسم می‌شوند یکدیگر را در M' قطع می‌کنند. ثابت کنید که M و M' دو نقطه متناظر در دو شکل (F) و (F') هستند.

(۴) نشان دهید که اگر دو مثلث متجانس باشند، مرکزهای دایره‌های محیطی و محاطی و ... نقاط متناظر، وارتفاعها، میانه‌ها و ... خطوطی متناظر در شکل‌های متجانس هستند.

(۵) دو خط مفروض یکدیگر را در نقطه‌ای دور از دسترس قطع می‌کنند. از یک نقطه مفروض خطی رسم کنید که با این دو خط همسر باشد.

(۶) مثلثی را رسم کنید که $A - b$ و $c - a$ از آن مفروض است.

(۷) مثلثی را رسم کنید که $A - b$ و $c - a$ از آن مفروض است.

(۸) خطی به موازات قاعدة یک ذوزنقه مفروض رسم کنید، به‌طوری که قطرهای ذوزنقه پاره‌خطی را که دو ضلع ناموازی ذوزنقه روی آن خط جدا می‌کنند، به سه قسمت مساوی تقسیم کنند.

(۹) یک دایره و محل دو شعاع از آن مفروض است. وتری در این دایره رسم کنید که توسط این دو شعاع به سه قسمت مساوی تقسیم شود.

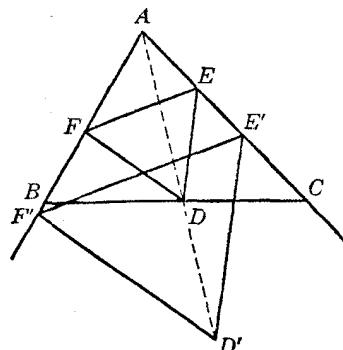
(۱۰) از یک مثلث یک میانه و زاویه‌هایی که این میانه با دو ضلع کناری اش می‌سازد مفروض است. این مثلث را رسم کنید.

(۱۱) از یک نقطه مفروض خطی رسم کنید به‌طوری که دو پاره‌خطی که توسط سه خط همسر مفروض روی این خط جدا می‌شوند دارای نسبت مفروضی باشند.

(۱۲) سه خط همسر و یک خط دیگر مفروض‌اند. قاطعی رسم کنید به‌طوری که سه پاره‌خط جدا شده روی آن توسط این چهار خط دارای نسبتها مفروضی باشند.

۴۵. مسئله. در یک مثلث مفروض مثلثی محاط کنید به‌طوری که اضلاع آن با اضلاع یک مثلث مفروض دیگر موازی باشد.

فرض کنید DEF (شکل ۳۱) مثلث مطلوب باشد که در مثلث مفروض ABC محاط شده است. خط دلخواه $E'F'$ را به موازات EF رسم می‌کنیم تا خطوط AB و AC را به ترتیب، در E' و F' قطع کند. از E' و F' به ترتیب خطوطی به موازات ED و FD رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در D' قطع کنند. مثلثهای $D'E'F'$ و DEF متجانساند و نقطه $A = (EE', FF')$ مرکز تجانس آنهاست؛ پس نقاط D ، D' و A همخط‌اند. مثلث $D'E'F'$ را به آسانی می‌توان رسم کرد و خط AD اضلاع BC را در رأس D از مثلث مطلوب قطع می‌کند؛ این ترسیم را به آسانی می‌توان کامل کرد. مسئله یک و تنها یک جواب دارد.



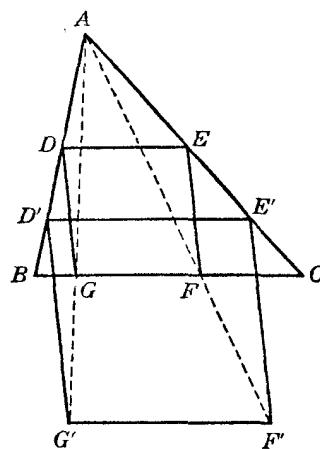
۳۱

۴۶. مسئله. در یک مثلث مفروض متوازی‌الاضلاعی محاط کنید که یک زاویه مفروض داشته باشد و دو ضلع مجاورش دارای نسبت مفروضی باشند.

فرض کنید $DEFG$ (شکل ۳۲) متوازی‌الاضلاع مطلوب باشد که در مثلث مفروض ABC محاط شده است. خط دلخواه DE را به موازات $D'E'$ رسم کنید تا اضلاع AB و AC را به ترتیب در D' و E' قطع کند. از D' خطاً به موازات DG رسم کنید و روی آن $D'G'$ را طوری جدا کنید که داشته باشیم

$D'E' : D'G' = DE : DG = k$ (نیست مفروض،)

از E' و G' به ترتیب خطوطی، به موازات EF و GF رسم کنید.



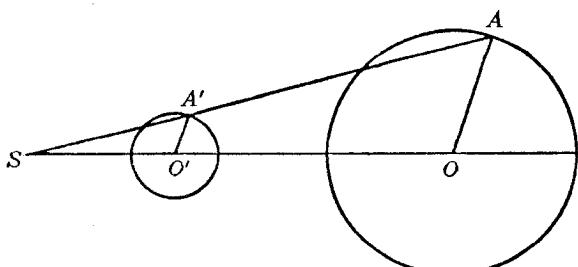
شکل ۳۲

متوازی‌الاضلاعهای $DEFG$ و $D'E'F'G'$ متوجانس‌اند و نقطه $A = (DD', EE')$ مرکز تجانس آنهاست؛ پس هر یک از جفت نقطه‌های F ، G ، F' و G' با نقطه A همخطاطاند. اکنون به آسانی می‌توان متوازی‌الاضلاع $D'E'F'G'$ را رسم کرد؛ خطوط AF' و AG' ضلع BC را در دو رأس F و G از متوازی‌الاضلاع $DEFG$ قطع می‌کنند و به آسانی می‌توان ترسیم $DEFG$ را کامل کرد.

برای سادگی می‌توان ضلع $D'E'F'G'$ از متوازی‌الاضلاع ABC را روی قاعده BC از مثلث ABC در نظر گرفت.

تمرین

- ۱) در یک مثلث مفروض مثلثی محاط کنید که اضلاع آن با نیمسازهای داخلی مثلث مفروض موازی باشند. هر دو جواب مسئله را بیابید.
 - ۲) در یک مثلث مفروض مثلثی محاط کنید که اضلاع آن بر اضلاع مثلث مفروض عمود باشد. هر دو جواب مسئله را بیابید.
 - ۳) در یک مثلث مفروض مربعی محاط کنید.
 - ۴) در یک مثلث مفروض مستطیلی متشابه با یک مستطیل مفروض محاط کنید.
 - ۵) در یک مثلث مفروض، متوازی‌الاضلاعی محاط کنید که نسبت دو ضلع و زاویه بین قطرهایش مفروض است.
 - ۶) مثلث ABC مفروض است. مربعی رسم کنید که دو رأس آن روی BA و CA ، یا امتداد آنها، و دو رأس دیگر روی ضلع BC باشند.
 - ۷) در یک نیم‌دایره مفروض مستطیلی متشابه با یک مستطیل مفروض محاط کنید.
 - ۸) در یک قطع مفروض از دایره مربعی محاط کنید. دو حالت در نظر بگیرید: (i) یک رأس، (ii) دو رأس روی محیط دایره قرار داشته باشند.
 - ۹) مربعی رسم کنید که دو رأس آن روی یک خط مفروض و دو رأس دیگر آن روی یک دایره مفروض باشند.
 - ۱۰) خطی به موازات قاعده یک مثلث مفروض رسم کنید به طوری که پاره‌خطی که توسط دو ضلع دیگر مثلث روی آن جدا می‌شود از نقطه مفروضی روی قاعده با زاویه مفروضی دیده شود.
 - ۱۱) مربعی در مثلث ABC محاط شده است و دو رأس این مربع روی ضلع BC قرار دارند. اندازه BC برابر a و اندازه ارتفاع وارد بر BC برابر h و اندازه ضلع مربع برابر m است. نشان دهید که $m(a+h) = ah$.
۴۷. قضیه. دو شکل متجانس مفروض‌اند؛ اگر نقطه‌ای از شکل اول دایره‌ای را بیسیاید، نقطه متناظر در شکل دوم نیز دایره‌ای را خواهد بیسیاید.



شکل ۳۳

تجانس ($S(k)$) را در نظر بگیرید. فرض کنید O (شکل ۳۳) مرکز و A نقطه‌ای از دایره متعلق به شکل اول باشد و O' و A' نقاط متجانس آنها در شکل دوم باشند. با توجه به طریقه انتخاب این نقطه‌ها روشن است که مثلثهای SOA و $SO'A'$ متشابه‌اند؛ پس، $SO'A' : SOA = SA' : SA = k$ ؛ پس $O'A' = kOA$. پس $O'A' = kOA$. طول $O'A'$ ثابت است، یعنی وقتی که نقطه A دایره‌ای را می‌بیسیاید، نقطه متناظرش A' طوری حرکت می‌کند که فاصله‌اش تا نقطه ثابت O' مقدار ثابت $k \cdot OA$ باقی می‌ماند. پس A' دایره‌ای به مرکز O' و شعاع $k \cdot OA$ است.

را می‌بینايد.

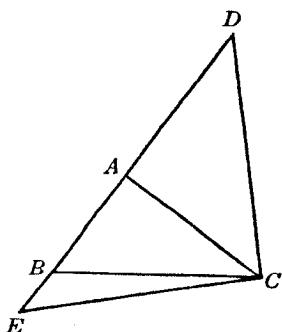
اين قضيه عموماً به اين صورت خلاصه‌تر بيان می‌شود: شكل متاجنس با دائيره، دائيره است. نکته. باید به دقت ملاحظه کيد که (الف) O و O' ، مرکزهای دو دائيره متاجنس نقاط متناظری از دو شكل متاجنس هستند، و (ب) نسبت شعاع دائيره‌ها برابر نسبت تجانس است. اگر يکی از دائيره‌ها از مرکز تجانس بگذرد، دائيره دیگر هم از آن مرکز خواهد گذشت و دو دائيره در اين نقطه بر هم مماس خواهند بود.

۴۸. مسئله. اگر PQ قطر متغيری از يک دائيره مفروض باشد، و A و B دو نقطه ثابت همخطط با مرکز دائيره، يعني O ، باشند، مكان هندسي نقطه $M = (AP, BQ)$ را تعين کنيد.

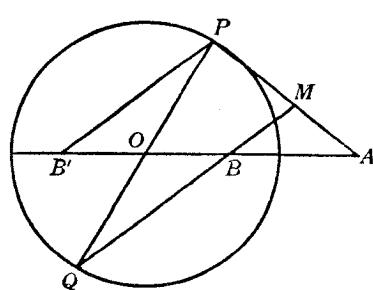
اگر B' نقطه متقابن B نسبت به O باشد (شکل ۳۴)، دو مثلث OQB و $O'B'P$ همنهشت‌اند و از برابري زاويه‌های اين دو مثلث نتيجه می‌شود که خطوط PB و PB' موازي‌اند؛ پس،

$$AM : AP = AB : AB'$$

نسبت دوم را می‌دانيم، پس دو نقطه متغير P و M با نقطه ثابت A همخطط‌اند و نسبت فاصله‌هایشان از ثابت است. يا به عبارت دیگر، نقاط P و M نقاط متناظر يکدیگر در تجانس ($AB : AB' = AB : AB$) هستند، و چون P دائيره مفروض را می‌بینايد، مكان هندسي M نيز دائيره‌اي با مرکز و شعاع معلوم است (§۴۷).



شکل ۳۵



شکل ۳۴

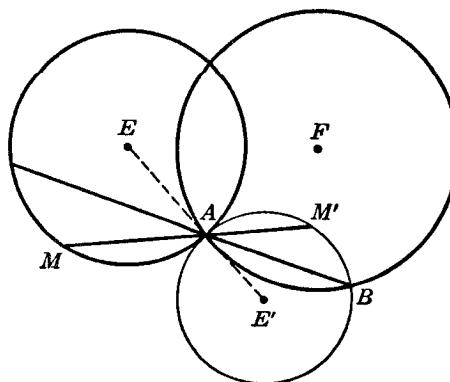
۴۹. مسئله. از مثلثي قاعده، زاوية روپروری قاعده و نسبت مجموع دو ضلع دیگر مثلث به تفاضل آن دو ضلع مفروض است a, b, c : $(b + c) : (b - c) = p : q$: [این مثلث را رسم کنید.] فرض کنید ABC (شکل ۳۵) مثلث مطلوب باشد. AD و AE را برابر AC جدا می‌کنیم. داریم (بندهای ۱۷ و ۱۸)

$$\angle BDC = \frac{1}{2}A, \quad \angle BEC = 90^\circ - \frac{1}{2}A$$

پس برای هر کدام از نقاط E و D يک مكان هندسي مشخص می‌شود (§۱۱)، مكان هندسي ۷). ولی دو نقطه متغير E و D با نقطه ثابت B همخطط‌اند و نسبت $BD : DE = p : q$ مفروض است: پس اين دو نقطه، دو نقطه متناظر در تجانس ($b : -c$) هستند. پس با توجه به مكان هندسي مربوط به E در B تعين يک مكان هندسي برای D به دست آوریم و اين مكان هندسي به همراه مكان هندسي دیگری که قبلًا برای D تعین کردیم موضع نقطه D را تعیین می‌کند. عمودمنصف DBE خط DC را در رأس سوم مثلث مطلوب ABC قطع می‌کند. به عنوان تمرین، شکل کاملی برای اين مسئله رسم کنید.

۵۰. مسئله. از یک نقطه برخورد دو دایره خطی رسم کنید به طوری که وترهایی که در دو دایره ایجاد می‌کند نسبت مفروضی داشته باشد.

فرض کنید A (شکل ۳۶) یک نقطه مشترک دو دایره (E) و (F) ، و M نقطه‌ای دلخواه روی (E) باشد.



شکل ۳۶

روی خط AM نقطه M' را طوری تعیین می‌کنیم که $AM' : AM = -k$ ، که در این رابطه، k نسبت مفروض است. وقتی نقطه M دایرة (E) را می‌پیماید، نقطه M' دایرة (E') را که متناظر (E) در تجانس $(A, -k)$ است می‌پیماید. اگر B نقطه مشترک دوی دایره‌های (E') و (F) باشد، خط AB قاطع مطلوب خواهد بود. در دایرة (E') و (F) در نقطه A مشترک آند و نمی‌توانند بر یکدیگر مماس باشند (§۴۷)، پس همیشه نقطه B وجود خواهد داشت.

اگر علامت نسبت k مشخص نشده باشد، نقطه M' را می‌توان طوری رسم کرد که M و M' هر دو در یک طرف نقطه A باشند، و مسئله دو جواب خواهد داشت. بعلاوه، اگر در مسئله قید نشده باشد که در تشکیل نسبت مفروض k باید کدام دایرة را دایرة اول به حساب آورد، مسئله چهار جواب خواهد داشت.

به عنوان تمرین، شکل کاملی برای این مسئله رسم کنید و در آن همه دایره‌هایی را که در راه حل مسئله به کار گرفته شده‌اند رسم کنید.

تمرین

- ۱) از نقطه مفروضی از یک دایره وتری رسم کنید که توسط وتر مفروضی از آن دایره نصف شود.
- ۲) از یک نقطه مفروض خطی رسم کنید به طوری که پاره‌خطی که توسط یک خط مفروض در یک دایرة مفروض روی آن جدا می‌شود، توسط آن نقطه مفروض به نسبت مفروضی تقسیم شود.
- ۳) از یک نقطه مفروض خطی رسم کنید به طوری که نسبت فاصله‌های نقطه مفروض تا دو نقطه برخورد خط با یک دایرة مفروض، مقدار مفروضی باشد.
- ۴) دو نقطه، هر یک روی یکی از دو دایرة مفروض چنان بیاید که با نقطه مفروضی همخط و از آن به یک فاصله باشند.
- ۵) از مثلثی دو ضلع و نیمساز زاویه بین آن دو ضلع $\angle b, c, t$ مفروض است. این مثلث را رسم کنید.
- ۶) خطی رسم کنید که دو دایرة هم مرکز روی آن وترهایی با نسبت مفروضی جدا کنند.

۷) سه دایره هم مرکز مفروض آند؛ قاطعی رسم کنید به طوری که پاره خط بین دایره اول و دایره دوم با پاره خط بین دایره دوم و دایره سوم هماندازه باشد.

۸) نقطه متغیر P روی دایره ثابتی به مرکز C حرکت می‌کند و A نقطه ثابتی است. مکان هندسی نقطه برخورد خط AP و نیمساز داخلی زاویه ACP را به دست آورید.

۹) یک مثلث متغیر، قاعده‌ای ثابت و دایره محیطی ثابتی دارد. مکانهای هندسی نقطه‌های وسط دو ضلع جانبی، و مکان هندسی وسط پاره خطی را که نقطه‌های وسط این دو ضلع را به هم وصل می‌کند به دست آورید.

۱۰) از دو نقطه مفروض B و C عمودهای BB' و CC' را بر خط متغیر $AB'C'$ که از نقطه ثابت A همخط با B و C می‌گذرد، رسم می‌کنیم. مکان هندسی نقطه $(BC', B'C)$ را بیابید.

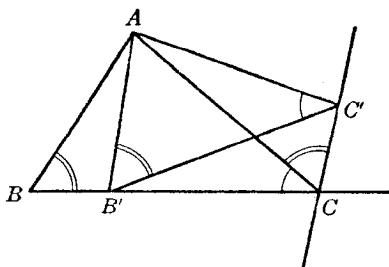
۱۱) روی قاعده BC از مثلث مفروض ABC نقطه P را طوری تعیین کنید که $AP \cdot PC = BP \cdot PC$ مقدار مفروضی داشته باشد.

۱۲) قضیه. اگر یک رأس از مثلث متغیری ثابت باشد، رأس دوم آن خط راست مفروضی را بیماید و مثلث همواره با مثلث مفروضی متشابه باشد، آنگاه رأس سوم مثلث خط راستی را می‌بیماید.

فرض کنید A (شکل ۳۷) رأس ثابت باشد و ABC موضعی از مثلث متغیر باشد که قاعده BC از مثلث روی خط مفروض p قرار می‌گیرد. $AB'C'$ موضع دلخواه دیگری از مثلث متغیر را نشان می‌دهد. پاره خط AB' از نقاط C و C' با زاویه‌های مساوی دیده می‌شود؛ پس چهارضلعی $AB'CC'$ یک چهارضلعی محاط در دایره است (§۲۵۲) و $\angle ACC' = \angle AB'C'$.

$$\angle BCC' = \angle BCA + \angle ACC' = \angle BCA + \angle AB'C'$$

دو زاویه آخری معلوم آند؛ پس خط CC' با خط مفروض p زاویه ثابتی می‌سازد. به علاوه، C نقطه ثابتی است؛ پس CC' خط ثابتی است، و قضیه اثبات شده است.



شکل ۳۷

۱۳) ملاحظه. باید ملاحظه کنید که نقطه C بر روی خط p ، توسط خطی که از A می‌گذرد و با p زاویه‌ای برابر با زاویه مفروض C می‌سازد، تعیین می‌شود، و خط CC' با p زاویه‌ای برابر زاویه مفروض A می‌سازد.

مکان هندسی رأس سوم، یعنی C با درنظر گرفتن زاویه‌های مفروض مثلث به ترتیبی معین به دست آمد، یعنی یک زاویه را در رأس ثابت A ، و زاویه دوم را در رأس B که خط مفروض p را می‌بیماید، قرار دادیم. اگر مسئله هیچ شرطی را برای انتساب زاویه‌ها قید نکرده باشد، انتساب زاویه‌ها را می‌توان به شش طریق مختلف انجام داد.

به علاوه، پس از انتخاب زاویه‌های A و B ، نقطه C بر روی خط p را می‌توان در هر دو طرف خط AB

انتخاب کرد. پس مکان هندسی کامل نقطه C شامل دوازده خط است. این خطوط شش جفت خط موازی هستند.

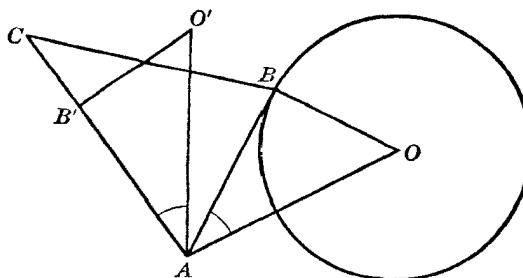
۵۳. قضیه. اگر یک رأس مثلث متغیر ثابت باشد، رأس دوم دایره مفروضی را بپیماید و مثلث همواره با مثلث مفروضی متجانس باشد، رأس سوم این مثلث یک دایره را می‌پیماید.

فرض کنید ABC (شکل ۳۸) یک موضع مثلث متغیر باشد، که در آن A رأس ثابت است و B روی دایرة مفروض به مرکز O ، قرار دارد. روی AB' ، AC جدا کنید و روی AB' مثلث $AO'B'$ همنهشت با AOB رسم کنید، به طوری که دو مثلث به طور متجانس قرار گرفته باشند، یعنی بتوان با دوران AOB حول رأس A آن را بر روی $AO'B'$ منطبق کرد.

چون بنابر شیوه ترسیم فوق، $\angle O'AB' = \angle OAB$ ، داریم $\angle O'AO = \angle B'AB$. زاویه دوم در آخرین تساوی مفروض است، پس AO' با خط ثابت AO زاویه ثابتی می‌سازد؛ پس راستای AO' ثابت است. به علاوه، AO' با طول مفروض AO برابر است؛ پس نقطه O' ثابت است و چون $O'B' = OB$ ، نقطه B' یک دایره، (B') ، را می‌پیماید. چون مثلث ABC همواره با مثلث مفروضی متجانس است، داریم

$$AC : AB' = AC : AB$$

پس مکان هندسی C یک دایره، (O'') ، است که با مکان هندسی B' متجانس است، و قضیه اثبات می‌شود. به عنوان تمرین، نشان دهید که مثلث $AO''O$ مرکز دایره (O'') است، با مثلث مفروض تشابه مستقیم دارد.



شکل ۳۸

نکته. اگر دایرة مفروض (O) ، که مسیر رأس B است، به طور صلب حول نقطه ثابت مفروض A به اندازه زاویه مفروض BAC دوران کند مکان جدید این دایره همان (B') یعنی مکان هندسی نقطه B' است. مکان هندسی C دایره ای است که در متجانس $(A, AC : AB : AB')$ با دایرة (B') متناظر است.

در مورد قضیه قبلی (§۵۱) نیز می‌توان مطلب مشابهی را مشاهده کرد.

بسته به انتساب زاویه های ABC ، ملاحظه مربوط به قضیه قبل (§۵۲) در اینجا نیز مصدق دارد.

تمرین

۱) مثلثی را رسم کنید که با مثلث مفروضی متجانس باشد، یک رأس آن در نقطه ثابت مفروضی باشد، و دو رأس دیگر آن روی در خط مفروض قرار داشته باشند.

۲) نقطه ای بر روی یک ضلع مثلث مفروضی مشخص شده است. در این مثلث مثلثی محاط کنید که یک رأس آن این نقطه مفروض و با مثلث مفروض دیگری متجانس باشد.

۳) سه خط و یک مثلث مفروض اند. مثلثی رسم کنید که رأسهای آن روی این سه خط قرار داشته باشند و

با مثلث مفروض مشابه باشد.

(۴) رأس A از مثلث متغیر APQ ثابت است و P روی خط ثابت CD حرکت می‌کند؛ AP خط ثابتی موازی با CD را در R قطع می‌کند، و $PQ = AR$ ؛ زاویه APQ ثابت است. ثابت کنید که مکان هندسی Q یک خط راست است.

(۵) شش ضلعی منتظم متغیری یک رأس ثابت دارد و مرکزش روی خط راستی حرکت می‌کند. نشان دهید که رأسهای دیگر شش ضلعی روی خطوط راستی حرکت می‌کنند و این خطوط هم‌اند.

(۶) مثلثی مشابه با یک مثلث مفروض رسم کنید به طوری که یک رأس آن در نقطه‌ای مفروض و دو رأس دیگر آن روی دو دایره قرار داشته باشند.

(۷) مثلثی مشابه با یک مثلث مفروض رسم کنید به طوری که رأسهای آن روی سه دایره مفروض قرار داشته باشند.

(۸) مثلثی مشابه با یک مثلث مفروض رسم کنید، به طوری که یک رأس آن در نقطه‌ای مفروض، رأس دیگر آن روی یک دایره مفروض، و رأس سوم آن روی یک خط مفروض قرار داشته باشد.

تمرینهای تكميلي

(۱) سه خط CL ، AL و BL که سه رأس مثلث ABC را به نقطه L وصل می‌کنند، اضلاع AC ، BC ، و AB را به ترتیب، در نقاط A' ، B' و C' قطع می‌کنند. خطوطی که از A' به موازات BB' و CC' رسم می‌شوند اضلاع AC و AB را به ترتیب، در P و Q قطع می‌کنند و خطوطی که از A' به موازات AC و AB رسم می‌شوند، خطوط BB' و CC' را به ترتیب، در R و S قطع می‌کنند. نشان دهید که چهار نقطه P ، Q ، R و S همخاطباند.

(۲) یک لوزی است و P ، Q ، R و S به ترتیب، مرکزهای دایره‌های محیطی مثلثهای BCD ، ABD ، ABC و DAB هستند. ثابت کنید که وسط پاره خطوط AP ، BQ ، CR و DS رأسهای یک لوزی مشابه با لوزی $ABCD$ هستند.

(۳) مثلث ABC را، که دایره محیطی آن به مرکز O مفروض است، طوری رسم کنید که داشته باشیم $(OBC) = p : q : r$ (مساحت OAB) : (مساحت OCA) :

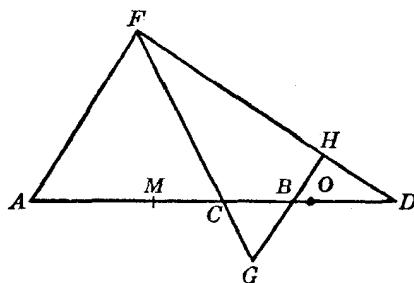
که p ، q و r طولهای سه پاره خط مفروض هستند.

(۴) اگر p ، q و r طولهای سه پاره خط مفروض باشند، دو نقطه D و E را روی اضلاع AB و AC از مثلث $.AD : DE : EC = p : q : r$ طوری تعیین کنید که ABC

ویژگیهای مثلث

الف. مقدمات

۵۴. مسئله. پاره خط مفروض AB را به طور داخلی و خارجی به نسبت $q:p$ تقسیم کنید. از دو انتهای پاره خط مفروض، یعنی A و B ، دو خط موازی دلخواه AF و GBH را رسم می‌کنیم (شکل ۳۹) و روی این دو خط به ترتیب، AF را برابر p ، و BG و BH را برابر q جدا می‌کنیم. خطوط FG و FH را در نقاط مطلوب C و D قطع می‌کنند؛ درستی این مطلب را به آسانی می‌توان با توجه به دو مثلث متشابه CAF و CBG ، و همچنین دو مثلث متشابه DAF و DBH دریافت.



شکل ۳۹

۵۵. ملاحظه ۱. در بیان مسئله برای جلوگیری از بروز ابهام باید قید شود که پاره خط‌های متناسب با p و q به ترتیب، آن طور که در شکل نشان داده شده است، مجاور A و B هستند، یا مجاور B و A . در غیر این صورت یک جفت نقطه دیگر، C' و D' ، نیز که نسبت به نقطه M ، یعنی وسط پاره خط AB ، به ترتیب، متقابل نقاط C و D هستند، جواب به شمار می‌آیند. ولی در کاربردهای واقعی معمولاً طبیعت مسئله تمایزی بین نقاط A و B قائل می‌شود، و در نتیجه، تنها یک جفت از نقاط تقسیم جواب مطلوب خواهد بود.

۵۶. ملاحظه ۲. اگر $q > p$ ، داریم $AD > DB$ و $AC > CB$ و $AD > DB$ ؛ پس نقطه M ، وسط AB ، خارج پاره خط CD قرار می‌گیرد. برای حالت $q < p$ نیز همین مواضع نسبی نقاط M ، C ، D و H حفظ می‌شود. اگر $q = p$ ، نقطه C روی M قرار می‌گیرد و نقطه H تقسیم خارجی وجود ندارد، زیرا در این حالت، FH با AB موازی می‌شود.

۵۷. قضیه. اگر نقاط C و D پاره خط AB را به ترتیب، به طور داخلی و خارجی به نسبت $p : q$ تقسیم کنند، نقاط B و A پاره خط DC را به ترتیب، به طور داخلی و خارجی به نسبت $(p - q) : (p + q)$ تقسیم می‌کنند.

داریم (شکل ۳۹)

$$AC : CB = p : q, \quad AD : DB = p : q$$

پس،

$$(AC + CB) : CB = (p + q) : q, \quad (AD - DB) : DB = (p - q) : q \quad (1)$$

$$AC : (AC + CB) = p : (p + q), \quad AD : (AD - DB) = p : (p - q) \quad (2)$$

با گذاشتن AB به جای $AC + CB$ و $AD - DB$ در رابطه‌های (۱) و (۲) و ترکیب دو تناسب بیان شده در هر کدام از این دو رابطه، به دست می‌آوریم

$$DB : BC = (p + q) : (p - q)$$

$$DA : AC = (p + q) : (p - q)$$

۵۸. نتیجه. اگر $AB = a$ و $CD = b$ داریم $.b = 2apq : (p^2 - q^2)$ ، داریم در واقع، داریم

$$AD : AB = p : (p - q), \quad AC : AB = p : (p + q), \quad CD = AD - AC$$

و نتیجه مطلوب به دست می‌آید.

۵۹. تعریف. گاهی به جای اینکه بگوییم نقاط C و D (§۵۷) پاره خط AB را به طور داخلی و خارجی به یک نسبت تقسیم کرده‌اند، می‌گوییم نقاط C و D پاره خط AB را به طور همساز (یا توافقی) تقسیم کرده‌اند، یا نقاط C و D نسبت به نقاط A و B مزدوج همساز یکدیگرند.

قضیه قبیل (§۵۷) می‌گوید که رابطه این دو جفت نقطه دو طرفه است، یعنی نقاط A و B هم به نوبه خود، پاره خط CD را به طور همساز تقسیم می‌کنند، و نقاط C و D را به طور همساز از هم جدا می‌کنند. بنابراین، می‌توانیم دو جفت نقطه A ، B و C ، D را دو جفت نقطه همساز، و دو پاره خط AB و CD را دو پاره خط همساز بنامیم.

۶۰. مسئله. سه نقطه همخط A ، B و C مفروض‌اند؛ مزدوج همساز C (نقطه D) نسبت به دو نقطه A و B را تعیین کنید.

از دو نقطه A و B دو خط موازی دلخواه AF و GBH را رسم می‌کنیم (شکل ۳۹) و از نقطه C قاطع دلخواهی رسم می‌کنیم تا AF و BG را به ترتیب، در F و G قطع کند. روی GB پاره خط BH را برابر BG جدا می‌کنیم. خط FH را در نقطه مطلوب D قطع می‌کند.

۶۱. قضیه. پای عمودهایی که از دو جفت نقطه همساز بر یک خط مفروض رسم می‌شوند نیز دو جفت نقطه همساز هستند.

در واقع چهار خط عمودی که بر خط مفروض رسم می‌شوند با هم موازی‌اند؛ بنابراین نسبت پاره خط‌هایی که پای این عمودها روی خط مفروض جدا می‌کنند، همان نسبت بین پاره خط‌های متناظری است که دو جفت

نقطه همساز مفروض تعیین می‌کند.

۶۲. قضیه. اگر نقاط C و D پاره خط AB را به طور همساز به نسبت $p : q$ تقسیم کند، نقطه O ، وسط پاره خط CD ، پاره خط AB را به طور خارجی به نسبت $p^r : q^r$ تقسیم می‌کند.

نقطه O خارج پاره خط AB قرار دارد (§۵۶). به دست می‌آوریم

$$AO = \frac{1}{2}CD + AC, \quad BO = \frac{1}{2}CD - BC$$

با گذاشتن مقادیر CD , AC و BC (بندهای ۵۷ و ۵۸) به دست می‌آوریم

$$AO = ap^r : (p^r - q^r), \quad BO = aq^r : (p^r - q^r)$$

و رابطه بیان شده حاصل می‌شود.

۶۳. نتیجه. داریم (§۵۸)

$$OA \cdot OB = OC^r$$

۶۴. ملاحظه ۱. اگر M و O به ترتیب، نقاط وسط پاره خطهای AB و CD باشند، داریم

$$MO = AO - AM = AO - \frac{1}{2}AB$$

پس،

$$MO = a(p^r + q^r) : 2(p^r - q^r)$$

۶۵. ملاحظه ۲. نقطه M خارج پاره خط CD قرار دارد (§۵۶).

۶۶. قضیه. مجموع مربعهای دو پاره خط همساز با چهار برابر مربع فاصله بین نقاط وسط این پاره خطها برابر است.

داریم (§۵۸)

$$AB^r + CD^r = a^r + 4a^r p^r q^r : (p^r - q^r)^r = a^r (p^r + q^r)^r : (p^r - q^r)^r$$

پس (§۶۴)،

$$AB^r + CD^r = 4MO^r$$

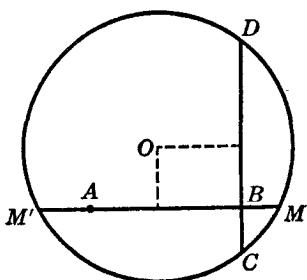
۶۷. مسئله. دو پاره خط را با مفروض بودن حاصل ضربشان (t^r) و مجموع یا تفاضلشان (a) رسم کنید. حل. دو پاره خط u و v را که t واسطه هندسی آنها باشد رسم می‌کنیم. روی عمودی که در یک انتهای پاره خط AB ، مثلاً B رسم کرده‌ایم، پاره خطهای $BD = v$ و $BC = u$ را در یک طرف AB (شکل ۴۰ الف)، یا در دو طرف مختلف AB (شکل ۴۰ ب)، بسته به اینکه a مجموع پاره خطهای مطلوب باشد یا تفاضل آنها، جدا می‌کنیم. محل برخورد عمود منصفهای پاره خطهای AB و CD را O می‌نامیم. به مرکز O و به شعاع $OC = OD$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا AB را در دو نقطه M و M' قطع کند. پاره خطهای مطلوب هستند.

در واقع، داریم

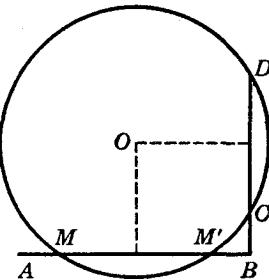
$$MA \cdot MB = BM' \cdot BM = BC \cdot BD = uv = t^r$$

ترسیم بالا یک راه حل ترسیمی برای معادله‌های درجه دوم زیر است:

$$x^2 - ax + t^2 = 0, \quad x^2 - ax - t^2 = 0.$$



شکل ۴۰ (ب)



شکل ۴۰ (الف)

ریشه‌های معادله‌های درجه دوم

$$x^2 + ax + t^2 = 0, \quad x^2 + ax - t^2 = 0.$$

تنها از نظر علامت با ریشه‌های دو معادله قبل تقاضت دارند؛ بنابراین، ریشه‌های این معادله‌ها را نیز می‌توان با این ترسیم به دست آورد. پس این ترسیم راهی برای حل ترسیمی هر معادله درجه دومی است که ضریب x^2 در آن یک باشد.

تمرین

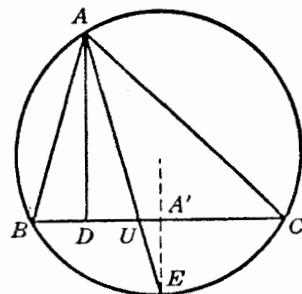
- ۱) دو پاره خط با طولهای مفروض را روی یک خط طوری قرار دهید که همساز باشند. راهنمایی. از (۶۶)
- ۲) نشان دهید که نیمسازهای داخلی و خارجی هر یک از زاویه‌های مثلث، روی ضلع مقابل آن زاویه سه پاره خط ایجاد می‌کنند، به طوری که معکوس یکی با مجموع معکوسهای دو پاره خط دیگر برابر است. راهنمایی. از (۵۸) استفاده کنید.
- ۳) نشان دهید که نیمساز داخلی (یا خارجی) هر زاویه مثلث توسط پای عمودهایی که از رأسهای دو زاویه دیگر مثلث برآن رسم می‌شوند، به طور همساز تقسیم می‌شود.

ب. دایره محیطی

۴۶. قضیه. اگر مثلثی محاط در دایره‌ای مفروض، زاویه‌ای ثابت داشته باشد، ضلع روبروی زاویه ثابت بر دایره ثابتی هم مرکز با دایره مفروض می‌باشد. اثبات را به عنوان خواهد بود.
۴۷. این قضیه را می‌توان معکوس مکان هندسی ۷ (۱۱) دانست. اثبات را به عهده خواننده می‌گذاریم.

۴۹. نتیجه. a, R, A دسته‌ای از معلومات مثلث است.

۵۰. مسئله. از مثلثی قاعده، زاویه مقابل قاعده، و نسبت فاصله‌های نقطه وسط قاعده از نقاط برخورد ارتفاع و نیمساز زاویه مقابل به قاعده با قاعده مفروض است. مثلث را رسم کنید. فرض کنید ABC (شکل ۴۱) مثلث مطلوب باشد. A' را وسط BC ، D و U را نقاط برخورد BC با ارتفاع AD و نیمساز AU فرض کنید. امتداد نیمساز AU و امتداد عمودمنصف BC هر دو کمان BC را، در نقطه‌ای مانند E نصف می‌کنند.



شکل ۴۱

با توجه به مثلثهای متشابه ADU و $EA'U$ داریم

$$A'U : UD = A'E : AD$$

چون قاعده BC و زاویه A مفروض‌اند، دایرة محیطی ABC مشخص می‌شود؛ بنابراین، پاره‌خط $A'E$ معلوم است. همچنین نسبت اول در تناسب بالا معلوم است؛ پس ارتقای AD را می‌توان رسم کرد. حال به آسانی می‌توان ترسیم مطلوب را کامل کرد.

۷۱. مسئله. از مثلث شعاع دایرة محیطی، مجموع دو ضلع جانبی، و تفاضل زاویه‌های قاعده $(B-C, b+c, R)$ مفروض است. مثلث را رسم کنید.

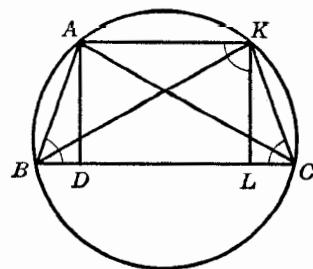
مثلث مطلوب فرض کنید (شکل ۴۲). فرض کنید خطی که از A به موازات BC رسم شود دایرة محیطی ABC را در K قطع کند. در ذوزنقة متساوی الساقین $ABC K$ داریم

$$\angle ABK = \angle ABC - \angle KBC = B - \angle BKA = B - \angle BCA = B - C$$

شعاع مفروض R و زاویه معلوم $\angle ABK = B - C$ پاره‌خط AK را تعیین می‌کنند (§۶۹). پس در مثلث قاعده AK ، زاویه مقابل به قاعده، یعنی $B - C$ و مجموع اضلاع جانبی، یعنی

$$AB + BK = AB + AC = b + c$$

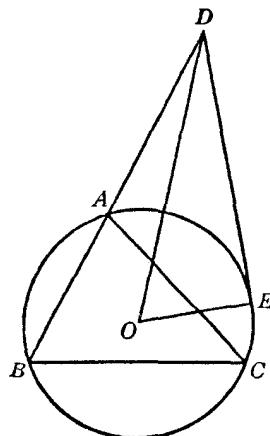
را می‌دانیم. پس می‌توانیم این مثلث را رسم کنیم (§۱۷). خطی که از B به موازات AK رسم می‌شود، دایرة محیطی ABK را در رأس سوم مثلث مطلوب ABC ، یعنی C ، قطع می‌کند.



شکل ۴۲

۷۲. مسئله. از مثلثی شعاع دایره محیطی، قاعده، و حاصل ضرب مجموع دو ضلع دیگر در یکی از آنها مفروض است. مثلث را رسم کنید.

فرض کنید ABC مثلث مطلوب باشد که در دایره مفروض به مرکز O ، محاط شده است (شکل ۴۳). BA را امتداد می‌دهیم و روی آن AD را برابر AC جدا می‌کنیم. حال داریم $\angle BDC = \frac{1}{2} \angle BAC$ ، و $\angle BAC$ با معולם بودن R و a مشخص می‌شود (§۶۹). پس اگر ضلع $BC = a$ را در دایره مفروض به شعاع R قرار دهیم، یک مکان هندسی برای D خواهیم داشت (§۱۱، مکان هندسی ۷).



شکل ۴۳

فرض کنید DE مماسی باشد که از D بر دایره رسم می‌شود. داریم

$$DE^2 = DA \cdot DB = b(b + c)$$

یعنی طول مماسی را که از D بر دایره (O) رسم می‌شود می‌دانیم؛ پس یک مکان هندسی دیگر برای D داریم (§۱۱، مکان هندسی ۲)، و مثلث کمکی DBC را می‌توانیم رسم کنیم. عمودمنصف CD خط BD را در رأس سوم مثلث مطلوب ABC ، یعنی A ، قطع می‌کند.

تمرین

از مثلثی اجزای زیر مفروض آند؛ مثلث را رسم کنید.

$$(1) h_b + h_c, b + c, R \quad (9)$$

$$h_c - h_b, b - c, R \quad (10)$$

$$h_b + h_c, A, R \quad (11)$$

$$B - C, a, R \quad (12)$$

$$a : h_a, b, R \quad (13)$$

$$b(b + c), A, a \quad (14)$$

$$B - C, b - c, R \quad (15)$$

$$C, m_b, R \quad (16)$$

$$\gamma_p, A, R \quad (17)$$

$$a - b, A, R \quad (18)$$

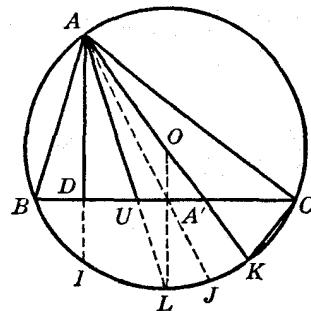
۷۳. قضیه. زاویه بین قطعی از دایره محیطی یک مثلث که از یکی از رأسهای آن مثلث می‌گذرد و ارتفاعی که از همان رأس مثلث رسم می‌شود (الف) با تفاصل دو زاویه دیگر مثلث برابر است، و (ب) توسط نیمساز زاویه آن رأس مثلث نصف می‌شود.

(الف) فرض کنید AD ارتفاع و AK قطری از دایره محیطی مثلث ABC باشد که از رأس A می‌گذرند (شکل ۴۴). زاویه‌های B و K برابرند زیرا هر دو روبروی یک کمان دایره محیطی هستند؛ پس در مثلثهای قائم الزاویه ABD و ACK داریم

$$\angle BAD = \angle KAC = 90^\circ - B$$

$$\angle DAK = A - 2(90^\circ - B) = A + 2B - 180^\circ = A + 2B - A - B - C = B - C$$

خواننده می‌تواند تحقیق کند که در صورت منفرجه بودن یکی از زاویه‌های B یا C نیز قضیه صادق است.



شکل ۴۴

(ب) AU را نیمساز زاویه A فرض کنید. چون $\angle BAD = \angle CAO$ ، داریم

۷۴. نتیجه. در مثلث قائم الزاویه ADU داریم $\angle DAU = \frac{1}{2}(B - C)$ ، $AU = t_a$ ، $AD = h_a$ و $DU = h_a$ ؛ پس $B - C$ یک دسته معلومات مثلث است.

۷۵. قضیه. تفاصل زاویه‌هایی که نیمساز داخلی یک زاویه مثلث با ضلع مقابل به آن زاویه می‌سازد، با تفاصل زاویه‌های مجاور این ضلع برابر است.

با توجه به دو مثلث AUB و AUC (شکل ۴۴) داریم

$$\angle AUC = B + \frac{1}{2}A \quad \text{و} \quad \angle AUB = C + \frac{1}{2}A$$

پس،

$$\angle AUC - \angle AUB = B - C$$

۷۶. مسئله. از مثلث ارتفاع، میانه و نیمساز رسم شده از یک رأس (h_a, m_a, t_a) مفروض اند. مثلث را رسم کنید.

دو مثلث قائم الزاویه‌ای را که ضلع مشترک زاویه قائم آنها $AD = h_a$ است (شکل ۴۴) و تراهایشان $AU = t_a$ و $AA' = m_a$ هستند، می‌توان رسم کرد. مرکز دایره محیطی مثلث مطلوب ABC ، یعنی O ، روی

عمودی که در نقطه A' بر DA' رسم می‌شود، و همچنین روی خطی که با AU زاویه‌ای برابر $\angle DAU$ می‌سازد قرار دارد (§ ۷۳ ب)؛ پس O را می‌توان تعیین کرد. دایره $DA'(O, OA)$ خاطر در دو رأس B و C از مثلث مطلوب ABC قطع می‌کند.

۷۷. مسئله. از مثلثی قاعده، ارتقای وارد بر قاعده و نیمساز زاویه مقابل قاعده (a, h_a, t_a) مفروض است. مثلث را رسم کنید.

فرض کنید ABC مثلث مطلوب باشد. فرض کنید F نقطه متقابن B نسبت به D باشد، داریم

$$\angle FAC = \angle AFD - \angle C = B - C$$

و این زاویه را می‌توان با توجه به مثلث قائم الزاویه ADU تعیین کرد (§ ۷۳).

فرض کنید خطی که در B بر BC عمود می‌شود، AF را در G قطع کند. مثلث قائم الزاویه GBC را می‌توان رسم کرد، زیرا BC مفروض است و $GB = 2h_a$. پس برای رأس A دو مکان هندسی داریم: کمانی از یک دایره که پاره خط GC از هر نقطه روی آن کمان با زاویه $(B - C) - 180^\circ$ دیده می‌شود، و عمودمنصف $.BG$.

۷۸. مسئله. از مثلثی قاعده، میانه وارد بر قاعده و تناضل زاویه‌های مجاور قاعده (a, m_a, t_a) مفروض است. مثلث را رسم کنید.

فرض کنید ABC (شکل ۴۴) مثلث مطلوب باشد. داریم $\angle A'OK = \angle DAO = B - C$ ؛ پس، $\angle A'OA = 180^\circ - (B - C)$

فرض کنید امتداد AA' دایرة محیطی را در J قطع کند. در این صورت، داریم

$$A'A \cdot A'J = A'B \cdot A'C$$

پس، $A'J = a'$ ؛ پس پاره خط $A'J$ را می‌توان به عنوان جزء سوم متناسب با پاره خط‌های a و m_a رسم کرد، و مرکز دایرة محیطی O روی عمودمنصف AJ قرار دارد. پس ترسیم به صورت زیر انجام می‌شود.

$AA' = m_a$ را رسم می‌کنیم و سپس کمانی از یک دایره را رسم می‌کنیم که AA' از نقاط روی آن کمان با زاویه $(B - C) - 180^\circ$ دیده شود. $AA' = a'$ ؛ به اندازه m_a امتداد می‌دهیم. عمودمنصف AJ کمان را در مرکز دایرة محیطی مثلث مطلوب قطع می‌کند. دایرة (O, OA) عمودی را که در A' بر $A'C$ قطع می‌شود در دو رأس B و C از مثلث مطلوب ABC قطع می‌کند.

اگر نقاط A و O در دو طرف BC قرار داشته باشند، یا به عبارت دیگر اگر A زاویه‌ای منفرجه باشد، زاویه‌ای که پاره خط AA' از نقطه O با آن زاویه دیده می‌شود برابر با $B - C$ خواهد بود.

تمرین

از مثلثی اجزای زیر مفروض اند؛ آن را رسم کنید.

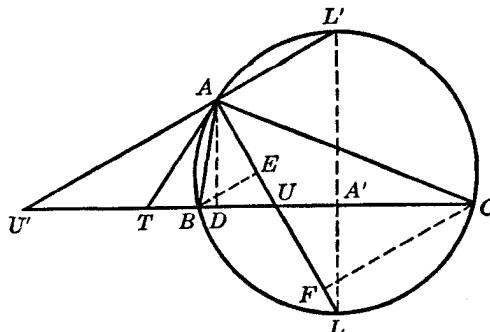
$$\begin{array}{l} t_a, h_a, R (5) \\ B - C, m_a, R (6) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} t_a, h_a, A (3) \\ h_a : t_a, A, a (4) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} B - C, h_a, R (1) \\ B - C, t_a, R (2) \end{array}$$

۷۹. قضیه. نیمسازهای داخلی و خارجی هر زاویه مثلث از دو انتهای قطری از دایرة محیطی مثلث که بر ضلع مقابل آن زاویه عمود است می‌گذرند.

نیمساز داخلی زاویه A ، یعنی AU ، از نقطه L وسط کمان BLC از دایره محیطی که شامل نقطه A نیست می‌گذرد (شکل ۴۵). قطر LL' که از L می‌گذرد بر BC عمود است، و خط AL' که از L' و می‌گذرد بر AL عمود است، زیرا زاویه $AL'AL$ قائم است. پس AL' نیمساز خارجی زاویه A است و اثبات قضیه کامل می‌شود.



شکل ۴۵

۸۰. قضیه. زاویه‌ای که نیمساز خارجی هر زاویه مثلث با ضلع مقابل آن زاویه می‌سازد برابر است با نصف تقاضل دو زاویه مجاور به این ضلع.
دو ضلع زاویه‌ای که نیمساز خارجی AU (شکل ۴۵) با قاعدة BC می‌سازد، به ترتیب، بر نیمساز داخلي AU و ارتقان AD عمودند؛ بنابراین، اثبات قضیه کامل می‌شود (§۷۳).

۸۱. نتیجه ۱. اگر میاس بر دایره محیطی در نقطه A ، BC را در T قطع کند، داریم $TA = TU = TU'$ در واقع، داریم (شکل ۴۵)

$$\angle TAU = \angle TAB + \angle BAU, \quad \angle TUA = \angle UCA + \angle UAC$$

اما $TA = TU$ ، $\angle TAB = \angle UAC$ ، $\angle BAU = \angle UAC$ ؛ پس مثلث TAU متساوی الساقین است، و دایره (T, TA) از نقطه U می‌گذرد، زیرا $TA = TU$ و چون UAU' یک زاویه قائم است، این دایره از U' هم می‌گذرد، پس $TA = TU'$.

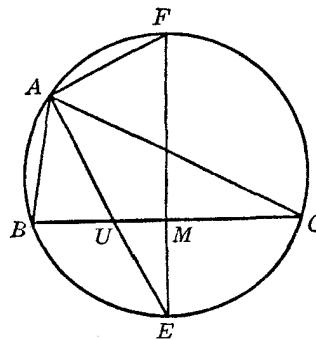
۸۲. نتیجه ۲. ارتقان AD از مثلث ABC ارتقان مثلث UAU' نیز هست؛ پس،

$$t_a, t'_a, h_a, B - C$$

یک دسته معلومات مثلث است، یعنی در صورتی که دو جزء از این اجزا مفروض باشد، می‌توان دو تای دیگر را تعیین کرد.

۸۳. مسئله. از نقطه E ، وسط کمان BEC از یک دایره، قاطعی رسم کنید که وتر BC را در U و دایره را در نقطه‌ای دیگر مانند A قطع کند، به طوری که AU طول مفروض t را داشته باشد.
فرض کنید قطر EMF (شکل ۴۶) که از نقطه E (شکل ۴۶) می‌گذرد، کمان BC را در M قطع کند. با توجه به دو مثلث قائم‌الزاویه EFA و EUM ، که در زاویه E مشترک‌اند، و در نتیجه زاویه‌ها برابرند، داریم

$$EF : EU = EA : EM$$



شکل ۴۶

حال اگر قرار دهیم

$$EF = 2R, EM = m, EU = x, EA = x + t$$

تناسب به شکل زیر درمی‌آید:

$$2R \cdot m = x(x + t)$$

و پاره خط x را می‌توان رسم کرد (§۶۷).

طول معلوم پاره خط EU نقطه U ، و در نتیجه قاطع مطلوب EUA را مشخص می‌کند.

۸۴. مسئله پاپوس. از نقطه مفروضی روی نیمساز یک زاویه مفروض، قاطعی رسم کنید، به طوری که پاره خط جدا شده توسط دو ضلع زاویه بر روی آن طول مفروضی داشته باشد.

فرض کنید B و C (شکل ۴۶) محل برخورد قاطع مطلوب $UBC = a$ با ضلعهای زاویه مفروض BAC باشند؛ شعاع دایرة محیطی مثلث ABC معلوم است (§۶۹)، و AU نیمساز زاویه A از نقطه E وسط کمان BEC از دایرة محیطی که متناظر با وتر a است می‌گذرد. بنابراین، ترسیم مطلوب را می‌توان به صورت زیر انجام داد.

روی یک خط دلخواه $B'C'$ را برابر طول مفروض a جدا می‌کنیم و مکان هندسی نقطه‌ای را که $B'C'$ از آن نقطه با زاویه‌ای برابر زاویه مفروض A دیده می‌شود، رسم می‌کنیم (§۱۱، مکان هندسی ۷). از E' وسط کمان دیگر این دایره، قاطع $E'U'A'$ را رسم می‌کنیم تا $B'C'$ را در U' و دایره را در نقطه‌ای دیگر مانند A' قطع کند و طول $U'A'$ برابر باشد با طول پاره خط مفروض AU ، که نیمساز زاویه مفروض A است (§۸۳). خطی که از U ، واقع بر نیمساز زاویه مفروض، می‌گذرد و با AU زاویه‌ای برابر زاویه $B'U'A'$ می‌سازد، جواب مسئله است.

مسئله دو جواب دارد.

تمرین

از مثلثی اجزای زیر مفروض است؛ مثلث را رسم کنید.

$$(1) b : c, t_a, h_a : b \text{ راهنمایی. از §۵۷ استفاده کنید.}$$

$$(2) b : c, t_a, cb : t_a$$

$$(3) b : c, B - C, h_a : b$$

$$(4) b : c, t_a, h_a : b$$

۸) نشان دهید که اگر خطی که رأس یک مثلث را به مرکز دائرة محیطی آن وصل می‌کند، با ضلع مقابل موازی باشد، طول نیمساز داخلی زاویه متناظر با این رأس برابر است با طول نیمساز خارجی این زاویه، و بر عکس.

۹) مثلث را با مفروض بودن قاعده و یک زاویه مجاور قاعده رسم کنید به طوری که طول نیمسازهای داخلی و خارجی آن زاویه با هم برابر باشند.

۱۰) (الف) اگر دو نیمساز زاویه A از مثلث ABC برابر باشند، و دایره‌ای به قطر BC دو ضلع AB و AC را به ترتیب، در نقاط P و Q قطع کند، نشان دهید که $CP = CQ$. (ب) مثلث را با مفروض بودن یک ضلع و پای ارتفاع وارد بر این ضلع رسم کنید به طوری که دو نیمساز یکی از زاویه‌های مجاور این ضلع برابر باشند.

۸۵. قضیه. حاصل ضرب دو ضلع هر مثلث با حاصل ضرب ارتفاع وارد بر ضلع سوم در شعاع دایرة محیطی مثلث برابر است.

$$\angle ABD = \angle AKC \quad (\text{شکل } ۴۴)$$

$$AB : AK = AD : AC$$

یا

$$AB \cdot AC = AK \cdot AD$$

یعنی

$$bc = 2R \cdot h_a$$

۸۶. نتیجه. مساحت مثلث با حاصل ضرب سه ضلع آن تقسیم بر دو برابر قطر دایرة محیطی آن برابر است. در واقع، دو طرف تساوی پیشین (۸۵) را در a ضرب، و ملاحظه کنید که $S = ah_a = 2S$ مساحت مثلث است. به این ترتیب، به دست می‌آوریم

$$abc = 4RS$$

تمرین

۱) مثلث را با مفروض بودن a ، A و bc رسم کنید.

۲) مثلث را با مفروض بودن t_a ، h_a و bc رسم کنید.

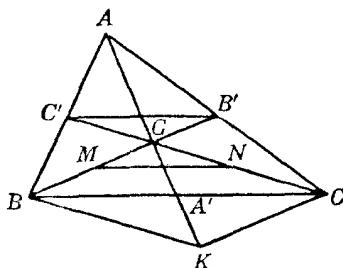
۳) از نقطه ثابت A روی یک دایرة مفروض دو قطع متغیر AB و AC رسم شده‌اند، به طوری که حاصل ضرب شان ثابت است. نشان دهید که وتر BC بر دایرة ثابتی مماس است.

۴) نشان دهید که حاصل ضرب فاصله‌های هر نقطه روی دایرة محیطی یک مثلث تا اضلاع آن مثلث با حاصل ضرب فاصله‌های آن نقطه تا اضلاع مثلث مماسی آن مثلث (یعنی مثلث که از مماسهای رسم شده بر دایرة محیطی مثلث در رأسهای آن مثلث حاصل می‌شود) برابر است.

ج. میانه‌ها

۸۷. قضیه. (الف) پاره خطی که وسط دو ضلع یک مثلث را به هم وصل می‌کند با ضلع سوم موازی و نصف آن است. (ب) خطی که از وسط یک ضلع مثلث به موازات ضلع دیگری رسم می‌شود، از وسط ضلع سوم می‌گذرد.

۸۸. قضیه. سه میانه مثلث همسان و نقطه همarsi هر یک از میانه‌ها را به دو بخش تقسیم می‌کند، که یکی یک سوم طول میانه و دیگری دو سوم طول میانه است.



شکل ۴۷

فرض کنید G نقطه برخورد دو میانه BB' و CC' باشد (شکل ۴۷). با توجه به دو مثلث متشابه $GB'C'$ و GBC داریم

$$BG : B'G = CG : C'G = BC : B'C' = 2 : 1$$

بنابر این، هر دو میانه طوری یکدیگر را قطع می‌کنند که دو بخش ایجاد شده روی هر کدام دارای نسبت بیان شده باشند، و به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

۸۹. تعریف. نقطه G را مرکز نقل مثلث ABC می‌نامند.

۹۰. مسئله. میانه‌های مثلثی مفروض آند (m_a, m_b, m_c)؛ مثلث را رسم کنید. $AKCC'$ (شکل ۴۸) را ادامه دهید و $B'K$ را برابر $B'C'$ جدا کنید. قطرهای چهارضلعی $C'B'C$ یکدیگر را نصف می‌کنند؛ پس $AKCC'$ یک متوازی‌الاضلاع است و $AK = CC' = m_c$. $A'K = BB' = m_b$ است؛ پس، چهارضلعی $A'BB'K$ نیز یک متوازی‌الاضلاع است، زیرا $A'B$ موازی و مساوی $B'K$ است؛ پس،

$$A'K = BB' = m_b$$

پس مثلث $AA'K$ را می‌توان رسم کرد زیرا اضلاع آن برابر میانه‌های مفروض است. برای رسیدن به مثلث مطلوب ملاحظه کنید که AA' در نقطه L توسط $C'B'K$ نصف شده است؛ بنابر این، KL یک میانه $AA'K$ ، و بنابر این، طول آن معلوم است. به علاوه،

$$C'L = LB' = \frac{1}{3}KL$$

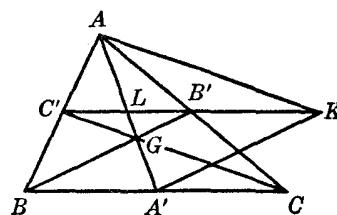
پس نقاط B' و C' را می‌توان مشخص و مثلث ABC را به‌آسانی تکمیل کرد. مسئله یک جواب دارد.

۹۱. قضیه. با میانه‌های یک مثلث، مثلث جدیدی رسم می‌کنیم. میانه‌های مثلث جدید سه چهارم اضلاع متناظر مثلث اولی هستند.

دیدیم که (۸۹۰) $C'L = \frac{1}{3}KL$ (شکل ۴۸)؛ پس،

$$KL = \frac{3}{4}KC' = \frac{3}{4}BC = \frac{3}{4}a$$

و چون KL می‌تواند هر یک از میانه‌های مثلث $AA'K$ باشد، قضیه ثابت شده است.



شکل ۴۸

۹۲. نتیجه. مثلث ۱ مفروض است؛ مثلث ۲ را طوری رسم می‌کنیم که اضلاع آن برابر میانه‌های مثلث ۱ باشند؛ به همین صورت مثلث ۳ را با میانه‌های مثلث ۲ رسم می‌کنیم و ... مثلثهای مرتبه فرد، $1, 3, 5, \dots$ ، مشابه‌اند و مثلثهای مرتبه زوج، $2, 4, 6, \dots$ ، نیز مشابه‌اند. در هر دسته اضلاع هر مثلث برابر $\frac{3}{4}$ اضلاع مثلث قبلی است.

۹۳. قضیه. مساحت مثلثی که طول اضلاعش با طول میانه‌های مثلث مفروضی برابر باشد، سه چهارم مساحت آن مثلث مفروض است.

مساحت مثلث $AA'K$ (شکل ۴۸) برابر است با مجموع مساحت‌های مثلثهای AKL و $A'KL$ ؛ قاعده مشترک این دو مثلث است و ارتفاع هر کدام نصف ارتفاع وارد بر BC در مثلث ABC است؛ پس،

$$AA'K = KL : BC = \frac{3}{4} \quad (\text{شکل ۴۹})$$

۹۴. قضیه. در یک دایره مفروض می‌توان تعدادی نامتناهی مثلث محاط کرد، به طوری که مرکز نقل همه آنها نقطه مفروضی درون دایره باشد.

نقطه دلخواه A را روی دایره مفروض (O) برگردانید و آنرا به مرکز نقل مفروض G وصل کنید. روی امتداد AG پاره خط $G'A$ را برابر $\frac{1}{3}GA$ جدا کنید و A' را به O ، مرکز دایرة (O) وصل کنید. خطی که در A' بر OA' عمود می‌شود دایرة محیطی (O) را در دو رأس دیگر مثلث ABC قطع می‌کند. در صورتی که A' درون دایرة (O) قرار گیرد، A یک جواب مسئله است. مکان هندسی A' دایرة (N) است که متجلans دایرة (O)، در تجانس $(G, -\frac{1}{3})$ است. پس اگر (N) کاملاً درون (O) قرار گیرد، هر نقطه‌ای از (O) یک جواب به دست می‌دهد. در غیر این صورت (O) کمانی خواهد داشت که نقاط روی آن را نمی‌توان به عنوان نقطه A برگزید.

۹۵. مسئله. از مثلثی ارتفاع و میانه رسم شده از یک رأس، و زاویه آن رأس (h_a, m_a, A) مفروض است. مثلث را رسم کنید.

A' و B' را نقاط میانی اضلاع BC و AC از مثلث مطلوب ABC و AD را ارتفاع آن فرض کنید. مثلث قائم‌الزاویه ADA' را می‌توان رسم کرد. میانه AA' از نقطه B' با زاویه معلوم $-A = 180^\circ$ دیده می‌شود و بنابراین، یک مکان هندسی برای B' داریم. از طرف دیگر، B' روی خطی قرار دارد که وسطهای AD و AA' را به ABC را به آسانی می‌توان تکمیل کرد.

تمرین

- نشان دهید خطی که از وسط یک میانه به یک رأس مثلث رسم می‌شود، ضلع مقابل به آن رأس را به نسبت یک سوم به دو سوم قطع می‌کند.

- ۲) مثلثی را رسم کنید که محل دو رأس و محل مرکز نقل آن مفروض است.
- ۳) مثلثی رسم کنید که میانه‌های آن روی سه خط همرس مفروض قرار گیرند. نشان دهید که یکی از رأسها را می‌توان به دلخواه روی یکی از خطوط مفروض برگزید.
- ۴) نشان دهید خطی که از مرکز نقل مثلث به موازات یکی از اضلاع رسم می‌شود، مساحت مثلث را به دو بخش به نسبت چهار به پنج تقسیم می‌کند.
- ۵) نشان دهید خطوطی که وسط اضلاع یک مثلث را به هم وصل می‌کنند، آن مثلث را به چهار مثلث همنهشت تقسیم می‌کنند.
- ۶) نشان دهید خطوطی که مرکز نقل مثلث را به رأسهای آن وصل می‌کنند، مثلث را به سه مثلث هم مساحت تقسیم می‌کنند و مرکز نقل تنها نقطه‌ای است که این خاصیت را دارد.
- ۷) نشان دهید که (الف) بین دو ضلع مثلث، آن ضلع بزرگتر است که میانه وارد بر آن کوچکتر باشد؛ (ب) اگر دو میانه یک مثلث برابر باشند، آن مثلث متساوی الساقین است؛ (ج) اگر دو میانه یک مثلث با اضلاعی که به آنها وارد می‌شوند متناسب باشند، مثلث متساوی الساقین است.
- ۸) نشان دهید که فاصله‌های یک نقطه واقع بر یک میانه مثلث از دو ضلع دربرگیرنده میانه، با طول این اضلاع نسبت عکس دارد.
- ۹) خطی از مرکز نقل یک مثلث می‌گذرد. نشان دهید که مجموع فاصله‌های این خط از دو رأس که در یک طرف خط قرار دارند، با فاصله این خط از رأس سوم برابر است.
- ۱۰) نشان دهید که مجموع (جبری) فاصله‌های رأسهای یک مثلث از هر خط همصفحه با آن مثلث، برابر است با مجموع فاصله‌های وسط اضلاع مثلث از این خط.
- ۱۱) نشان دهید که مجموع میانه‌های یک مثلث از محیط مثلث کوچکتر و از سه چهارم محیط مثلث بزرگتر است.

مثلثی را که اجزای زیر از آن معلوم است، رسم کنید:

$$b, m_a, m_b \quad (13)$$

$$m_a, c, b \quad (12)$$

$$h_a, m_c, m_b \quad (15)$$

$$m_c, m_b, a \quad (14)$$

۹۶. تعریف. مثلثی که روی آن نقاط وسط اضلاع یک مثلث مفروض باشند، مثلث میانک یا مثلث مکمل آن مثلث نامیده می‌شود.

۹۷. قضیه. مرکز نقل هر مثلث و مرکز نقل مثلث میانک آن مثلث بر هم منطبق اند. میانه AA' از مثلث ABC یا هر خط $B'C'$ را نصف می‌کند (شکل ۴۸)؛ پس AA' میانه مثلث $A'B'C'$ نیز هست. همین مطلب در مورد بقیه میانه‌ها نیز صادق است.

۹۸. نتیجه. مثلث مکمل $A'B'C'$ متاظر مثلث مفروض ABC در تجانس (۱-۲) است.

در این تجانس، نقطه P' که متاظر با نقطه مفروض P است، نقطه مکمل P نامیده می‌شود.

۹۹. تعریف. اگر از هر رأس یک مثلث خطی موازی با ضلع مقابل آن رسم کنیم مثلث تشکیل می‌شود؛ این مثلث را متمثلاً پادمکمل مثلث مفروض می‌نامیم.

۱۰۰. قضیه. مرکز نقل هر مثلث و مرکز نقل مثلث پادمکمل آن بر هم منطبق اند. در واقع اگر مثلث $A'B'C'$ (شکل ۴۸) را مثلث مفروض در نظر بگیریم، مثلث ABC پادمکمل $A'B'C'$ خواهد بود و با استفاده از قضیه ۹۷، این قضیه ثابت می‌شود.

۱۰۴. نتیجه. مثلث $A''B''C''$ که پادمکمل مثلث ABC است، در تجانس ($G, 1 : -2$) با مثلث ABC متناظر است.

در این تجانس نقطه P'' متجانس با نقطه مفروض P ، نقطه پادمکمل P نامیده می‌شود.

۱۰۵. مسئله. از مثلثی یک زاویه و میانه‌های وارد بر اضلاع این زاویه (A, m_b, m_c) مفروض‌اند. مثلث را رسم کنید.

با رسم $BB' = m_b$ یک مکان هندسی برای رأس A داریم (§11)، مکان هندسی γ . با توجه به این مکان و با استفاده از تجانس ($1 : -1, B'$)، یک مکان نیز برای رأس C به دست می‌آوریم. حال با مشخص کردن مرکز نقل G بر روی BB' ، دایره $(G, \frac{1}{3}(2m_b))$ مکان هندسی دیگری را برای C به دست می‌دهد.

۱۰۶. مسئله. از مثلثی قاعده، نسبت میانه‌های وارد بر دو ضلع جانبی و تقاضل مربعهای این دو ضلع $m_b : m_c, a^2 : b^2 - c^2$ مفروض است. مثلث را رسم کنید.

پس از رسم $BC = a$ ، داریم (شکل ۴۷)

$$BG : CG = \frac{1}{3}(2m_b) : \frac{1}{3}(2m_c) = m_b : m_c$$

پس G روی دایرة معلومی قرار دارد (§11)، مکان هندسی γ . حال با استفاده از تجانس ($3 : 1, A'$) و مکان هندسی G ، یک مکان هندسی برای رأس A به دست می‌آوریم. شرط $b^2 - c^2$ مکان هندسی دیگری را برای رأس A به دست می‌دهد (§11)، مکان هندسی γ .

۱۰۷. مسئله. زاویه قائم ACB حول نقطه C که رأس این زاویه است دوران می‌کند و دو ضلع این زاویه دو خط ثابت عمود بر هم OBY و OAX را در A و B قطع می‌کنند. مکان هندسی مرکز نقل مثلث ABC را بیابید.

خط AB قطر دایرة $OACB$ است؛ پس نقطه وسط AB ، یعنی M ، روی d ، عمودمنصف وتر OC (که پاره خط ثابتی است) قرار دارد. پس مکان هندسی M خط d است و مکان هندسی G ، مرکز نقل مثلث ABC ، خط متناظر با خط d ، در تجانس ($C, 2 : 3$) است.

۱۰۸. تعریف. دو نقطه واقع بر یک ضلع مثلث را نقاط همنوا می‌نامیم، اگر از وسط این ضلع همفاصله باشند. خطوطی که از دو نقطه همنوا به رأس مقابله ضلع شامل این نقاط رسم می‌شوند، خطوط همنوا نامیده می‌شوند.

تمرین

از مثلثی اجزای زیر مفروض است؛ مثلث را رسم کنید.

$$m_b, A, a \quad (1)$$

$$m_b : m_c, h_a, a \quad (2)$$

$$m_b, h_b, m_b \quad (3)$$

$$m_b, c, b \quad (4)$$

(۱) اگر L مزدوج همساز مرکز نقل G از مثلث ABC نسبت به A و A' ، یعنی دو نقطه انتهای میانه AA' باشند، نشان دهید که $LA' = A'A$.

(۲) از مثلثی محل مرکز نقل، محل یک رأس و راستای دو ضلعی که از این رأس می‌گذرند، مفروض است. این مثلث را رسم کنید.

(۳) مکان هندسی مرکز نقل مثلث متغیری را بیابید که قاعده و دایرة محیطی آن ثابت است.

(۴) مثلث مکمل و مثلث پادمکمل مثلث مفروضی متجانس‌اند. مرکز و نسبت این تجانس را بیابید.

۹) رأسهای یک چهارضلعی را سه به سه برمی‌گزینیم و هر بار مرکز تقل مثلثی را که این سه رأس مشخص می‌سازند تعیین می‌کنیم. چهار مرکز تقل به دست آمده، رأسهای یک چهارضلعی متجانس با چهارضلعی مفروض هستند. مرکز و نسبت این تجانس را بیاید.

۱۰) تصویر نقطه P بر اضلاع AB ، AC و BC از مثلث ABC را به ترتیب، A' ، B' ، C' می‌نامیم. A'' و B'' و C'' به ترتیب نقاط وسط پاره خطهای $C'A'$ ، $B'C'$ و $A'B'$ هستند. از A'' و B'' و C'' عمودهایی بر اضلاع BC ، CA و AB از مثلث ABC رسم می‌کنیم. نشان دهید که این عمودها هم‌اند. راهنمایی. دو دسته خط عمود موجود در این مستله، خطوط متناظر یکدیگر در شکل‌های متجانس $A'B'C'$ و $A''B''C''$ هستند.

۱۱) اگر K و K' دو نقطه همنوا از ضلع BC در مثلث ABC باشند، و خط AK ضلع $'C$ از مثلث مکمل را در K'' قطع کند، نشان دهید که خط $K'K''$ از G ، مرکز تقل مثلث ABC ، می‌گذرد و $K'G : GK'' = 2 : 1$. راهنمایی. مثلث $'AKK'$ را در نظر بگیرید.

۱۲) L ، L' و M را دو جفت نقطه همنوا روی دو ضلع AC و AB از مثلث ABC در نظر بگیرید. L'' و M'' نقاط برخورد خطوط BL و CM با اضلاع $A'C'$ و $A'B'$ از $A'B'C'$ هستند. نشان دهید که مثلثهای $A'L''M''$ و $AL'M'$ دارای تجانس معکوس هستند. در شکل حاصل دیگر مثلثهای متجانس را نیز بیاید.

۱۳) از مثلثی یک زاویه، مجموع دو ضلع تشکیل دهنده این زاویه و میانه وارد بر یکی از ضلعها $(m_a + m_b + m_c)$ مفروض است مثلث را رسم کنید.

۱۰۶. قضیه. دو برابر مربع هر میانه مثلث، برابر است با مجموع مربعهای دو ضلع در بردارنده این میانه، منهای نصف مربع ضلع سوم.

اثبات این قضیه در یافتن مکان هندسی ۱۰، ۱۱، ۱۲ بیان شد.
بنابراین، با نمادهایی که معمولاً به کار می‌بریم،

$$2m_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{1}{2}a^2, \quad 2m_b^2 = c^2 + a^2 - \frac{1}{2}b^2 \\ 2m_c^2 = a^2 + b^2 - \frac{1}{2}c^2$$

۱۰۷. قضیه. مجموع مربعهای میانه‌های مثلث برابر است با سه چهارم مجموع مربعهای اضلاع مثلث (§ ۱۰۶).

۱۰۸. نتیجه. مجموع مربعهای فاصله‌های مرکز تقل مثلث از رأسهای مثلث برابر است با یک سوم مجموع مربعهای اضلاع.

۱۰۹. قضیه. اگر M نقطه دلخواهی در صفحه مثلث ABC ، با مرکز تقل G ، باشد داریم

$$MA^t + MB^t + MC^t = GA^t + GB^t + GC^t + 3MG^t$$

اگر D وسط پاره خط AG باشد، با اعمال فرمول میانه‌ها (§ ۱۰۶) به مثلثهای MDA' ، MBC' و MDA' داریم MAG

$$MB^t + MC^t = 2MA'^t + \frac{1}{2}BC^t$$

$$MD^t + MA'^t = 2MG^t + \frac{1}{2}DA'^t$$

$$MA^t + MG^t = 2MD^t + \frac{1}{2}AG^t$$

و $DA' = AG$ ؛ پس با ضرب تساوی دوم در ۲ و جمع کردن تساویها، پس از ساده کردن، خواهیم داشت

$$MA^r + MB^r + MC^r - 3MG^r = \frac{1}{2}BC^r + \frac{3}{2}AG^r$$

اکنون با در نظر گرفتن میانه‌های BB' و CC' می‌توانیم دو رابطه دیگر مشابه با رابطه بالا به دست آوریم، و با جمع کردن سه رابطه به دست می‌آوریم

$$3(MA^r + MB^r + MC^r - 3MG^r) = \frac{1}{2}(BC^r + CA^r + AB^r) + \frac{3}{2}(GA^r + GB^r + GC^r)$$

با ملاحظه اینکه (§۱۰۸)

$$BC^r + CA^r + AB^r = 3(GA^r + GB^r + GC^r)$$

به آسانی به نتیجه بیان شده خواهیم رسید.

۱۱۰. نتیجه. اگر نقطه M (قضیه ۱۰۹) بر O ، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC ، منطبق باشد، داریم

$$3R^r = GA^r + GB^r + GC^r + 3OG^r$$

یا

$$OG^r = R^r - \frac{1}{9}(a^r + b^r + c^r)$$

تمرین

۱) نشان دهید اگر دو نقطه از مرکز نقل یک مثلث همفاصله باشند، مجموع مربع فاصله‌هایشان از رأسهای مثلث برابرند، و برعکس.

۲) مثلثی را که a, b و c از آن مفروض است، رسم کنید.

۳) نقطه‌ای طوری حرکت می‌کند که مجموع مربع فاصله‌هایش از دو رأس مثلث مفروضی برابر است با مربع فاصله‌اش از رأس سوم آن مثلث. مکان هندسی این نقطه را بباید.

۴) وتر متغیری از یک دایرة ثابت از نقطه ثابتی با زاویه قائمه دیده می‌شود. ثابت کنید که مکان هندسی نقطه وسط این وتر یک دایرة است.

۵) اگر a, b ، و c اضلاع و S مساحت مثلث مفروضی باشند، نشان دهید مساحت مثلثی که سه رأس آن پای عمودهایی است که از مرکز نقل مثلث مفروض بر سه ضلع آن مثلث رسم می‌شود، عبارت است از

$$4S^r(a^r + b^r + c^r)/9a^r b^r c^r$$

۶) از مثلثی نسبتهای $b : a : c$ و مجموع میانه‌ها مفروض است؛ مثلث را رسم کنید.

۷) اگر $A''B''C''$ مثلث پادمکمل مثلث ABC ، و A' وسط BC باشد، نشان دهید که

$$A'B''^r - A'C''^r = 2(AB^r - AC^r)$$

د. دایرۀ‌های سه مماس

I- نیمسازها

۱۱۱. قضیه. اندازهٔ زاویهٔ متشکل از دو نیمساز داخلی (خارجی) مثلث برابر 90° به اضافهٔ (منهای) نصف زاویهٔ سوم مثلث است.

اگر I محل برخورد نیمسازهای داخلی BI و CI از مثلث ABC باشد، داریم

$$\angle BIC = 180^\circ - \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}C = 90^\circ + \frac{1}{2}A$$

اثبات برای نیمسازهای خارجی به همین ترتیب صورت می‌گیرد.

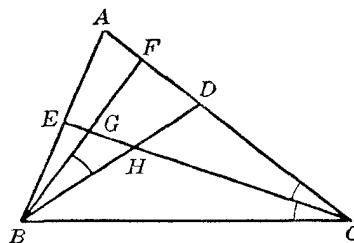
۱۱۲. قضیه. پای عمودی که از یک رأس مثلث بر نیمساز رأس دیگری از آن رسم می‌شود، روی ضلعی از مثلث میانک (مکمل) قرار دارد که روبروی آن رأس مثلث واقع است.

اگر P پای عمودی باشد که از رأس A بر نیمساز زاویه B رسم شده است، و Q محل برخورد AP و ضلع BC باشد، دو مثلث قائم الزاویه BPA و BPQ همنهشت‌اند و نقطه P وسط پاره خط AQ است؛ و به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

۱۱۳. نتیجه. پای چهار عمودی که از یک رأس مثلث بر چهار نیمساز داخلی و خارجی دو رأس دیگر رسم می‌شوند. همخاطراند.

۱۱۴. قضیه. بین دو زاویه مثلث زاویه‌ای که نیمساز داخلی کوتاهتری دارد بزرگتر است.

در مثلث ABC فرض کنید زاویه B بزرگتر از زاویه C باشد (شکل ۴۹)، و CE و BD و به ترتیب نیمسازهای داخلی این دو زاویه باشند. روی پاره خط AD نقطه F را طوری برمی‌گزینیم که $\angle FBD = \angle ACE = \angle ECB$. فرض کنید H و G به ترتیب، محل برخورد خطوط BD و BF با نیمساز CE باشند.



شکل ۴۹

دو مثلث FBD و FGC متشابه‌اند زیرا زاویه‌هایشان دو به دو با هم برابرند؛ پس،

$$BF : CF = BD : CG \quad (\text{الف})$$

ولی در مثلث BFC زاویه C کوچکتر از زاویه B است؛ پس $BF < CF$ و بنابر (الف)، $BD < CG < CE$ که قضیه را ثابت می‌کند.

۱۱۵. نتیجه. اگر دو نیمساز داخلی یک مثلث برابر باشند، آن مثلث متساوی‌الساقین است. نکته. این قضیه برای دو نیمساز خارجی برقرار نیست.

تمرین

۱) رأس مثلث متغیری ثابت است و ضلع مقابل این رأس، که طول آن متغیر است، روی خط راست ثابتی قرار دارد. نشان دهید که مکان هندسی تصویر رأس ثابت این مثلث متغیر روی هر یک از نیمسازهای دو زاویه دیگر یک خط راست است.

۲) نشان دهید که پای عمودهایی که از دو رأس یک مثلث بر نیمساز داخلی (یا خارجی) رأس سوم رسم می‌شود، وسط ضلع مقابل رأس سوم، رأسهایی یک مثلث متساوی‌الساقین هستند و دو ضلع متساوی این مثلث به ترتیب، با اضلاع گذرنده از رأس سوم مثلث مفروض موازی‌اند.

۳) نشان دهید که اگر خط واصل بین پای دو نیمساز داخلی یک مثلث با ضلع سوم مثلث موازی باشد، آن مثلث متساوی‌الساقین است.

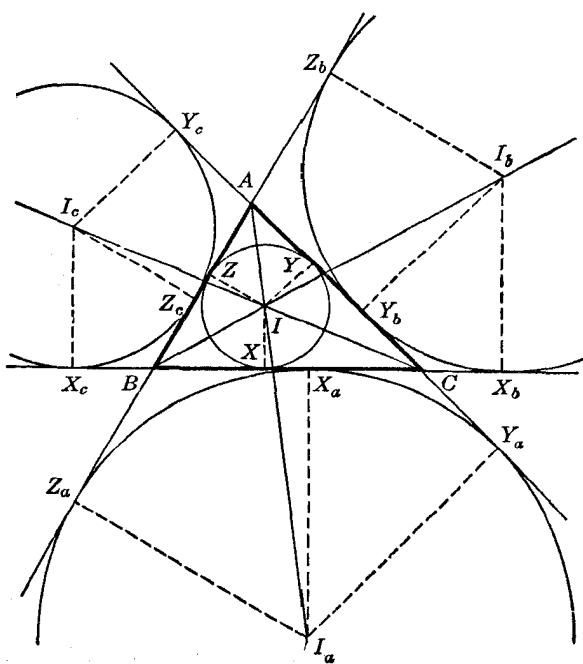
۴) نشان دهید که مجموع معکوسهای سه نیمساز داخلی هر مثلث از مجموع معکوسهای سه ضلع آن مثلث بزرگتر است (یعنی نشان دهید که $\frac{1}{t_a} + \frac{1}{t_b} + \frac{1}{t_c} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$).

II - مراکز دایره‌های سه مماس

۱۱۶. قضیه. سه نیمساز داخلی زاویه‌های هر مثلث همیگر را در یک نقطه، که مرکز داخلی مثلث است، قطع می‌کنند.

۱۱۷. قضیه. نیمسازهای خارجی هر دو زاویه مثلث، یکدیگر را روی نیمساز داخلی زاویه سوم آن مثلث قطع می‌کنند.

۱۱۸. تعریف. نقطه I_a از نیمساز داخلی AII_a (شکل ۵۰) در مثلث ABC ، که محل برخورد این نیمساز با دو نیمساز خارجی زاویه‌های B و C است، مرکز خارجی مثلث نسبت به رأس A ، یا به اختصار مرکز خارجی A ، نامیده می‌شود.



شکل ۵۰

نقطه I_a از سه ضلع مثلث به یک فاصله است و بنابراین، مرکز دایرة (I_a) است، که بر سه ضلع مثلث ABC مماس است. محل تماس این دایرة با دو ضلع AB و AC روی امتداد این اضلاع و محل تماس آن با ضلع BC داخل پاره خط BC است. به همین دلیل دایرة (I_a) و مرکز I_a ، راگاهی نسبت به ضلع BC ، یا رأس A ، یا زاویه A ، نیان می‌کنند.

دو نقطه I_b و I_c و دو دایرة (I_b) و (I_c) به ترتیب، مشابه نقطه I_a و دایرة (I_a) نسبت به زاویه‌های B و C ، یا نسبت به اضلاع CA و AB هستند (شکل ۵۰). دایرة محاطی داخلی یا دایرة داخلی (I) و سه دایرة محاطی خارجی یا دایرة‌های خارجی (I_a ، I_b ، I_c)،

و (۱) را گاهی چهار دایره سه مماس مثلث ABC و مرکزشان را مرکز سه مماس مثلث می‌نامند.

۱۱۹. نتایج. با توجه به دو قضیه قبل (§۱۱۶ و §۱۱۷) داریم

نتیجه ۱. چهار مرکز سه مماس هر مثلث روی شش خط، یعنی نیمسازهای زاویه‌های مثلث، قرار دارند.

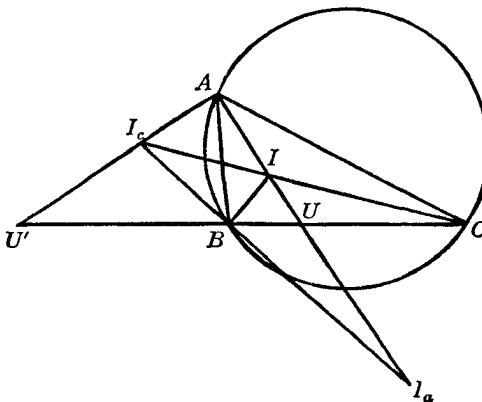
هر مرکز سه مماس روی سه خط واقع است، و روی هر خط دو مرکز سه مماس قرار دارد.

نتیجه ۲. اگر شش نقطه وسط کمانهای را که اضلاع مثلثی مفروض روی دایره محیطی آن مثلث جدا می‌کنند داشته باشیم، می‌توانیم مرکز سه مماس را تنها با استفاده از خطکش تعیین کنیم.

۱۲۰. قضیه. دو مرکز سه مماسی که روی یک نیمساز قرار دارند، آن نیمساز را به طور همساز تقسیم می‌کنند.

فرض کنید U نقطه برخورد AII_a و BC باشد (شکل ۵۱). I و I_c به ترتیب، نقاط برخورد BI و BI_a ، نیمسازهای زاویه B ، با قاعدة AU از مثلث BAU هستند، و قاعدة AU را به طور همساز تقسیم می‌کنند.

برای هر دو مرکز سه مماس دیگر نیز وضعیت مشابهی وجود دارد.



شکل ۵۱

۱۲۱. قضیه. در مثلث، هر مرکز سه مماس واقع بر یک نیمساز داخلی (خارجی) این نیمساز را به نسبت

مجموع (تفاضل) دو ضلع تشکیل دهنده زاویه در نظر گرفته شده به ضلع مقابل آن زاویه تقسیم می‌کند.

اگر U و U' به ترتیب، نقطه برخورد AI و AI_a با BC باشند (شکل ۵۱)، در مثلث ABC داریم

$$BU : CU = c : b, \quad BU' : CU' = c : b$$

$$BU : (BU + CU) = c : (b + c), \quad BU' : (CU' - BU') = c : (b - c)$$

$$BU : a = c : (b + c), \quad BU' : a = c : (b - c)$$

ولی در مثلثهای ABU و ABU' داریم

$$AI : IU = c : BU, \quad AI_c : U'I_c = c : BU'$$

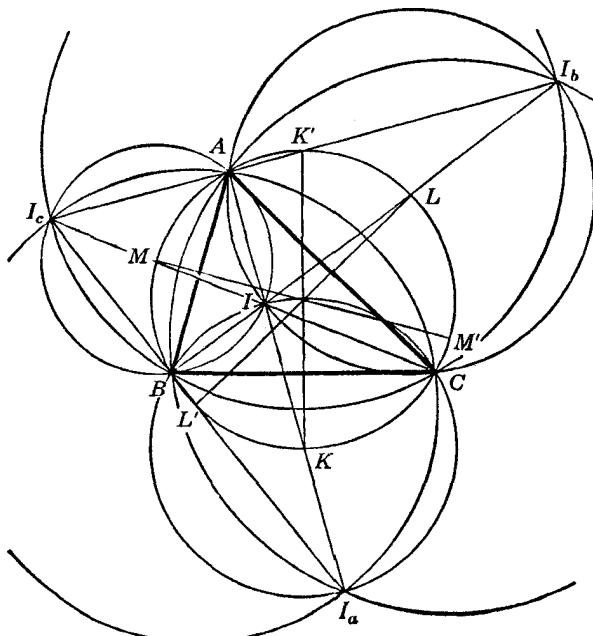
با اگر به جای BU و BU' مقادیر به دست آمده در بالا را بگذاریم به دست خواهیم آورد

$$AI : IU = (b + c) : a, \quad AI_c : U'I_c = (b - c) : a$$

برای نیمسازهای دیگر نیز وضعیت مشابهی وجود دارد.

۱۲۲. قضیه. هر دو مرکز سه مماس یک مثلث، دو انتهای قطری از یک دایره هستند؛ این دایره از آن دو رأس مثلث که با مرکز سه مماس در نظر گرفته شده همخط نیستند می‌گذرد.

(الف) مرکز داخلی I و مرکز خارجی I_a را در نظر بگیرید. دو نیمساز BI و BI_a ، و همچنین دو نیمساز CI و CI_a (شکل ۵۲) بر هم عمودند؛ پس اثبات قضیه تمام است.



شکل ۵۲

به علاوه، مرکز این دایره در نقطه برخورد عمود منصف BC و II_a قرار دارد، و این دو خط هر دو از K ، وسط آن کمان BC از دایرة محیطی ABC که حاوی رأس A نیست می‌گذرند؛ پس مرکز دایرة (II_a) بر K منطبق است.

(ب) دو مرکز خارجی I_b و I_c را در نظر بگیرید. نیمسازهای BI_b و BI_c ، همچنین نیمسازهای CI_b و CI_c بر هم عمودند؛ پس اثبات قضیه تمام است.

به علاوه می‌توان به همان روشی که در قسمت (الف) بیان شد نشان داد که مرکز دایرة ($I_b I_c$)، یعنی نقطه K' ، وسط آن کمان BC از دایرة محیطی مثلث ABC است که رأس A روی آن قرار ندارد.

نقاط K و K' (§ ۱۲۱) دو انتهای قطری از دایرة محیطی (O) از مثلث ABC هستند که بر ضلع BC عمود است. قطرهای LL' و MM' از دایرة (O) که بر اضلاع AB و AC عمودند، وضعیتی مشابه قطر KK' دارند؛ پس اثبات قضیه تمام است.

۱۲۳. قضیه. چهار مرکز سه مماس هر مثلث روی شش دایره قرار دارند. هر کدام از این دایره‌ها از دو رأس مثلث می‌گذرد و مرکز وسط یکی از کمانهای دایرة محیطی است که آن دو رأس دو انتهای آن هستند (شکل ۵۲).

۱۲۴. نتیجه. اگر وسط شش کمانی که اضلاع مثلث مفروضی روی دایره محیطی آن مثلث جدا می‌کنند مفروض باشد، می‌توان مراکز سه مماس را تها با پرکار تعیین کرد.

۱۲۵. قضیه. اگر مثلث متغیری قاعده و دایره محیطی ثابت داشته باشد، مراکز سه مماس مثلث دو دایره را می‌پیمایند. این دو دایره از دو رأس ثابت مثلث می‌گذرند و مراکزشان دو سر قطري از دایره محیطی هستند که بر ضلع ثابت عمود است.

اگر دایره محیطی (O) از مثلث ABC و ضلع BC مفروض باشد، دایره‌های (I_a) و (II_a) (§۱۲۲) بدون توجه به محل رأس A تعیین می‌شود؛ پس اثبات قضیه تمام است.

۱۲۶. قضیه. نقاط وسط شش پاره خط تعیین شده توسط چهار مرکز سه مماس هر مثلث، روی یک دایره قوار دارند که دایره محیطی مثلث است (شکل ۵۲).

۱۲۷. قضیه. حاصل ضرب فاصله‌های دو مرکز سه مماس هر مثلث از رأس همخط با آنها برابر است با حاصل ضرب دو ضلعی از مثلث که از آن رأس می‌گذرند.

اگر ضلع AB دایره (II_a) را در B' نیز قطع کند، داریم

$$AI \cdot AI_a = AB \cdot AB'$$

چون خطوط AB و AC با قطر a زاویه یکسان می‌سازند، دو وتر برابر ایجاد می‌کنند؛ و در نتیجه، $AB' = AC$ ؛ پس،

$$AI \cdot AI_a = AB \cdot AC$$

برای هر دو مرکز سه مماس دیگر نیز مطلب مشابهی صادق است.

۱۲۸. ملاحظه. دو مرکز سه مماس واقع بر نیمساز داخلی یک زاویه از مثلث، در یک طرف رأس این زاویه قرار دارند، ولی برای دو رأس واقع بر یک نیمساز خارجی عکس این مطلب صادق است.

۱۲۹. مسئله. از مثلثی قاعده، نیمساز داخلی زاویه مقابل قاعده و مجموع دو ضلع جانبی (s) مفروض است. مثلث رارسم کنید.

دو پاره خط s و a مفروض‌اند، پس نسبت $a : s$ معلوم است. پاره خط مفروض t_a را به طور داخلی و خارجی به نسبت معلوم $a : s$ تقسیم کنید تا نقاط I و I_a به دست آید (§۱۲۱)؛ در دایرة (II_a) که قطر آن است وتر BC را به طول مفروض a رسم کنید، به‌طوری که از نقطه U بگذرد (§۱۱)، مکان هندسی (A) ؛ ABC مثلث مطلوب است. مسئله دو جواب دارد.

۱۳۰. مسئله. از مثلثی محل سه نقطه برخورد امتداد نیمسازهای داخلی با دایره محیطی مفروض‌اند. مثلث رارسم کنید.

سه نقطه مفروض K ، L ، و M (شکل ۵۲) دایره محیطی (O) از مثلث مطلوب ABC را تعیین می‌کنند و نقاط کمانهایی هستند که اضلاع مثلث ABC روی دایرة (O) ایجاد می‌کنند. نقاط L و M مراکز دو دایره‌ای هستند که از نقطه A و مرکز داخلی I از مثلث ABC می‌گذرند (§۱۲۲)؛ پس AIK بر خط معلوم LM عمود است، یعنی A دومین نقطه برخورد دایرة (O) با خطی است که از نقطه مفروض K بر خط معلوم LM عمود می‌شود. خطوطی که از L و M به ترتیب بر KL و MK عمود می‌شوند دو رأس دیگر B و C از مثلث مطلوب ABC را روی دایرة (O) تعیین می‌کنند.

تمرین

- ۱) نشان دهید که نیمساز خارجی هر زاویه مثلث با خط واصل بین دو نقطه برخورد دایره محیطی با نیمسازهای خارجی (داخلی) دو زاویه دیگر مثلث، موازی است.
- ۲) از مثلثی نقاط برخورد نیمسازهای خارجی زاویه‌های مثلث با دایره محیطی مفروض آند. مثلث رارسم کنید.
- ۳) از مثلثی محل نقاط زیر مفروض است: مثلث رارسم کنید.
- ۴) از مثلثی قاعده، نیمساز خارجی زاویه مقابل به قاعده و تقاضل دو ضلع دیگر ($c - a, b - I_a$) مفروض است. مثلث رارسم کنید.
- ۵) از مثلثی دو ضلع و فاصله رأس مشترک این دو ضلع از مرکز داخلی مثلث (AI, c, b) مفروض است. مثلث رارسم کنید.

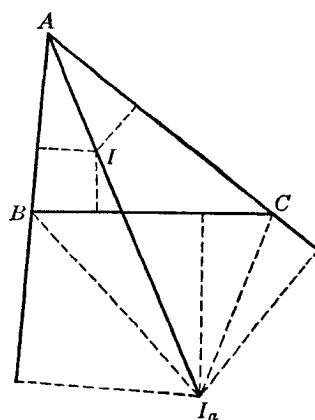
III - شعاعهای سه مماس

۱۳۱. نمادگذاری. شعاع دایرة محاطی داخلی یا به اختصار، شعاع داخلی مثلث را با r و شعاع دایره‌های محاطی خارجی، یا به اختصار، شعاعهای خارجی نسبت به رأسهای A, B ، و C از مثلث ABC را به ترتیب r_a, r_b ، و r_c نشان می‌دهیم، مگر اینکه خلاف آن را ذکر کنیم.
این چهار شعاع را شعاعهای سه مماس مثلث ABC می‌نامیم.

۱۳۲. قضیه. شعاع دایرة محاطی داخلی مثلث برابر است با مساحت مثلث تقسیم بر نصف محیط مثلث.
اگر S مساحت مثلث ABC باشد، داریم (شکل ۵۳)

$$\begin{aligned} S &= ABI + BCI + CAI \text{ مساحت } \\ &= \frac{1}{2}rc + \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb = \frac{1}{2}r(a + b + c) = pr \end{aligned}$$

۱۳۳. قضیه. شعاع دایرة محاطی خارجی مثلث برابر است با مساحت مثلث تقسیم بر تقاضل نصف محیط و ضلعی از مثلث که دایرة محاطی خارجی بر آن مماس است.



شکل ۵۳

(شکل ۵۳) داریم

$$S = ABI_a - BCI_a \text{ مساحت } - \text{مساحت } I_a$$

$$= \frac{1}{2}cr_a + \frac{1}{2}br_a - \frac{1}{2}ar_a = \frac{1}{2}r_a(b+c-a) = r_a(p-a)$$

۱۳۴. نتیجه ۱. حاصل ضرب چهار شعاع سه مماس مثلث با مربع مساحت آن مثلث برابر است.

$$rr_a r_b r_c = S^t : p(p-a)(p-b)(p-c) = S^t : S^t = S^t$$

۱۳۵. نتیجه ۲. معکوس شعاع داخلی برابر است با مجموع معکوس شعاعهای سه دایره محاطی خارجی مثلث.

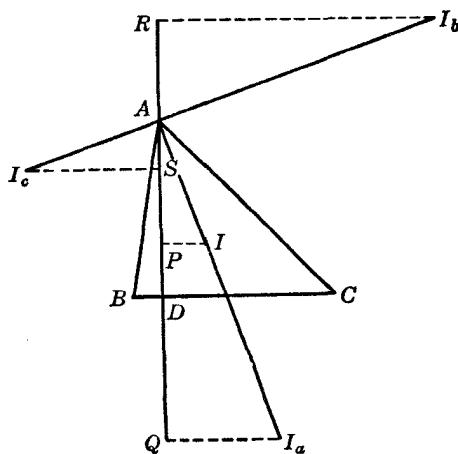
$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{(p-a) + (p-b) + (p-c)}{S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}$$

۱۳۶. قضیه. معکوس شعاع دایره محاطی داخلی مثلث برابر است با مجموع معکوس ارتفاعهای مثلث داریم

$$\begin{aligned} 2S &= 2pr = ah_a = bh_b = ch_c \\ 2p : \frac{1}{r} &= a : \frac{1}{h_a} = b : \frac{1}{h_b} = c : \frac{1}{h_c} \\ &= (a+b+c) : \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right) \\ 2p &= a+b+c \quad \text{قضیه اثبات می شود.} \end{aligned}$$

۱۳۷. نتیجه. مجموع معکوسهای شعاعهای خارجی مثلث برابر است با مجموع معکوسهای ارتفاعهای مثلث.

۱۳۸. قضیه. اگر روی یک خط دلخواه پاره خطهای P و Q را طوری جدا کنیم که D بین P و Q باشد، و A ، B ، C ، D ، S ، I ، I_a ، I_b و I_c را در صورتی که r شعاع داخلی و r_a یکی از شعاعهای خارجی مثلث ABC باشد، پاره خط AD برابر است با h_a ، ارتفاع وارد بر ضلعی از مثلث که r_a شعاع دایره محاطی خارجی نسبت به آن ضلع است.



شکل ۵۴

شکل ۵۴ پای عمودهایی هستند که از نقاط I و I_a بر ارتفاع AD از مثلث ABC رسم شده‌اند (شکل ۵۴)، و پاره خط AD را به طور همساز تقسیم می‌کنند (§۶۱) و $DQ = r_a$ ، $DP = r$ ؛ پس اثبات قضیه

تام است.

۱۳۹. نتیجه ۱. در هر یک از دسته‌های زیر اگر دو پاره‌خط مفروض باشند، می‌توان پاره‌خط سوم آن دسته را رسم کرد.

$$r, r_a, h_a; \quad r, r_b, h_b; \quad r, r_c, h_c$$

زیرا در صورتی که سه نقطه از چهار نقطه همساز A, P, D ، و Q مفروض باشند، نقطه چهارم را می‌توان تعیین کرد (§۶۰).

۱۴۰. نتیجه ۲. واضح است که نقطه D پاره‌خط QP را به طور داخلی به نسبت $r : r_a$ تقسیم می‌کند؛ پس (§۵۸)،

$$\begin{aligned} h_a &= 2(r_a + r)r_a : (r_a^r - r^r) \\ &= 2rr_a : (r_a - r) \end{aligned}$$

برای h_b و h_c نیز رابطه‌های مشابهی وجود دارد.

روش دیگر. داریم (§۱۳۲، §۱۳۳)

$$2S = ah_a = 2pr, \quad 2S = ah_a = 2(p-a)r_a$$

پس،

$$a(h_a - r) = (b+c)r, \quad a(h_a + r_a) = (b+c)r_a$$

یا

$$(h_a - r) : (h_a + r_a) = r : r_a$$

این رابطه هم برای h_b همان مقداری را به دست می‌دهد که در بالا به دست آوردمیم. نکته. نقاط P و Q ارتفاع AD را به طور داخلی و خارجی به نسبت زیر تقسیم می‌کنند (§۵۷) :

$$(r_a - r) : (r_a + r)$$

۱۴۱. قضیه. اگر روی خط دلخواهی پاره‌خط‌های $h_b = r_b$ و $h_c = r_c$ را طوری جدا کنیم که R و S در یک طرف D باشند، و A مزدوج همساز D نسبت به R و S را رسم کنیم (§۶۰)، در صورتی که r_b و r_c دو شعاع خارجی مثلث ABC باشند، پاره‌خط AD برابر است با ارتفاع وارد بر ضلع بین دو رأسی که شعاع‌های خارجی را نسبت به آنها در نظر گرفته‌ایم.

اگر R و S به ترتیب، پای عمودهایی باشند که از نقاط I_b و I_c بر AD رسم شده‌اند (شکل ۵۴)، R و S پاره‌خط AD را به طور همساز تقسیم می‌کنند (§۶۱)، و $r_b = DR = r_c$ ؛ پس اثبات قضیه تمام است.

۱۴۲. نتیجه ۱. در هر یک از دسته‌های زیر اگر دو پاره‌خط مفروض باشند، می‌توان پاره‌خط سوم آن دسته را رسم کرد:

$$h_a, r_b, r_c; \quad h_b, r_c, r_a; \quad h_c, r_a, r_b$$

زیرا در صورتی که سه نقطه از چهار نقطه همساز D, S, A ، و R مفروض باشند، می‌توانیم نقطه چهارم را تعیین کنیم.

۱۴۳. نتیجه ۲. پاره‌خط $RS = r_b - r_c$ را به طور خارجی به نسبت $RD : DS = r_b : r_c$ تقسیم می‌کند. پس (§۵۸)،

$$\begin{aligned} h_a &= \frac{1}{2}(r_b - r_c)r_b r_c : (r_b^2 - r_c^2) \\ &= \frac{1}{2}r_b r_c : (r_b + r_c) \end{aligned}$$

دو رابطه مشابه هم برای h_b و h_c وجود دارد.

روش دیگر. داریم (§۱۳۳)

$$2S = ah_a = (a + c - b)r_b, \quad 2S = ah_a = (a + b - c)r_c$$

پس،

$$a(h_a - r_b) = (c - b)r_b, \quad a(r_c - h_a) = (c - b)r_c$$

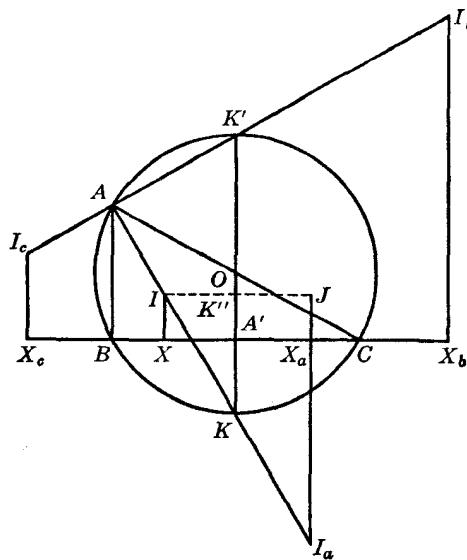
با

$$(h_a - r_b) : (r_c - h_a) = r_b : r_c$$

این رابطه نیز برای h_a همان مقداری را به دست می‌دهد که در بالا به دست آوردهیم.
نکته. نقاط S و R ارتفاع AD را به طور داخلی و خارجی به نسبت زیر تقسیم می‌کند (§۵۷) :

$$(r_b - r_c) : (r_b + r_c)$$

۱۴۴. معلومات. فرض کنید A' وسط ضلع BC باشد (شکل ۵۵) و X_a, X_b, X_c پای عمودهایی باشند که از رأسهای سه مماس I, I_a, I_b, I_c بر ضلع BC از مثلث ABC رسم می‌شوند. فرض کنید خطی که از I به موازات BC رسم می‌شود قطر KK' را در K'' و امتداد X_a را در J قطع کند.



شکل ۵۵

(الف) نقطه K وسط ضلع KK'' از مثلث $II_a I$ است، و در نتیجه، داریم

$$KA' + A'K'' = KK'' = \frac{1}{2}I_a J = \frac{1}{2}(I_a X_a + X_a J)$$

$$A'K'' = X_a J = r \quad \text{و}$$

$$A'K = \frac{1}{2}(r_a - r) \quad \text{پس،}$$

حال اگر R و a مفروض باشند، پاره خط $A'K$ تعیین می‌شود؛ پس

$$R, a, r_a - r$$

یک دسته معلومات مثلث است.

(ب) چون نقطه K' وسط ضلع $I_b I_c X_c X_b$ از ذوزنقه $I_b I_c X_c X_b$ است، داریم

$$A'K' = \frac{1}{2}(I_b X_b + I_c X_c) = \frac{1}{2}(r_b + r_c)$$

پس دسته معلومات زیر را داریم:

$$R, a, r_b + r_c$$

با در نظر گرفتن اضلاع CA و AB از مثلث و قطراهای از دایره محیطی که بر این اضلاع عمودند، نتایج مشابهی را به دست می‌آوریم.

۱۴۵. نتیجه. مجموع شعاع‌های خارجی مثلث برابر است با مجموع شعاع داخلی و چهار برابر شعاع دایره محیطی.

در واقع، داریم $.KK' = KA' + A'K'$

۱۴۶. قضیه کارنو. مجموع فاصله‌های مرکز دایره محیطی از سه ضلع مثلث برابر است با مجموع شعاع دایره محیطی و شعاع دایره محاطی داخلی مثلث.
داریم (شکل ۵۵)

$$OA' = OK - A'K = R - \frac{1}{2}(r_a - r)$$

و به طور مشابه،

$$OB' = R - \frac{1}{2}(r_b - r), OC' = R - \frac{1}{2}(r_c - r)$$

با جمع کردن این سه پاره خط و در نظر گرفتن نتیجه ۱۴۵، نتیجه بیان شده را به دست می‌آوریم.
نکته. در مورد مثلثی که زاویه منفرجه دارد، باید فاصله مرکز دایره محیطی از ضلع مقابل زاویه منفرجه را منفی در نظر گرفت.

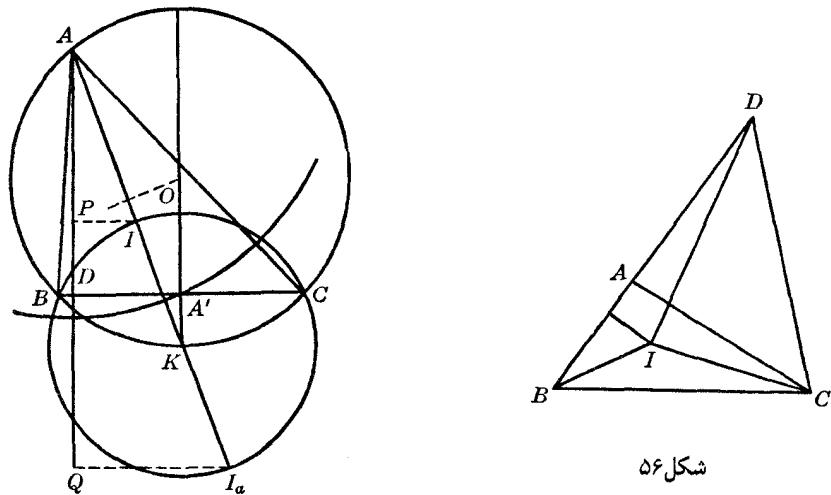
۱۴۷. مسئله. از مثلثی یک ضلع، شعاع دایره محیطی و شعاع دایره محاطی داخلی (a, R, r) مفروض است. مثلث را رسم کنید.

در دایره‌ای به شعاع R و تر a $BC = BC$ را رسم کنید. اکنون زاویه A مشخص می‌شود (§۶۹)، و از نقطه I ضلع BC با زاویه $\frac{1}{2}A + 90^\circ$ دیده می‌شود (§۱۱۱)؛ پس یک مکان هندسی برای I داریم (§۱۱)، مکان هندسی l . خطی به موازات BC و به فاصله r از آن مکان هندسی دومی برای I است. مسئله ممکن است دو جواب داشته باشد.

۱۴۸. مسئله. مثلثی را که یک زاویه قاعده، مجموع دو ضلع جانبی و شعاع دایره محاطی داخلی از آن $(B, b + c, r)$ مفروض آند رسم کنید.

کرد، زیرا قاعده، $BD = b + c$ ، زاویه $IBD = \frac{1}{2}B$ و ارتفاع $BD = r$ معلوم اند. حال، $\angle DCI = \angle DCA + \angle ACI = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C = 90^\circ - \frac{1}{2}B$

پس C روی دایره‌ای که DI یک وتر آن است قرار دارد (§۱۱، مکان هندسی ۷). از نقطه B علاوه بر BD مماس دیگری نیز می‌توان بر دایرة (I, r) رسم کرد؛ این مماس دایره را در رأس C از مثلث مطلوب ABC قطع می‌کند. رأس سوم A از مثلث ABC نقطه برخورد BD و مماس دومی است که از C بر دایرة محاطی (I, r) رسم می‌شود.



شکل ۵۶

شکل ۵۷

۱۴۹. مسئله. از متنشی شعاع داخلی، شعاع خارجی نسبت به یک ضلع و میانه وارد بر آن ضلع (r_a, r_a, m_a) مفروض آند. مثلث رارسم کنید.

روی خط دلخواهی $DP = r$ (شکل ۵۷) را در جهت مخالف DP جدا کنید. اگر مزدوج همساز D نسبت به P و Q باشد، پاره خط AD ارتفاع وارد بر ضلع BC از مثلث مطلوب ABC خواهد بود (۸۱۳۸).

فرض کنید دایرة (A, m_a) خطی راکه در D بر AD عمود است در A' قطع کند؛ در نقطه A' خطی DA' عمود کنید و روی آن در همان طرف DA' که DQ قرار دارد پاره خط $\frac{1}{2}(r_a - r) A'K =$ برابر باشد. امتداد AK را در مرکز دایرة ABC محيطی مثلث ABC قطع می‌کند. الف) را جدا کنید. عمود منصف $A'K$ را در A' قطع می‌کند.

۱۵۰. مسئله. از مثلثی محل نقاط I و I_1 و طول ارتفاع h و نسبت $r : r_1$ مفروض آند. مثلث را رسم کنید. واضح است که نقاطی که پاره خط II را به طور داخلی و خارجی به نسبت مفروض تقسیم می‌کنند، رأس A و نقطه برخورد ضلع BC و نیمساز AI ، یعنی نقطه U ، هستند. معماشی که از U بر دایره (A, h) رسم می‌شود، دایره‌ای را که II قطر آن است در دو رأس دیگر مثلث مطلوب ABC قطع می‌کند. مسئله ممکن است دو یا یک جواب داشته باشد، یا جواب نداشته باشد.

۱۵۱. مسئله. از مثلث قاعده، ارتفاع وارد بر قاعده و مجموع دو ضلع دیگر $(a, h_a, b + c)$ مفروض آند. مثلث را رسم کنید.

رابطه (§۱۳۲)

$$ah_a = (a + b + c)r$$

r را به عنوان جزء چهارم تناسب تعیین می‌کند، و با معلوم بودن h_a و r می‌توان a را تعیین کرد (§۱۳۹). همچنین a و $r - r_a$ قطر دایره محیطی را تعیین می‌کنند (§۱۴۶). اکنون به آسانی می‌توان مثلث را رسم کرد، زیرا a و R h_a را می‌دانیم.

تمرین

مثلثی را که اجزای زیر از آن مفروض آند رسم کنید:

$$r, R, h_a \quad (۹)$$

$$r_a, B - C, h_a \quad (۵)$$

$$S, 2p, a \quad (۱)$$

$$2p, r, r_a \quad (۱۰)$$

$$(r_a) \text{ با } r, t_a, h_a \quad (۶)$$

$$r_a, r, R \quad (۲)$$

$$b + c, r, h_a \quad (۷)$$

$$a, R, r_a \quad (۳)$$

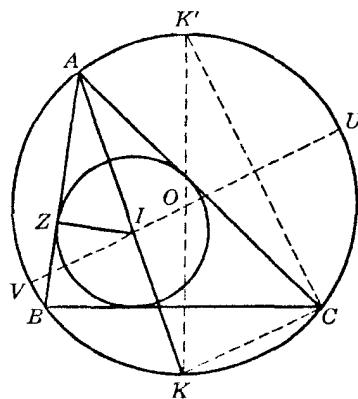
$$b + c, r_a, h_a \quad (۸)$$

$$r, B - C, h_a \quad (۴)$$

۱۱) r_c, r_b, r_c, A . راهنمایی: به کمک خطوط موازی اضلاع زاویه A به آسانی می‌توان مراکز I_b و I_c را روی نیمساز خارجی A تعیین کرد.

$$r_c, r_b, a \quad (۱۲)$$

۱۳) نشان دهید در مثلث متغیری که دایره محاطی داخلی ثابتی دارد، مجموع معکوسهای سه شعاع خارجی ثابت است.



شکل ۵۸

۱۵۲. قضیة اویلر. فاصله d بین مرکز دایره محیطی و مرکز دایره محاطی داخلی مثلث از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$d^2 = R(R - 2r)$$

که در آن R و r به ترتیب شعاع دایره محیطی و شعاع دایره محاطی داخلی هستند.

داریم (شکل ۵۸)

$$AI \cdot IK = IU \cdot IV = (R + d)(R - d)$$

و (§ ۱۲۲ الف)

$$IK = KC = BK$$

پس،

$$R^r - d^r = AI \cdot KC \quad (\text{الف})$$

از طرف دیگر دو مثلث قائم الزاویه AIZ و $KK'C$ متشابه‌اند، زیرا $\angle IAZ = \angle K'K$ ؛ پس،

$$AI \cdot CK = IZ \cdot KK' = 2Rr \quad (\text{ب})$$

و رابطه بیان شده از (الف) و (ب) به دست می‌آید.

۱۵۳. قضیه. فاصله مرکز دایره محیطی از مراکز دایره‌های محاطی خارجی I_a, I_b, I_c در مثلث ABC از روابط زیر به دست می‌آید:

$$OI_a^r = OI_a^r = R(R + 2r_a), \quad OI_b^r = R(R + 2r_b), \quad OI_c^r = R(R + 2r_c)$$

اثبات شبیه اثبات قبل است (§ ۱۵۲).

۱۵۴. نتیجه. باعمال رابطه میانه‌ها (§ ۱۰۶) به دو مثلث OII_a و $OI_b I_c$ خواهیم داشت

$$OI^r + OI_a^r = 2OK^r + \frac{1}{2}II_a^r, \quad OI_b^r + OI_c^r = 2OK'^r + \frac{1}{2}I_b I_c^r$$

و با استفاده از رابطه‌های قبل (§ ۱۵۲) روابط بیان شده به دست می‌آیند.

برای پاره خط‌های $I_b I_c, II_a, I_a I_b$ نیز رابطه‌های مشابهی وجود دارد.

۱۵۵. قضیه. اگر خط‌المرکزین دو دایره مفروض (O, R) و (I, r) ، که آنرا d می‌نامیم، در رابطه زیر صدق کند:

$$OI^r = d^r = R(R - 2r)$$

تعدادی نامتناهی مثلث را می‌توان بر دایره (I, r) محیط کرد که در دایره (O, R) محاط باشد.
از نقطه دلخواه A (شکل ۵۸) روی دایره (O, R) دو مسas AB و AC را بر دایره (I, r) رسم می‌کنیم. خط AI نیمساز زاویه BAC است، و از رابطه مفروض نتیجه می‌شود

$$AI \cdot IK = 2Rr$$

با توجه به مثنهای متشابه AIZ و $KK'C$ داریم

$$AI \cdot CK = 2Rr$$

و بنابراین، $IK = KC$. پس I مرکز دایرة محاطی داخلی مثلث ABC است (§ ۱۲۲ الف)، که قضیه را اثبات می‌کند.

تمرین

۱) نشان دهید اگر شعاع دایرة محاطی داخلی مثلثی برابر نصف شعاع دایرة محیطی آن مثلث باشد، مثلث متساوی‌الاضلاع است.

۲) از مثلثی شعاع دایرة محاطی داخلی، شعاع دایرة محیطی و تناضل دو زاویه آن ($B - C, R, r$) مفروض است؛ مثلث را رسم کنید. راهنمایی. مثلث AIO را در نظر بگیرید.

۳) نشان دهد اگر مثلث متغیری دایره محیطی ثابت و دایره محاطی داخلی ثابت داشته باشد، مجموع شعاعهای خارجی مثلث ثابت است.

(۴) رابطه‌های زیر را ثابت کنید:

$$OI^r + OI_a^r + OI_b^r + OI_c^r = 12R^r \quad (\text{الف})$$

$$II_a^r + II_b^r + II_c^r = 8R(2R - r) \quad (\text{ب})$$

$$I_a^r I_b^r + I_b^r I_c^r + I_c^r I_a^r = 8R(4R + r) \quad (\text{ج})$$

۵) اگر JJ' قطری از دایره محاطی داخلی باشد که بر قطری از آن دایره که از O مرکز دایره محیطی مثلث، می‌گذرد عمود است، نشان دهد که محیط مثلث OJJ' با قطر دایره محیطی مثلث مفروض برابر است.

IV. نقاط تماس

۱۵۶. نمادگذاری. نقاط تماس چهار دایره سه مماس (I) ، (I_a) ، (I_b) و (I_c) از مثلث ABC با ضلع BC را X ، X_a ، X_b و X_c می‌نامیم مگر اینکه خلاف آنرا ذکر کنیم. برای اضلاع CA و AB به ترتیب حروف Y و Z را به کار می‌بریم.

۱۵۷. قضیه. فاصله هر رأس مثلث از نقطه تماس دایره محاطی داخلی با ضلعی که از آن رأس می‌گذرد برابر است با نصف محیط مثلث منهاج طول ضلع مقابل آن رأس.

(۵۹) داریم (شکل ۵۹)

$$AZ = AY, \quad BZ = BX, \quad CX = CY$$

و

$$\begin{aligned} AZ + AY &= AB + AC - BZ - CY \\ &= AB + AC - BX - CX \\ &= AB + AC - BC = 2p - 2a \end{aligned}$$

پس،

$$AZ = AY = p - a$$

به طور مشابه،

$$BZ = BX = p - b, \quad CX = CY = p - c$$

۱۵۸. قضیه. فاصله هر رأس مثلث از نقطه تماس دایره محاطی خارجی نسبت به آن رأس با ضلعی که از آن رأس می‌گذرد برابر نصف محیط مثلث است.

(۵۹) داریم (شکل ۵۹)

$$AZ_a = AY_a, \quad BX_a = BZ_a, \quad CX_a = CY_a$$

و

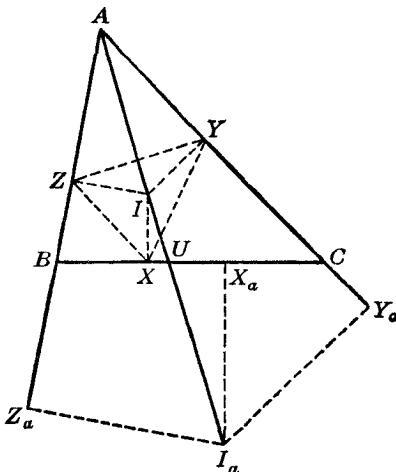
$$\begin{aligned} AZ_a + AY_a &= AB + AC + BZ_a + CY_a \\ &= AB + AC + BX_a + CX_a \\ &= AB + AC + BC = 2p \end{aligned}$$

پس،

$$AZ_a = AY_a = p$$

به طور مشابه،

$$BX_b = BZ_b = CX_c = CY_c = p$$



شکل ۵۹

۱۵۹. نتیجه. داریم (شکل ۵۹)

$$BX_a = BZ_a = AZ_a - AB = p - c$$

$$CX_a = CY_a = AY_a - AC = p - b$$

برای دو ضلع دیگر مثلث نیز وضع مشابهی داریم.

۱۶۰. قضیه. نقاط تمسّق هر ضلع مثلث با دایره محاطی داخلی و دایره محاطی خارجی نسبت به آن ضلع
دو نقطه همنوا هستند (§ ۱۰۵).

(§ ۱۵۹، § ۱۵۷) در واقع، داریم

$$BX = p - b, \quad CX_a = p - b$$

۱۶۱. نتیجه. داریم

$$XX_a = BC - BX - CX_a = a - 2(p - b) = b - c$$

به طور مشابه،

$$YY_b = a - c, \quad ZZ_c = a - b$$

۱۶۲. قضیه. (شکل ۵۹) $ZZ_a = YY_a = a$

داریم

$$ZZ_a = BZ + BZ_a = p - b + p - c = 2p - (b + c) = a$$

برای دو ضلع دیگر مثلث نیز نتیجه مشابهی صادق است.

۱۶۳. قضیه. دو نقطه تمسas هر ضلع مثلث با دو دایره محاطی خارجی نسبت به دو ضلع دیگر دو نقطه همنوا هستند. فاصله بین این دو نقطه تمسas با مجموع دو ضلع دیگر برابر است.
 داریم (شکل ۶۰)

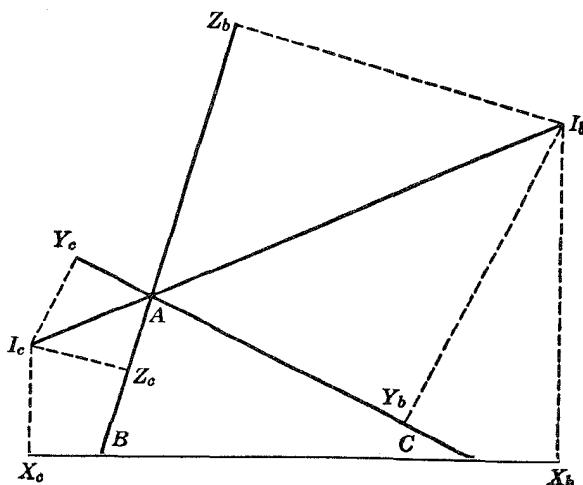
$$BX_c = CX_c - CB = p - a, \quad CX_b = BX_b - BC = p - a$$

پس نقاط X_b و X_c همنوا هستند.

$$X_b X_c = X_b C + BC + BX_c = (p - a) + a + (p - a) = b + c$$

که اثبات بخش دوم قضیه به حساب می‌آید.

برای دو ضلع دیگر مثلث ABC نیز نتیجه مشابهی صادق است.



شکل ۶۰

۱۶۴. قضیه. $Y_b Y_c = Z_b Z_c = a$ (شکل ۶۰)
 داریم

$$Y_b Y_c = CY_c - CY_b = p - CX_b = p - (p - a) = a$$

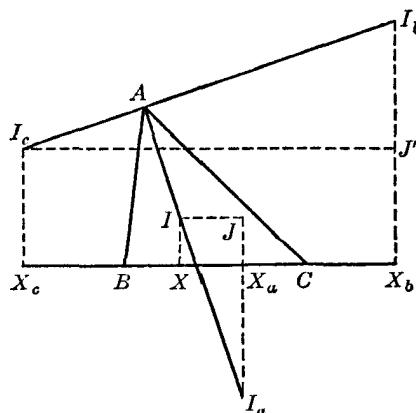
۱۶۵. پیشنهاد. شش نقطه B , C , X_a , X_b , X_c , و I_a روی ضلع BC , X_a ، X_b ، X_c ، و I_a را پاره خط $\frac{D}{3} = 15$ پاره خط را تعیین می‌کنند. پیشنهاد می‌کنیم خواننده این ۱۵ پاره خط را همراه اندازه هر کدام بر حسب اضلاع مثلث بنویسد. برای پاره خطهای روی اضلاع دیگر مثلث ABC نیز می‌توان کار مشابهی را انجام داد.

۱۶۶. معلومات. فرض کنید خطی که از I به موازات BC رسم می‌شود، امتداد $I_a X_a$ را در J قطع کند (شکل ۶۱). داریم (§۷۳)

$$\angle JI_a I = \angle XII_a = \frac{1}{3}(B - C)$$

پس با در نظر گرفتن مثلث قائم الزاویه XII_a ، دسته معلومات زیر را داریم:

$$b - c, B - C, r_a + r$$



شکل ۶

۱۶۷. معلومات. فرض کنید خطی که از I_c به موازات BC رسم می‌شود، $I_b X_b$ را در J' قطع کند (شکل (۶۱). داریم $(\S ۸۰^\circ)$) .

$$\angle I_b I_c J' = \frac{1}{2}(B - C)$$

پس با در نظر گرفتن مثلث قائم‌الزاویه $I_b I_c J'$ ، دسته معلومات زیر را داریم:

$$b + c, B - C, r_b - r_c$$

۱۶۸. قضیه. نسبت مساحت یک مثلث به مساحت مثلثی که توسط نقاط تماس اضلاع مثلث با دایره محاطی داخلی آن تعیین می‌شود، برابر است با نسبت قطر دایره محیطی مثلث به شعاع دایره محاطی داخلی آن.

در دو مثلث ABC و IYZ (شکل ۵۹) زاویه‌های A و I مکمل یکدیگرند؛ پس،

$$IYZ : ABC = r^i : bc = r^i a : abc$$

روابط مشابهی نیز برای مثلثهای IZX و IXY داریم. با جمع کردن این سه رابطه خواهیم داشت

$$XYZ : ABC = r^i(a + b + c) : abc$$

پس با توجه به § ۱۳۲ و § ۸۶ نتیجه بیان شده به دست می‌آید. به عنوان تمرین، قضیه‌های معادلی را برای نقاط تماس با دایره‌های محاطی خارجی بیان، و آنها را ثابت کنید.

۱۶۹. مسئله. از مثلث محیط، یک زاویه و نیمساز داخلی آن زاویه (t_e , A , $2p$) مفروض است. مثلث را رسم کنید.

مسئله $AI_a Z_a$ (شکل ۵۹) را می‌توان رسم کرد. روی AI_a پاره خط AU را برابر t_e جدا کنید، و دایره $(I_a, I_a Z_a)$ را رسم کنید. خط AZ_a ، مماس دومی که از A بر این دایره رسم می‌شود، و مماسی که از نقطه U بر این دایره رسم می‌شود، سه ضلع مثلث مطلوب هستند.

مسئله ممکن است دو یا یک جواب داشته باشد، یا جواب نداشته باشد.

۱۷۵. مسئله. مثلثی را که از آن، یک زاویه، مجموع دو ضلع این زاویه و شعاع دایره محاطی داخلی $(r, b + c = s, A)$ مفروض آند، رسم کنید.

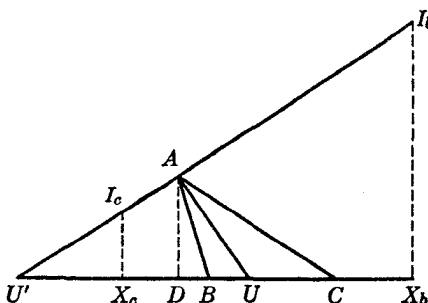
مثلث AIZ (شکل ۵۹) را می‌توان رسم کرد. پس داریم $AZ = p - a = \frac{1}{2}(b + c - a)$ ، و چون $b + c$ مفروض است، a را داریم و مسئله به رسم مثلثی با مفروض بودن (a, A, r) تبدیل می‌شود.

۱۷۶. مسئله. مثلثی را که ناقابل دو ضلع جانبی، یک زاویه قاعده و شعاع دایره محاطی داخلی آن $(r, B, b - c)$ مفروض آند، رسم کنید.

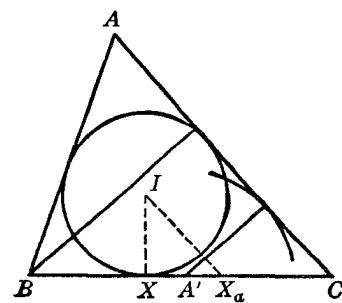
مثلث BIX (شکل ۵۹) را می‌توان رسم کرد. BX را به اندازه $(c - b)$ امتداد می‌دهیم و A' ، نقطه وسط BC ، را به دست می‌آوریم (§۱۶۱)؛ پس رأس C تعیین می‌شود. دو مماسی که از نقاط B و C بر دایره (I, r) رسم می‌شوند، در رأس سوم مطلوب ABC همیگر را قطع می‌کنند.

۱۷۷. مسئله. مثلثی را که ناقابل دو ضلع، ارتفاع وارد بر یکی از این اضلاع و شعاع دایره محاطی داخلی آن $(r, h_b, b - c)$ مفروض آند، رسم کنید.

مثلث IXX_a (شکل ۶۲) را می‌توان رسم کرد. چون نقطه A' ، وسط XX_a ، نقطه وسط BC نیز هست، خطی که از A' بر AC عمود می‌شود برابر $\frac{1}{3}h_b$ است. دایره‌های (I, r) و $(A', \frac{1}{3}h_b)$ را رسم کنید. یک مماس مشترک خارجی این دو دایره، XAX_a را در رأس C از مثلث مطلوب قطع می‌کند، و نقطه متقابن C نسبت به A' رأس B از مثلث مطلوب است؛ رأس سوم A محل برخورد مماس مشترک بیان شده در بالا و مماسی است که از B بر (I, r) رسم می‌شود.



شکل ۶۳



شکل ۶۲

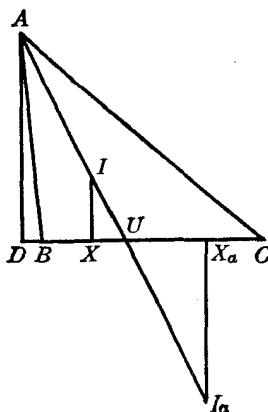
۱۷۸. مسئله. مثلثی را رسم کنید که از آن، نیمسازهای داخلی و خارجی یک زاویه، و مجموع اضلاع آن زاویه $(b + c, t_a^e, t_b^e)$ مفروض است.

فرض کنید ABC (شکل ۶۳) مثلث مطلوب باشد. مثلث قائم‌الزاویه $'UUU'$ را می‌توان رسم کرد، و ارتفاع AD از مثلث ABC ارتفاع $'UUU'$ نیز هست. مراکز سه مماس ${}_b^e$ و ${}_c^e$ توسط نقاط A و $'U'$ به صورت همساز از هم جدا می‌شوند، پس نقاط ${}_b^e X_c$ و ${}_c^e X_b$ نیز توسط نقاط D و ${}'_U$ به طور همساز از هم جدا می‌شوند (§۱۶۳) ولی ${}_b^e X_c = {}_c^e X_b = b + c$ (§۱۶۳)؛ پس نقاط ${}_b^e X_c$ و ${}_c^e X_b$ را می‌توان با قرار دادن پاره خط مفروض $b + c$ روی خط UDU' ، به طوری که با پاره خط DU' مزدوج همساز باشد (§۶۶) به دست آورد.

دایره‌های ${}_b^e I_c$ و ${}_c^e I_b$ را نقاط تلاقی خط AU' با عمودهایی که در ${}_b^e X_c$ و ${}_c^e X_b$ بر UU' رسم می‌شوند فرض کنید. مماسهای مشترک داخلی این دو دایره از نقطه A می‌گذرند.

و نقاط تلاقی آنها با UU' دو رأس دیگر مثلث مطلوب ABC را به دست می‌دهند.

۱۷۴. مسئله. از مثلث محل یک رأس و محل نقاط تمسّع ضلع مقابل به آن رأس با دایرهٔ محاطی داخلی و دایرهٔ محاطی خارجی نسبت به آن ضلع، مفروض است. مثلث را رسم کنید.



شکل ۶۴

فرض کنید مثلث ABC (شکل ۶۴) مثلث مطلوب باشد. مراکز سه محاس I و I_a توسط نقاط A و X_a به صورت همساز از هم جدا می‌شوند ($\S 120^\circ$): پس D ، پای عمود AD که از نقطه A بر قاعده XX_a می‌شود توسط نقاط X و X_a به طور همساز از نقطه U جدا می‌شود، و بنابراین، نقطه U را می‌توان رسم کرد ($\S 60^\circ$).

فرض کنید عمودهایی که در نقاط X و X_a بر XX_a رسم می‌شوند، خط AU را در I و I_a قطع کنند. مساهای مشترک خارجی دایره‌های (I, IX) و $(I_a, I_a X_a)$ از نقطه A می‌گذرند و محل تلاقی آنها با XX_a دو رأس دیگر مثلث مطلوب ABC را به دست می‌دهند.

تمرین

مثلثی را که اجزای زیر از آن مفروض‌اند، رسم کنید:

$$r_a, r, b - c \quad (3)$$

$$r_a, R, 2p \quad (2)$$

$$r_a, A, b + c \quad (6)$$

$$r_a, h_a, b - c \quad (5)$$

$$r, A, 2p \quad (1)$$

$$r_c, r_b, b + c \quad (4)$$

$$r_c, B - C, b + c \quad (7)$$

$$r, h_b + h_c, b + c \quad (8)$$

$$r, h_c - h_b, b - c \quad (9)$$

$$r, h_c, b + c \quad (10)$$

۱۱) از مثلث محل یک رأس و محل دو نقطه تمسّع ضلع مقابل آن رأس با دایره‌های محاطی خارجی نسبت به دو ضلع دیگر، مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۱۲) نشان دهید خطی که یک رأس مثلث را به نقطه تمسّع ضلع مقابل آن رأس با دایرهٔ محاطی خارجی نسبت به آن ضلع وصل می‌کند، محیط مثلث را نصف می‌کند.

۱۳) نشان دهید که سه دایره‌ای که مراکزشان رأسهای یک مثلث‌اند، و هر کدام از یکی از نقاط تمسّع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث با اضلاع مثلث می‌گذرد، بر یکدیگر مماس‌اند.

۱۴) نشان دهید طول پاره‌خطی که از یک مرکز سه مماس به موازات یک ضلع مثلث رسم می‌شود، برابر است

- با مجموع (یا تقابل) دو پاره خطی که بین این دو خط موازی روی دو ضلع دیگر مثلث ایجاد می‌شود.
- ۱۵) سه خطی که به موازات سه ضلع یک مثلث بر دایره محاطی داخلی مثلث مماس می‌شوند سه مثلث کوچک ایجاد می‌کنند. نشان دهید که مجموع محیطهای این سه مثلث برابر است با محیط مثلث مفروض.
- ۱۶) از یک نقطه مفروض خطی رسم کنید که با اضلاع زاویه‌ای مفروض، مثلثی با محیط مفروض تشکیل دهد.

۱۷) رابطه $rS \cdot BX \cdot CY = rS$ را ثابت کنید.

- ۱۸) از مثلثی، محل مرکز دایرة محاطی خارجی، I_a ، و محل خط نامحدود s که ضلع BC متناظر با I_a روی آن واقع است، و طول شعاع دایرة محاطی داخلی، r ، و طول شعاع دایرة محاطی، R ، مفروض‌اند. مثلث را رسم کنید. راهنمایی: فاصله I_a تا s با r_a برابر است؛ پس I_a معلوم است (§۱۵۴)، و نقطه وسط II_a به فاصله $\frac{1}{2}(r_a - r)$ از r قرار دارد (§۱۴۴ الف).

- ۱۹) نشان دهید که (الف) مجموع اضلاع زاویه قائمه یک مثلث قائم‌الزاویه منتهای وتر آن مثلث با قطر دایرة محاطی داخلی آن مثلث برابر است؛ (ب) ارتفاع وارد بر وتر یک مثلث قائم‌الزاویه برابر است با مجموع شعاع داخلی، و شعاعهای داخلی دو مثلثی که این ارتفاع در مثلث ایجاد می‌کند.

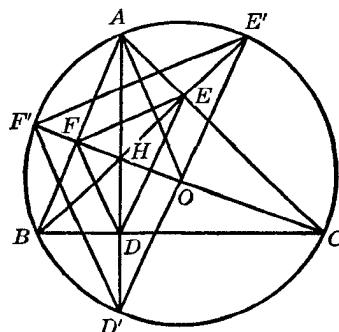
- ۲۰) نشان دهید که مساحت هر مثلث قائم‌الزاویه با حاصل ضرب دو پاره خطی که نقطه تماس دایرة محاطی داخلی با وتر، روی وتر ایجاد می‌کند برابر است.

۵. ارتفاعها

I. مرکز ارتفاعی

- ۱۷۵) قضیه. سه ارتفاع مثلث هم‌رساند.
- را نقطه برخورد دو ارتفاع CF و BE از مثلث ABC فرض کنید (شکل ۶۵)، و فرض کنید خط ضلع BC را در D قطع کند. نقاط E و F روی دایره‌ای قرار دارند که BC قطر آن است، و در چهار ضلعی محاطی $BCEF$ داریم $\angle FCB = \angle FEB$. به طور مشابه، در چهارضلعی محاطی $AEHF$ داریم $\angle FEH = \angle FAH$ ؛ بنابراین،

$$\angle BAD = \angle FAH = \angle FEH = \angle FEB = \angle FCB$$



شکل ۶۵

- پس دو مثلث ABD و BCF که در زاویه B مشترک‌اند و دو زاویه دیگرشان هم دو به دو برابرند، همنهشت‌اند و داریم

$$\angle ADB = \angle BFC = ۹۰^\circ$$

یعنی AHD ارتفاع سوم مثلث ABC است.

۱۷۶. تعریف. نقطه برخورد سه ارتفاع مثلث مرکز ارتفاعی مثلث نامیده می‌شود. این نقطه را معمولاً با حرف H نشان می‌دهیم.

۱۷۷. قضیه. در هر مثلث حاصل ضرب پاره خط‌هایی که مرکز ارتفاعی روی هر ارتفاع جدا می‌کند مقداری ثابت است.

در واقع، در دو مثلث مشابه CHE و BHF (شکل ۶۵) داریم

$$CH \cdot HF = BH \cdot HE \quad \text{یا} \quad HF : HE = BH : CH$$

و به روشنی مشابه می‌توان نشان داد که $BH \cdot HE = AH \cdot HD$

روش دیگر. در دایرة $BCEF$ (شکل ۶۵) داریم

$$BH \cdot HE = CH \cdot HF$$

۱۷۸. قضیه. روی هر ارتفاع مثلث، پاره خط بین مرکز ارتفاعی و محل برخورد امتداد ارتفاع با دایرة محیطی مثلث، توسط ضلعی که ارتفاع بر آن وارد می‌شود، نصف می‌شود.

$\angle BD'D = \angle C$ (شکل ۶۵)، زیرا هر دو روپرتوی کمان AB از دایرة محیطی هستند؛ همچنین $\angle BHD = \angle C$ ، زیرا اضلاع آنها دوبعدو بر هم عمودند. بنابراین، مثلث BHD' متساوی الساقین است و چون BD بر HD' عمود است، $HD = DD'$.

۱۷۹. نتیجه. حاصل ضرب پاره خط‌هایی که توسط پای ارتفاع وارد بر یک ضلع مثلث روی آن ضلع جدا می‌شود برابر است با حاصل ضرب آن ارتفاع در فاصله مرکز ارتفاعی از آن ضلع.

در واقع، در دایرة محیطی ABC (شکل ۶۵) داریم $DD' = DH \cdot DB$ و $DC = DA \cdot DD'$ و (§۱۷۸).

۱۸۰. قضیه. دایرة محیطی مثلثی که رأسهای آن دو رأس یک مثلث مفروض و مرکز ارتفاعی آن مثلث هستند، با دایرة محیطی آن مثلث مفروض همنهشت است.

دو مثلث $D'BC$ و HBC (شکل ۶۵) همنهشت‌اند (§۱۷۸)، و دایرة محیطی $D'BC$ با دایرة محیطی ABC همنهشت است؛ پس نتیجه بیان شده حاصل می‌شود.

۱۸۱. قضیه. هر سه دایرة همنهشتی که مراکزشان سه رأس یک مثلث باشند، اضلاع مثلث میانک متناظر را در شش نقطه قطع می‌کنند که از مرکز ارتفاعی مثلث مفروض همفاصله‌اند.

فرض کنید U ، V ، W و U' ، V' ، W' نقاط تلاقی اضلاع $B'C'$ ، $C'A'$ ، $A'B'$ از مثلث $C'A'B'$ ، یعنی مثلث میانک مثلث ABC ، با سه دایرة هم‌شعاع باشند که مراکزشان رأسهای A ، B ، C هستند (شکل ۶۶).

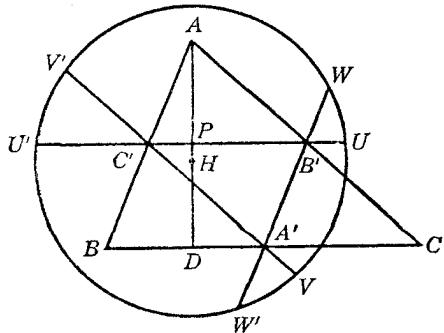
اگر H مرکز ارتفاعی مثلث ABC و P نقطه برخورد ارتفاع AD با ضلع $B'C'$ باشد، داریم

$$PU^{\dagger} = PU'^{\dagger} = AU^{\dagger} - AP^{\dagger} = HU^{\dagger} - HP^{\dagger}$$

پس،

$$AU^{\dagger} - HU^{\dagger} = AP^{\dagger} - HP^{\dagger} = (AP + PH)(AP - PH)$$

$$= AH(PD - PH) = AH \cdot HD$$



شکل ۶۶

۱

$$HU^\dagger = AU^\dagger - AH \cdot HD$$

حال بنابر فرض،

$$AU = BV = CW$$

پس (§ ۱۷۷)

$$HU = HV = HW$$

۱۸۲. مسئله. مثلثی را که ارتفاعهای آن (h_a , h_b , h_c) مفروض اند رسم کنید.
داریم

$$ah_a = bh_b = ch_c (= \gamma S)$$

با تقسیم بر $h_a h_b$ به دست می‌آوریم

$$a : h_b = b : h_a = c : m$$

که در آن، $m = h_a h_b : h_c$ و بنابراین، می‌توان آنرا به عنوان جزء چهارم تناسب بین ارتقاهای مفروض رسم کرد.

پس مثلث مطلوب با مثلث DEF ، که در آن $DE = m$ و $FD = h_a$ ، $EF = h_b$ رسم شده است.
روی ارتفاع DK از این مثلث، DL را برابر h_c جدا می‌کنیم. خطی که از L به موازات EF رسم
می‌شود، DE و DF را به ترتیب در رأسهای B و C از مثلث مطلوب ABC قطع می‌کند و رأس سوم این
مثلث، یعنی A ، بر D منطبق است.

راه حل این مسئله به رسم مثلث DEF بستگی دارد، پس باید داشته باشیم

$$h_a + h_b > m > h_a - h_b$$

یا با قرار دادن مقدار m به جای آن و تقسیم بر $h_a h_b$:

$$\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_a}\right) > \frac{1}{h_c} > \left(\frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_a}\right)$$

تمرين

- ۱) ثابت کنید مرکز دایرة محيطي هر مثلث، مرکز ارتقاعی مثلث ميانك آن مثلث است.
 - ۲) از مثلثي محل مرکز ارتقاعي و محل يك رأس، و راستاي اضلاعی که از آن رأس می گذرند مفروض است. مثلث رارسم کنيد.
 - ۳) از مثلثي محل مرکز ارتقاعي و محل دو رأس، مفروض است. مثلث رارسم کنيد.

(۴) از مثلثی محل پای ارتفاعهای وارد بر اضلاع جانبی و محل خطی که قاعده روی آن قرار دارد، مفروض است. مثلث را رسم کنید.

(۵) اگر p, q, r فاصله‌های یک نقطه داخل مثلث ABC از اضلاع مثلث باشند، نشان دهید که

$$(p : h_a) + (q : h_b) + (r : h_c) = 1$$

این عبارت باید چه تعییری کند تا برای نقاط خارج مثلث معتبر باشد؟

(۶) نشان دهید سه عمودی که در نقاط همنوا نسبت به پای ارتفاعهای یک مثلث بر اضلاع مثلث رسم می‌شوند، هم‌رساند.

(۷) مثلثی مفروض است. نشان دهید اگر و تنها اگر معکوس یک ضلع این مثلث کوچکتر از مجموع و بزرگتر از تفاضل معکوسهای دو ضلع دیگر آن باشد، می‌توان مثلث دیگری رسم کرد که اضلاعش ارتفاعهای این مثلث مفروض باشند.

(۸) خطی که در H مرکز ارتفاعی مثلث ABC ، بر ارتفاع HC از مثلث عمود می‌شود، دایرة محیطی را در P قطع می‌کند. نشان دهید که $ABPH$ متوازی‌الاضلاع است.

مثلثی را که اجزای زیر آن مفروض‌اند رسم کنید:

$$h_a, h_b, h_c, m_a, m_b, m_c \quad (۹)$$

(۱۱) مکان هندسی مرکز ارتفاعی مثلث متغیری را که قاعده و زاویه مقابله به قاعده ثابتی دارد، به دست آورید.

(۱۲) برای ترسیم خطی که از نقطه مفروض M و نقطه دور از دسترس تلاقی دو خط مفروض p و q بگذرد، از نقطه M خطوط u و v را به ترتیب بر p و q عمود می‌کنیم. خط مطلوب عمودی است که از M بر خط واصل نقاط (uq) و (pv) رسم می‌شود. این روش ترسیم را ثابت کنید.

II - مثلث پادک

۱۸۳. تعریف. مثلثی را که رأسهای آن پای ارتفاعهای یک مثلث مفروض‌اند، مثلث پادک آن مثلث می‌نامند.

۱۸۴. قضیه. سه مثلث پادک یک مثلث مفروض از آن مثلث جدا می‌کند، با آن مثلث مشابه‌اند. زاویه‌های B و C مساوی‌اند (شکل ۶۵)، زیرا هر دو مکمل زاویه FEC در چهار ضلعی محاطی $BCEF$ هستند؛ و به دلیل مشابه $\angle AFE = \angle C$ ؛ پس مثلثهای AEF و ABC مشابه‌اند.

برای مثلثهای CDE و BDF تیز وضعیت چنین است.

۱۸۵. تعریف. در هر چهار ضلعی محاطی دو ضلع رو برو را پادموازی نسبت به دو ضلع دیگر می‌نامند. پس EF و BC (شکل ۶۵) نسبت به AB و AC پادموازی‌اند؛ و FD و BC نسبت به AB و AC پادموازی‌اند.

۱۸۶. قضیه. امتداد ارتفاعهایی که از دو رأس یک مثلث رسم می‌شوند روی دایرة محیطی آن مثلث کمانی جدا می‌کنند که رأس سوم مثلث وسط آن است.

چهار ضلعی $BCEF$ (شکل ۶۵) محاطی است، پس $\angle ABE = \angle ACF = \angle A$ ؛ و در نتیجه کمان $AE' = AF'$.

برای رأسهای B و C هم وضعیت مشابهی وجود دارد.

۱۸۷. ملاحظه. خط EF وسط دو ضلع مثلث $HE'F'$ را به هم وصل کرده است؛ پس EF با ضلع $E'F'$ موازی است، و $E'F' = \frac{1}{2} EF$. مطلب مشابهی در مورد دو ضلع دیگر مثلث پادک DEF نیز صادق است.

بنابراین، مثلث DEF متناظر مثلث $D'E'F'$ در تجانس $(\frac{1}{2}, H)$ است.

۱۸۸. قضیه. شعاعهایی از دایرهٔ محیطی یک مثلث که از رأسهای مثلث می‌گذرند بر اضلاع متاظر مثلث پادک عمودند.

در واقع، شعاع OA بر وتر $E'F'$ (§۱۸۶)، و بنابراین، بر EF عمود است (§۱۸۷).

۱۸۹. نتیجه. زاویه‌ای که یک ضلع مثلث با ضلع متاظر مثلث پادک می‌سازد برابر است با تفاضل زاویه‌های مجاور آن ضلع در مثلث مفروض (§۷۳).

۱۹۰. تعریف. مماسهایی که در رأسهای یک مثلث مفروض بر دایرهٔ محیطی آن مثلث رسم می‌شوند، مثلثی می‌سازند که مثلث مماسی آن مثلث خوانده می‌شود.

۱۹۱. قضیه. مثلثهای مماسی و پادک یک مثلث مفروض متجانس‌اند (به §۲۰۵ مراجعه کنید).

در واقع، اضلاع متاظر این دو مثلث بر شعاعهای یکسانی از دایرهٔ محیطی مثلث اصلی عمودند (§۱۸۸).

۱۹۲. قضیه. ارتفاعهای مثلثی که زاویه‌های حاده دارد، نیمسازهای داخلی مثلث پادک آن مثلث هستند. خط $D'A$ (شکل ۶۵) نیمساز زاویهٔ $F'D'E'$ است (§۱۸۶)، و خطوط DF و DE به ترتیب با خطوط $D'E'$ و $D'F'$ موازی‌اند (§۱۸۷)؛ بنابراین، $D'DA$ نیز نیمساز زاویهٔ FDE است. برای ارتفاعهای دیگر نیز چنین وضعیتی وجود دارد.

روش دیگر. در سه چهار ضلعی محاطی $BCEF$ ، $BDHF$ و $CDHE$ (شکل ۶۵) داریم

$$\angle HDF = \angle HBF = \angle EBF = \angle ECF = \angle ECH = \angle EDH$$

۱۹۳. نتیجه. اضلاع مثلثی که زاویه‌های حاده دارد نیمسازهای خارجی مثلث پادک آن مثلث هستند. رأسها و مرکز ارتفاعی مثلث مفروض، مراکز سه مماس مثلث پادک آن مثلث هستند.

۱۹۴. مسئله. از مثلث محل نقاط برخورد امتداد ارتفاعها با دایرهٔ محیطی مثلث مفروض است. مثلث را رسم کنید.

سه نقطه مفروض D' ، E' و F' دایرهٔ محیطی (O) از مثلث مطلوب ABC را تعیین می‌کنند و رأسهای این مثلث وسط کمانهای $D'E'$ ، $E'F'$ و $F'D'$ است (§۱۸۶).

مسئله چند جواب می‌تواند داشته باشد؟

تمرین

(۱) اگر O مرکز دایرةٔ محیطی و H مرکز ارتفاعی مثلث ABC باشد و AH ، BH ، و CH دایرةٔ محیطی را به ترتیب در نقاط D' ، E' و F' قطع کنند، ثابت کنید خطوطی که از D' ، E' و F' به موازات OC ، OB ، و OA رسم می‌شوند، هم‌رسانند.

(۲) نشان دهید که (الف) حاصل ضرب پاره‌خطهایی که رأسی از مثلث پادک یک مثلث مفروض روی ضلع متاظر با آن رأس از مثلث مفروض جدا می‌کنند برابر است با حاصل ضرب اضلاعی از مثلث پادک که از آن رأس می‌گذرند؛ (ب) حاصل ضرب شش پاره‌خطی که توسط پای ارتفاعها روی اضلاع یک مثلث جدا می‌شوند، برابر است با مربع حاصل ضرب سه ضلع مثلث پادک آن مثلث.

(۳) اگر P و Q پای عمودهایی باشند که از دو رأس B و C از مثلث ABC به ترتیب بر اضلاع DE و DF از مثلث پادک DEF رسم شده‌اند، نشان دهید که $EQ = FP$. راهنمایی. از §۱۹۳ استفاده کنید.

(۴) عمودهایی هستند که از پای ارتفاع AD از مثلث ABC بر اضلاع AB و AC رسم شده‌اند، DQ و DP ثابت کنید که نقاط B ، C ، P ، Q همدایره‌اند (روی یک دایره قرار دارند) و $\angle DPB = \angle CQD$.

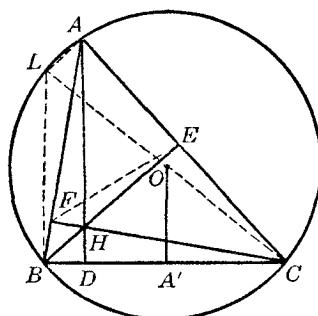
۵) نشان دهید که چهار تصویر پای ارتفاع وارد بر هر ضلع روی دو ضلع دیگر و دو ارتفاع دیگر مثلث مختصاند. راهنمایی. از ۱۹۳ و ۱۳۳ § استفاده کنید.

۶) نشان دهید که محیط مثلث پادک مثلث ABC که زاویه‌های حاده دارد، از دو برابر هر ارتفاع مثلث ABC کوچکتر است. راهنمایی. از ۱۹۲ § استفاده کنید.

۱۹۵. قضیه. فاصله هر ضلع مثلث از مرکز دایره محیطی مثلث برابر است با نصف فاصله رأس مقابل آن ضلع از مرکز ارتفاعی مثلث.

فرض کنید L انتهای دیگر قطری از دایرة محیطی باشد که از رأس C می‌گذرد (شکل ۶۷)؛ در این صورت، می‌گوییم L روپروی قطری C در دایرة محیطی است. پاره خط OA' وسط دو ضلع دو مثلث قائم الزاوية

$$OA' = \frac{1}{2}BL \quad \text{را به هم وصل می‌کند؛ پس } BCL$$



شکل ۶۷

از طرف دیگر هر جفت از اضلاع روپروی هم در چهارضلعی $ALBH$ به ترتیب بر خطوط AC و BC عمودند، پس $ALBH$ متوازی‌الاضلاع است و $BL = AH$ ؛ قضیه ثابت می‌شود.

۱۹۶. قضیه. در هر مثلث فاصله هر رأس تامکر ارتفاعی به اضافة شعاع دایرة محاطی خارجی متناظر با آن رأس، مقداری ثابت است (شکل ۵۵).

داریم (§۱۴۴)

$$r_a - r = KA' = KO - OA'$$

پس (§۱۹۵)،

$$KO + r_a = AH + r_a = KO + r = R + r$$

و به طور مشابه،

$$BH + r_b = CH + r_c = R + r$$

۱۹۷. قضیه. نسبت هر ضلع مثلث به فاصله متناظر از مثلث پادک آن مثلث برابر است با نسبت شعاع دایرة محیطی آن مثلث به فاصله ضلع در نظر گرفته شده از مرکز دایرة محیطی. پاره خط AH (شکل ۶۷) قطر دایرة محیطی مثلث AEF است، و خطوط BC و EF اضلاع متناظر دو مثلث مشابه ABC و AEF هستند (§۱۸۴)؛ بنابراین (§۱۹۵)،

$$BC : EF = R : AH = R : OA'$$

۱۹۸. نتیجه. در مثلثی که زاویه‌های حاده دارد مجموع نسبت‌های ضلعهای مثلث پادک به ضلعهای متاظر مثلث مفروض برابر است با نسبت مجموع شعاع دایرهٔ محیطی و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث مفروض به شعاع دایرهٔ محیطی همان مثلث.

در واقع، مجموع این نسبتها برابر است با مجموع فاصله‌های اضلاع مثلث مفروض از مرکز دایرهٔ محیطی تقسیم بر شعاع دایرهٔ محیطی؛ بنابراین، با استفاده از $\frac{1}{4}\pi r^2$ به گزاره زیر می‌رسیم.

۱۹۹. قضیه. محیط مثلث پادک مثلثی که زاویه‌های حاده دارد برابر است با دو برابر مساحت مثلث مفروض تقسیم بر شعاع دایرهٔ محیطی آن مثلث.

اگر e, f , و g اضلاع مثلث پادک مثلث ABC باشند، داریم ($\frac{1}{2}ab\sin C$) :

$$e + f + g = (a \cdot OA' + b \cdot OB' + c \cdot OC') : R$$

و مجموع داخل پرانتر دو برابر مساحت ABC است؛ پس قضیه ثابت می‌شود.

۲۰۰. مسئله. از مثلثی محل نقاط برخورد قاعده با ارتفاع، نیمساز داخلی و میانه رسم شده از رأس مقابل، که آنها را به ترتیب با D, U , و A' نشان می‌دهیم، مفروض است؛ همچنین، فاصله رأس در نظر گرفته شده از مرکز ارتفاعی، d , مفروض است. مثلث را رسم کنید.

در نقطهٔ A' عمودی بر DUA رسم، و روی آن $\frac{1}{2}d = A'O = d$ را جدا کنید؛ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث مطلوب ABC است ($\frac{1}{2}d = A'O$). نقطهٔ A روی خطی قرار دارد که در D بر DUA' عمود می‌شود. اما نیمساز زاویهٔ A ، نیمساز زاویهٔ DAO هم هست ($\frac{1}{2}d = A'$)؛ پس نقطهٔ A روی مماسی قرار دارد که از O بر دایرهٔ (U, UD) رسم می‌شود. پس A را می‌توان تعیین کرد.

دایرهٔ (O, OA') خط DUA' را در دو رأس B و C از مثلث مطلوب ABC قطع می‌کند.

تمرین

- ۱) در مثلث ABC نشان دهید که $AH^2 + BC^2 = 4OA^2$.
- ۲) از مثلثی محل یک رأس، محل نقطهٔ وسط ضلع مقابلهٔ آن رأس و محل مرکز ارتفاعی مفروض است. مثلث را رسم کنید.
- ۳) از مثلثی محل دایرهٔ محیطی و محل مرکز ارتفاعی، و طول یک ضلع مفروض است. مثلث را رسم کنید.
- ۴) از مثلثی شعاع دایرهٔ محیطی، فاصله یک رأس از مرکز ارتفاعی و میانه‌ای که از آن رأس رسم شود مفروض است. مثلث را رسم کنید.
- ۵) از مثلثی قاعده، فاصله رأس رو بر روی قاعده از مرکز ارتفاعی و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مفروض است. مثلث را رسم کنید.

- ۶) دو سر پاره خط متغیری با طول ثابت روی دو خط متقاطع ثابت قرار دارد. ثابت کنید مکان هندسی مرکز ارتفاعی مثلث متغیری که توسط این سه خط ایجاد می‌شود یک دایره است.
- ۷) قاعدهٔ BC و دایرهٔ محیطی (O) از مثلث متغیر ABC ثابت‌اند. مکان هندسی مرکز ارتفاعی مثلثی را که رأسهای آن محل برخورد امتداد نیمسازهای داخلی مثلث ABC و دایرهٔ (O) هستند، به دست آورید.

III - خط اویلر

- ۱) قضیه. مرکز دایرهٔ محیطی، مرکز ارتفاعی و مرکز نقل هر مثلث همخطواند، و فاصلهٔ مرکز نقل تا مرکز ارتفاعی برابر است با دو برابر فاصلهٔ مرکز نقل تا مرکز دایرهٔ محیطی.
- فرض کنید Q نقطهٔ برخورد ارتفاع AD از مثلث ABC با خط OG باشد، که O مرکز دایرهٔ محیطی و

مرکز نقل مثلث است. دو مثلث OGQ و OGA' متشابه‌اند (A' وسط ضلع BC است)؛ پس،

$$GQ : OG = AG : GA' = 2 : 1$$

حال اگر ارتفاع دیگری را در نظر بگیریم، نقطه برخورد آن با OG همان نقطه Q خواهد بود، چون $GQ = 2OG$. عبارت دیگر، نقطه Q بر مرکز ارتفاعی مثلث ABC ، یعنی نقطه H ، منطبق است، و داریم $GH = 2GO$. توجه کنید که این اثبات جدیدی برای همسرش بودن ارتفاعهای مثلث (§ ۱۷۵) است، و همچنین اثبات اینکه $AH = 2OA'$ (§ ۱۹۵).

۲۰۲. تعریف. خط راستی که مرکز دایره محیطی، مرکز ارتفاعی و مرکز نقل مثلث روی آن قرار دارد، خط اویلر مثلث نامیده می‌شود.

۲۰۳. قضیه. داریم

$$OH^r = 9R^r - (a^r + b^r + c^r)$$

$$GH^r = 4R^r - \frac{4}{9}(a^r + b^r + c^r)$$

در واقع داریم $GH = 2OG$ ، $OH = 3OG$ ، $GH = 4R^r$ ؛ پس رابطه‌های بیان شده اثبات می‌شوند (§ ۱۱۰).

۲۰۴. قضیه. مجموع مربع فاصله‌های رأسهای یک مثلث از مرکز ارتفاعی آن مثلث برابر است با دوازده برابر مربع شعاع دایره محیطی منهای مجموع مربع ضلعهای مثلث.

$$HA^r + HB^r + HC^r = 12R^r - (a^r + b^r + c^r)$$

این رابطه به‌آسانی از روابط قبلی (§ ۱۰۸، § ۱۰۹، § ۱۰۳) به دست می‌آید.

۲۰۵. قضیه. مرکز تجانس مثلث پادک و مثلث مماسی هر مثلث (§ ۱۹۱) روی خط اویلر آن مثلث قرار دارد. مرکز دایره‌های محاطی داخلی مثلث مماسی (T) و مثلث پادک DEF از مثلث DEF مفروض از ABC ، به ترتیب مرکز دایرة محیطی O و مرکز ارتفاعی H (§ ۱۹۳) از مثلث ABC هستند؛ پس نقاط O و H نقاط متناظر در دو شکل متجلانس هستند و بنابراین، با مرکز تجانس این شکلها همخطاند، و قضیه ثابت می‌شود. اگر ABC مثلثی با زاویه منفرجه باشد، نقاط O و H مرکز دایره‌های محاطی خارجی مثلثهای (T) و DEF خواهند بود.

تمرین

- (۱) از مثلثی محل نقاط O و HA و GA و طولهای HA و GA مفروض‌اند. مثلث را رسم کنید.
- (۲) از مثلثی محل دایرة محیطی و محل مرکز نقل و تقاضل دو زاویه مفروض‌اند. مثلث را رسم کنید.
- (۳) دو وتر متعامد AB و CD در یک دایره حول نقطه ثابت P می‌چرخدند. نشان دهید که مرکز ارتفاعی دو مثلث متغیر ABC و ABD دایرة یکسانی را می‌پسندند. مکان هندسی مرکز نقل این مثلثها را بیابید.
- (۴) نشان دهید خط اویلر مثلث تنها در صورتی از یک رأس مثلث می‌گذرد که مثلث متساوی الساقین یا قائم‌الزاویه باشد.
- (۵) نشان دهید خطی که از مرکز نقل مثلث به نقطه P بر روی دایرة محیطی وصل می‌شود، از وسط خطی می‌گذرد که مرکز ارتفاعی مثلث را به روی روی قطری P وصل می‌کند.

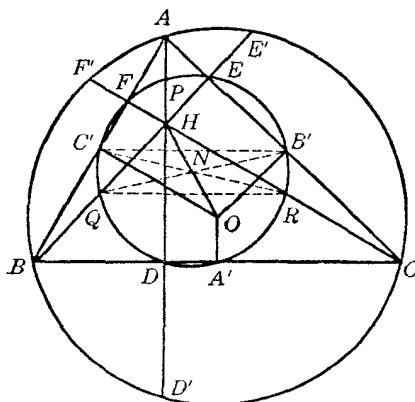
و. دایره نه نقطه

۲۰۶. تعریف. نقاط پاره خطهای که از مرکز ارتفاعی مثلث به رأسهای آن مثلث رسم می‌شوند، نقاط اویلر آن مثلث نامیده می‌شوند.

سه نقطه اویلر رأسهای آن مثلث اویلر مثلث مفروض هستند.

۲۰۷. قضیه. در هر مثلث نقاط وسط اضلاع، پای ارتفاعها و نقاط اویلر روی یک دایره قرار دارند.

فرض کنید P, Q, R و R' نقاط اویلر مثلث ABC باشند (شکل ۶۸). پاره خطهای QC' و RB' برابر و موازی‌اند، زیرا نقاط وسط اضلاع جانبی دو مثلث AHC و AHB را که AH قاعده مشترک آنهاست بهم وصل می‌کنند؛ به علاوه این پاره خطها بر $B'C'$ عمودند، زیرا $B'C'$ بر AH عمود است. پس $B'C'QR$ مستطیل است؛ بنابراین، RC' و QB' برابر و یکدیگر را در نقطه‌ای مانند N نصف می‌کنند. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که PA' با QB' برابر است و N نقطه وسط آن است.



شکل ۶۸

پس N مرکز دایره (N) است که از نقاط A', B', C', P, Q, R و R' ، و همچنین از نقاط F, E, D ، و F' ، E' ، D' می‌گذرد زیرا قطرهای PA' ، QB' ، RC' و RC' از دایرة (N) به ترتیب در این نقاط با زاویه 90° دیده می‌شوند.

۲۰۸. تعریف. دایرة (N) را غالباً دایرة نه نقطه و نقطه N را مرکز دایرة نه نقطه مثلث می‌نامند.

۲۰۹. قضیه. (الف) شعاع دایرة نه نقطه برابر است با نصف شعاع دایرة محیطی مثلث.

(ب) مرکز دایرة نه نقطه روی خط اویلر، با فاصلهٔ یکسان از مرکز دایرة محیطی و مرکز ارتفاعی مثلث قرار دارد.

داریم (§۱۹۵)

$$OA' = \frac{1}{2}AH = AP = PH$$

پس $PHA'O$ و $APA'O$ متوازی‌الاضلاع‌اند. از متوازی‌الاضلاع بودن $APA'O$ نتیجه می‌شود که قطر PA' از دایرة (N) با شعاع دایرة محیطی مثلث ABC ، یعنی AO ، برابر است، و از متوازی‌الاضلاع بودن $PHA'O$ نتیجه می‌شود که قطر HO از نقطه N ، وسط قطر PA' می‌گذرد و N وسط آن است.

راه دیگر. مثلثهای ABC و $A'B'C'$ در تجانس ($G, -2$) با یکدیگر متناظرند (§۹۸)؛ پس شعاع دایرة محیطی ABC دو برابر شعاع دایرة محیطی $A'B'C'$ است، و O و N مرکز دایره‌های محیطی

و $A'B'C'$ ، در دو طرف G قرار دارند. پس $OG : GN = 2$ و $OG = GH$ (§۲۰۱)، پس $ON = NH$.

۲۱۰. ملاحظه. دو نقطه O و N ، نقاط G و H را به طور همساز تقسیم می‌کنند.
در واقع، نقاط N و O پاره خط HG را به طور داخلی و خارجی به نسبت $1 : 2$ تقسیم می‌کنند.
در نتیجه دایره نه نقطه (N) و دایرة محیطی (O) در تجانس ($1 : 2$) ($H, 2, O$) و همچنین در تجانس ($1 : 2$) ($G, -2, N$) با هم متناظراند.

۲۱۱. قضیه. مرکز دایرة محیطی مثلث مماسی یک مثلث مفروض روی خط اویلر آن مثلث قرار دارد.
مرکز دایرة محیطی مثلث مماسی (T) از مثلث ABC را نقطه O'' و مرکز دایرة محیطی مثلث پادک DEF از مثلث ABC را نقطه N فرض کنید. این دو نقطه، نقاط متناظر در تجانسی هستند که در آن مثلث (T) و مثلث DEF باهم متناظرند (§۱۹۱). مرکز این تجانس روی خط اویلر قرار دارد (§۲۰۵)، و در نتیجه، نقطه N هم روی این خط قرار دارد (§۲۰۹ ب)؛ پس O'' نیز روی این خط قرار دارد.

۲۱۲. نتیجه. فرض کنید p شعاع دایرة محاطی داخلی DEF ، و R و q به ترتیب شعاعهای دایره‌های محاطی مثلثهای ABC و (T) باشند. نسبت تجانس مثلثهای (T) و DEF با نسبت شعاعهای دایره‌های محاطی داخلی آنها، یعنی $p : R$ ، و همچنین با نسبت شعاعهای دایره‌های محیطی آنها، یعنی $R : q = \frac{1}{2}R$ برابر است؛ پس،

$$R' = 2pq \quad \text{یا} \quad R : p = q : \frac{1}{2}R$$

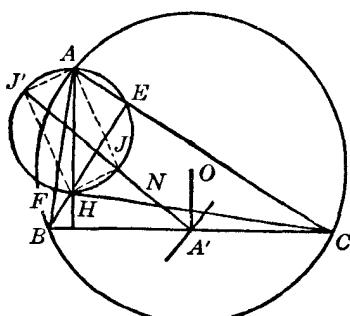
به عنوان تمرین، این رابطه را با کلمات بیان کنید.

۲۱۳. قضیه. مرکز دایرة محیطی مثلث روی خط اویلر مثلثی قرار دارد که رأسهای آن نقاط تماس اضلاع مثلث مفروض با دایرة محاطی داخلی آن است.

مثلث مفروض، مثلث مماسی دوم است؛ بنابراین قضیه ثابت می‌شود (§۲۱۱).
نکته. قضیه برای دایره‌های محاطی خارجی نیز صادق است.

۲۱۴. قضیه. تصاویر مرکز ارتفاعی مثلث روی دو نیمساز یک زاویه آن مثلث، روی خطی قرار دارند که از وسط ضلع روی روی آن زاویه و مرکز دایرة نه نقطه مثلث می‌گذرد.

J و J' ، پای عمودهایی که از مرکز ارتفاعی مثلث ABC ، یعنی H ، بر نیمسازهای زاویه A ، یعنی AJ و AJ' ، رسم شده‌اند (شکل ۶۹)، روی دایره‌ای به فطر AH قرار دارند. پس این دو نقطه دو سر قطربی از دایرة



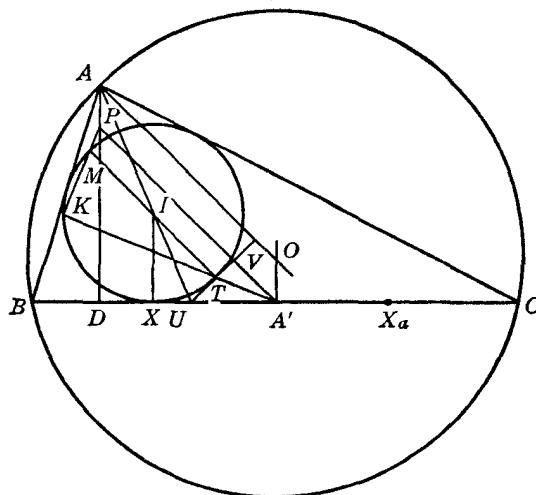
شکل ۶۹

محیطی مثلث AEF ، که در دایره (AH) محاط شده است، هستند و این قطر بر ضلع EF عمود است (§۷۴).

دایره‌ای که BC قطر آن است، از نقاط E و F می‌گذرد (§۱۷۵)، و دایره نه نقطه نیز از این نقاط می‌گذرد (§۲۰۷)؛ پس مراکز این دایره‌ها، یعنی A' و N ، روی عمود منصف ضلع EF ، یعنی JJ' قرار دارند، و این اثبات قضیه را کامل می‌کند.

۲۱۵. قضیه فوئر باخ. دایره نه نقطه مثلث بر هر یک از چهار دایره سه مماس آن مثلث مماس است.

در مثلث ABC (شکل ۷۰) مرکز دایره محاطی داخلی، I ، و مرکز دایره محاطی خارجی نسبت به رأس A ، I_a ، نقطه A و نقطه U ، محل برخورد نیمساز AI و ضلع BC ، را به صورت همساز تقسیم می‌کنند (§۱۲۰)؛ پس X و X_a ، یعنی نقاط تمسیح دایره‌های سه مماس (I) و (I_a) با ضلع BC ، نقاط U و D ، پای ارتفاع AD از مثلث ABC ، را به صورت همساز تقسیم می‌کنند (§۶۱).



۷۰ شکل

وسط پاره خط XX_a بر A' ، وسط BC منطبق است (§۱۶۰)؛ بنابراین (§۶۳)،

$$A'U \cdot A'D = A'X^* \quad (1)$$

T را نقطه تمسیح دوم که از U بر دایره محاطی داخلی (I) رسم می‌شود فرض کنید. خطوط UT و UX ($BC = UX$) نسبت به AU متقارن‌اند؛ قطر AO از دایره محیطی ABC و ارتفاع AD نیز نسبت به AU متقارن‌اند (§۷۳ ب)؛ پس AO عمود است و بنابراین، اگر P نقطه اوپلر ارتفاع AD باشد بر قطر $A'P$ از دایره (N) ، یعنی دایره نه نقطه مثلث ABC نیز عمود است (§۲۰۷). فرض کنید K نقطه تلاقی دوم (I) باشد و $(A'P, UT) = A'T = V$. با توجه به مثلثهای قائم‌الزاویه مشابه $A'DP$ و $A'VU$ ، و با استفاده از رابطه (۱)، داریم

$$A'V \cdot A'P = A'D \cdot A'U = A'X^* = A'T \cdot A'K$$

پس دو نقطه V و P با دو نقطه T و K هم‌دایه‌اند؛ پس $\angle PKT = \angle TVA'$ ، یعنی PK بر KTA' عمود است، و در نتیجه، K روی دایره نه نقطه (N) قرار دارد، زیرا PA' یک قطر (N) است (§۲۰۷). به علاوه، نقطه دوم تقاطع PK و (I) ، یعنی نقطه M ، و نقطه T دو سریک قطر دایره (I) هستند.

خطوط $A'VP$ و TM موازی‌اند، زیرا هر دو بر UTV عمودند؛ پس $K = (PM, A'T)$ با نقاط وسط پاره خط‌های $A'P$ و TM همخط است. $A'P$ و TM به ترتیب قطرهای دایره‌های (I) و (N) و K نقطه مشترکی از این دو دایره است؛ پس (I) و (N) در نقطه K بر هم مماس‌اند.

۲۱۶. ملاحظه ۱. نقطه K را نقطه فوئر باخ دایرة (I) می‌نامند.

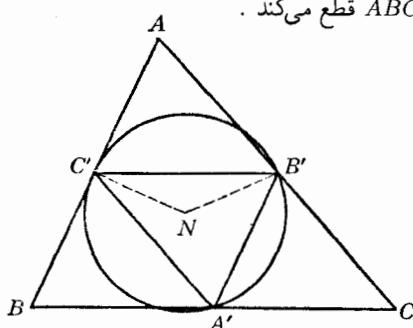
از استدلال بالا نتیجه می‌شود که اگر T و X نسبت به نیمساز AU متقارن باشند، پای عمودی که از نقطه اویلر P بر خط $A'T$ رسم می‌شود نقطه فوئر باخ (I) خواهد بود.

۲۱۷. ملاحظه ۲. به طور مشابه می‌توان نشان داد که اگر T_a و X_a نسبت به AU متقارن باشند، پای عمود که از P بر خط $A'T_a$ رسم می‌شود، نقطه فوئر باخ دایرة محاطی خارجی (I_a) است. برای دو دایرة محاطی خارجی دیگر هم مطلب مشابهی صادق است.

۲۱۸. مسئله. از مثلث محل مرکز دایرة نه نقطه و محل رأس A ، و راستهای نیمساز داخلی t و ارتفاع h که از رأس مفروض A می‌گذرند مفروض است. مثلث را رسم کنید.

مرکز دایرة محیطی O روی خط d که متقارن h نسبت به t است (§۷۳ ب)، و همچنین روی خط h' که متقارن خط h نسبت به نقطه N ، مرکز دایرة نه نقطه، است (§۲۰۹ ب) قرار دارد؛ پس O و همچنین H ، روی خط h ، مشخص می‌شوند.

اگر D' نقطه تلاقی دوم AH و دایرة (O, OA) باشد، عمودمنصف $'HD$ این دایرة را در دو رأس دیگر B و C از مثلث مطلوب ABC قطع می‌کند.



شکل ۷۱

۲۱۹. مسئله. از مثلث محل مرکز دایرة نه نقطه، و یک زاویه (هم اندازه و هم محل آن) مفروض است. مثلث را رسم کنید.

فرض کنید ABC مثلث مطلوب و A زاویه مفروض آن باشد (شکل ۷۱). داریم

$$\angle B'NC' = 2\angle B'A'C' = 2A$$

پس زاویه‌های مثلث متساوی الساقین $NB'C'$ معلوم‌اند. بنابراین اگر رأس معلوم این مثلث، یعنی N ، را ثابت نگاه داریم، و رأس B' خط ثابت مفروض AC را بپیماید (در حالی که مثلث با خودش متشابه می‌ماند)، نقطه C' نیز یک خط راست را می‌پیماید (§۵۱)، و این خط راست روی خط معلوم AB نقطه C' را مشخص می‌کند. حال چهارضلعی $AC'NB'$ را طوری رسم می‌کنیم که $\angle C'NB' = 2A$ ، و حل مسئله به آسانی کامل می‌شود.

تمرین

۱) نشان دهید که مثلث مکمل و مثلث اویلر یک مثلث مفروض همنهشت‌اند.

- (۲) نشان دهد که مثلث $DB'C'$ با مثلث اویلر همنهشت است (شکل ۶۸).
- (۳) نشان دهد که میانه AA' (شکل ۶۸) از وسط پاره خط OP می‌گذرد.
- (۴) اگر P نقطه متقارن رأس A نسبت به ضلع مقابل این رأس، یعنی BC باشد، نشان دهد که اندازه HP چهار برابر فاصله مرکز دایره نه نقطه از ضلع BC است.
- (۵) نشان دهد که مربع اندازه مماسی که از یک رأس مثلث بر دایره نه نقطه رسم می‌شود برابر است با حاصل ضرب ارتفاعی که از آن رأس می‌گذرد در فاصله ضلع مقابل آن رأس از مرکز دایره محیطی.
- (۶) نشان دهد که $H A'$ دایره محیطی را در نقطه روپرتوی قطری رأس A قطع می‌کند.
- (۷) از سه رأس مثلث ABC سه خط موازی در راستای دلخواه، و از هر رأس خطی عمود بر این خطوط رسم می‌کنیم. به این ترتیب سه مستطیل حاصل می‌شود که اضلاع AB ، BC و CA به ترتیب قطرهای ABC آنها هستند. ثابت کنید که سه قطر دیگر این مستطیلها در نقطه‌ای روی دایره نه نقطه مثلث ABC یکدیگر را قطع می‌کنند.
- (۸) از مثلث محل یک رأس، محل مرکز ارتفاعی و محل مرکز دایره نه نقطه، مفروض است. مثلث را رسم کنید.
- (۹) از مثلث محل دو رأس و محل مرکز دایره نه نقطه، مفروض است. مثلث را رسم کنید.
- (۱۰) از مثلث محل مرکز دایره محیطی و محل یک رأس، و فاصله آن رأس از مرکز نقل و مرکز ارتفاعی مفروض است. مثلث را رسم کنید.
- (۱۱) از مثلث محل دایرة نه نقطه و محل مرکز نقل، و تفاصل دو زاویه مفروض است. مثلث را رسم کنید.
- (۱۲) از مثلث محل مرکز دایرة نه نقطه، محل یک رأس و محل پای ارتفاع وارد بر یکی از ضلعهایی که از آن رأس می‌گذرد مفروض است. مثلث را رسم کنید.
- (۱۳) از مثلث محل مرکز دایرة نه نقطه، محل یک رأس و محل تصویر آن رأس بر ضلع مقابل، مفروض است. مثلث را رسم کنید.
- (۱۴) از مثلث محل نقطه وسط قاعده، محل نقطه وسط یکی از کمانهایی که قاعده روی دایرة محیطی جدا می‌کند و محل نقطه اویلر نسبت به رأس مقابل به قاعده، مفروض است. مثلث را رسم کنید.
- (۱۵) اگر مثلث متغیری قاعدة ثابت داشته باشد و اندازه شعاع دایرة محیطی آن نیز ثابت باشد، نشان دهد که دایرة نه نقطه آن بر دایرة ثابتی مماس است.
- (۱۶) مثلث متغیری یک رأس ثابت و دایرة نه نقطه ثابت دارد. ثابت کنید که مکان هندسی مرکز ارتفاعی این مثلث یک دایره است.
- (۱۷) مرکز ارتفاعی، نقطه وسط قاعده و راستای قاعدة مثلث متغیری ثابت است. مکان هندسی مرکز دایرة نه نقطه این مثلث را بیابید.
- (۱۸) ثابت کنید خطی که در وسط بک ضلع مثلث مفروض بر دایرة نه نقطه آن مثلث مماس است و ضلع در نظر گرفته شده، نسبت به دو ضلع دیگر مثلث پادموازی‌اند.

ز. چهارضلعی مرکز ارتفاعی

۲۲۰. تعریف. اگر H مرکز ارتفاعی مثلث ABC باشد (شکل ۷۲)، هر کدام از چهار نقطه A ، B ، C ، و H مرکز ارتفاعی مثلث مشکل از سه نقطه دیگر است، این مطلب را به آسانی می‌توان از شکل دریافت. هر چهار نقطه‌ای که این خاصیت را داشته باشند، یک گروه نقاط مرکز ارتفاعی یا یک چهارضلعی مرکز ارتفاعی نامیده می‌شوند؛ چهار مثلثی که این چهار نقطه سه به سه، مشخص می‌کنند، گروه مثلثهای مرکز ارتفاعی نامیده می‌شوند.

۲۲۱. قضیه. چهار مثلث یک گروه مرکز ارتقایی، مثلث پادک پکسانی دارند.

این مطلب با توجه به شکل واضح است.

۲۲۲. نتیجه ۱. چهار مثلث یک گروه مرکز ارتقایی، دایره نه نقطه پکسانی دارند.

در واقع، این دایره، دایرة محیطی مثلث پادک مشترک آنهاست (§۲۰۷).

۲۲۳. نتیجه ۲. شعاع دایره های محیطی چهار مثلث یک گروه مرکز ارتقایی برابرند.

در واقع، شعاع دایره های محیطی این مثلثها با قطر دایره محیطی دایره نه نقطه مشترک آنها برابرند (§۲۰۹ الف).

۲۲۴. قضیه. مرکز دایره های محیطی یک گروه مثلثهای مرکز ارتقایی، یک گروه نقاط مرکز ارتقایی تشکیل می دهد.

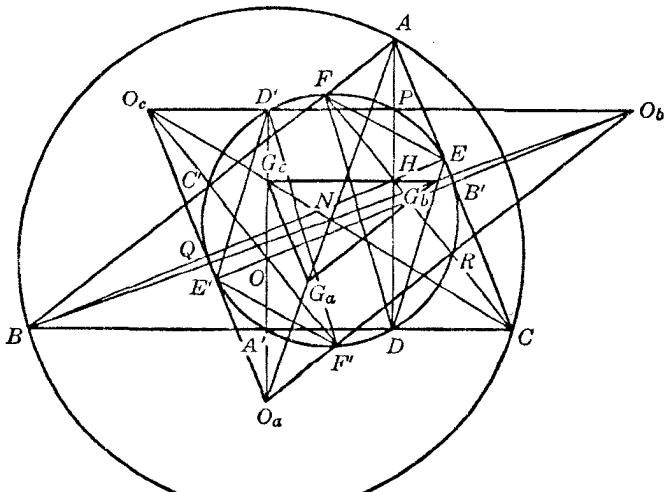
O, O_a, O_b, O_c مرکز دایره های محیطی چهار مثلث ABC, BCH, CBA, ACH از یک گروه مرکز ارتقایی (شکل ۷۲) نقاط متقارن H, B, A, C ، یعنی مرکز ارتقایی این مثلثها، نسبت به N ، مرکز دایره نه نقطه مشترک آنها هستند (§۲۲۲، §۲۰۹ ب)؛ پس قضیه ثابت می شود.

۲۲۵. نتیجه ۱. یک گروه مثلثهای مرکز ارتقایی و گروه مرکز ارتقایی مشتمل از مرکز دایره های محیطی آنها، دایره نه نقطه مشترکی دارند.

دو چهارضلعی مرکز ارتقایی $HABC$ و $OO_aO_bO_c$ نسبت به N مرکز دایره نه نقطه گروه $HABC$ متقارن اند؛ پس دایره نه نقطه $OO_aO_bO_c$ نسبت به (N) ، یعنی دایره نه نقطه $HABC$ متقارن است. چون متقارن هر دایره نسبت به مرکز آن دایره خود آن دایره است، قضیه ثابت می شود.

۲۲۶. نتیجه ۲. چهار رأس یک گروه مثلثهای مرکز ارتقایی مفروض را می توان مرکز دایره های محیطی یک گروه مثلث مرکز ارتقایی دیگر دانست.

در واقع، دو گروه $OO_aO_bO_c$ و $HABC$ نسبت به (N) ، یعنی مرکز دایره نه نقطه مشترکشان متقارن اند؛ پس گروه اول را می توان از گروه دوم، دقیقاً به همان صورتی که گروه دوم از گروه اول به دست آمده است، به دست آورد.



شکل ۷۲

۲۲۷. قضیه. چهار مرکز نقل یک گروه مثلثهای مرکز ارتقایی یک گروه مرکز ارتقایی تشکیل می دهند.

مرکز نقلهای G_1, G_2, G_3 و G_4 از چهار مثلث CHA, BCH, ABC ، و HAB در یک گروه مرکز ارتفاعی (شکل ۷۲) در تجانس $(\frac{1}{\overline{N}})$ با مرکز ارتفاعی H, A, B ، و C از این مثلثها متناظرند (§۲۰۹)؛ بنابراین، قضیه ثابت می‌شود.

۲۲۸. قضیه. دایره نه نقطه یک گروه مثلثهای مرکز ارتفاعی با دایره نه نقطه گروه مرکز ارتفاعی متشکل از مرکز نقلهای گروه مفروض، هم مرکز است.

در واقع، دایره نه نقطه (N_g) از گروه مرکز ارتفاعی G_1, G_2, G_3, G_4 در تجانس $(\frac{1}{\overline{N}})$ با دایره نه نقطه (N) از گروه $HABC$ متناظر است؛ پس N مرکز مشترک دو دایره (N) و (N_g) است.

تمرین

۱) نشان دهید که خطوط اوپلر چهار مثلث یک گروه مرکز ارتفاعی همسانند.

۲) نشان دهید که متقارن مرکز دایره محیطی یک مثلث نسبت به یک ضلع بر متقارن رأس مقابل آن ضلع نسبت به مرکز دایره نه نقطه مثلث منطبق است.

۳) نشان دهید که چهار رأس یک گروه مرکز ارتفاعی را می‌توان مراکز نقل یک گروه مثلثهای مرکز ارتفاعی دیگر در نظر گرفت، به طوری که هر دو گروه مرکز نه نقطه یکسانی داشته باشند، و این نقطه مرکز نتابه دو گروه، و نسبت نتابه ۳-۳-۳-۳ باشد.

۴) نشان دهید که مراکز دایره‌های محیطی و مراکز نقل یک گروه مثلثهای مرکز ارتفاعی، دو گروه نقاط مرکز ارتفاعی هستند که مرکز دایره نه نقطه یکسانی دارند، این نقطه مرکز تجانس دو گروه، و نسبت تجانس ۳ است.

۵) نشان دهید که مراکز دایره‌های محیطی مثلثهای HAB, HBC و HCA از یک گروه مرکز ارتفاعی $HABC$ ، مثلثی همنهشت با مثلث ABC تشکیل می‌دهند؛ اضلاع دو مثلث موازی‌اند، و نقطه مرکز دایره محیطی مثلث جدید است؛ همچنین، مرکز دایره محیطی مثلث ABC مرکز ارتفاعی مثلث جدید است.

۶) نشان دهید که مراکز نقل مثلثهای HAB, HBC ، و HCA از گروه مرکز ارتفاعی $HABC$ مثلثی متشابه با مثلث ABC تشکیل می‌دهند و اضلاع مثلث جدید با اضلاع دو مثلث ABC موازی‌اند؛ و مرکز ارتفاعی مثلث جدید بر مرکز نقل مثلث ABC منطبق است.

۷) از مثلثی پای ارتفاعهای آن مفروض آنند؛ مثلث را رسم کنید.

۸) از مثلث ABC ، محل مرکز دایره نه نقطه و محل مراکز دایره‌های محیطی مثلثهای CAH و ABH که مرکز ارتفاعی مثلث ABC است، مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۹) نشان دهید که مجموع جبری فواصل نقاط یک گروه مرکز ارتفاعی از هر خطی که از مرکز دایره نه نقطه آن گروه می‌گذرد، صفر است.

۱۰) مثلث ABC زاویه قائم‌ای در رأس A دارد، و AD ارتفاع آن است. نیمسازهای زاویه‌های BAD و CAD ضلع BC را در S و S' قطع می‌کنند، و نیمسازهای زاویه‌های ACD و ABD ارتفاع AD را در T و T' قطع می‌کنند. اگر U, V و W مراکز دایره‌های محاطی داخلی مثلثهای ABC, ABD و ACD باشند، نشان دهید که (الف) نقاط A, V, U ، و W یک گروه مرکز ارتفاعی تشکیل می‌دهند؛ (ب) مرکز دایره محیطی AVW روی AD قرار دارد؛ (ج) نقاط B, C, V ، و W همدایره هستند؛ و (د) نقاط T, S, T', S' یک گروه مرکز ارتفاعی تشکیل می‌دهند. خاصیت‌های دیگر شکل را بیان و ثابت کنید.

۲۲۹. قضیه. چهار مرکز سه مماس مثلث یک گروه مرکز ارتفاعی تشکیل می‌دهند.

در واقع، ارتفاعهای مثلث $I_a I_b I_c$ که از نیمسازهای خارجی مثلث ABC تشکیل شده است، نیمسازهای داخلی ABC هستند؛ پس I ، مرکز دایرة محاطی داخلی مثلث ABC مرکز ارتفاعی مثلث $I_a I_b I_c$ است و قضیه ثابت می‌شود (§۲۲۰).

۲۳۰. نتیجه. هر مثلث و دایرة محیطی آن به ترتیب مثلث پادک و دایرة نه نقطه‌گروه مرکز ارتفاعی مشکل از مراکز سه مماس مثلث مفروض هستند.

۲۳۱. ملاحظة ۱. با توجه به گزاره‌های بالا (§۲۲۹، §۲۳۵) می‌توان نتیجه گرفت که همه ویژگیهای یک گروه نقاط مرکز ارتفاعی را می‌توان به مراکز دایره‌های محاطی یک مثلث نیز نسبت داد. به این ترتیب یک دسته گزاره به دست می‌آوریم که گزاره‌های زیر نمونه‌ای از آنها هستند.

(الف) شعاع دایرة محیطی مثلثی که رأسهای آن هر سه تایی از چهار مرکز سه مماس مثلث مفروضی باشند، با قطر دایرة محیطی آن مثلث مفروض برابر است (§۲۲۳).

(ب) نقطه متقارن هر مرکز سه مماس یک مثلث مفروض، نسبت به مرکز دایرة محیطی آن مثلث، مرکز دایرة محیطی مثلثی است که رأسهای آن سه مرکز سه مماس دیگر مثلث مفروض هستند (§۲۲۴).

(ج) مراکز دایره‌های محیطی چهار مثلثی که توسط چهار مرکز سه مماس یک مثلث مفروض تعیین می‌شوند، مراکز سه مماس مثلث متقارن با مثلث مفروض، نسبت به مرکز دایرة محیطی این مثلث، هستند. در واقع، مراکز دایره‌های محیطی متنها گروه مرکز ارتفاعی $I_a I_b I_c$ (§۲۲۹) حقاً متقارن این نقاط نسبت به مرکز دایرة نه نقطه این گروه هستند (§۲۲۴)، و این مرکز نه نقطه بر مرکز دایرة محیطی مثلث ABC ، نقطه O ، منطبق است (§۲۳۰).

۲۳۲. ملاحظة ۲. گزاره‌های بالا (§۲۳۱) با در نظر گرفتن مثلث ABC به عنوان مثلث پادک مثلثی که رأسهای آن مراکز سه مماس مثلث ABC هستند به دست آمده‌اند. حال آنکه در بررسی مرکز ارتفاعی (§۱۷۵) و دایرة نه نقطه، مثلث ABC مثلث اصلی با مرکز ارتفاعی و دایرة نه نقطه مستقل در نظر گرفته شده بود. به این ترتیب، یک مثلث می‌تواند نقش دوگانه‌ای در رابطه با مرکز ارتفاعی از یک طرف و مراکز سه مماس از طرف دیگر بازی کند. این نقش دوگانه «ترجمه» یا «تبديل» ویژگیهای به دست آمده برای مرکز ارتفاعی به ویژگیهای مراکز سه مماس و بر عکس را، بدون نیاز به اثبات مجدد ویژگیهای حاصل، امکان‌پذیر می‌سازد.

مثلثاً با در نظر گرفتن مثلث ABC به عنوان مثلث اصلی، متوجه شدیم که دایره‌ای که قطر آن است از نقاط E و F می‌گذرد (§۱۷۵) و مرکزش، P ، روی دایرة نه نقطه مثلث ABC قرار دارد (§۲۰۷). ولی A و H مراکز سه مماس مثلث DEF از مثلث ABC هستند (§۱۹۲). پس اگر ABC را مثلث پادک گروه مراکز سه مماس آن، یعنی I_a ، I_b ، I_c در نظر بگیریم، می‌توانیم بگوییم دایره‌ای که قطر آن است از رأسهای B و C از مثلث ABC می‌گذرد و مرکز آن روی دایرة محیطی مثلث ABC قرار دارد. ولی این گزاره را به طور مستقل نیز اثبات کردیم (§۱۲۲).

دایره‌ای که $I_a I_b I_c$ قطر آن است، بادایره‌ای که BC قطر آن است، متناظر است. هر دوی این دایرها را قبلاً به طور مستقل در نظر گرفتیم (§۱۲۲ و §۱۷۵).

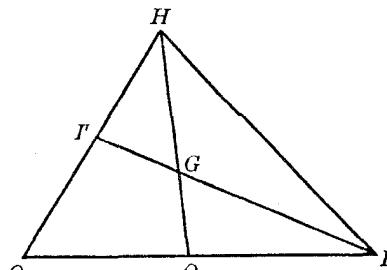
خواسته خود می‌تواند نمونه‌هایی دیگر از این نوع بیدا کند.

۲۳۳. قضیه. مساحت مثلثی که رأسهای آن مراکز دایره‌های محاطی خارجی مثلث حاده مفروضی هستند، با حاصل ضرب محیط و شعاع دایرة محیطی آن مثلث برابر است.

۲۳۴. قضیه. در هر مثلث حاده، مجموع فواصل رأسها از اضلاع متناظر مثلث پادک برابر است با مجموع قطر دایرة محیطی مثلث مفروض و فاصله مرکز ارتفاعی از یک ضلع مثلث پادک.

اینها «ترجمه» ویژگیهای هستند که قبلاً اثبات شده‌اند (§۱۹۹، §۱۴۵).

۲۳۵. قضیه. پاره‌خطی که مرکز ارتفاعی مثلث مفروضی را به مرکز دایرهٔ محیطی مثلث که رأسهای آن مراکز دایره‌های محاطی خارجی مثلث هستند وصل می‌کند، توسط مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث میانک مثلث مفروض نصف می‌شود.



شکل ۷۳

شکل ۷۳، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث $I_1 I_2 I_3$ (شکل ۷۳)، که رأسهای آن مراکز دایره‌های محاطی خارجی مثلث ABC هستند، متقارن نقطه I ، مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC ، نسبت به O ، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC است (§۲۳۱ ب). اگر H و G به ترتیب مرکز ارتفاعی و مرکز تقلیل مثلث ABC باشند. نقطه G مرکز تقلیل مثلث HO' نیز هست، زیرا $HG = 2GO$ (§۱۰۱)؛ پس خط IG از وسط HO' ، یعنی نقطه I' می‌گذرد. به علاوه، $IG = 2GI'$ ، یعنی I' در تجانس $(\frac{1}{2}, -G)$ متناظرند. پس I' نقطه‌ای است که در $A'B'C'$ ، مثلث میانک مثلث ABC ، با مرکز دایرهٔ محاطی داخلی I از مثلث ABC متناظر است (§۱۹۸) و قضیه ثابت می‌شود.

۲۳۶. قضیه. در هر مثلث حاده، خطهای متقارن اضلاع مثلث پادک نسبت به اضلاع متناظر مثلث مفروض، مثلثی تشکیل می‌دهند که مرکز دایرهٔ محاطی داخلی آن بر مرکز دایرهٔ محیطی مثلث مفروض منطبق است. فرض کنید O' نقطه متقارن O ، یعنی مرکز دایرهٔ محیطی مثلث مفروض ABC ، نسبت به ضلع BC باشد. پاره‌خطهای AH و OO' مساوی و موازی‌اند؛ پس $OA = HO'$ مساوی و موازی‌اند. شعاع $OA = R$ بر ضلع $d = EF$ از مثلث پادک DEF عمود است (§۱۸۸)؛ پس HO' نیز بر d عمود است، یعنی اگر HO' خط d را در نقطه L قطع کند، پاره‌خط $HL = m$ شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث DEF است (§۱۹۲).

حال اگر d' متقارن d باشد، فاصله O از d' با فاصله $O_a L$ از d برابر است، زیرا O نیز نسبت به BC متقارن‌اند؛ به علاوه، فاصله $O_a L = R + m$ به انتخاب ضلع d از مثلث DEF بستگی ندارد؛ پس O از اضلاع d' ، e' ، و f' از مثلث $d'e'f'$ که از d' و دو ضلع مشابه‌اش e' و f' تشکیل می‌شود، همفاصله است.

۲۳۷. ملاحظهٔ ۱. ضمن اثبات بالا، ثابت کردیم که شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث $d'e'f'$ با مجموع شعاع دایرهٔ محیطی مثلث مفروض و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث پادک آن برابر است.

۲۳۸. ملاحظهٔ ۲. مثلث ABC مثلث حاده گروه مثلثهای مرکز ارتفاعی $ABCH$ است، که مثلث DEF مثلث پادک مشترک آنهاست. گزاره‌های قبلی (§۲۳۶ و §۲۳۷) را می‌توان طوری تغییر داد که در مورد مثلثهای دیگر گروه مرکز ارتفاعی نیز صادق باشند. این کار را به عهده خواننده می‌گذاریم.

۲۳۹. ملاحظهٔ ۳. اگر در گزاره‌های قبلی (§۲۳۶، §۲۳۷) را مثلث مفروض فرض کنیم؛ نقاط B و C دو مرکز دایره‌های محاطی خارجی آن خواهند بود؛ خط d بر دایره‌های محاطی خارجی متناظر (B) و (C)

مimas است: بنابراین، d' ، متقارن d نسبت به خط‌المرکزین BC نیز بر (B) و (C) مimas است؛ یعنی d' چهارمین مimas مشترک این دو دایره (علاوه بر اضلاع DEF) است. نقطه O مرکز دایرهٔ محیطی مثلثی است که رأسهای آن مرکز دایره‌های محاطی خارجی مثلث مفروض DEF هستند. پس گزاره‌های فوق (۴۲۳۶)، (۴۲۳۷) را می‌توان به صورت زیر «ترجمه» کرد (۴۲۳۲).

اگر دایره‌های محاطی خارجی یک مثلث حاده را دو به دو در نظر بگیریم، چهار مimas مشترک آنها مثلث دیگری می‌سازند که مرکز دایرهٔ محاطی داخلی اش بر مرکز دایرهٔ محیطی مثلثی که رأسهای آن مرکز دایره‌های محاطی خارجی مثلث مفروض هستند، منطبق است؛ و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی آن با مجموع شعاع دایرهٔ محاطی داخلی و قطر دایرهٔ محیطی مثلث مفروض برابر است.

تمرین

۱) مثلث متغیر ABC دارای دایرهٔ محاطی داخلی و دایرهٔ محیطی ثابتی است. نشان دهید که مثلث $A'B'C'$ که رأسهای آن نقاط برخورد نیمسازهای خارجی مثلث ABC و دایرهٔ محیطی ABC هستند، دارای مرکز ارتقاعی، مرکز قفل و مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ ثابتی است.

۲) محل مرکز دایرةٔ محیطی O از مثلث ABC ، و محل مرکز دایره‌های محاطی مثلثهای $I_1I_2I_3$ و $I_4I_5I_6$ مفروض است. مثلث ABC رارسم کنید.

۳) دایرةٔ محاطی داخلی مثلث ABC در نقاط D, E ، و F به ترتیب بر اضلاع BC, CA و AB مimas است؛ I مرکز این دایره است؛ L, M ، و N به ترتیب مرکز ارتقاعی مثلثهای IAB, ICA و IBC هستند. ثابت کنید که (الف) دایره‌های محاطی خارجی مثلث ABC برایریند؛ (ب) مثلث MN و LMN ، و NL ، و LM به ترتیب از نقاط D, E ، و F می‌گذرند؛ (ج) مثلثهای ABC هم ارزند؛ (د) اگر دایره‌های محاطی خارجی نسبت به رأسهای A, B ، و C به ترتیب در نقاط AD, BE ، و CF بر AB, CA ، و BC مimas باشند، خطوط NL, MN ، و LM به ترتیب بر AD, BE ، و CF عمودند؛ و خطوط MN, NL ، و LM به ترتیب خطوط AD, BE ، و CF را روی دایرةٔ محاطی داخلی قطع می‌کنند.

تمرین برای مرور

دایرةٔ محیطی

۱) مثلثی را که m_a, m_b ، و m_c از آن مفروض‌اند، رسم کنید.

۲) از مثلثی محل نقاط برخورد ارتفاع، میانه و نیمساز رسم شده از یک رأس با دایرةٔ محیطی مفروض است؛ مثلث را رسم کنید.

۳) از مثلثی تفاضل زاویه‌های قاعده، و محل نقاط برخورد ارتفاع، میانه، و نیمساز رسم شده از رأس مقابل قاعده با قاعده، مفروض است؛ مثلث را رسم کنید.

۴) نشان دهید که عمودمنصف نیمساز AU از مثلث ABC ، خطی که در نقطه U بر ضلع BC عمود است و قطري از دایرةٔ محیطی که از رأس A می‌گذرد، هم‌رساند.

۵) از U ، پای نیمساز AU از مثلث ABC ، عمود UQ را بر شعاع AO از دایرةٔ محیطی ABC رسم می‌کنیم تا AC را در P قطع کند. ثابت کنید که AP با AB برابر است.

۶) روی دایره‌ای مفروض نقطه‌ای بیاید، به طوری که خطوط رسم شده از آن به دو نقطه مفروض دایره را در دو سر وتری با طول معلوم قطع کند.

۷) روی دایره‌ای مفروض نقطه‌ای بیاید، به طوری که این نقطه و دو نقطه‌ای که از برخورد دایره با خطوطی که این نقطه را به دو نقطه مفروض وصل می‌کنند حاصل می‌شوند مثلثی بسازند که زاویهٔ مفروضی داشته باشد. (دو حالت را در نظر بگیرید: حالتی که زاویهٔ مفروض با زاویهٔ بین دو ضلعی که از دو نقطه

- مفهوم می‌گذرند برایر باشد و حالتی که زاویه مفروض باین زاویه برایر نباشد.)
- (۸) در یک دایرة مفروض مثلثی با زاویه رأس مفروض را چنان محاط کنید که قاعده‌اش بر دایرة مفروض دیگری مماس و یک ضلع دیگر شیز بر دایرة مفروض سومی مماس باشد.
- (۹) پاره خط BC با طول ثابت طوری حرکت می‌کند که دو سرش روی دو خط ثابت AB و AC می‌مانند. نشان دهید که دایرة محیطی مثلث ABC بر دایرة ثابتی مماس است.
- (۱۰) مثلثی را با مفروض بودن یک زاویه، ارتفاع رسم شده از رأس این زاویه و مجموع فاصله‌های پای این ارتفاع از دو ضلع دیگر رسم کنید.
- (۱۱) نشان دهید که در هر مثلث پای ارتفاع وارد بر قاعده و تصویرهای دوسر قاعده بر قطعی از دایرة محیطی که از رأس مقابله قاعده می‌گذرد، روی دایره‌ای قرار دارند که مرکزش وسط قاعده است.

میانه‌ها

- (۱۲) نیمساز داخلی زاویه B از مثلث ABC اضلاع $B'C'$ و $B'A'$ از مثلث میانک مثلث ABC را در نقاط A'' و C'' قطع می‌کند. ثابت کنید $AA'' = CC''$ و $B'A'' = B'C''$ بر نیمساز عمودند و مطلب را برای نیمساز خارجی نیز ثابت کنید.
- (۱۳) A' , B' , و C' نقاط برخورد میانه‌های مثلث ABC با دایرة محیطی هستند. اگر $B'C' = a'$, $A'B' = c'$, و $C'A' = b'$ باشند، نشان دهید که (با توجه به نمادهای متداول در مورد مثلث ABC) داریم
- $$am_a : a' = bm_b : b' = cm_c : c'$$

(۱۴) نشان دهید خطوطی که از رأسهای A , B , و C از مثلث ABC به ترتیب به موازات میانه‌های رسم شده از رأسهای B , C , و A رسم می‌شوند مثلثی تشکیل می‌دهند که مساحتش سه برابر مساحت مثلث ABC است.

- (۱۵) از یک مثلث متساوی الساقین ارتفاع و میانه وارد بر یکی از اضلاع جانبی مفروض‌اند. مثلث را رسم کنید.
- (۱۶) شعاع دایرة محیطی مثلث G , ABC مرکز نقل آن, r^1 , r^2 , و r^3 به ترتیب شعاعهای دایره‌های محیطی مثلثهای CAG , BCC , و ABG و r^r شعاع دایرة محیطی مثلث تشکیل شده از میانه‌های مثلث ABC است. نشان دهید که $4Rr^r = 3r^1r^2r^3$.

- (۱۷) دایرة متغیری از دو نقطه ثابت A و B می‌گذرد. اگر M نقطه دوم برخورد دایره و خط ثابتی باشد که از A می‌گذرد، مکان هندسی مرکز نقل مثلثی که رأسهای آن, A , M و مرکز دایرة هستند، و مکان هندسی نقطه وسط شعاعی را که از M می‌گذرد به دست آورید.

- (۱۸) از G , مرکز نقل مثلث ABC خطی به موازات BC رسم می‌کنیم تا AB و AC را به ترتیب در $\overset{\circ}{A}$ و $\overset{\circ}{C}$ قطع کند؛ به همین ترتیب از G خطی به موازات CA رسم می‌کنیم تا BC و BA را به ترتیب در $\overset{\circ}{B}$ و $\overset{\circ}{A}$ قطع کند و خطی به موازات AB رسم می‌کنیم تا CA و CB را به ترتیب در $\overset{\circ}{C}$ و $\overset{\circ}{B}$ قطع کند. ثابت کنید که دو مثلث $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ برابرند.

- (۱۹) ضلع BC از مثلث ABC را از طرف C تا نقطه A_1 امتداد می‌دهیم به طوری که $CA_1 = k \cdot BC$. به همین ترتیب نقاط B_1 و C_1 را طوری می‌یابیم که $AB_1 = k \cdot CA$ و $AC_1 = k \cdot AB$. $AB_1 = k \cdot CA$ و $AC_1 = k \cdot AB$ را ناقاط وسط پاره خطهای AA_1 , BB_1 , و CC_1 فرض کنید. نشان دهید که (الف) سه مثلث ABC , $A_1B_1C_1$, و $A_2B_2C_2$ مرکز نقل یکسانی دارند؛ (ب) نسبت مساحت‌های مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ برابر است با $(1+3k)^2$. حالتهای خاص $k=1$ و $\frac{1}{3} = k$ را در نظر بگیرید. ویژگی‌های دیگر شکل‌های توصیف شده در این تمرین را بیایید.

دایره‌های سه مماس

۲۰) نیمساز زاویه‌ای را که رأس آن دور از دسترس است، رسم کنید.

۲۱) ثابت کنید اگر نیمساز داخلی یک زاویه مثلث نیمساز زاویه متشکل از دو نیمساز داخلی دیگر هم باشد، مثلث متساوی‌الساقین است.

۲۲) از مثلثی مساحت، یک زاویه و طول پاره‌خطی که مرکز دایرة محاطی داخلی و مرکز دایرة محاطی خارجی نسبت به رأس زاویه مفروض را به هم وصل می‌کند، مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۲۳) دایره‌ای که از D ، پای ارتفاع AD و نقاط I و I_a از مثلث ABC می‌گذرد، AD را در L هم قطع می‌کند. نشان دهید که AL با قطر دایرة محیطی مثلث ABC برابر است. گزاره متناظری را در مورد دو مرکز دایره‌های محاطی خارجی بیان و آن را اثبات کنید.

۲۴) طول ضلع BC از مثلث متغیر ABC و محل نقاط I و I_a از آن مفروض است. نشان دهید که (الف) رأس A روی یک خط راست حرکت می‌کند؛ (ب) راستهای AB و AC ثابت‌اند؛ (ج) شعاع دایرة محیطی ABC ثابت است؛ و (د) مرکز دایرة محیطی ABC روی یک دایره حرکت می‌کند. مثلثی را که اجزای زیر از آن مفروض است، رسم کنید.

$$S, r_a, r \quad (25) \quad b - c, h_a, a \quad (26) \quad b - c, r_a, a \quad (27)$$

۲۸) از مثلث ABC زاویه A و شعاعهای دایره‌های محاطی داخلی دو مثلث ABI و ACI که I مرکز دایرة محاطی داخلی ABC است مفروض‌اند. مثلث را رسم کنید.

۲۹) از نقطه برخورد قاعده یک مثلث و نیمساز داخلی زاویه مقابل آن مماسی بر دایرة محاطی داخلی رسم می‌کنیم. ثابت کنید زاویه‌ای که این مماس با قاعده می‌سازد با تفاصل دو زاویه قاعده برابر است.

۳۰) از مثلثی شعاع دایرة محیطی، مجموع شعاع یک دایرة محاطی خارجی و شعاع دایرة محاطی داخلی، و طول خط‌مرکزین این دو دایره ($II_a = 2d, r_a + r, R$) مفروض است. مثلث را رسم کنید. راهنمایی: فاصله هر نقطه K روی دایرة محیطی (O) از توئین مشترک (O) و دایرة (K, d) برابر است با $(r_a - r)$.

(الف): پس r و r_a را می‌توان یافت.

۳۱) اضلاع مثلث مفروضی پاره‌خطهای n_a, n_b و n_c را روی خطوطی که از مرکز دایرة محاطی داخلی به موازات اضلاع رسم شده است، جدا می‌کنند. نشان دهید که از مرکز دایرة محاطی داخلی به

$$(n_a : a) + (n_b : b) + (n_c : c) = 2 \quad , \quad 4S = (n_a h_a + n_b h_b + n_c h_c)$$

گزاره‌های متناظری را برای مرکز دایره‌های محاطی خارجی بیان و اثبات کنید. راهنمایی:

$$n_a : a = (h_a - r) : h_a$$

۳۲) نشان دهید که فواصل مرکز دایرة محاطی داخلی مثلث از میانه‌های مثلث برابر است با

$$(b - c)r : 2m_a \quad , \quad (c - a)r : 2m_b \quad , \quad (a - b)r : 2m_c$$

روابط متناظر برای مرکز دایره‌های محاطی خارجی را بیان و اثبات کنید.

مثلثی را که اجزای زیر از آن مفروض است، رسم کنید.

۳۳) S, A, r . راهنمایی. S و r را تعیین می‌کنند و در نتیجه، مثلث $AIZ_a Z_a$ مشخص می‌شود.

۳۴) $A, a - b, r$. راهنمایی. از مثلث AIZ_a ، $AZ = \frac{1}{2}(b + c - a)$ را می‌دانیم که همراه با $b - a$ ، ضلع c را تعیین می‌کنند.

$$.r, A, a - c \quad (35)$$

۳۶) a, h_b, a . راهنمایی. h_b و a زاویه C را تعیین می‌کنند؛ پس مثلث IXC مشخص است.

$$r_b - r_c, A \cdot b + c \quad (۳۷)$$

$$r_b + r_c, B - C \cdot b + c \quad (۳۸)$$

$$r_a - r_b, A \cdot 2p \quad (۳۹)$$

(۴۰) خطی که پای نیمساز داخلی AU از زاویه A در مثلث ABC را به نقطه Y ، محل تماش دایرة محاطی داخلی با ضلع CA ، وصل می‌کند خطی را که در نقطه A بر CA عمود است در نقطه F قطع می‌کند. ثابت کنید که $AF = h_a$.

(۴۱) خطی که از یک رأس مثلث به نقطه تماش دایرة محاطی داخلی (دایرة محاطی خارجی نسبت به آن رأس) با ضلع مقابل آن رأس رسم می‌شود، مثلث را به دو مثلث تقسیم می‌کند. نشان دهید که دایرہ‌های محاطی داخلی (خارجی) این دو مثلث در همان نقطه براین خط مماس‌اند.

(۴۲) (الف) رابطه زیر را، که با استفاده از نمادهای متداول نوشته شده است، ثابت کنید:

$$AX^t + AX_a^t + AX_b^t + AX_c^t = 3(b^t + c^t) - a^t$$

(ب) نشان دهید که مجموع مربع فاصله‌های رأسهای یک مثلث از نقاط تماش ضلع مقابل هر کدام با چهار دایرة سه مماس مثلث (دوازده فاصله) ۵ برابر مجموع مربع اضلاع مثلث است.

(۴۳) نشان دهید که تصویر رأس B از مثلث ABC بر نیمساز داخلی زاویه A روی خطی قرار دارد که نقاط تماش دایرة محاطی داخلی با اضلاع BC و AC را به هم وصل می‌کند. گزاره متناظری را برای نیمسازهای خارجی بیان و آن را اثبات کنید.

(۴۴) نشان دهید که وسط یک ضلع مثلث، پای ارتقای وارد براین ضلع، و تصاویر دو انتهای این ضلع بر روی نیمساز داخلی زاویه مقابل، چهار نقطه همدایره هستند. آیا این مطلب برای نیمساز خارجی صادق است؟

ارتفاعات

(۴۵) می‌خواهیم خطی به موازات خط مفروض s رسم کنیم که از نقطه دور از دسترس X ، که نقطه برخورد دو خط مفروض p و q است بگذرد. به این منظور خطی عمود بر خط s رسم می‌کنیم تا p و q را در A و B قطع کند. اگر H نقطه برخورد عمودهایی باشد که از A بر q و از B بر p رسم شده‌اند، خطی که از AB عمود می‌شود خط مطلوب است. درستی این ترسیم را نشان دهید.

(۴۶) A' وسط قاعده، و F پای ارتفاعهای وارد بر دو ضلع جانبی یک مثلث متغیر، نقاط ثابتی هستند، و $A'E = A'F$. مکان هندسی رأسهای مثلث و مرکز ارتفاعی آن را بیابید.

(۴۷) نشان دهید که نقطه متقارن مرکز ارتفاعی مثلث نسبت به یک رأس مثلث، و نقطه متقارن آن رأس نسبت به نقطه وسط ضلع مقابل، با مرکز دایرة محیطی مثلث همخطاند.

(۴۸) مثلثی طوری تغییر می‌کند که همواره با خودش متشابه می‌ماند. مرکز ارتفاعی ثابت است و یک رأس روی خط ثابتی قرار دارد. ثابت کنید که دو رأس دیگر نیز روی دو خط راست ثابت قرار دارند.

(۴۹) رأسهای مثلثی روی ارتفاعهای مثلث مفروضی قرار دارند. اگر از وسط اضلاع این مثلث عمودهایی بر اضلاع متناظر مثلث مفروض رسم کنیم، نشان دهید که این سه عمود همروز‌اند.

(۵۰) اگر D' دومین نقطه برخورد ارتفاع ADD' از مثلث ABC با دایرة محیطی، به مرکز O ، و P نقطه برخورد BC با خطی که از D' بر AC عمود می‌شود باشند، نشان دهید که خطوط AP و AO با نیمساز زاویه DAC متساوى می‌سازند.

(۵۱) مرکز ارتفاعی، وسط قاعده و راستای قاعده مثلث متغیری ثابت است. نشان دهید که دایرة محیطی این مثلث از دو نقطه ثابت می‌گذرد. مکان هندسی مرکز تقلیل مثلث را بیابید.

(۵۲) مثلثی را با مفروض بودن h_b , h_c , و h_a رسم کنید.

(۵۳) نشان دهید مثلثی که رأسهای آن پای ارتفاع وارد بر قاعده و نقاط وسط ارتفاعهای وارد بر دو ضلع دیگر از یک مثلث مفروض هستند بامثلت مفروض مشابه است؛ و دایرة محیطی این مثلث از مرکز ارتفاعی وسط قاعده مثلث مفروض می‌گذرد.

(۵۴) نشان دهید که زاویه بین خطوط $C'E$ و $B'F$ ، مکمل A یا برابر $3A$ است. حروف به کار رفته همان نمادهای متداولی هستند که در مثلث به کار می‌روند.

(۵۵) اگر P و Q نقاط متقاضن نقطه L نسبت به اضلاع Ox و Oy از زاویه‌ای مفروض باشند، و $Q' = (LP, Oy)$ ، $P' = (LQ, Ox)$ نشان دهید که P, Q, P' ، و Q' روی دایره‌ای قرار دارند که از O می‌گذرند.

(۵۶) اضلاع مثلث پادمکمل مثلث ABC دایرة محیطی مثلث ABC را در نقاط P, Q ، و R قطع می‌کنند. نشان دهید که مساحت مثلث PQR چهار برابر مساحت مثلث پادک مثلث ABC است.

(۵۷) B' و C' تصویرهای نقطه متغیری از دایره‌ای به قطر BC بر روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC هستند. نشان دهید که مکان هندسی مرکز ارتفاعی مثلث متغیر $AB'C'$ دایره‌ای است که قطر آن ضلع EF از مثلث پادک نسبت به رأس A است.

(۵۸) نشان دهید که (الف) اگریک مثلث حاده با مثلث پادک خود متشابه باشد، هر دو مثلث متساوی‌الاضلاع‌اند؛

(ب) اگر مثلثی که زاویه‌ای منفرجه دارد با مثلث پادک خود متشابه باشد، زاویه‌های آن $\frac{360}{7}^\circ$ ، $\frac{180}{7}^\circ$ ، و $\frac{720}{7}^\circ$ هستند.

(۵۹) نشان دهید در مثلث متغیری که قاعده و دایرة محیطی ثابت دارد، پارهخط واصل بین پای ارتفاعهای وارد بر ضلع متغیر طول ثابتی دارد.

(۶۰) دو دایرة هم مرکز مفروض‌اند. A نقطه‌ای روی دایرة بزرگتر است، و B و C نقاط برخورد دایرة بزرگتر با مماس متغیر BC بر دایرة کوچک‌ترند. ثابت کنید که مکان هندسی مرکز ارتفاعی مثلث متغیر یک دایرة است.

(۶۱) از مرکز ارتفاعی مثلث ABC خطوطی موازی با اضلاع AB و AC رسم می‌کنیم تا ضلع BC را به ترتیب در D و E قطع کنند. عمدهایی که در D و E بر BC رسم می‌شوند، AB و AC را در دو نقطه D' و E' قطع می‌کنند. نشان دهید روپروری قطری B در دایرة محیطی مثلث ABC ، روپروری قطری C در دایرة محیطی مثلث ABC ، و نقاط D' و E' همخاطباند.

(۶۲) فرض کنید D و D' تصاویر A' ، وسط ضلع BC ، بر شعاعهای OB و OC از دایرة محیطی مثلث ABC ، و E ، E' ، F ، F' به ترتیب، نقاط متناظر نسبت به نقاط B' و C' باشند. ثابت کنید که

$$\sqrt{DD' : a} + \sqrt{EE' : b} + \sqrt{FF' : c} = (R + r) : R$$

دایرة نه نقطه

(۶۳) از وسط هر ضلع یک مثلث خطی موازی با نیمساز خارجی زاویه روپروری آن ضلع رسم می‌کنیم. نشان دهید که دایرة نه نقطه مثلثی که از این سه خط تشکیل می‌شود همان دایرة نه نقطه مثلث مفروض است.

(۶۴) از مثلثی محل مرکز ارتفاعی، محل نقطه‌ای روی دایرة نه نقطه، محل نقطه وسط قاعده، و محل خط بی‌نهایتی که قاعده روی آن قرار دارد، مفروض است؛ مثلث را رسم کنید.

(۶۵) خط واصل بین مرکز ارتفاعی مثلث ABC و وسط ضلع BC ، دایرة محیطی مثلث ABC را در نقاط A ، A' ، B ، B' ، C ، C' قطع می‌کند. نشان دهید که مرکز ارتفاعی سه مثلث ABC ، A'_BC ، و $A_B'C$ رأسهای یک مثلث قائم‌الزاویه هستند.

- (۶۶) در مثلث متغیر ABC قاعده BC و A ، زاویه روبروی قاعده، ثابت‌اند. نشان دهید که (الف) خط Q راستای ثابتی دارد؛ و (ب) دایره نه نقطه بر دایره ثابتی مماس است.
- (۶۷) نشان دهید که پای ارتفاع وارد بر یک ضلع مثلث، وسط پاره‌خطی روی قطر دایره محیطی که بین این ضلع و رأس مقابل آن است، و مرکز دایره نه نقطه، همخطاً‌اند.
- (۶۸) A, B, C و C' مرکزهای سه دایرة برابر (A ، B)، و (C) با نقطه مشترک L ، D دیگر نقطه مشترک دایره‌های (B) و (C)، E دیگر نقطه مشترک دایره‌های (C) و (A)، و F دیگر نقطه مشترک دایره‌های (A) و (B) است. نشان دهید که دایرة DEF با دایره‌های مفروض برابر است و مرکز این دایرة بر مرکز ارتفاعی مثلث ABC منطبق است.
- (۶۹) نشان دهید خطوطی که از نقاط اویلر مثلث به موازات نیمسازهای داخلی متناظرشان رسم می‌شوند، هم‌اند؛ و خطی که از نقطه برخورد این سه خط به مرکز نه نقطه مثلث رسم می‌شود، با خطی که از مرکز دایرة محیطی مثلث مفروض به مرکز دایرة محاطی داخلی آن رسم می‌شود موازی است. گزاره‌های مشابهی را با استفاده از نیمسازهای داخلی و خارجی بیان و آنها را ثابت کنید.
- (۷۰) نشان دهید که مرکز دایرة نه نقطه مثلث IBC روی نیمساز داخلی زاویه A' از مثلث $A'B'C'$ ، یعنی مثلث مکمل مثلث مفروض ABC قرار دارد. گزاره‌های مشابهی را در مورد مثلثهای $I_a BC$ ، $I_b BC$ ، و $I_c BC$ بیان و آنها را ثابت کنید.
- (۷۱) اگر O و H به ترتیب مرکز دایرة محیطی و مرکز ارتفاعی مثلث ABC باشند، نشان دهید که دایره‌های نه نقطه سه مثلث OHA ، OHB ، و OHC دو نقطه مشترک دارند.
- (۷۲) اگر $A', A'', B', B'', C', C''$ به ترتیب وسط اضلاع BC ، CA ، و AB از مثلث ABC باشند، نشان دهید که مراکز نه نقطه مثلثهای $AB'C'$ ، $AC'B'$ ، و $CA'B'$ مثلثی متجانس با ABC ، با نسبت تجانس $2:1$ ، را تشکیل می‌دهند؛ ویژگیهای دیگر این شکل را بیاید.
- ### تمرینهای گوناگون
- (۷۳) نشان دهید که خطوط اویلر سه مثلثی که از یک مثلث مفروض، توسط اضلاع مثلث پادک آن، جدا می‌شوند یک نقطه مشترک دارند و این نقطه روی دایرة نه نقطه مثلث مفروض قرار دارد.
- (۷۴) مثلث (S) در مثلث (T) محاط شده است و دو مثلث مشابه‌اند. نشان دهید که مرکز ارتفاعی مثلث (S) بر مرکز دایرة محیطی مثلث (T) منطبق است.
- (۷۵) ضلع BC از مثلث ABC قطر دایرة (BC) است و این دایرة اضلاع CA و AB را به ترتیب در E و F قطع می‌کند. دایره‌های (BC) و (AEF) روی هر خطی که از E (یا F) می‌گذرد یک وتر مضاعف جدا می‌کنند. نشان دهید که وسط این وتر روی دایرة نه نقطه مثلث ABC قرار دارد.
- (۷۶) نشان دهید که نقاط متقابل پای ارتفاع وارد بر قاعده یک مثلث نسبت به دو ضلع دیگر، روی ضلع متناظر با قاعده در مثلث پادک آن مثلث قرار دارند.
- (۷۷) در صفحه یک مثلث دو راستا به دست آورید، به طوری که اگر از هر رأس مثلث دو خط به ترتیب، موازی با این دو راستا رسم شوند تا ضلع مقابل را در دو نقطه قطع کنند، شش نقطه همداire به دست آید.
- (۷۸) نشان دهید که نقطه وسط یک ارتفاع مثلث، نقطه تراس ضلع متناظر با آن ارتفاع و دایرة محاطی خارجی نسبت به آن ضلع، و مرکز دایرة محاطی داخلی مثلث همخطاً‌اند.
- (۷۹) نشان دهید خطی که از O ، مرکز دایرة محیطی یک مثلث و I ، مرکز دایرة محاطی داخلی آن مثلث می‌گذرد، از H' ، مرکز ارتفاعی مثلثی که رأسهای آن نقاط تراس دایرة محاطی داخلی با اضلاع مثلث است، نیز می‌گذرد. همچنین نشان دهید که $R : H'I : OI = r$. آیا این مطلب برای مراکز دایره‌های محاطی خارجی نیز صادق است؟

- (۸۰) نقطه متقارن نقطه تمسق ضلع BC از مثلث ABC با دایرة محاطی داخلی، نسبت به نیمساز داخلی زاویه A و سطح ضلع BC است. نشان دهید که خط $A'X'$ و دو خط مشابه آن، $B'Y'$ و $C'Z'$ ، یک نقطه مشترک دارند. آیا این مطلب برای یک دایرة محاطی خارجی نیز صادق است.
- (۸۱) خط AD که از رأس A می‌گذرد دایرة محاطی مثلث ABC را در قطع می‌کند. اگر U و V به ترتیب مراکز ارتفاعی مثلثهای ABD و ACD باشند، ثابت کنید که UV با BC موازی و مساوی است.
- (۸۲) نیمسازهای داخلی زاویه‌های B و C از مثلث ABC خط AX ، واصل بین A و نقطه تمسق BC با دایرة محاطی خارجی نسبت به این ضلع، را به ترتیب در نقاط L و M قطع می‌کنند. ثابت کنید که $AL : AM = AB : AC$
- (۸۳) طول نیمساز داخلی یک زاویه مثلث و راستاهای هر سه نیمساز این مثلث مفروض است. مثلث را رسم کنید.
- مسئلی مشابه، مشتمل بر نیمسازهای خارجی، یا هم نیمسازهای داخلی و هم نیمسازهای خارجی را بررسی کنید.
- (۸۴) نشان دهید که حاصل ضرب فاصله‌های مرکز دایرة محاطی داخلی یک مثلث از سه رأس مثلث برابر $4Rr^3$ است. فرمولهای مشابهی را برای مرکز دایره‌های محاطی خارجی بیان و اثبات کنید.
- (۸۵) میانه‌های مثلث ABC و G مرکز نقل و مرکز ارتفاعی آن هستند. روی $A'A$ نقطه U را طوری می‌گیریم که $A'A \cdot A'U = A'B' = A'C'$. نقاط V و W را به طور مشابه نسبت به BB' و CC' در نظر می‌گیریم. نشان دهید که اضلاع مثلث UVW بامیانه‌های مثلث ABC متناسب‌اند، و GH قطری از دایرة محاطی آن است.
- (۸۶) خطی که به موازات میانه AA' از مثلث ABC رسم می‌شود، اضلاع BC ، CA ، و AB را در نقاط N ، H ، و D قطع می‌کند. ثابت کنید که نقاط متقارن H نسبت به نقاط وسط NC و BD ، نسبت به رأس A متقارن‌اند.
- (۸۷) قاطع متغیری اضلاع AB و AC از مثلث ABC را در نقاط P و Q قطع می‌کند. فرض کنید مرکز دایرة محاطی AP, P, Q ، و O مرکز دایرة محاطی مثلثی باشد که رأسهای آن A و نقاط همنوای P و Q هستند. نشان دهید که خط O, O از نقطه ثابتی می‌گذرد و دو میان نقطه مشترک دو دایره‌ای که در نظر گرفته شد، روی دایرة ثابتی قرار دارد.
- (۸۸) اگر X ، Y ، و Z نقاط تمسق اضلاع CA ، BC ، AB از مثلث ABC با دایرة محاطی داخلی باشند، و خطوط AX ، BY ، و CZ دایرة محاطی داخلی را در نقاط X' ، Y' ، و Z' هم قطع کنند، نشان دهید که $AX \cdot XX' \cdot BC = BY \cdot YY' \cdot CA = CZ \cdot ZZ' \cdot AB = 4rS$
- که در آن r و S به ترتیب، شعاع داخلی و مساحت مثلث ABC هستند. روابطی متناظر را برای دایره‌های محاطی خارجی بیان و آنها را اثبات کنید.
- (۸۹) عمودهای DP و DQ که از پای ارتفاع AD از مثلث ABC به ترتیب، بر اضلاع AB و AC رسم می‌شوند، عمودهای BP و CQ را که در B و C بر BC رسم شده‌اند، به ترتیب در نقاط P و Q قطع می‌کنند. ثابت کنید که خط PQ از H مرکز ارتفاعی ABC می‌گذرد.
- (۹۰) از رأسهای یک مثلث مفروض متقارنهای اضلاع متناظر مثلث پادمکمل نسبت به یک راستای مفروض رسم شده‌اند. نشان دهید سه خطی که به این ترتیب به دست می‌آیند روی نقطه‌ای از دایرة محاطی مثلث یکدیگر را قطع می‌کنند. این گزاره را نسبت به مثلث میانک و دایرة نه نقطه بیان کنید.
- (۹۱) ارتفاعهای ABC از مثلث CHF ، BHE ، AHD ، و F را به ترتیب از طرف E ، D ، و T تا نقاط P ، Q ، و R به امتداد داده‌ایم و $FR = CH$ ، $EQ = BH$ ، $DP = AH$ ، و R به

- (الف) موازات ضلعهای BC , CA , و AB رسم می‌شوند مثلث $A_1B_1C_1$ را تشکیل می‌دهند. نشان دهید که مرکز نقل مثلث $A_1B_1C_1$ است؛ (ب) مرکز تجانس مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ مرکز دایره محیطی هر یک از این مثلثهاست.
- (۹۲) نقاط H و O به ترتیب، مرکز ارتفاعی و مرکز دایرة محیطی مثلث ABC و نقاط P و P' دو نقطه متقارن نسبت به عمودمنصف BC هستند. عمودی که از P بر BC رسم می‌شود، BC را در P , P' را در OP'' قطع می‌کند؛ (الف) M وسط HP است. ثابت کنید که (الف) $MP'' = AP''$; (ب) متقارن P , P' نسبت به وسط OM روی AP' قرار دارد.
- (۹۳) ضلع AB از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را تا E امتداد می‌دهیم به طوری که $BE = AD$. خطی که در E بر ABE عمود می‌شود، خطی را که از C بر قطر BD عمود می‌شود در F قطع می‌کند. نشان دهید که AF نیمساز زاویه A است.
- (۹۴) اگر AD و BE ارتفاعهای مثلث ABC باشند، و BL عمودی باشد که از B بر DF رسم می‌شود، نشان دهید که اگر $LB' = LD \cdot LE$, مثلث مترازوی الساقین است.
- (۹۵) نقطه S مرکز تجانس دو مثلث $A'B'C'$ و ABC است، و A'', A' , B'', B' , و C'' نقاط متقارن A' , B' , C' نسبت به عمودمنصفهای CA , BC , AB هستند. خطوط AA'', BB'', CC'' و خطوطی را که از S به موازات CA , BC , AB رسم می‌شوند به ترتیب در A , B , C , و C'' قطع می‌کنند. نشان دهید دایرة S از $A_1B_1C_1$ می‌گذرد و مرکز آن روی خط اوپلر مثلث ABC قرار دارد.
- (۹۶) و t , m , h , b به ترتیب، ارتفاع، میانه، نیمساز داخلی رسم شده از یک رأس مثلثی هستند که شعاع دایرة محیطی آن R است. نشان دهید که
- $$4R^2h^2(t^2 - h^2) = t^2(m^2 - b^2)$$
- (۹۷) عمودهای BB' و CC' که از رأسهای B و C از مثلث ABC بر قطر دلخواه d از (I)، دایرة محاطی داخلی مثلث ABC رسم می‌شوند، خطوط XY و YZ را در نقاط B'' و C'' قطع می‌کنند؛ X , Y , و Z نقاط تماش (I) با اضلاع CA , BC , AB هستند. ثابت کنید که (الف) $CC' : CC'' = BB' : BB''$; (ب) $BB' : BB'' = CC' : CC''$ یکدیگر را قطع می‌کنند؛ (ج) خط $B''C''$ از مرکز دایرة محاطی خارجی نسبت به ضلع BC می‌گذرد.
- (۹۸) از مثلثی قاعده، زاویه مقابل قاعده، و مجموع مربع فاصله‌های رأس این زاویه از وسط دو پاره‌خطی که توسط پای ارتفاع رسم شده از همین رأس روی قاعده جدا می‌شود، مفروض است. مثلث را رسم کنید.
- (۹۹) از مثلثی قاعده و ارتفاع وارد بر قاعده مفروض‌اند. این مثلث را طوری رسم کنید که قطر دایرة محاطی داخلی آن با ضلع مربعي که در این مثلث محاط می‌شود و دو رأس آن روی قاعده است، برابر باشد.
- (۱۰۰) از مثلثی محل پای ارتفاع، محل پای میانه وارد بر قاعده، و محل مرکز دایرة محاطی داخلی آن (D, A') مفروض است. مثلث را رسم کنید.
- (۱۰۱) از مثلثی محیط، زاویه رأس و طول خطی که از رأس این زاویه رسم می‌شود و قاعده را به نسبت مفروضی تقسیم می‌کند، مفروض است. مثلث را رسم کنید.
- (۱۰۲) از مثلثی زاویه رأس، یک ضلع مجاور این زاویه و نسبت مساحت آن به مساحت مثلثی که نیمسازهای زاویه مفروض و ضلع مقابل آن زاویه می‌سازند، مفروض است. مثلث را رسم کنید.
- (۱۰۳) مثلث ABC را که CF , BE , AD , CD , BC , و AE ارتفاعهای آن هستند با مفروض بودن حاصل ضربهای $BC \cdot CD$, $CA \cdot AE$, و $AB \cdot BF$, $CA \cdot AE$.
- (۱۰۴) مثلث ABC را با مفروض بودن h_a , h_b , h_c , t_a , t_b , و t_c رسم کنید.

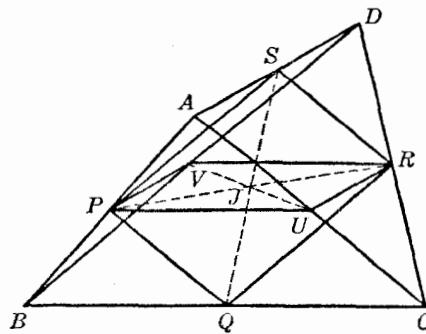
- ۱۰۵) فرض کنید A' , B' , C' و A'' , B'' , C'' به ترتیب، نقاط برخورد نیمسازهای داخلی و خارجی مثلث ABC با دایرة محیطی آن مثلث باشند. مثلث ABC را با مفروض بودن پاره خطهای (الف)، $A''B$, $C''A$, $B''C$ و (ب) $C''A$, $A''B$, $B''C$ رسم کنید.
- ۱۰۶) در یک دایرة مفروض مثلث قائم الزاویه‌ای محاط کرد که شعاع دایرة محاطی آن مفروض است به طوری که یک ضلع زاویه قائم‌اش از نقطه مفروضی بگذرد.
- ۱۰۷) از شش نقطه برخورد نیمسازهای داخلی یک مثلث با دایرة محاطی داخلی آن، سه نقطه مفروض است. مثلث را رسم کنید.
- ۱۰۸) از مثلث ABC ارتفاع AD و نسبتهای $AE : EC$ و $AF : FB$ و $AE : AF$ ، که E و F پای دو ارتفاع دیگر مثلث هستند مفروض است. مثلث را رسم کنید.
- ۱۰۹) از مثلثی محل دو نقطه اویلر و محل مرکز نقل مفروض است. مثلث را رسم کنید.
- ۱۱۰) از مثلثی قاعده، میانه وارد بر قاعده، و تقاضل دو ضلع دیگر مفروض است. مثلث را رسم کنید.
- ۱۱۱) یک رأس مثلث متغیری که در دایرة ثابتی محاط است، ثابت است و ضلع مقابل آن رأس از نقطه ثابتی می‌گذرد. (الف) نشان دهید که مرکز ارتفاعی یک دایرة را می‌پیماید. (ب) نشان دهید که دایرة نه نقطه بر دو دایرة ثابت هم مرکز مماس است.
- ۱۱۲) مماسی که از نقطه متغیر M بر دایرة (O) رسم می‌شود، قطر ثابت AA' را در نقطه T قطع می‌کند. نشان دهید که مکان هندسی مرکز دایرة محاطی داخلی OMT از چهار خط راست تشکیل می‌شود. مکان هندسی مراکز دایره‌های محاطی خارجی را به دست آورید.
- ۱۱۳) دایرة محیطی و راستاهای دو ضلع یک مثلث متغیر ثابت است. مکان هندسی مراکز سه مماس این مثلث را بیابید.
- ۱۱۴) خط متغیری که از رأس مثلث مفروضی می‌گذرد آن مثلث را به دو مثلث تقسیم می‌کند. این خط یک مماس مشترک داخلی دو دایرة محاطی داخلی آن دو مثلث است. نشان دهید که مماس مشترک داخلی دوم این دو دایرة از نقطه تماش دایرة محاطی داخلی مثلث مفروض با ضلع مقابل رأس مذکور می‌گذرد. خاصیت مشابهی را برای دایرة محاطی خارجی نسبت به رأس مذکور بیان و آن را ثابت کنید.
- ۱۱۵) شعاع دایرة محاطی داخلی و دو ضلع از مثلثی مفروض اند. نشان دهید که این مثلث را نمی‌توان تنها با خطکش و پیگار رسم کرد.
- ۱۱۶) (الف) نشان دهید خطوطی که از وسط اضلاع مثلث (T) مماس بر دایرة نه نقطه آن مثلث رسم می‌شوند، مثلثی متجانس با مثلث پادک مثلث (T) می‌سازند. (ب) نشان دهید که مرکز تجانس این دو مثلث روی خط اویلر مثلث (T) قرار دارد.

چهارضلعیها

الف. چهارضلعی در حالت کلی

۲۴۰. قضیه. نقاط وسط اضلاع هر چهارضلعی، رأسهای یک متوازی‌الاضلاع هستند.

پاره خط PS ، واصل بین P و سطح ضلع AB و سطح ضلع AD از چهارضلعی $ABCD$ (شکل ۷۴) و پاره خط QR ، واصل بین Q و سطح ضلع CB و سطح ضلع CD ، هردو با قطر BD از متوازی‌الاضلاع موازی و برابر نصف آن هستند؛ پس قضیه ثابت می‌شود.



شکل ۷۴

۲۴۱. نتیجه. (الف) محیط متوازی‌الاضلاع $PQRS$ برابر مجموع قطراهای چهارضلعی مفروض است (شکل ۷۴).

(ب) مساحت متوازی‌الاضلاع نصف مساحت چهارضلعی مفروض است.

اثبات را به عهده خواننده می‌گذاریم.

متوازی‌الاضلاع در چه صورت مستطیل می‌شود؟ در چه صورت لوزی می‌شود؟ در چه صورت مربع می‌شود؟

۲۴۲. قضیه. خطوطی که وسط اضلاع روبروی یک چهارضلعی را بهم وصل می‌کنند و خطی که وسط قطراهای چهارضلعی را بهم وصل می‌کند همساند و نقطه مشترکشان نقطه وسط هرکدام است.

خطوط PR و QS (شکل ۷۴) همیگر را در نقطه‌ای مانند J نصف می‌کنند، زیرا قطراهای متوازی‌الاضلاع $PQRS$ هستند (§۲۴۰).

اگر U و V به ترتیب، وسط قطرهای AC و BD باشند، $PURV$ نیز متوازیالاضلاع است، زیرا PV و RU هردو با AD موازی و نصف آن هستند؛ پس قطر UV از متوازیالاضلاع $PURV$ نیز در نقطه J توسط قطر PR نصف می‌شود.

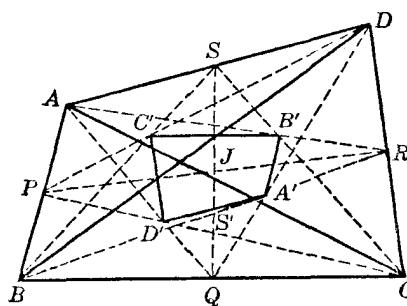
۲۴۳. تعریف. نقطه J (شکل ۲۴۲) را مرکز نقل چهارضلعی $ABCD$ می‌نامند.

۲۴۴. قضیه. چهارخطی که از وصل کردن هر رأس یک چهارضلعی به مرکز نقل مثلثی که سه رأس دیگر چهارضلعی رأسهای آن هستند حاصل می‌شوند، همسن اند.

فرض کنید $ABCD$ چهارضلعی مفروض (شکل ۲۵) و A' , B' , C' , D' به ترتیب مرکز نقل مثلثهای ABC , DAB , CDA , BCD باشند. داریم (شکل ۲۸۸)

$$PC' : PD = PD' : PC = 1 : 3$$

$$\therefore C'D' : CD = 1 : 3 \text{ با } CD \text{ موازی است و}$$



شکل ۷۵

پس، اضلاع چهارضلعی $A'B'C'D'$ با اضلاع متوازی چهارضلعی $ABCD$ موازی و متناسب‌اند؛ پس دو چهارضلعی متجلساند و خطوط AA' , BB' , CC' , DD' یکدیگر را در مرکز تجلسان دو شکل قطع می‌کنند.

۲۴۵. ملاحظه. (الف) مرکز تجلسان دو چهارضلعی (شکل ۲۴۴) بر J ، یعنی مرکز نقل چهارضلعی $ABCD$ منطبق است.

میانه QS از مثلث QAD (شکل ۷۵) پاره خط $D'A'$ را که با قاعده DA موازی است در S' قطع می‌کند؛ پس، S و S' نقاط متوازی در دو شکل متجلساند هستند، و خط QSS' از مرکز تجلسان دو چهارضلعی می‌گذرد. برای خط PR هم رابطه مشابهی صادق است و بهاین ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

(ب) همان طور که بهآسانی از شکل دیده می‌شود، جهت‌های خطوط $A'D'$ و AD عکس هم هستند؛ پس دو چهارضلعی تجلسان معکوس دارند و نقاط متوازی، مثل A و A' ، در دو طرف نقطه J قرار دارند، و $J A : JA' = -3 : 1$.

۲۴۶. قضیه. مجموع مریع اضلاع چهارضلعی برابر است با مجموع مریع قطرهای آن و چهار برابر مریع پاره خطی که وسط قطرهای آن را بهم وصل می‌کند.

در مثلثهای ABD , CBD , CAB , و VAC (شکل ۷۶) داریم (شکل ۱۰۶)

$$2AV^* = AB^* + AD^* - \frac{1}{2}BD^*$$

$$2CV^t = BC^t + CD^t - \frac{1}{2}BD^t$$

$$2UV^t = AV^t + CV^t - \frac{1}{2}AC^t$$

با ضرب کردن رابطه آخر در ۲ و افزودن آن به مجموع دو رابطه اول، پس از ساده کردن به دست می آوریم

$$4UV^t = AB^t + AD^t + BC^t + CD^t - AC^t - BD^t$$

۲۴۷. نتیجه. مجموع مریع اضلاع متوازی‌الاضلاع برابر است با مجموع مریع قطراهای آن.

۲۴۸. قضیه. مجموع مریع قطراهای چهار ضلعی دو برابر مجموع مریع دو خطی است که وسط اضلاع مقابل چهار ضلعی را بهم وصل می‌کنند.

خطهای QS و PR (شکل ۷۴) قطراهای متوازی‌الاضلاع $PQRS$ هستند (§۲۴۰)، و اندازه هر ضلع این متوازی‌الاضلاع نصف قطر متناظر در چهار ضلعی $ABCD$ است؛ به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود (§۲۴۷).

۲۴۹. مسئله. یک چهار ضلعی را با مفروض بودن چهار ضلع و یکی از دو خطی که وسط دو ضلع رو برو را بهم وصل می‌کنند، رسم کنید.

اضلاع چهار ضلعی $ABCD$ (شکل ۷۴) و خط PR مفروض‌اند؛ پس متوازی‌الاضلاع $PURV$ را می‌توان رسم کرد، زیرا قطر PR و اضلاع آن معلوم‌اند:

$$PU = RV = \frac{1}{2}BC, \quad PV = RU = \frac{1}{2}AD$$

اکنون قطر UV از متوازی‌الاضلاع $QUSV$ معلوم است و می‌توان آن را به طور مشابه رسم کرد. اکنون P, Q, R, S ، یعنی نقاط وسط اضلاع چهار ضلعی مشخص است، پس می‌توان مثلثهای PQB, SPA ، ... را کامل کرد، و به این ترتیب ترسیم چهار ضلعی $ABCD$ کامل می‌شود.

۲۵۰. مسئله. از یک چهار ضلعی دو زاویه رو برو، دو قطر، و زاویه بین قطرها مفروض‌اند؛ چهار ضلعی را رسم کنید.

دو کمان رسم کنید که قطر مفروض AC از چهار ضلعی مطلوب $ABCD$ وتر آنها باشد، و از نقاط روی آنها AC با زاویه‌های مفروض B و D دیده شود. قطر دیگر هم از لحاظ اندازه و هم از لحاظ راستا معلوم است؛ اکنون مسئله با قراردادن این قطر به طوری که دو انتهای آن روی دو دایره رسم شده قرار گیرد حل می‌شود، و روش این کار قبلی بیان شده است (§۸).

۲۵۱. قضیه. نیمسازهای داخلی زاویه‌های چهار ضلعی یک چهار ضلعی محاطی می‌سازند. فرض کنید که نیمسازهای داخلی زاویه‌های A و D از چهار ضلعی $ABCD$ یکدیگر را در P ، و نیمسازهای زاویه‌های B و C یکدیگر را در Q قطع کنند. داریم

$$\angle APD = 180^\circ - \frac{1}{2}(A + D), \quad \angle BQC = 180^\circ - \frac{1}{2}(B + C)$$

پس،

$$\angle APD + \angle BQC = 360^\circ - \frac{1}{2}(A + B + C + D) = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$$

به عنوان تمرین، گزاره مشابهی را برای نیمسازهای خارجی بیان و آن را ثابت کنید.

تمرین

(۱) نشان دهید که زاویه بین نیمسازهای داخلی دو زاویه مجاور چهارضلعی برابر است با نصف مجموع دو زاویه دیگر چهارضلعی. گزاره مشابهی را برای نیمسازهای خارجی بیان و آن را ثابت کنید.

(۲) یک چهارضلعی $ABCD$ ، P, Q, R, S به ترتیب وسط اضلاع AB, BC, CD, DA و OV, OU, OS, OR وسط قطرهای آن و O یک نقطه دلخواه است. OQ, OP, OR, OS به ترتیب در نقاط U, V, S', R', P' تقسیم می‌شوند. ثابت کنید که $U'V', P'R', Q'S'$ همسانند.

(۳) چهارضلعی $ABCD$ مفروض است، نشان دهید مکان هندسی نقطه M ، که به ازای آن،

$$\text{مساحت } MAB + \text{مساحت } MCD = \text{مساحت } MAC + \text{مساحت } MBD$$

خطی است که از وسط قطرها می‌گذرد.

(۴) از یک چهارضلعی طول اضلاع و طول پاره خطی که وسط قطرهای آن را بهم وصل می‌کند مفروض اند. چهارضلعی رارسم کنید.

ب. چهارضلعی محاطی

۲۵۲. تعریف. هر چهارضلعی که رأسهای آن روی یک دایره قرار داشته باشد چهارضلعی محاطی یا محاط شدنی نامیده می‌شود.

۲۵۳. قضیه. در هر چهارضلعی محاطی (الف) زاویه‌های مقابل مکمل اند و برعکس؛ (ب) زاویه بین یک ضلع و یک قطر برابر است با زاویه بین ضلع مقابل و قطر دیگر، و برعکس.

۲۵۴. قضیه. خطی که وسط دوکمانی را که دو ضلع مقابل از چهارضلعی روی دایره محیطی چهارضلعی جدا می‌کند، بر خطی که وسط دو کمان مربوط به دو ضلع دیگر را بهم وصل می‌کند عمود است.

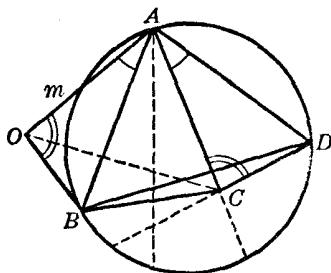
فرض کنید E, F, G ، و H به ترتیب وسط کمانهایی باشند که اضلاع AB, BC, CD ، و DA از چهارضلعی محاطی $ABCD$ روی دایره محیطی جدا می‌کنند، و M محل برخورد قطرهای AC و BD باشد. نقطه E ، وسط آن کمان AB است که C و D روی آن قرار ندارند، و بهمین ترتیب در مورد نقاط F, G و H .

زاویه AMD نصف مجموع کمانهای AD و BC است. خط HF قطر BD را در نقطه‌ای داخل دایره، مانند S ، قطع می‌کند؛ پس زاویه HSD نصف مجموع کمانهای HD و BF است. و بنابراین، نصف زاویه AMD است، یعنی خط FH با نیمساز داخلی زاویه AMD موازی است.

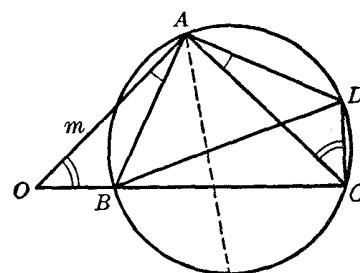
به همین ترتیب، خط EG با نیمساز داخلی زاویه AMB موازی است، و قضیه ثابت می‌شود.

۲۵۵. قضیه بطلمیوس. در چهارضلعی محاطی حاصل ضرب قطرها برابر است با مجموع حاصل ضربهای اضلاع رو برو، و برعکس.

چهارضلعی $ABCD$ (شکل‌های ۷۶ الف و ب) را در نظر بگیرید که در آن $BC = b$ ، $AB = a$ ، $AC = c$ ، $DA = d$ ، $CD = e$ ، $BD = y$ و $AC' = x$ ، و فرض کنید خط m متقابلن ضلع m وجود دارد به طوری که $\angle AOB = \angle ACD$ باشد. روی m یک و تنها یک نقطه O وجود دارد به طوری که $\angle AOB = \angle ACD$. با توجه به مثنهای BAC و $AOB = \angle ADC$ داریم $AOB = \angle ADC$. پس اگر $ABCD$ محاطی باشد، نقطه O روی ضلع BC قرار دارد و تنها در همین حالت است که روی BC قرار می‌گیرد، زیرا اگر O روی BC باشد به آسانی می‌توان



شکل ۷۶ (ب)



شکل ۷۶ (الف)

نشان داد که $ABCD$ محاطی است (شکل ۷۶ الف).

متنهای ACD و AOB متشابه‌اند، چه O روی BC باشد و چه O روی BC نباشد؛ پس،

$$AO : AC = AB : AD = OB : CD \quad (1)$$

گذشته از این، متنهای BAD و OAC متشابه‌اند، زیرا $\angle OAC = \angle BAD$ و اضلاع آنها بنا بر رابطه (۱) متناسب‌اند؛ پس،

$$OC : BD = AC : AD \quad (2)$$

اگر $ABCD$ محاطی باشد، داریم (شکل ۷۶ الف)

$$OC = OB + BC$$

$$\text{و با توجه به (۱) و (۲) داریم } BC = b$$

$$OB = ac : d, \quad OC = xy : d$$

پس با جایگزین کردن این روابط و ساده کردن آنها به دست می‌آوریم

$$xy = ac + bd \quad (3)$$

و به این ترتیب، حکم مستقیم قضیه ثابت می‌شود.

اگر $ABCD$ محاطی نباشد، داریم (شکل ۷۶ ب)

$$OC < OB + BC$$

و با همان جایگذاریهای بالا به دست می‌آوریم

$$xy < ac + bd$$

یعنی در چهارضلعی غیرمحاطی حاصل ضرب قطرها از مجموع حاصل ضربهای اضلاع رو برو کوچکتر است.

این گزاره همراه با قضیه مستقیم که قبلاً ثابت شد، عکس قضیه را ثابت می‌کند: اگر حاصل ضرب قطرهای یک چهارضلعی با مجموع حاصل ضربهای اضلاع رو بروی آن برابر باشد، چهارضلعی محاطی است.

۲۵۶. مسئله. اضلاع a, b, c ، و d از یک چهارضلعی محاطی مفروض‌اند. این چهارضلعی رارسم کنید.

اثبات قضیه قبل روش زیر را برای ترسیم پیش پایمان می‌گذارد.

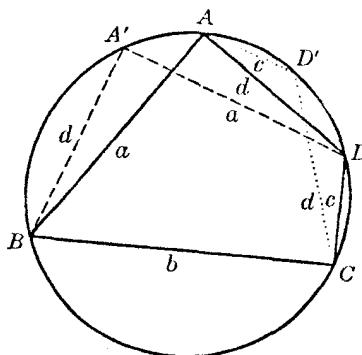
فرض کنید b و d دو ضلع متقابل باشند؛ روی یک خط راست b و $CB = b$ را جدا کنید

(شکل ۷۶ الف). دایرة (B, a) یک مکان هندسی برای رأس A است. با توجه به رابطه (۱) (§۲۵۵) داریم $AO = ax : d$

$$AO : AC = (ax : d) : x = a : d$$

که یک دایرة آپولونیوسی را به عنوان مکان هندسی دوم A به دست می‌دهد. مثلث ACD را اکنون به آسانی می‌توان رسم کرد و $ABCD$ چهارضلعی مطلوب است. نقطه D را باید طوری گرفت که B و D در دو طرف AC قرار گیرند.

دو دایره‌ای که نقطه A را تعیین می‌کنند در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند، و این دو نقطه نسبت به BC متقاضانند. هریک از این نقاط را می‌توان به عنوان رأس A برگزید، ولی دو جواب نسبت به متقاضانند؛ بنابراین، مسئله اساساً تنها یک جواب دارد.



شکل ۷۷

۲۵۷. ملاحظه. (الف) فرض کردیم که ضلع d رو بروی ضلع b است. اگر ضلع a یا c را ضلع مقابل b فرض کنیم، دو چهارضلعی دیگر به دست می‌آوریم. ولی با رسم چهارضلعی اول، یعنی $ABCD$ چهارضلعیهای $A'BCD$ و $A'BCD'$ متناظر با دو حالت دیگر را به آسانی می‌توان رسم کرد (شکل ۷۷)، این چهارضلعیها پاسخ کامل مسئله را به دست می‌دهند، زیرا در هر حالت مسئله تنها یک جواب دارد (§۲۵۶).

(ب) چون کمانهای $A'D$ و CDA' برابر روش ترسیم فوق برابرند (شکل ۷۷)، داریم

$$BD' = CA' = z$$

و سه چهارضلعی $A'BCD'$ ، $ABCD$ و $A'BCD$ تنها سه قطر متفاوت x ، y و z دارند. با اعمال قضیه بطيروس به چهارضلعیهای $A'BCD'$ ، $ABCD$ و $A'BCD$ داریم

$$xz = ad + bc, \quad yz = ab + cd$$

پس،

$$x : y = (ad + bc) : (ab + cd)$$

خواننده می‌تواند این رابطه را با کلمات بیان کند.

با ترکیب این رابطه و رابطه (۳) (§۲۵۵) یک رابطه برای x و یک رابطه برای y به دست می‌آید.

(ج) مثلث BCD (شکل ۷۷) بخش مشترک چهارضلعیهای $ABCD$ و $A'BCD$ است و اضلاع متناظر دو مثلث ABD و $A'BD$ با یکدیگر برابرند؛ پس دو متوازی‌الاضلاع هم‌ارزند.

به طور مشابه، چهارضلعیهای $D'ABC$ و $DABC$ نیز هم ارزند. پس سه چهارضلعی $ABCD$ ، $A'BCD$ و $ABCD$ هم ارزند.

(د) فرض کنید R و S شعاع دایره محیطی مشترک و مساحت مشترک چهارضلعیهای $ABCD$ ، $A'BCD$ و $ABCD$ باشند؛ داریم (§۲۵۵)

$$xy = ac + bd$$

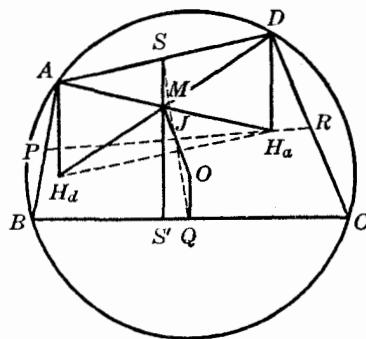
پس،

$$xyz = acz + bdz = \frac{1}{4}R(A'CD + A'CB) \text{ مساحت} \quad (\S ۸۶)$$

با

$$xyz = \frac{1}{4}RS$$

۲۵۸. قضیه. عمودهایی که از وسط هر ضلع چهارضلعی محاطی بر ضلع مقابل رسم می‌شوند، همسانند. فرض کنید O و J به ترتیب مرکز دایره محیطی و مرکز نقل (§۲۴۳) چهارضلعی محاطی $ABCD$ ، و $ABCD$ ، R ، Q ، P و S به ترتیب نقاط وسط اضلاع AB ، CD ، BC ، AB ، و DA باشند (شکل ۷۸).



شکل ۷۸

فرض کنید عمود SS' که از S بر BC رسم می‌شود خط OJ را در M قطع کند. خطوط SS' و OQ موازی‌اند، و J خط QS را نصف می‌کند؛ پس J وسط OM است. پس SS' از M ، نقطه متقاضن O ، مرکز دایره محیطی، نسبت به J ، مرکز نقل چهارضلعی، می‌گذرد؛ یعنی SS' از نقطه‌ای می‌گذرد که به انتخاب اولیه این عمود بستگی ندارد. پس قضیه ثابت می‌شود.

۲۵۹. ملاحظه. عمودی که از وسط هر قطر بر قطر دیگر رسم می‌شود نیز از نقطه M می‌گذرد، زیرا مرکز نقل و سط خطی که از وسط دو قطر را بهم وصل می‌کند نیز هست (§۲۴۲).

۲۶۰. تعریف. متقاضن مرکز دایره محیطی چهارضلعی محاطی نسبت به مرکز نقل، پاد مرکز چهارضلعی محاطی نامیده می‌شود.

۲۶۱. قضیه. چهار خطی که از هر رأس چهارضلعی محاطی به مرکز ارتفاعی متشی که سه رأس دیگر چهارضلعی رأسهای آن هستند رسم می‌شوند، از وسط هم می‌گذرند.

فرض کنید H_d و H_a به ترتیب مرکز ارتفاعی مثلثهای ABC و DBC (شکل ۷۸) باشند. داریم

(§۱۹۵)

$$AH_d = 2OQ = DH_a$$

خطوط AH_d و DH_d هردو بر BC عمودند؛ پس ADH_aH_d متوازیالاصلع است و قطرهای AH_a و DH_d از وسط یکدیگر می‌گذرند.

به طور مشابه، DH_d از وسط خطوط BH_b و CH_c می‌گذرد و این خطوط نیز از وسط DH_d می‌گذرند، پس قضیه ثابت می‌شود.

پس نقطه مشترک این چهار خط، یعنی X ، مرکز تقارن دو چهارضلعی $H_aH_bH_cH_d$ و $ABCD$ است.

۲۶۲. ملاحظه. نقطه X (§۲۶۱) بر پادمرکز چهارضلعی، یعنی M ، منطبق است.

در واقع، در مثلث DAH_d خط SX با AH_d موازی، و بنابراین، بر BC عمود است؛ پس SX از M می‌گذرد (§۲۵۸). برای PX , QX , و RX نیز وضعیت همین طور است و گزاره فوق ثابت می‌شود.

پس نقطه M مرکز تقارن دو چهارضلعی $H_aH_bH_cH_d$ و $ABCD$ است.

۲۶۳. قضیه. دایره‌های نه نقطه چهار متشی که رأسهایشان رأسهای یک چهارضلعی محاطی هستند، از پادمرکز چهارضلعی می‌گذرند.

نقطه D روی دایرة محیطی مثلث ABC قرار دارد (شکل ۷۸)؛ پس M ، نقطه وسط پاره خطی که D را به H_d , مرکز ارتقای ABC (§۲۶۱)، وصل می‌کند، روی دایرة نه نقطه ABC قرار دارد (§۲۱۰). همین مطلب در مورد مثلثهای دیگر گروه نیز صادق است.

۲۶۴. قضیه. مجموع مربع فاصله‌های پادمرکز چهارضلعی محاطی از چهار رأس آن برابر است با مربع قطر دایرة محیطی چهارضلعی.

در مثلث MAD (شکل ۷۸) داریم (§۱۰۶)

$$MA^2 + MD^2 = 2MS^2 + \frac{1}{4}AD^2 \quad (1)$$

$MS = OQ$ ، زیرا این دو، اضلاع مقابل یک متوازیالاصلع هستند؛ پس با در نظر گرفتن مثلث قائم الزاوية OQB و نشان دادن شعاع دایرة محیطی $ABCD$ با R , معادله (۱) به صورت زیر درمی‌آید:

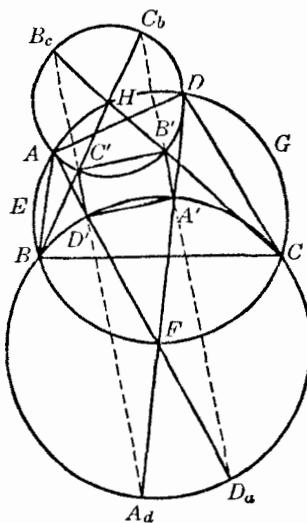
$$MA^2 + MD^2 = 2R^2 + \frac{1}{2}AD^2 - \frac{1}{2}BC^2$$

اضلاع AB و CD از چهارضلعی $ABCD$ سه رابطه دیگر متناظر با رابطه بالا به دست می‌دهند و با جمع کردن این چهار رابطه نتیجه بیان شده به آسانی حاصل می‌شود.

۲۶۵. قضیه. مرکز دایره‌های محاطی داخلی چهار متشی که رأسهایشان رأسهای یک چهارضلعی محاطی هستند، یک مستطیل تشکیل می‌دهند.

فرض کنید E , F , G , و H وسط کمانهای AB , CD , BC , و DA از دایرة محیطی چهارضلعی محاطی $ABCD$ باشند (شکل ۷۹).

مراکز دایره‌های محاطی داخلی مثلثهای ABC و DBC , به ترتیب روی AF و DF , یعنی D' و A' نیمسازهای زاویه‌های BAC و BDC , و همچنین روی دایرة (F, FB) (قارار دارند (§۱۱۶, §۱۱۲)؛ پس مثلث $FA'D'$ متساویالساقین، و قاعده $A'D'$ بر FH , نیمساز زاویه F , عمود است. به طور مشابه، خط FH بر $B'C'$ عمود است، که B' و C' به ترتیب مرکز دایره‌های محاطی داخلی مثلثهای CAD و BAD هستند. به طور مشابه، خط EG بر خطوط $A'B'$ و $C'D'$ عمود است. خطوط EG و FH برهم عمودند. (§۲۵۴)؛ و قضیه ثابت می‌شود.



شکل ۷۹

۲۶۶. قضیه. اگر از چهارمثلى که توسط چهار رأس چهارضلعی محاطی تعیین می‌شوند، سه مثلى را که رأس مشترکی دارند در نظر بگیریم، سه مرکز دایره‌های محاطی خارجی نسبت به این رأس در این سه مثلى، سه رأس مستطیلی هستند که رأس چهارم‌شی مرکز دایره محاطی داخلی مثلى چهارم است.

فرض کنید D_a, D_b, D_c, D_d ، A_a, A_b, A_c, A_d ؛ B_a, B_b, B_c, B_d ؛ C_a, C_b, C_c, C_d به ترتیب مرکز دایره‌های محاطی خارجی مثليهای DAB ، CDA ، BCD ، ABC باشند، به طوری که A_b مرکز دایرة محاطی خارجی نسبت به رأس B از مثلى BCD باشد و ... (شکل ۷۹).

دو نقطه D'_a و D'_d دو سر قطعی از دایرة (F, FB) و دو نقطه A'_d و A'_a دو سر قطر دیگری از این دایره هستند (§ ۱۲۲)؛ پس $D'_a A'_d$ یک مستطیل است، و در نتیجه A'_d و D'_a به ترتیب روی خطوط $C'D'$ و $B'A'$ قرار دارند (§ ۲۶۵). با در نظر گرفتن دایرة (H, HA) می‌توانیم نشان دهیم که نقاط B'_c و C'_b به ترتیب روی خطوط $D'C'$ و $A'B'$ قرار دارند. پس دو مجموعه چهارتایی از نقاط همخط داریم که عبارت‌اند از $.C'D'A'_d B'_c A'_b C'_b D'_a$ و $B'_c C'_b A'_d D'_a$ با در نظر گرفتن دایره‌های (E, EA) و (G, GC) دو نقطه دیگر بر روی هر یک از خطوط $A'D'$ و $B'C'$ به دست می‌آوریم.

با در نظر گرفتن ملاحظات مشابه، نتیجه بیان شده به دست می‌آید.

۲۶۷. قضیه. شانزده مرکز سه مماس چهارمثلى که توسط چهار رأس چهارضلعی محاطی تعیین می‌شوند، چهارتاً روی هشت خط قرار دارند. این هشت خط از دو گروه چهارتایی تشکیل می‌شوند، به طوری که خطوط هر گروه باهم موازی‌اند و بر خطوط گروه دیگر عمودند. این جمعبندی گزاره‌های قبلی (§ ۲۶۵ و § ۲۶۶) است.

تمرین

- ۱) نشان دهید که در هر چهارضلعی محاطی فواصل نقطه برخورد قطرها از دو ضلع روی رو با این اضلاع متناسب‌اند.

۲) در چهارضلعی محاطی $ABCD$ عمودی که در A بر BA رسم می‌شود، CD را در A' قطع می‌کند، و عمودی که در C بر CD رسم می‌شود، AB را در C' قطع می‌کند، نشان دهید که خط $A'C'$ با قطر BD موازی است.

۳) در یک دایره مفروض یک چهارضلعی محاط کنید که قطرها و زاویه بین آنها از آن مفروض باشد.

۴) نشان دهید که اگر از نقطه برخورد امتداد دو ضلع رو بروی هم در یک چهارضلعی محاطی عمودی بر خطی که وسط آن دو ضلع را بهم وصل می‌کند، رسم کنیم این خط از پاد مرکز چهارضلعی می‌گذرد.

۵) نشان دهید که پاد مرکز چهارضلعی محاطی مرکز ارتفاعی مثلثی است که رأسهای آن نقاط وسط قطرهای چهارضلعی و نقطه برخورد قطرها هستند.

۶) نشان دهید که پاد مرکز چهارضلعی محاطی با مقارنهای مرکز دایره محیطی نسبت به دو ضلع رو بروی هم، همخط است.

۷) اگر H_a, H_b, H_c ، و H_d مرکز ارتفاعی چهار مثلثی باشند که توسط رأسهای یک چهارضلعی محاطی $ABCD$ تعیین می‌شوند، نشان دهید که رأسهای $ABCD$ مرکز ارتفاعی چهار مثلثی هستند که توسط نقاط H_a, H_b, H_c ، و H_d تعیین می‌شوند.

۸) نشان دهید که حاصل ضرب فاصله‌های دو ضلع مقابل در چهارضلعی محاطی از نقطه‌ای روی دایره محیطی برابر است با حاصل ضرب فاصله‌های دو ضلع دیگر از آن نقطه.

۹) نشان دهید چهار خطی که هرکدام از یک رأس چهارضلعی محاطی به مرکز نه نقطه مثلثی رسم می‌شود که سه رأس دیگر چهارضلعی رأسهای آن هستند، همسانند.

۱۰) نشان دهید که مرکز نه نقطه چهار مثلثی که چهار رأس چهارضلعی محاطی تعیین می‌کنند، یک چهارضلعی محاطی تشکیل می‌دهند.

۱۱) سه رأس از چهارضلعی محاطی متغیری ثابت‌اند. مکان هندسی (الف) مرکز نقل چهارضلعی؛ (ب) پاد مرکز چهارضلعی، را به دست آورید.

۱۲) اگر a, b, c ، و d چهارضلع و S مساحت یک چهارضلعی محاطی باشد، نشان دهید که

$$S^t = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d)$$

$$\text{که در آن } (a + b + c + d) p = \frac{1}{4} (a + b + c + d)^2 \text{ [رابطه برهم‌گوپتا]}$$

ج. چهارضلعیهای دیگر

۲۶۸) تعریف. چهارضلعی را میطی می‌نامند اگر چهار ضلع آن بر یک دایره مماس باشند.

۲۶۹) قضیه. در چهارضلعی میطی مجموع دو ضلع رو برو با مجموع دو ضلع رو بروی دیگر برابر است. اگر p, q, r ، و s طول میاسهایی باشند که از رأسهای چهارضلعی بر دایره محاطی آن رسم می‌شوند، به آسانی می‌توان دید که مجموع هر دو ضلع رو بروی هم $p + q + r + s$ است.

۲۷۰) قضیه عکس. اگر مجموع دو ضلع مقابل از یک چهارضلعی با مجموع دو ضلع دیگر آن برابر باشد، آن چهارضلعی میطی است.

فرض کنید در چهارضلعی مفروض $ABCD$ (شکل ۸۰) داشته باشیم

$$AB + CD = AD + BC \quad (1)$$

اگر دو ضلع مجاور از $ABCD$ برابر باشند، دو ضلع دیگر هم مطابق رابطه (۱) برابر خواهند بود؛ و

اثبات قضیه کار پیش بالافتادهای خواهد شد.

اگر AB از BC بزرگتر باشد، بنابر رابطه (۱) داریم

$$AB - BC = AD - CD \quad (2)$$

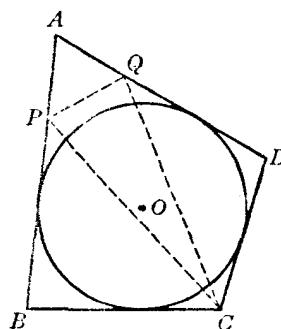
نقطه P را بین A و B و نقطه Q را بین A و D چنان انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم

$$BP = BC, \quad DQ = DC$$

پس، بنابر رابطه (۲)،

$$AP = AQ$$

پس سه مثلث متساوی الساقین APQ , BCP و DCQ داریم، و نیمسازهای داخلی زوایه‌های A , B , و D عمود منصفهای اضلاع مثلث PQC هستند، و بنابراین، یکدیگر را در O ، مرکز دایرة محیطی قطع می‌کنند.



شکل ۸۰

نقطه O که نقطه مشترک نیمسازهای زوایه‌های A , B , و D از چهارضلعی $ABCD$ است، لزوماً داخل $ABCD$ قرار دارد و به علاوه، از اضلاع $ABCD$ همفاصله است؛ بنابراین قضیه اثبات می‌شود.

۲۷۱. تعریف. اگر قطرهای یک چهارضلعی برهم عمود باشند، آن چهارضلعی را عمود قطر می‌نامیم.

۲۷۲. قضیه. در چهارضلعی عمود قطر مجموع مربع دو ضلع رو برو با مجموع مربع دو ضلع دیگر برابر است و برعکس.

اگر قطرهای AC و BD از چهارضلعی $ABCD$ برهم عمود باشند، و نقطه برخوردشان را O بنامیم داریم

$$AB^r + CD^r = AO^r + BO^r + CO^r + DO^r$$

$$AD^r + BC^r = AO^r + DO^r + BO^r + CO^r$$

پس،

$$AB^r + CD^r = AD^r + BC^r \quad (1)$$

برعکس، اگر معادله (۱) برقرار باشد، داریم

$$AB^r - AD^r = BC^r - CD^r$$

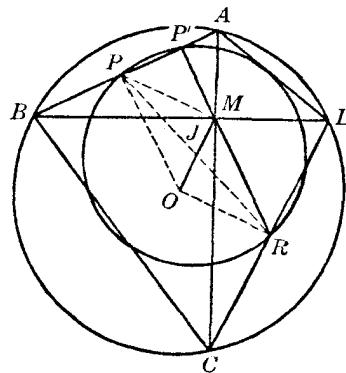
پس خطی که نقاط A و C را بهم وصل می‌کند بر خط BD عمود است (§۱۱، مکان هندسی ۱۲).

۲۷۳. قضیه. در چهارضلعی عمود قطر دو خطی که وسط اضلاع رو برو را بهم وصل می‌کنند، برابرند.
در واقع، در این حالت متوازی‌الاضلاعی که رأسهای آن وسط اضلاع چهارضلعی هستند (§۲۴۰) مستطیل است، و دو خط مذکور در قضیه قطرهای این مستطیل هستند.

۲۷۴. نتیجه. در چهارضلعی عمود قطر نقاط وسط اضلاع روی دایره‌ای قرار دارند که مرکزش مرکز نقل چهارضلعی است (§۲۴۲، §۲۴۳).

۲۷۵. قضیه. اگر یک چهارضلعی عمود قطر، محاطی باشد، پاد مرکز آن بر نقطهٔ برخورد قطرهایش منطبق است.

اگر O و J به ترتیب مرکز دایرة محیطی و مرکز نقل چهارضلعی محاطی $ABCD$ باشند (شکل ۸۱)، و قطرهای AC و BD برهم عمود باشند، H_d مرکز ارتفاعی مثلث ABC روی BD که بر قاعده AC عمود است قرار دارد؛ خط DH_d از پاد مرکز چهارضلعی، یعنی نقطهٔ M ، می‌گذرد (§۲۶۱، §۲۶۲)؛ پس M روی قطر $BH_d D$ قرار دارد.



شکل ۸۱

به طور مشابه، M باید روی قطر AC قرار داشته باشد؛ بنابراین قضیه ثابت می‌شود.

۲۷۶. قضیهٔ برهماگوپتا. در یک چهارضلعی که هم عمود قطر و هم محاطی باشد، خطی که از محل برخورد دو قطر بر یک ضلع عمود می‌شود، از وسط ضلع مقابل می‌گذرد.

در واقع، عمود RP' که از R وسط ضلع CD (شکل ۸۱) بر ضلع مقابل، یعنی AB رسم می‌شود، از نقطهٔ M می‌گذرد (§۲۵۸، §۲۷۵).

۲۷۷. نتیجه. در چهارضلعی محاطی عمود قطر تصاویر نقطهٔ برخورد دو قطر بر روی چهارضلع، روی دایره‌ای قرار دارند که از وسط اضلاع می‌گذرد.

در واقع اگر P (شکل ۸۱) وسط ضلع AB باشد، قطر PR از دایرة مذکور (§۲۷۳) از نقطهٔ P' با زاویهٔ قائمه دیده می‌شود. برای بقیهٔ تصاویر نقطهٔ M هم وضعیت بهمین صورت است.

۲۷۸. قضیه. در چهارضلعی محاطی عمود قطر فاصلهٔ هر ضلع از مرکز دایرة محیطی چهارضلعی، با نصف طول ضلع مقابل برابر است.

اگر P و R وسط اضلاع رو بروی هم AB و CD باشند، خط OM (شکل ۸۱) را در نقطه J ، مرکز نقل چهارضلعی، نصف می کند (§۲۴۲)؛ پس $PMRO$ متوازی الأضلاع است و $OP = MR$. ولی OP بر قدر AB عمود است، و میانه MR در مثلث قائم الزاویه CMD برابر نصف وتر CD از این مثلث است؛ پس قضیه ثابت شده است.

۲۷۹. قضیه. اگر یک چهارضلعی هم محاطی و هم عمود قطر باشد، مجموع مربع دو ضلع رو برو با مربع قطر دایره محيطی چهارضلعی برابر است.

در مثلث قائم الزاویه AOP (شکل ۸۱) داریم

$$OA^r = AP^r + OP^r = \frac{1}{4}AB^r + \frac{1}{4}CD^r \quad (\S ۲۷۸)$$

۲۸۰. نتیجه ۱. در متوازی الأضلاع $PMRO$ (شکل ۸۱) داریم (§۲۴۵)

$$PR^r + OM^r = OP^r + PM^r + MR^r + RO^r = 2(OP^r + OR^r)$$

پس بنابر قضیه بالا (§۲۷۹)،

$$PR^r = \frac{1}{2}(AB^r + CD^r) - OM^r = 2OA^r - OM^r$$

این معادله قطر دایره‌ای را که قبلًا در نظر گرفتیم (§۲۷۷) بدست می‌دهد، و نشان می‌دهد که این دایره تنها به شعاع دایره مفروض و نقطه برخورد قطرها بستگی دارد.

۲۸۱. نتیجه ۲. در یک چهارضلعی محاطی و عمود قطر مجموع مربع اضلاع هشت برابر مربع شعاع دایره محيطی است.

تمرین

- ۱) نشان دهید طول پاره خطی که وسط قطرهای چهارضلعی محاطی عمود قطر را بهم وصل می‌کند با فاصله نقطه برخورد قطرها از مرکز دایره محيطی چهارضلعی برابر است.
- ۲) اگر قطرهای چهارضلعی محاطی $ABCD$ برهم عمود باشند، و E رو بروی قطری D در دایره محيطی چهارضلعی باشد، نشان دهید که $AE = CB$.

تمرینهای تكمیلی

- ۱) یک چهارضلعی را با مفروض بودن چهارضلع و مجموع دو زاویه مقابل رسم کنید.
- ۲) از یک چهارضلعی محل تصاویر نقطه برخورد قطرها بر چهارضلع، مفروض است؛ چهارضلعی را رسم کنید.
- ۳) حول یک چهارضلعی مفروض یک لوزی محيط کنید که با لوزی مفروضی متشابه باشد.
- ۴) مستطیلی متشابه با یک مستطیل مفروض رسم کنید که اضلاعش به ترتیب بر چهار دایره مفروض مماس باشند.
- ۵) قاعده BC و A ، زاویه رو بروی قاعده، از مثلث متغیر ABC ثابتاند. روی نیمساز داخلی زاویه A پاره خط AL را برابر $\frac{1}{2}(AB + AC)$ جدا می‌کنیم. نشان دهید که مکان هندسی نقطه L یک دایره است.
- ۶) نشان دهید که مربع مساحت یک چهارضلعی دومکزی (یعنی یک چهارضلعی که هم محيطی باشد و هم محاطی) با حاصل ضرب چهار ضلع آن برابر است.

۵

خط سیمسون

۲۸۲. قضیه. (الف) پاهای سه عمودی که از نقطه‌ای روی دایره محیطی یک مثلث بر سه ضلع مثلث رسم می‌شوند همخط اند. (ب) بر عکس، اگر پاهای سه عمودی که از یک نقطه بر سه ضلع یک مثلث رسم می‌شوند همخط باشند، آن نقطه روی دایره محیطی مثلث قرار دارد.

فرض کنید P نقطه‌ای داخل زاویه ABC از مثلث ABC باشد و L , M , و N تصاویر نقطه P به ترتیب بر اضلاع BC , CA , و AB باشند (شکل ۲۲). دایره‌های (PA) و (PC) که PA و PC قطر آنها هستند به ترتیب از نقاط M و N , و L می‌گذرند، و داریم

$$\angle APN = \angle AMN, \angle CPL = \angle CML, \angle B + \angle NPL = 180^\circ \quad (1)$$

حال فرض کنید که P روی دایره ABC قرار داشته باشد. در این صورت، $\angle APC$ مکمل زاویه B است و داریم

$$\angle APC = \angle NPL \quad (2)$$

با کم کردن این دو زاویه مساوی از زاویه NPC خواهیم داشت

$$\angle APN = \angle CPL \quad (3)$$

با توجه به (۱)،

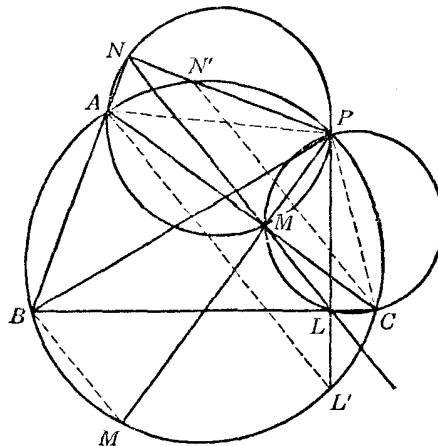
$$\angle AMN = \angle CML \quad (4)$$

پس سه نقطه L , M , و N همخط اند.

بر عکس، اگر L , M , و N همخط باشند، (۴) برقرار است، و از (۴) و (۱) معادله (۳)، و در نتیجه (۲) را به دست می‌آوریم، یعنی $\angle NPL$ مکمل زاویه B است و P با نقاط A , B , و C همدایره است.

نکته. نقطه P چه آن طور که فرض کردیم داخل زاویه B باشد، و چه داخل هریک از دو زاویه دیگر مثلث ABC باشد، اثبات حکم مستقیم قضیه معتبر خواهد بود. اثبات عکس قضیه نیز در این حالتها معتبر است. ولی در مورد عکس قضیه، اگر فرض شود که P داخل زاویه متقابل به رأس یکی از زاویه‌های مثلث ABC است، واضح است که نقاط L , M , و N نمی‌توانند همخط باشند.

می‌توان ملاحظه کرد که خط LMN دایره محیطی را قطع می‌کند، زیرا از نقطه M که داخل دایره محیطی است می‌گذرد.



شکل ۸۲

۲۸۳. تعریف. خط LMN را خط سیمیسون، یا با اختصار سیمیسون، نقطه P نسبت به مثلث ABC می‌نامند؛ گاهی LMN را خط پادک نقطه P می‌نامند.

خط LMN را گاهی با نماد $P(ABC)$ نشان می‌دهند.

نقطه P را قطب خط LMN برای مثلث ABC می‌نامند.

۲۸۴. قضیه. اگر هر یک از سه وتری را که از یک نقطه روی دایره می‌گذرند قطر دایره‌ای دیگر در نظر بگیریم، این سه دایره یکدیگر را دوبعدو در سه نقطه جدید قطع می‌کنند و این سه نقطه همخط اند.

در واقع اگر PA ، PB ، و PC (شکل ۸۲) سه وتر یک دایره باشند، سه دایره‌ای که به قطر این وترها رسم می‌شوند از پای عمودهایی که از P بر خطوط BC ، CA ، و AB رسم می‌شوند می‌گذرند، و این سه نقطه همخط اند (§ ۲۸۲ الف).

۲۸۵. قضیه عکس. اگر سه دایره‌ای که قطرهایشان سه پاره خط PA ، PB ، و PC هستند یکدیگر را دوبعدو در سه نقطه همخط قطع کنند، نقطه P با نقاط A ، B ، و C همدایره خواهد بود.

در واقع، این دایره‌ها دوبعدو از پای عمودهایی که از P بر خطوط BC ، CA ، و AB رسم می‌شوند می‌گذرند، و اگر این سه نقطه همخط باشند، چهار نقطه P ، A ، B ، و C همدایره‌اند (§ ۲۸۲ ب).

۲۸۶. قضیه. اگر سه دایره از یک نقطه واقع بر دایره محیطی مثلثی که رأسهایش مراکز این سه دایره است بگذرند، یکدیگر را دوبعدو در سه نقطه همخط قطع می‌کنند.

فرض کنید A ، B ، و C مراکز سه دایرة مفروض باشند، و P نقطه مشترک این سه دایره باشد که روی دایرة (ABC) قرار دارد. دایره‌های (A') ، (B') ، و (C') به ترتیب به قطر PA ، PB ، و PC ، یکدیگر را در سه نقطه همخط D' ، E' ، و F' قطع می‌کنند (§ ۲۸۴)، و نقاط D ، E ، و F ، یعنی نقاط تلاقی دوبعدی دایره‌های مفروض، در تجانس $(P, 2)$ به ترتیب با نقاط D' ، E' ، و F' متناظرند، پس اینها هم همخط اند.

۲۸۷. قضیه عکس. اگر سه دایره از یک نقطه می‌گذرند، یکدیگر را دوبعدو در سه نقطه همخط قطع کنند، نقطه مشترکشان با مراکزشان همدایره است.

اگر نقاط D ، E ، و F همخط باشند، نقاط متناظرشان در تجانس $(P, 2)$ ، یعنی نقاط D' ، E' ، و F'

نیز همخطاند؛ پس P روی دایرة محیطی مثلث ABC قرار دارد (§۲۸۵).

۲۸۸. قضیه. اگر عمودهایی که از یک نقطه P روی دایرة (O) که دایرة محیطی مثلث ABC است، بر اضلاع BC ، CA ، و AB رسم می‌شوند، دایرة (O) را مجدداً به ترتیب در نقاط L' ، M' ، و N' قطع کند، سه خط CN' ، BM' ، و AL' با خط سیمسون P برای ABC موازی خواهند بود.

درواج، داریم (شکل ۸۲)

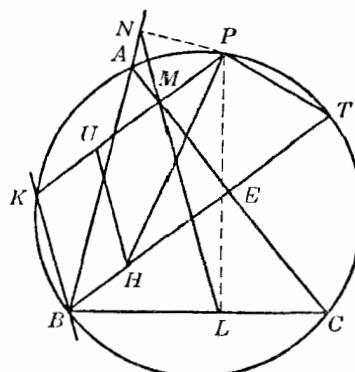
$$\angle L'AC = \angle L'PC = \angle LPC = \angle LMC$$

پس AL' با NLM موازی است.

برای CN' و BM' نیز مطلب مشابهی صادق است.

۲۸۹. مسئله. نقطه‌ای را باید که خط سیمسون آن نسبت به یک مثلث مفروض، در راستای مفروضی باشد. از یک رأس دلخواه مثلث مفروض ABC ، مثلاً رأس B ، خطی در راستای مفروض رسم کنید، تا دایرة محیطی (O) را مجدداً در K قطع کند (شکل ۸۳). عمود KM که از K بر ضلع روبروی رأس B ، یعنی AC ، رسم می‌شود دایرة (O) را در نقطه مطلوب P قطع می‌کند و خطی که از M به موازات KB رسم می‌شود خط سیمسون P است (§۲۸۸).

۲۹۰. قضیه. خط سیمسون از وسط خطی که قطب آن را به مرکز ارتفاعی مثلث وصل می‌کند، می‌گذرد. فرض کنید ارتفاع BE (شکل ۸۳) را مجدداً در T قطع کند، و خطی که از H ، مرکز ارتفاعی ABC ، به موازات BK رسم می‌شود خط PMK را در U قطع کند.



شکل ۸۳

با توجه به متوازی‌الاضلاع $BHUK$ و ذوزنقه متساوی‌الساقین $PTBK$ ، داریم

$$HU = BK, \quad PT = BK$$

پس $HUPT$ ذوزنقه متساوی‌الساقین است. E وسط HT است (§۱۷۸)؛ پس EA ، عمود منصف قاعده HT از ذوزنقه $HUPT$ ، قاعده دیگر، یعنی UP را در M قطع می‌کند. پس خط سیمسون N از M ، وسط ضلع PU از مثلث PUH می‌گذرد و با UH موازی است؛ پس LMN از وسط ضلع سوم این مثلث، یعنی HP ، هم می‌گذرد.

۲۹۱. ملاحظه. وسط پاره خط HP روی دایرة ABC نه نقطه (N) ، دایرة (N) ، قرار دارد. (§۲۱۰).

۲۹۲. مسئله دولاھیر. از مثلثی یک زاویه، مجموع دو ضلع این زاویه و ارتفاع وارد بر ضلع سوم، $(A, b + c = 2s, h_a)$ مفروض است. مثلث را رسم کنید.

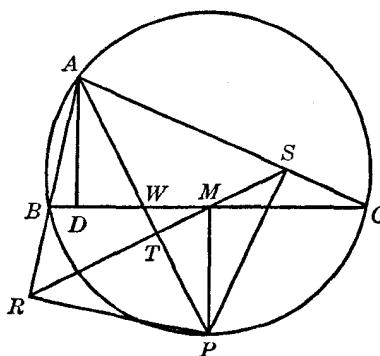
فرض کنید ABC (شکل ۸۴) مثلث مطلوب، W و P به ترتیب نقاط برخورد AW ، نیمساز داخلی زاویه A ، با BC و دائرة محیطی ABC ، و R و S تصویر P به ترتیب بر AB و AC باشند. داریم

$$AR + AS = (AB + BR) + (AC - SC) = (AB + AC) + (BR - SC) \quad (1)$$

ولی $PR = PS$ و $PB = PC$ (§۱۲۲)؛ پس با توجه به مثلثهای قائم الزاویه همنهشت PAR و PAS ، و مثلثهای قائم الزاویه همنهشت PRB و CS ، داریم $AR = AS$ و $BR = CS$. پس با توجه به رابطه (۱)،

$$AR = AS = \frac{1}{2}(AB + AC) = s$$

پس، از چهارضلعی $ASPR$ زاویه SAR را که برابر زاویه A است، و دو ضلع AR و AS را می‌دانیم؛ و زاویه‌های ASP و ARP قائم‌اند؛ پس می‌توان این چهارضلعی را رسم کرد، و AP عمود منصف RS است.



شکل ۸۴

خط RS خط سیمسون P برای ABC است؛ پس RS از M ، پای عمود PM که از P بر RS رسم شود، می‌گذرد. فرض کنید T نقطه برخورد RS و AW باشد. با توجه به مثلثهای قائم الزاویه متشابه ADW و PMT داریم

$$PT : AD = PM : AW = PM : (AP - PW) \quad (2)$$

و در مثلثهای قائم الزاویه APS و PMW داریم

$$PM^* = PT \cdot PW, \quad PS^* = PT \cdot PA \quad (3)$$

پس با توجه به رابطه‌های (۲) و (۳)،

$$PM^* + AD \cdot PM - PS^* = 0 \quad (4)$$

پاره خط $AD = h_a$ مفروض است، و PS را می‌توان از چهارضلعی $ASPR$ که در بالا رسم شد، به دست آورد؛ پس PM را می‌توان رسم کرد (§۶۷).

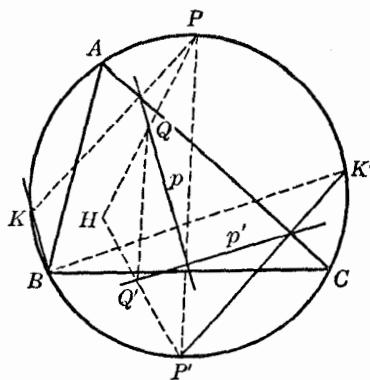
دایره (P, PM) را رسم کنید تا RS را در M قطع کند. عمودی که در M بر PM رسم می‌شود دو ضلع AS و AR از چهارضلعی $ASPR$ را در دو رأس B و C از مثلث مطلوب ABC قطع می‌کند.

اگر ارتفاع h_a از پاره خط $AT = s \sin \frac{1}{2} A$ بزرگتر باشد، مسئله جواب ندارد. اگر AD کوچکتر از ABC باشد، ترسیم بالا منجر به دو جواب متقابله نسبت به AP می‌شود. اگر h_a با AT برابر باشد، مثلث ABC متساوی الساقین است.

تمرین

- ۱) رویی قطعی یکی از رأسهای مثلثی را در دایره محیطی مثلث در نظر بگیرید. نشان دهید که خط سیمیون این نقطه نسبت به این مثلث، ضلعی از مثلث است که رویی رأس در نظر گرفته شده است.
- ۲) نشان دهید که خط سیمیون دومین نقطه برخورد یک ارتفاع مثلث با دایرة محیطی مثلث، از پای ارتفاع می‌گذرد، و پاد موازی ضلع متناظر با آن ارتفاع، نسبت به دو ضلع دیگر مثلث است.
- ۳) آیا نقطه‌ای وجود دارد که روی خط سیمیون خودش نسبت به مثلث مفروضی قرار داشته باشد؟
- ۴) اگر خط سیمیون $P(ABC)$ ضلع BC را در L و ارتفاع AD را در K قطع کند، نشان دهید درصورتی که H مرکز ارتفاعی مثلث ABC باشد، خط LH موازی است.
- ۵) اگر خط سیمیون $P(ABC)$ با شعاع OA از دایرة محیطی موازی باشد، نشان دهید که خط PA با BC موازی است.
- ۶) از نقطه P روی دایرة محیطی (O) از مثلث ABC عمودهایی بر اضلاع مثلث رسم می‌کنیم تا (O) را مجدداً به ترتیب در نقاط A' , B' و C' قطع کنند، نشان دهید که دو مثلث $A'B'C'$ و ABC همنهشت‌اند و نسبت به یک محور متقابرانند.
- ۷) اگر L , M ، و N پای عمودهایی باشند که از نقطه P روی دایرة محیطی مثلث ABC به ترتیب بر اضلاع BC , CA , و AB رسم می‌شوند، ثابت کنید که (الف) مثلثهای PAC و PLN و PLC و PNL ، (ب) $PM \cdot NL$, $PL \cdot MN$ ، و (ج) $AB \cdot CA$, $BC \cdot PN$ و $AB \cdot PL$ متناسب‌اند؛ $AB \cdot CA = BC \cdot PN$.
- ۸) در دایره‌ای مفروض مثلثی محاط کنید به طوری که خط سیمیون نقطه‌ای مفروض از دایره نسبت به این مثلث، بر خط مفروضی منطبق باشد. یک رأس را می‌توان به دلخواه برگزید.
- ۹) مثلثی را با مفروض بودن a , b , c ، A , B , C رسم کنید.
- ۱۰) فرض کنید P , Q , و R نقاط برخورد نیمسازهای داخلی مثلث ABC با دایرة محیطی (O) باشند. نشان دهید که خطوط سیمیون P , Q , و R نسبت به ABC , نیمسازهای خارجی مثلث میانک (T') از مثلث ABC هستند. اگر P' , Q' , و R' نقاط برخورد نیمسازهای خارجی مثلث ABC با دایرة محیطی (O) باشند، خطوط سیمیون این نقاط را نسبت به مثلث ABC بیابید. همین مسئله را در مورد نقاط تلاقی هر سه نیمساز همرسی از مثلث ABC , یا هر سه نیمسازی که یک مثلث تشکیل می‌دهند، با دایرة محیطی (O) حل کنید.
- ۱۱) نشان دهید که نقاط متقابله از دایرة محیطی مثلث، نسبت به اضلاع مثلث، روی خطی قرار دارند که از مرکز ارتفاعی مثلث می‌گذرد.
- ۱۲) اگر خط سیمیون نقطه P از رویی قطعی P در دایرة محیطی مثلث بگذرد، نشان دهید که این خط سیمیون از مرکز تقل مثلث هم می‌گذرد.
- ۱۳) قضیه. زاویه‌یین خطوط سیمیون دو نقطه نسبت به یک مثلث، نصف اندازه کمان بین آن دو نقطه است. فرض کنید P و P' نقاط مفروض (شکل ۸۵) و K و K' نقاط برخورد عمودهای وارد از P و P' بر

ضلع AC ، با دایره محیطی ABC باشند. خطوط سیمسون P و P' با خطوط BK و BK' موازی‌اند؛ پس زاویه بین خطوط سیمسون برایر زاویه KBK' است. چون اندازه زاویه محاطی KBK' نصف کمان KK' است و $\widehat{KK'} = \widehat{PP'}$ ، قضیه ثابت شده است.



شکل ۸۵

۲۹۴. نتیجه. خطوطی که از نقاط P و P' به ترتیب بر خطوط سیمسون $P(ABC)$ و $P'(ABC)$ عمود می‌شوند (یا به ترتیب به موازات این دو خط رسم می‌شوند) یکدیگر را روی دایره محیطی مثلث ABC قطع می‌کنند.

۲۹۵. قضیه. خطوط سیمسون دو انتهای هر قطر برهم عمودند و یکدیگر را روی دایره نه نقطه مثلث قطع می‌کنند.

اگر نقاط P و P' (شکل ۸۵) دو انتهای یک قطر باشند، زاویه بین خطوط سیمسون آنها، p و p' ، یک چهارم محیط دایره است (§۲۹۳).

وسط پاره خط Q و Q' وسط پاره خط HP و HP' در تجانس $(\frac{1}{2}, H)$ به ترتیب با نقاط P و P' متناظرند؛ پس خط QQ' در این تجانس با خط PP' متناظر است؛ بنابراین QQ' قطري از دایرة نه نقطه (N) از مثلث ABC است (§۲۰۰). دو خط سیمسون معتمد p و p' به ترتیب از نقاط Q و Q' می‌گذرند (§۲۹۰)، پس یکدیگر را روی دایرة (N) قطع می‌کنند.

۲۹۶. ملاحظه. دو خط سیمسون معتمد، هر ضلع مثلث را در دو نقطه همنوا قطع می‌کنند. زیرا این دو نقطه تصاویر دو انتهای یک قطر دایرة محیطی مثلث بر ضلع در نظر گرفته شده هستند.

۲۹۷. نتیجه. دایرة نه نقطه یک مثلث، مکان هندسی نقاط تلاقی خطوط سیمسون متناظر با نقاط دو سر قطرهای دایرة محیطی مثلث با این دایره است.

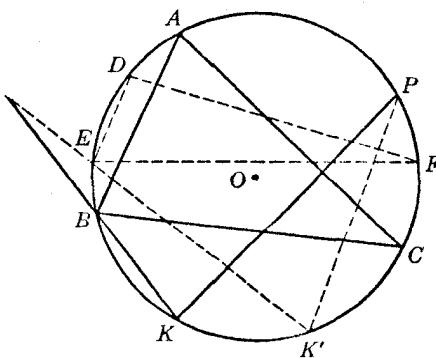
۲۹۸. قضیه. هر نقطه‌ای از یک دایره را در نظر بگیریم، زاویه بین خطوط سیمسون آن نقطه نسبت به دو مثلث محاط شده در آن دایره، مقدار ثابتی خواهد بود.

فرض کنید DEF و ABC دو مثلث محاط شده در دایرة (O) باشند (شکل ۸۶)، و عمدهایی که از نقطه دلخواه P روی (O) بر AC و DF رسم می‌شوند، (O) را مجدداً در K و K' قطع کنند. خطوط سیمسون نقطه P نسبت به DEF و ABC و p ، p' ، به ترتیب با خطوط BK و EK' موازی‌اند

(§۲۸۸). زاویه بین EK و EK' عبارت است از

$$\frac{1}{4}(KK' - BE) = \frac{1}{4}(AD + CF - BE) \quad (1)$$

چون این عبارت به P بستگی ندارد، قضیه ثابت شده است.



شکل ۸۶

نکته. در شکل در نظر گرفته شده خطوط BK و EK' خارج از دایره (O) و خطوط DF و AC درون دایره (O) یکدیگر را قطع می‌کنند. ولی می‌توان نشان داد که اگر مکان هریک از این نقاط برخورد، یا هردوی آنها، تغییر کند، باز هم قضیه معتبر است.

۲۹۹. قضیه. چهار دایره محيطی چهار مثلثی که توسط ترکیبیات سه به سه از چهار خط راست مفروض تعیین می‌شوند، یک نقطه مشترک دارند.

فرض کنید p, q, r, s چهار خط راست مفروض باشند. دایره‌های محيطی (pqr) و $(pqrs)$ مربوط به دو مثلث pqr و $pqrs$ در نقطه تلاقی p و q اشتراک دارند؛ پس در نقطه دیگری، مانند M ، هم یکدیگر را قطع می‌کنند. اگر P, Q, R ، و S تصاویر M به ترتیب بر روی خطوط p, q, r, s باشند، نقاط P, Q, R ، و S باهم و نقاط P, Q ، و S همخط اند (§۲۸۲(الف))؛ پس چهار نقطه P, Q, R ، و S همخط اند.

پس تصاویر نقطه M روی اضلاع مثلث qrs نیز همخط اند؛ یعنی M روی دایره محيطی این مثلث (§۲۸۲(ب))، و به دلیلی مشابه، روی دایره محيطی prs نیز قرار دارد.

۳۰۰. تعریف. نقطه M (§۲۹۹) را نقطه میکل برای چهار خط p, q, r و s می‌نامند.

۳۰۱. ملاحظه. چهار خط (که هیچ دو تایی از آنها موازی، و هیچ سه تایی از آنها همسنیستند) مفروض اند. یک نقطه و تنها یک نقطه وجود دارد که تصاویرش براین خطوط همخط باشند.

۳۰۲. نتیجه. مراکز چهار دایره (pqr) ، (qrs) ، (rsp) ، و (spq) و نقطه M روی یک دایره قرار دارند (§۲۸۷، §۲۹۹).

در واقع، چهار نقطه P, Q, R ، و S همخط اند و نقطه M با هر سه تایی از این چهار مرکز همدایره است (§۲۸۷)؛ پس این پنج نقطه همدایره اند.

۳۰۳. قضیه. چهار خط سیمسون نقطه‌ای از یک دایره را نسبت به چهار مثلثی که توسط رأسهای یک چهارضلعی محاط شده در این دایره تعیین می‌شوند، در نظر بگیرید. نقطه در نظر گرفته شده نقطه میکل این

چهار خط است.

فرض کنید $ABCD$ یک چهارضلعی محاطی، P نقطه‌ای روی دایره محیطی آن، و A' , B' , و C' ، D , DB , DA , و DC باشند. خطوط $A'B'$, $B'C'$, $A'C'$ و $C'D$ هستند، و نقطه P با رأسهای مثلث $A'B'C'$ که توسط این خطوط سیمسون تشکیل می‌شود هم‌دایره است، زیرا نقاط A' , B' و C' روی دایره‌ای به قطر PD قرار دارند. برای هر سه خطی که از این چهار خط در نظر بگیریم، وضعیت مشابهی برقرار است. پس قضیه ثابت شده است (§۲۹۹، §۳۰۰).

۳۰۴ قضیه. چهار خط سیمسون چهار نقطه‌یک دایره، که هرکدام نسبت به مثلثی که سه نقطه دیگر رأسهای آن هستند، در نظر گرفته می‌شوند، هم‌اند.

فرض کنید $ABCD$ یک چهارضلعی محاطی باشد. خط سیمسون $D(ABC)$ از نقطه وسط پاره‌خط D و مرکز ارتقای مثلث ABC می‌گذرد (§۲۹۰)، یعنی از پاد مرکز چهارضلعی $ABCD$ می‌گذرد (§۲۶۲). مطلب مشابهی در مورد خطوط سیمسون $A(BCD)$, $B(CDA)$ و $C(DAB)$ صادق است.

۳۰۵ قضیه. مراکز ارتقای چهارمثلثی که توسط چهار خط تعیین می‌شوند، هم‌خط‌اند. پاره‌خطهایی که نقطه میکل M برای چهار خط p , q , r و s (§۳۰۰) را به مراکز ارتقای چهارمثلثی که توسط این چهار خط تعیین می‌شوند، وصل می‌کنند (§۲۹۰) توسط خط سیمسون مشترک M نسبت به این چهارمثلث، یعنی خط $PQRS$, (§۲۹۹) نصف می‌شوند؛ پس این مراکز ارتقای روی خطی که در تجاسن $(M, 2)$ با خط $PQRS$ متناظر است، قرار دارند.

تمرین

۱) دو مثلث در یک دایره محاط شده‌اند و نسبت به مرکز دایره متقارن‌اند. نشان دهید که دو خط سیمسون هر نقطه‌ای از دایره نسبت به این مثلثها برهم عمودند.

۲) رأسهای B و C دایرة محیطی (O) از مثلث متغیر ABC ثابت‌اند، و P و P' دو نقطه ثابت از (O) هستند. نشان دهید نقطه تلاقی خطوط سیمسون $(PABC)$ و $(P'ABC)$ یک دایره را می‌پساید.

۳) نشان دهید که خطوط سیمسون سه نقطه برخورد امتداد ارتقاهای یک مثلث با دایرة محیطی، مثلثی متاجنس با مثلث پادک می‌سازند، و مرکز دایرة محیطی این مثلث بر مرکز ارتقای مثلث پادک منطبق است.

۴) وترهای PA , PB , و PC در یک دایرة مفروض، قطرهای سه دایرة (PA), (PB), و (PC) هستند. دایرة (PA) دو خط PB و PC را بهترتب در A' و A'' قطع می‌کند؛ دایرة (PB) دو خط PA و PC را بهترتب در B' و B'' قطع می‌کند؛ و دایرة (PC) دو خط PA و PB را بهترتب در C' و C'' قطع می‌کند. نشان دهید که سه خط $A'A''$, $B'B''$ و $C'C''$ هم‌اند.

تمرینهای تكمیلی

۱) مثلث متغیری دایرة محیطی و مرکز نقل ثابتی دارد. نشان دهید که خط سیمسون نقطه‌ای روی دایرة محیطی نسبت به این مثلث، از نقطه ثابتی می‌گذرد.

۲) مثلث متغیر ABC در دایرة ثابتی محاط است. رأس A و راستای نیمساز داخلی زاویه A ثابت‌اند. نشان دهید که خط سیمسون نقطه مفروض P نسبت به ABC راستای ثابتی دارد.

- ۳) دایره متغیری که از نقاط ثابت A و D می‌گذرد، دو خط ثابت را که از A می‌گذرند به ترتیب در B و C قطع می‌کند. مکان هندسی مرکز ارتفاعی مثلث ABC را بیابید.
- ۴) مثلث متغیری دایره محیطی ثابت و یک رأس ثابت دارد، و ضلع متغیر مقابل به این رأس از نقطه ثابتی می‌گذرد. ثابت کنید که خط سیمسون نقطه مفروضی روی دایره محیطی مثلث نسبت به این مثلث از یک نقطه ثابت می‌گذرد.
- ۵) مرکز دایره متغیری روی قاعده BC از مثلث متساوی الساقین ABC قرار دارد و دایره از نقطه A می‌گذرد. این دایره دو ضلع AB و AC را به ترتیب در Q و R قطع می‌کند. مکان هندسی نقطه وسط QR را بیابید.
- ۶) در یک دایرة مفروض بی‌نهایت مثلث می‌توان محاط کرد به طوری که خط سیمسون نقطه مفروضی از دایره نسبت به آنها بر خط مفروضی منطبق باشد. مکان هندسی مرکز نقل این مثلثها را بیابید.
- ۷) از نقطه P روی دایرة محیطی مثلث ABC عمودهایی بر اضلاع BC ، CA و AB رسم می‌کنیم تا آنها را به ترتیب در نقاط L ، M ، و N و دایرة محیطی را در A' ، B' ، و C' قطع کنند. خط سیمسون خطوط LMN ، $A'B'$ ، $B'C'$ ، $C'A'$ ، $B'M'$ و N' را به ترتیب در L' ، L' ، M' ، و N' قطع می‌کند. ثابت کنید که خطوط AL' ، BM' و CN' همسانند.
- ۸) خطی را که از تصاویر یک نقطه متغیر از قاعده مثلثی برروی دو ضلع دیگر مثلث می‌گذرد در نظر می‌گیریم. مکان هندسی تصویر پای عمود وارد بر قاعده این مثلث را بر خط مذکور به دست آورید.
- ۹) ثابت کنید که اگر خط سیمسون نقطه مفروضی نسبت به یک مثلث، از رویبروی قطری این نقطه مفروض در دایرة محیطی مثلث بگذرد، از مرکز نقل مثلث هم خواهد گذشت، و برعکس.
- ۱۰) مثلث متساوی‌الاضلاعی رسم کنید که اضلاعش به ترتیب از سه نقطه همخط مفروض بگذرند و دایرة محیطی اش از نقطه مفروض چهارمی عبور کند.
- ۱۱) شعاع OP از دایرة محیطی مثلث ABC اضلاع این مثلث را در نقاط A' ، B' ، و C' قطع می‌کند. نشان دهید نقاط A'' ، B'' ، و C'' تصاویر نقاط A' ، B' ، و C' روی خطوط AP ، BP و CP هستند. روی خط سیمسون P نسبت به ABC قرار دارند.
- ۱۲) فرض کنید L ، M ، و N تصاویر نقطه P از دایرة محیطی مثلث ABC روی اضلاع CA ، BC ، و AB ، و L' ، M' ، N' نقاط برخورد خط سیمسون LMN با ارتفاعهای AD ، BE و CF باشند. نشان دهید که: (الف) دو پاره خط LM و $L'M'$ با تصویر ضلع AB روی خط سیمسون برابرند؛ و (ب) تصاویر پاره خطهای $A'L'$ ، AL ، BM' ، و CN' روی LMN برابرند.
- ۱۳) از دو نقطه انتهایی قطری از یک دایرة، خطوطی به موازات خطوط سیمسون این نقاط نسبت به مثلث مفروضی محاط در این دایرة رسم می‌کنیم. نشان دهید که نقاط وسط پاره خطهایی که اضلاع این مثلث روی این خطوط موازی جدا می‌کنند، همخط اند.
- ۱۴) ثابت کنید اگر سه مثلث در یک دایرة محاط شده باشند، سه خط سیمسون هر نقطه‌ای از دایرة نسبت به این مثلثها، مثلثی از نوع معین می‌سازند، چند حالت خاص را برسی کنید.
- ۱۵) ثابت کنید پاهاي سه ارتفاعی که از قطب سیمسون هر ضلع یک مثلث برآن ضلع رسم می‌شوند، رأسهای یک مثلث منظري با مثلث اصلی را تشکيل می‌دهند (به ۳۴۶ رجوع کنید).
- ۱۶) (الف) نقطه M روی دایرة (O) قرار دارد و چهارضلعی (q) در (O) محاط شده است. ترکیبات سه به سه از رأسهای چهارضلعی (q)، چهار مثلث را تعیین می‌کنند. چهار خط سیمسون (M) نسبت به این چهار مثلث را به دست می‌آوریم و (M) را روی آنها تصویر می‌کنیم، نشان دهید که این تصویرها

روی یک خط راست قرار دارند. این خط را می‌توان خط سیمیسون (M) نسبت به چهارضلعی (q) نامید. (ب) اگر یک پنج ضلعی مفروض در دایره (O) محاط شده باشد، ترکیبهای چهاربه چهار از پنج رأس آن پنج چهارضلعی را تعیین می‌کنند. پنج خط سیمیسون (M) نسبت به این پنج چهارضلعی را به دست می‌آوریم، و (M) را روی آنها تصویر می‌کنیم، نشان دهید که این تصویرها روی یک خط راست قرار دارند. این خط را می‌توان خط سیمیسون (M) نسبت به این پنج ضلعی نامید. (ج) اگر یک شش ضلعی مفروض در دایره (O) محاط شده باشد ... این فرایند را می‌توان به طور نامحدود ادامه داد.

۶

موربیا

الف. مقدمه

۳۰۶. پاره خط‌های جهتدار. وقتی دو یا چند پاره خط واقع بر یک خط را در نظر می‌گیریم، اگر علاوه بر طول هر پاره خط جهت آن را نیز در نظر بگیریم، ساده‌تر می‌توانیم روابط بین آنها را بیان کنیم.
یک نقطه می‌تواند یک خط را در دو جهت بیماید. یکی از این دو جهت، مثلاً جهت چپ به راست را به دلخواه جهت مثبت و جهت دیگر را جهت منفی برمی‌گزینیم. اگر روی این خط پاره خط AB ، ۵ سانتیمتر طول داشته باشد و نقاط انتهای آن A و B باشند، و اگر جهت A به B جهت مثبت خط باشد، می‌گوییم که این پاره خط $5 +$ سانتیمتر طول دارد، ولی اگر جهت A به B جهت منفی خط باشد می‌گوییم طول پاره خط -5 سانتیمتر است.

در نتیجه، در حالتی که اول بیان شد، طول پاره خط BA برابر -5 سانتیمتر، و در حالت بعدی طول پاره خط BA برابر $+5$ سانتیمتر است. به این ترتیب بین دو انتهای A و B از این پاره خط تابیز قائل می‌شویم. وقتی پاره خط را AB می‌نامیم، A را ابتداء و B را انتهای آن می‌انگاریم، ولی وقتی آن را BA می‌نامیم، B ابتداء آن و A انتهای آن است.

وقتی برای پاره خطی هم طول و هم جهت در نظر می‌گیریم، آن را پاره خط جهتدار می‌نامیم.
 واضح است که در مورد پاره خط‌های جهتدار داریم

$$AB + BA = 0 \quad (1)$$

۳۰۷. سه نقطه همخط. وقتی که دو نقطه A و B روی خطی مفروض باشند، می‌توانیم نقطه سوم C را روی این خط بین A و B ، بیرون آنها در سوی A ، یا بیرون آنها در سوی B در نظر بگیریم. اگر بخواهیم مکان نقطه C نسبت به نقاط A و B را تها بر حسب طول پاره خط‌های AB ، AC ، و BC بیان کنیم، برای سه حالت بیان شده برای C به سه معادله متفاوت می‌رسیم. با استفاده از پاره خط‌های جهتدار می‌توانیم هر سه حالت را با یک معادله، یعنی

$$AB + BC + CA = 0 \quad \text{یا} \quad AB = AC + CB \quad (2)$$

بیان کنیم.

تمرین

- (۱) نشان دهید که $AB + BC + CD = AD$
- (۲) نشان دهید که اگر M نقطه وسط پاره خط AB باشد، با در نظر گرفتن اندازه و جهت داریم $.AB = 2AM = 2MB$
- (۳) نشان دهید که اگر O, A, B ، و P همخط باشند، با در نظر گرفتن اندازه و جهت داریم $OA' + OB' = AB' + 2OA \cdot OB$

- (۴) نشان دهید اگر A, B ، و P سه نقطه همخط باشند، و M نقطه وسط پاره خط AB باشد، با در نظر گرفتن اندازه و جهت، داریم $.PM = \frac{1}{2}(PA + PB)$
- (۵) نشان دهید اگر $OA + OB + OC = 0$ ، و P نقطه دلخواهی از خط AB باشد، آنگاه $.PA + PB + PC = 3PO$
- (۶) نشان دهید که اگر روی یک خط داشته باشیم $.O'A' + O'B' + O'C' = OA + OB + OC = 0$ ، و $.AA' + BB' + CC' = 3OO'$

- (۷) نشان دهید که $.CD = CA + AD$ ، $.AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0$. راهنمایی. این رابطه‌ها را جایگزین، و عبارت حاصل را ساده کنید.

ب. قضیه استوارت

۳۰۸. قضیه. اگر A, B ، و C سه نقطه همخط و P یک نقطه دلخواه باشد، با در نظر گرفتن جهت و اندازه داریم

$$PA' \cdot BC + PB' \cdot CA + PC' \cdot AB + BC \cdot CA \cdot AB = 0. \quad (1)$$

(الف) اگر P روی خط ABC نباشد، E را پای عمود رسم شده از P بر ABC در نظر بگیرید. داریم

$$\begin{aligned} PA' &= PE' + EA' = PE' + (EC + CA)' \\ &= PE' + EC' + 2EC \cdot CA + CA' \\ PB' &= PE' + EB' = PE' + (EC + CB)' \\ &= PE' + EC' + 2EC \cdot CB + CB' \end{aligned}$$

و $CB = -BC$ ، $PE' + EC' = PC'$ ؛ با جایگزین کردن این رابطه‌ها به دست می‌آوریم

$$PA' = PC' + CA' + 2EC \cdot CA$$

$$PB' = PC' + BC' - 2EC \cdot BC$$

این دو رابطه را به ترتیب در BC و CA ضرب، و آنها را با هم جمع می‌کنیم:

$$\begin{aligned} PA' \cdot BC + PB' \cdot CA &= PC'(BC + CA) + CA' \cdot BC + BC' \cdot CA \\ &= PC'(BC + CA) + BC \cdot CA(BC + CA) \\ &= (PC' + BC \cdot CA)(BC + CA) \\ &= (PC' + BC \cdot CA)(-AB) \end{aligned}$$

که همان رابطه مطلوب (۱) است.

(ب) اگر P روی خط ABC باشد، رابطه (۱) را برای نقطه Q ، که نقطه دلخواهی از خط عمود بر در نقطه P است، می‌نویسیم

$$QA^2 \cdot BC + QB^2 \cdot CA + QC^2 \cdot AB + BC \cdot CA \cdot AB = 0. \quad (2)$$

داریم $QA^2 = QP^2 + PA^2$ ، $QB^2 = QP^2 + PB^2$ ، $QC^2 = QP^2 + PC^2$ و $BC = PB - PC$. با جایگزین کردن این رابطه‌ها در (۲) و استفاده از رابطه $AB + BC + CA = 0$ رابطه (۱) را به دست می‌آوریم.

تمرین

- ۱) با استفاده از رابطه استوارت طول میانه‌ها، نیمسازها و ... را در یک مثلث به دست آورید.
- ۲) نشان دهید که مجموع مربع فاصله‌های رأس قائمی یک مثلث قائم‌الزاویه از دو نقطه‌ای که وتر را به سه بخش مساوی تقسیم می‌کنند با $\frac{1}{4}$ مربع وتر برابر است.

- ۳) اگر H ، G ، O ، و I به ترتیب مرکز ارتفاعی، مرکز نقل، مرکز دایره محیطی و مرکز دایره محاطی داخلی یک مثلث باشند، نشان دهید که

$$HI^2 + 2OI^2 = 3(IG^2 + 2OG^2), 3(IG^2 + \frac{1}{4}HG^2) - IH^2 = 2R(R - 2r)$$

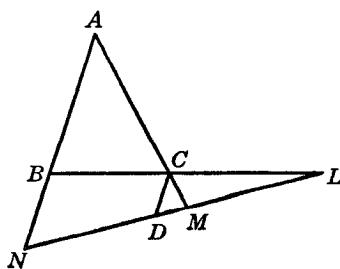
که در آن R و r به ترتیب شعاع دایره محیطی و شعاع دایره محاطی داخلی هستند.

- ۴) اگر خطی که از رأس A در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC می‌گذرد، BC را در F و دایره محیطی را در قطع کند، نشان دهید که

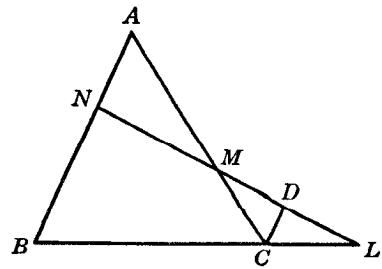
$$\frac{1}{MF} = \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}$$

ج. قضیه منلا تووس

- ۵) مشاهده. یک مورب می‌تواند دو ضلع یک مثلث و امتداد ضلع سوم آن (شکل ۸۷ الف)، یا امتداد هر سه ضلع مثلث (شکل ۸۷ ب) را قطع کند.
- نقاطه برخورد مورب با یک ضلع و دو رأس واقع بر آن ضلع دو پاره خط را تعیین می‌کنند. شش پاره خطی را که یک مورب به این ترتیب روی سه ضلع مثلث جدا می‌کند می‌توان به دو دسته، هر کدام شامل سه پاره خط غیر مجاور تقسیم کرد؛ منظور از سه پاره خط غیر مجاور آن است که هیچ دو تابی از آنها انتهای مشترک ندارند.



شکل ۸۷ (ب)



شکل ۸۷ (الف)

- ۶) قضیه منلا تووس. شش پاره خطی که یک مورب روی اضلاع مثلث ایجاد می‌کند، چنان‌اند که حاصل ضرب سه پاره خط غیر مجاور با حاصل ضرب سه پاره خط دیگر برابر است.
- فرض کنید L ، M ، و N نقاط برخورد مورب LMN به ترتیب با اضلاع CA ، BC ، و AB از مثلث

ABC باشد (شکل‌های ۸۷ الف و ب)، و خطی که از C به موازات ضلع روبرویش AB رسم می‌شود LMN قطع کند. با توجه به مثنهای متشابه NBL و DCL و مثنهای متشابه MAN و MDC ، داریم

$$BL \cdot DC = LC \cdot NB, \quad CM \cdot AN = MA \cdot DC$$

پس با ضرب و ساده کردن به دست می‌آوریم

$$BL \cdot CM \cdot AN = LC \cdot NB \cdot MA$$

که قضیه را ثابت می‌کند.

۳۱۱. ملاحظه ۱. غالباً بهتر است که این رابطه به صورت زیر نوشته شود:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1 \quad (m)$$

رابطه (m) را می‌توانیم به سادگی با دنبال کردن محیط مثلث در جهتی معین بنویسیم؛ اولین پاره خط بین یک رأس مثلث و نقطه برخورد مورب با ضلعی که از آن رأس می‌گذرد، و دومین پاره خط بین آن نقطه برخورد و رأس دیگری که روی آن ضلع قرار دارد، و به همین ترتیب تا به رأس اول برسیم.

۳۱۲. ملاحظه ۲. اگر پاره خط‌های رابطه (m) را پاره خط‌های جهتدار فرض کنیم و آنها را به ترتیب بیان شده در بالا بنویسیم، همیشه یکی از نسبتها منفی و دو نسبت دیگر یا هر دو مثبت یا هر دو منفی خواهد بود (§۳۰۹). پس با در نظر گرفتن اندازه و جهت داریم

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1 \quad (m')$$

۳۱۳. قضیه عکس. اگر سه نقطه، هر کدام روی یک ضلع مثلثی، در نظر بگیریم، به طوری که روی اضلاع مثلث شش پاره خط جدا کنند که قدر مطلق حاصل ضرب سه پاره خط غیر مجاور با قدر مطلق حاصل ضرب سه پاره خط دیگر برابر و علامت این دو حاصل ضرب مخالف هم باشند، آن سه نقطه همخاطباند. فرض کنید سه نقطه L , M , و N سه نقطه روی سه ضلع مثلث ABC باشند به طوری که رابطه (m') برقرار باشد. اگر سه نقطه همخاط نباشند، فرض کنید خطی که از M و N می‌گذرد ضلع BC را در K قطع کند؛ با توجه به قضیه منالوس،

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1$$

از مقایسه این رابطه با رابطه (m'), رابطه زیر را به دست می‌آوریم:

$$BL : LC = BK : KC$$

یعنی نقاط K و L پاره خط BC را به یک نسبت، از لحاظ اندازه و علامت، تقسیم می‌کنند؛ پس دو نقطه بر هم منطبق‌اند و قضیه ثابت می‌شود.

۳۱۴. قضیه. (الف) نیمسازهای خارجی زاویه‌های مثلث، اضلاع روبرو را در سه نقطه همخاط قطع می‌کنند. (ب) دو نیمساز داخلی دو زاویه و نیمساز خارجی زاویه سوم مثلث، اضلاع روبرو را در سه نقطه همخاط قطع می‌کنند.

(الف) اگر U' , V' , و W' نقاط برخورد نیمسازهای خارجی زاویه‌های A , B , و C با اضلاع روبرو

باشند، داریم

$$BU' : U'C = c : b, \quad CV' : V'A = a : c, \quad AW' : W'B = b : a$$

پس حاصل ضرب سه نسبت برابر یک است و قضیه ثابت می‌شود (§۳۱۳).

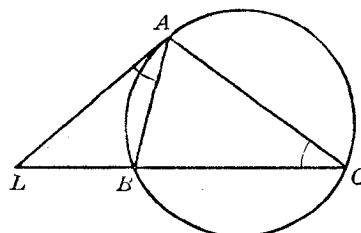
اثبات (ب) شبیه اثبات (الف) است.

۳۱۵. ملاحظه. شش نیمساز زاویه‌های مثلث اضلاع رویرو را در شش نقطه قطع می‌کنند که سه به سه روی چهار خط راست قرار دارند.

۳۱۶. نتیجه. اضلاع مثلث پادک یک مثلث مفروض، اضلاع آن مثلث را در سه نقطه همخخط قطع می‌کنند (§۱۹۳).

۳۱۷. تعریف. خطی که از این سه نقطه (§۳۱۶) می‌گذرد، محور پادک مثلث نامیده می‌شود.

۳۱۸. قضیه. خطوطی که در رأسهای یک مثلث بر دایره محیطی مماس می‌شوند، اضلاع مقابل را در سه نقطه همخخط قطع می‌کنند.



شکل ۸۸

فرض کنید L ، M ، و N (شکل ۸۸) نقاط برخورد AB ، BC ، CA ، و AB با مماسهایی باشند که در نقاط B ، C بر دایره محیطی مثلث ABC رسم می‌شوند. اندازه زاویه‌های LAB و C کمان \widehat{AB} است، پس دو مثلث ALC و ALB مشابه‌اند؛ پس،

$$AL^r : LC^r = AB^r : AC^r \quad \text{یا} \quad AL : LC = AB : AC$$

اما $AL^r = LB \cdot LC$ ؛ پس

$$BL : LC = c^r : b^r$$

به طور مشابه،

$$CM : MA = a^r : c^r, \quad AN : NB = b^r : a^r$$

پس نقاط L ، M ، و N همخخط‌اند (§۳۱۳).

۳۱۹. ملاحظه. در ضمن ثابت کردیم که خط مماس بر دایره محیطی در یک رأس مثلث، ضلع رویرو را به طور خارجی به نسبت مربع دو ضلع مجاور تقسیم می‌کند.

۳۲۰. یادآوری. خطوطی که در سه رأس یک مثلث مفروض بر دایره محیطی این مثلث مماس می‌شوند، مثلثی تشکیل می‌دهند که مثلث مماسی آن مثلث نامیده می‌شود (§۱۹۰).

۳۲۱. قضیه. نقاط هموای سه نقطه همخخط، همخخط‌اند.

اگر L , M , و N سه نقطه همخط روى اضلاع BC , CA , و AB از مثلث ABC باشند، داريم

(§۳۱۰)

$$\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$$

اگر L' , M' , و N' نقاط همنوای نقاط L , M , و N باشند، داريم

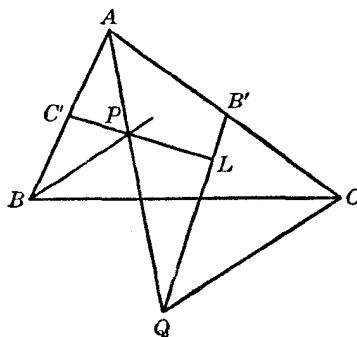
$$CL' : L'B = BL : LC, \quad BN' : N'A = AN : NB, \quad AM' : M'C = CM : MA$$

و قضيه ثابت مى شود (§۳۱۳).

۳۲۲. تعريف. موربهایی مانند LMN و $L'M'N'$ را گاهی موربهای معکوس یا موربهای همنوا می نامند.

۳۲۳. مسئله. دو خط در راستاهای مفروض رسم کنيد به طوری که دو مورب معکوس برای مثلث مفروضی باشند.

فرض کنيد ABC (شکل ۸۹) مثلث مفروض باشد، و خطی که از A ، در راستای d رسم مى شود، دو خطی را که از نقاط B و C در راستای مفروض d' رسم مى شوند در نقاط P و Q قطع کند. اگر B' وسط C' و C وسط AB باشد، نقطه $L = (PC', QB')$ نقطه مشترک دو مورب مطلوب است. چون نقطه L با Q و B' همخط است، خطوطی که از L به موازات QA و QC رسم مى شوند ضلع AC را در دو نقطه همنوا، و ضلع AB را در دو نقطه همنوا قطع مى کنند.



شکل ۸۹

۳۲۴. قضيه. اگر دو نقطه D و D' ; دو نقطه E و E' ; و دو نقطه F و F' نقاط همنوا به ترتیب روی اضلاع BC , CA , و AB از مثلث ABC باشند، دو مثلث $D'E'F'$ و DEF هم ارزند.

فرض کنيد خطوط EF و $E'F'$ را در G و G' قطع کنند. فواصل نقاط C و D از قاعده EF با GC و GD متناسب‌اند؛ پس،

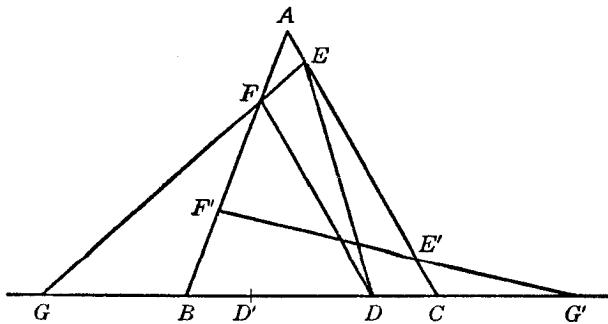
$$CEF : DEF = GC : GD$$

و به طور مشابه،

$$BE'F' : D'E'F' = G'B : G'D'$$

با توجه به موربهای معکوس EF و $E'F'$ ، داريم

$$GC = G'B, \quad GD = G'D'$$



شکل ۹۰

پس،

مساحت $D'E'F'$ = مساحت DEF مساحت CEF : مساحت DEF

در ضمن،

مساحت CEF = مساحت FEC = مساحت FAC = مساحت $E'AF$ مساحت $E'F'B$ پس مساحت مثلثهای DEF و $D'E'F'$ یکسان است.

تمرين

(۱) میانه AA' از مثلث ABC ضلع $B'C'$ از مثلث میانک $A'B'C'$ را در P و CP ضلع AB را در Q قطع می‌کند. نشان دهید که $AB = 3AQ$.(۲) نشان دهید که اگر خطی که از G ، مرکز نقل مثلث ABC می‌گذرد، AB را در M و AC را در N قطع کند، با در نظر گرفتن اندازه و علامت خواهیم داشت $AN \cdot MB + AM \cdot NC = AM \cdot AN$.

(۳) ثابت کنید که دو خط سیمیسون متعامد، موربهای معکوس هستند.

(۴) ثابت کنید مثلثی که رأسهای آن نقاط تنااس اضلاع مثلث مفروضی با دایره‌های محاطی خارجی نسبت به آن اضلاع هستند، با مثلثی که رأسهای آن نقاط تنااس اضلاع مثلث مفروض با دایره محاطی داخلی آن هستند، هم ارز است.

(۵) دو مورب PQR و $P'Q'R'$ اضلاع CA , BC , AB از مثلث ABC را در جفت نقاط P , P' , Q , Q' , R , R' قطع می‌کنند. نشان دهید که سه نقطه (CA, RP') , (BC, QR') , (AB, PQ') همخطیاند.

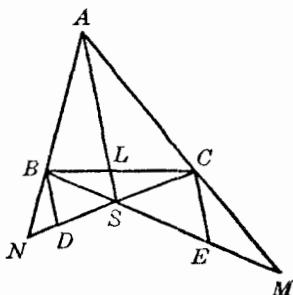
(۶) نشان دهید که تصویرهای هر نقطه از دایره محیطی یک چهار ضلعی محاطی بر روی اضلاع چهار ضلعی این اضلاع را به هشت پاره خط تقسیم می‌کنند که حاصل ضرب چهار پاره خط غیر مجاور با حاصل ضرب چهار پاره خط دیگر برابر است. راهنمایی. خطوط سیمیسون را خطوط مورب در نظر بگیرید.

(۷) دایره‌ای که مرکز آن از دو رأس A و B از مثلث ABC به یک فاصله است، دو ضلع BC و AC را در جفت نقاط P , P' , Q , Q' قطع می‌کند. نشان دهید که دو خط PQ و $P'Q'$ ضلع AB را در دو نقطه همنوا قطع می‌کنند.(۸) دو پاره خط برابر AE و AF را روی دو ضلع AB و AC از مثلث ABC در نظر می‌گیریم. نشان دهید که میانه رسم شده از رأس A , EF را به نسبت دو ضلع AC و AB تقسیم می‌کند.

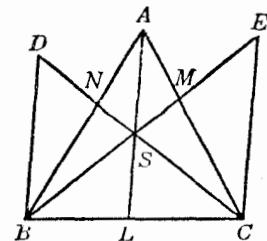
د. قضیه سیوا

(۳۲۵) مشاهده. اگر نقطه S را درون مثلث ABC بگیریم، CA , BC , AS , BS , CS ، و N نقاط تلاقی اضلاع BC , AC , و AB با خطوط

خارج مثلث ABC باشد، یکی از نقاط L, M ، و N ضلع متناظر را به طور داخلی تقسیم می‌کند، و دو نقطه دیگر اضلاع متناظرشان را به طور خارجی تقسیم می‌کند (شکل ۹۱ ب).



شکل ۹۱ (ب)



شکل ۹۱ (الف)

شش پاره خطی را که توسط نقاط L, M ، و N روی اضلاع جدا می‌شود می‌توان به دو گروه، هر یک حاوی سه پاره خط غیر مجاور تقسیم کرد (§۳۰۹).

۳۲۶. قضیه سوا. خطوطی که رأسهای مثلث را به یک نقطه مفروض وصل می‌کنند، روی اضلاع مثلث شش پاره خط جدا می‌کنند، به طوری که حاصل ضرب سه پاره خط غیر مجاور با حاصل ضرب سه پاره خط دیگر برابر است.

فرض کنید خطوط BD و CE که از رأسهای B و C به موازات ASL رسم می‌شوند (شکل‌های الف و ب)، و BM را به ترتیب در D و E قطع کنند. با توجه به مثلثهای متشابه، داریم

$$AN : NB = AS : BD$$

$$BL : BC = LS : CE$$

$$BC : LC = BD : LS$$

$$CM : MA = CE : AS$$

با ضرب کردن این تساویها درهم و ساده کردن رابطه حاصل، به دست می‌آوریم

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1 \quad (\text{c})$$

که قضیه را ثابت می‌کند.

راه دیگر. اگر دو مثلث ALC و ALB (شکل ۹۱) را به ترتیب با دو مورب CSN و BSM قطع کنیم، بنابر قضیه مثلاوس، با درنظر گرفتن اندازه و علامت داریم

$$LB \cdot CM \cdot AS = -BC \cdot MA \cdot SL$$

$$AN \cdot BC \cdot LS = -NB \cdot CL \cdot SA$$

با ضرب کردن دو طرف درهم و ساده کردن رابطه حاصل، رابطه (c) به دست می‌آید.

۳۲۷. ملاحظه. اگر پاره خطها را جهتدار در نظر بگیریم، یکی از سه نسبت رابطه (c) همواره مثبت، و دو تای دیگر یا هر دو مثبت یا هر دو منفی اند (§۳۲۵)؛ بنابراین، رابطه (c) هم از لحاظ اندازه و هم از لحاظ علامت معتبر است.

رابطه (c) را به آسانی می‌توان مانند رابطه (m) نوشت (§۳۱۱).

۳۲۸. قضیه عکس. اگر سه نقطه روی سه ضلع یک مثلث، این اضلاع را به شش پاره خط تقسیم کنند، به طوری که حاصل ضرب پاره خط‌های هر یک از دو دسته پاره خط‌های غیرمجاور، از لحاظ اندازه و علامت، با هم برابر باشند، خطوطی که این نقاط را به رأسهای مقابل متناظرشان وصل می‌کنند هم‌رساند. ثابت شیوه اثبات عکس قضیه ملائوس است (§۳۱۳).

۳۲۹. دو تعریف. اگر خطی رسم شود که از یک رأس مثلث بگذرد، پاره خط بین این رأس و ضلع مقابل آن را سوایی می‌نامیم. پاره خط‌های AL , BM , CN (شکل ۹۱) سوایی هستند.

مثلث LMN (شکل ۹۱) را می‌توان مثلث سوایی نقطه D برای مثلث ABC نامید.

۳۳۰. قضیه. خطوطی که رأسهای یک مثلث را به نقاط تماس اضلاع مقابل با دایره محاطی داخلی مثلث وصل می‌کنند، هم‌رسانند.

اگر X , Y , و Z نقاط تماس اضلاع BC , CA , و AB از مثلث ABC با دایره محاطی داخلی آن باشند، داریم (§۱۵۷)

$$AZ = AY, \quad BX = BZ, \quad CY = CX$$

پس،

$$AZ \cdot BX \cdot CY = BZ \cdot CX \cdot AY$$

که قضیه را ثابت می‌کند (§۳۲۸).

۳۳۱. تعریف. نقطه مشترک خطوط AX , BY , و CZ , (§۳۳۰) را غالباً نقطه ژرگون مثلث می‌نامند.

۳۳۲. قضیه. خطوطی که از نقاط تماس یک دایره محاطی خارجی مثلثی با اضلاع مثلث به رأس مقابل هر ضلع رسم می‌شوند، هم‌رسانند.

۳۳۳. قضیه. خطوطی که از رأسهای یک مثلث به نقطه‌های تماس ضلع مقابل هر رأس با دایره محاطی خارجی نسبت به آن ضلع رسم می‌شوند، هم‌رسانند.

اثبات این دو قضیه شبیه اثبات قضیه قبلی (§۳۳۰) است.

۳۳۴. تعریف. نقطه مشترک سه خط مذکور در قضیه قبل (§۳۳۳) را غالباً نقطه ناگل مثلث می‌نامند.

تمرین

۱) با استفاده از قضیه سوا ثابت کنید که در مثلث (الف) میانه‌ها هم‌رسانند؛ (ب) نیمسازهای داخلی هم‌رسانند؛ (ج) ارتفاعها هم‌رسانند. راهنمایی. $AF : AE = b : c$.

۲) خطی به موازات ضلع BC از مثلث ABC , دو ضلع AB و AC را در B' و C' قطع می‌کنند. ثابت کنید که دو خط $B'C'$ و BC یکدیگر را روی میانه رسم شده از A قطع می‌کنند.

۳) مثلث ABC و دو نقطه P و P' مفروضاند. خطوطی که از P' به موازات PA و PC و PB رسم می‌شوند، CA , BC , AB , E' , D' , F' و G' را در D , E , F و G قطع می‌کنند. نشان دهید اگر خطوط AD , BE , و CF هم‌رس باشند، خطوط AD , BE , و CF نیز هم‌رس خواهند بود.

۴) نقطه M روی ضلع BC از مثلث ABC قرار دارد؛ به مرکز M دایره‌هایی رسم می‌کنیم که به ترتیب از B و C بگذرند. این دایره‌ها به ترتیب AB و AC را در N و P قطع می‌کنند. موقعیت M باید کجا باشد تا خطوط AM , BP , و CN هم‌رس باشند؟ راهنمایی. محل برخورد BC با میانه‌های وارد بر

AC و AB را در نظر بگیرید.

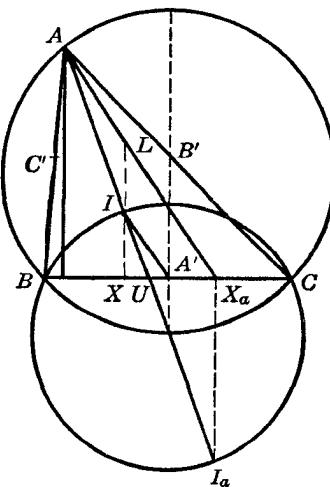
۳۳۵. قضیه. اگر سه خطی که سه نقطه مفروض روی سه ضلع یک مثلث را به رأسهای مقابل هر ضلع دصل می‌کنند همسن باشند، این مطلب برای نقاط همنوای آن نقاط نیز صادق است.
اثبات شبیه اثبات مربوط به موریهای معکوس (§۳۲۱) است.

۳۳۶. تعریف. نقاط مشترک بین دو دسته خطوط همسن در نظر گرفته شده (§۳۳۵) را می‌توان نقاط مزدوج همنا برای مثلث، یا به اختصار، نقاط همنا برای مثلث نامید.

۳۳۷. قضیه. مرکز دایره محاطی داخلی یک مثلث، نقطه ناگل مثلث میانک آن مثلث است.
فرض کنید I محل برخورد امتداد خط IX با خط AX_a (شکل ۹۲) باشد. با توجه به مثلثهای مشابه IUX و IUX_a ، و همچنین مثلثهای مشابه AIL ، $AI_a X_a$ ، داریم

$$XI : X_a I_a = IU : UI_a, \quad IL : X_a I_a = IA : AI_a$$

طرفهای راست این دو تساوی برابرند. در واقع، دو جفت نقطه A ، I و U و I_a همسازند (§۱۲۰)؛ پس $XA' = A'X_a$ ، $XI = IL$ و $XA' = A'I$ موازی‌اند. دو خط $A'I$ و AX_a را می‌توان عناصر متاظر در دو شکل متجانس مشکل از مثلث ABC و مثلث میانک آن، مثلث $A'B'C'$ (§۹۸) دانست، زیرا این دو خط موازی‌اند و از نقاط متجانس A و A' می‌گذرند. پس خط $A'I$ و خطوط متاظر $B'I$ و $C'I$ در نقطه ناگل مثلث $A'B'C'$ همسن‌اند؛ یعنی نقطه ناگل بر I منطبق است.



شکل ۹۲

۳۳۸. نتیجه ۱. نقطه ناگل M ، ABC ، مرکز دایره محاطی داخلی آن، با G ، مرکز نقل مثلث ABC همخطوأند و $2IG = GM$.

۳۳۹. نتیجه ۲. نقطه ناگل یک مثلث، مرکز دایره محاطی داخلی مثلث پادمکمل آن است.

۳۴۰. قضیه. اگر LMN مثلث سوابی نقطه S برای مثلث ABC باشد، داریم

$$\frac{SL}{AL} + \frac{SM}{BM} + \frac{SN}{CN} = 1$$

پاره خطهای SL و AL با فاصله‌های نقاط S و A از ضلع BC متناسب‌اند؛ پس

$$SL : AL = SBC : ABC \text{ مساحت } ABC$$

و به طور مشابه،

$$SM : BM = SCA : ABC \text{ مساحت } ABC, SN : CN = SAB : ABC \text{ مساحت } ABC$$

با جمع کردن این سه برابری و مشاهده اینکه

$$SBC = SAB + SCA + SBC \text{ مساحت } SBC = SAB + SCA$$

رابطه بیان شده به دست می‌آید.

این رابطه از نظر اندازه و علامت معتبر است و به موضع نقطه S نسبت به مثلث ABC بستگی ندارد.

۳۴۱. نتیجه. داریم

$$\frac{AS}{AL} + \frac{BS}{BM} + \frac{CS}{CN} = 1$$

در واقع، داریم

$$\frac{AS}{AL} = \frac{AL - SL}{AL} = 1 - \frac{SL}{AL}$$

برای دو نسبت دیگر هم رابطه مشابه داریم. با جمع کردن این سه رابطه به آسانی به رابطه بیان شده می‌رسیم.

۳۴۲. قضیه. اگر LMN مثلث سوایی نقطه S برای مثلث ABC باشد، داریم

$$\frac{AS}{SL} = \frac{AM}{MC} + \frac{AN}{NB}$$

اگر خطوطی که از C و B به موازات ASL رسم می‌کنیم، BM و CN را به ترتیب در E و D قطع کنند، با توجه به مثلثهای مشابه، داریم

$$AS : EC = AM : MC$$

$$AS : DB = AN : NB$$

$$SL : EC = BL : BC$$

$$SL : DB = LC : BC$$

با تقسیم کردن مجموع دو برابری اول بر مجموع دو برابری دیگر به آسانی به رابطه بیان شده می‌رسیم.

۳۴۳. قضیه دزارگ. دو مثلث ABC و $A'B'C'$ مفروض‌اند. اگر سه خط AA' ، BB' ، CC' در نقطه S یکدیگر را قطع کنند، سه نقطه (A, A') ، (B, B') ، (C, C') را روی خطی مانند s ، قرار دارند، و برعکس.

سه مورب $QC'A'$ ، $PB'C'$ ، $RA'B'$ و $RA'B'$ به ترتیب مثلثهای SAB ، SBC و SCA (شکل ۹۳) را قطع می‌کنند. بنابر قضیه مثلاً توُس، از نظر اندازه و علامت، داریم

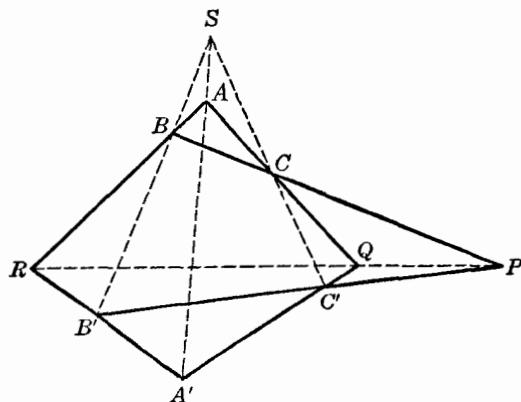
$$\frac{SB'}{B'B} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CC'}{C'S} = -1, \quad \frac{SC'}{C'C} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AA'}{A'S} = -1, \quad \frac{SA'}{A'A} \cdot \frac{AR}{RB} \cdot \frac{BB'}{B'S} = -1$$

با ضرب کردن این سه برابری، پس از ساده کردن، به دست می‌آوریم

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = -1$$

که قضیه را ثابت می‌کند (§۳۱۳).

برعکس فرض کنید سه نقطه P , Q , و R همخط باشند. اگر دو خط BB' و CC' یکدیگر را در S قطع کنند، باید ثابت کنیم که خط AA' نیز از S می‌گذرد.



شکل ۹۳

بنابر فرض، خطوط RB , CB , QR , $C'B'$, CB' , $QC'C'$ که رأسهای متناظر دو مثلث QCC' و RBB' را به هم وصل می‌کنند هم‌رسانند؛ پس بنابر حکم مستقیم قضیه، سه نقطه (QC, RB) , $S \equiv (CC', BB')$, $(A, A' \equiv (C'Q, B'R)$ همخط‌اند.

۲۴۴. تعریف. دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را مثلثهای همتای یا منظري می‌نامند.
نقطه S مرکز همتایی و خط PQR محور همتایی دو مثلث نامیده می‌شوند.

تمرین

- ۱) اگر نقطه تمسas دایره محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع CA , BC , و AB را به ترتیب X , Y , و Z بنامیم و M نقطه زرگون ABC باشد، نشان دهید که $AM : MX = a(p-a) : (p-b)(p-c)$ ؛ همچنین ثابت کنید که $(AM : MX) \cdot (BM : MY) \cdot (CM : MZ) = 4R : r$. ترتیج مشابهی را برای دایره‌های محاطی خارجی بیان و آنها را ثابت کنید.
- ۲) ثابت کنید که مجموع عکس سه پاره خط سوایی که از مرکز دایره محیطی مثلث می‌گذرند دو برابر عکس شعاع دایره محیطی مثلث است.
- ۳) نقطه‌ای دلخواه است و A' , B' , و C' سه نقطه دلخواه به ترتیب روی اضلاع CA , BC , و AB از مثلث ABC هستند. خطوط AP , BQ , و CR که از رأسهای مثلث ABC به ترتیب به موازیات خطوط OA' , OB' , و OC' رسم می‌شوند اضلاع CA , BC , و AB را به ترتیب در نقاط P , Q , و R قطع می‌کنند. نشان دهید که

$$\frac{OA'}{AP} + \frac{OB'}{BQ} + \frac{OC'}{CR} = 1$$

- ۴) اگر ارتفاعهای AD , BE , و CF از مثلث ABC دایره محیطی مثلث را مجدداً در P , Q , و R قطع کنند، نشان دهید که

$$\frac{AP}{AD} + \frac{BQ}{BE} + \frac{CR}{CF} = 4$$

(۵) خطوطی که از M به موازات اضلاع مثلث ABC رسم شده‌اند، میانه‌های وارد بر ضلع متناظر را به ترتیب در نقاط P , Q , و R قطع می‌کنند. نشان دهید که با در نظر گرفتن اندازه و علامت داریم

$$\frac{GP}{GA} + \frac{GQ}{GB} + \frac{GR}{GC} = 0.$$

(۶) CR , BQ , AP ، و CA , BC , AB را به ترتیب در نقاط K , L , و M قطع می‌کنند. نشان دهید که $(KP : AK) + (LQ : AQ) + (MR : AM) = 1$.
 (۷) نشان دهید خطی که از مرکز دایرة محاطی داخلی مثلث ABC به نقطه وسط پاره خط واصل بین A و نقطه ناگل ABC رسم می‌شود، توسط میانه گذرنده از رأس A نصف می‌شود.

(۸) با استفاده از قضیة دیازرگ ثابت کنید که (الف) اضلاع مثلث پادک اضلاع مثلث مفروض را در سه نقطه همخط قطع می‌کنند؛ (ب) خطوطی که نقاط تماس اضلاع مثلث با دایرة محاطی داخلی را به هم واصل می‌کنند، اضلاع متناظر مثلث را در سه نقطه همخط قطع می‌کنند؛ (ج) خطوطی که رأسهای پک مثلث را به رأسهای متناظر مثلث مماسی آن مثلث واصل می‌کنند، همروزانه. قضایای مشابه دیگری را بیان و آنها را ثابت کنید.

تمرینهای تكمیلی

(۱) با استفاده از قضیة ملانوس، قضیة خط سیمسون (§۲۸۲) را ثابت کنید.

(۲) (الف) از هر رأس مثلث خطاپایی به نقاط تماس ضلع روبرو با دایره‌های سه مماس مثلث رسم می‌کنیم. نشان دهید که این دوازده خط، سه به سه در هشت نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند و این هشت نقطه را می‌توان به چهارچفت نقاط همنوا برای مثلث تقسیم کرد؛ (ب) نشان دهید چهار تا از این نقاط مرکز سه مماس مثلث پادمکمل مثلث مفروض هستند.

(۳) نشان دهید اگر دو مثلث نسبت به یک نقطه متقارن باشند، موربهای معکوس اضلاع یکی از مثلثها نسبت به مثلث دیگر، همروزانه.

(۴) اگر اضلاع مثلث سوایی یک نقطه برای مثلث مفروضی، با اضلاع مثلث مفروض پادموازی باشند، نشان دهید که آن نقطه بر مرکز ارتفاعی مثلث مفروض منطبق است.

(۵) سه خط موازی توسط سه مورب موازی در نقاط A , B , C ; A' , B' , C' ; A'' , B'' , C'' قطع شده‌اند. نشان دهید که خطوط $B''C$, $B''A''$, و AB' همروزانه.

(۶) یک مثلث متساوی‌الاضلاع و یک نقطه مفروضی‌اند. از هر رأس مثلث خطاپی به تصویر نقطه مفروض بر ضلع مقابل آن رأس رسم می‌کنیم. نشان دهید که این خطوط همروزانه.

(۷) مثلث $(Q) = DEF$ در مثلث $(P) = ABC$ ، و مثلث $(R) = KLM$ در مثلث (Q) محاط شده است. نشان دهید که اگر دو تا از این مثلثها نسبت به مثلث سوم منظری باشند، نسبت به یکدیگر نیز منظری هستند.

(۸) از رأسهای مثلث ABC خطوطی رسم شده‌اند که از O می‌گذرنند و اضلاع مقابل را در D , E , و F قطع می‌کنند. ثابت کنید خطوطی که از A , B , و C به نقاط وسط پاره خط‌های DE , EF , و FD ، و رسم می‌شوند، همروزانه.

(۹) مثلث سوایی نقطه M برای مثلث (P) است. اگر از هر رأس (P) خطی به موازات ضلع متناظر مثلث (Q) رسم کنیم، سه خط رسم شده یک مثلث تشکیل می‌دهند. نشان دهید که این مثلث با مثلث

(P) منظری است.

۱۰) در یک مثلث سه پاره خط سوایی هم‌رس داریم. از وسط هر پاره خط سوایی خطی به نقطه وسط ضلع متناظر در مثلث رسم می‌کنیم. نشان دهید که این سه خط هم‌رس‌اند.

۱۱) از هر رأس مثلث مفروض (Q) خطی به موازات ضلع متناظر در مثلث مفروض (P') رسم می‌کنیم، تا مثلث (P) تشکیل شود. همچنین از هر رأس مثلث (P') خطی به موازات ضلع متناظر در مثلث (Q) رسم می‌کنیم تا مثلث (Q') تشکیل شود. نشان دهید که اگر دو مثلث (P) و (Q) یا دو مثلث (P') و (Q') ، منظری باشند دو مثلث دیگر هم منظری هستند.

تقسیم همساز

۳۴۵. تعریف. فرض کنید نقاط C و D پاره خط AB را به طور داخلی و خارجی به یک نسبت تقسیم کنند (§۵۴). اگر پاره خط‌های روی خط $ABCD$ را پاره خط‌های جهتدار ($\S\ ۳۰۶$) در نظر بگیریم، و توافق کنیم که نسبتهاي تقسیم پاره خط AB توسط نقاط C و D را به صورت زیر بنویسیم:

$$AC : CB \quad , \quad AD : DB$$

نسبت اول مثبت و نسبت دوم منفی خواهد بود. پس با در نظر گرفتن اندازه و علامت داریم

$$(AC : CB) + (AD : DB) = ۰ \tag{a}$$

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB} \quad \text{یا} \quad \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = -۱ \tag{b}$$

رابطه (b) را گاهی با نماد $-1 = (ABCD)$ نشان می‌دهیم، و می‌گوییم که این چهار نقطه یک گستره همساز تشکیل می‌دهند.

۳۴۶. قضیه. اگر پاره خط‌های گستره همساز $-1 = (ABCD)$ را از O ، نقطه وسط پاره خط AB ، اندازه بگیریم، با در نظر گرفتن اندازه و علامت خواهیم داشت

$$OC \cdot OD = OA^2 \tag{c}$$

از رابطه (b) داریم

$$\frac{AC + CB}{AC - CB} = \frac{AD - DB}{AD + DB} \tag{d}$$

حال با استفاده از روابط داده شده در ($\S\ ۳۰۶$) و ($\S\ ۳۰۷$)، با در نظر گرفتن علامت و اندازه خواهیم داشت

$$\left. \begin{aligned} AC + CB &= AB = AD + DB = ۲AO \\ AC - CB &= (AO + OC) - (CO + OB) = ۲OC \\ AD - DB &= (AO + OD) - (DO + OB) = ۲OD \end{aligned} \right\} \tag{e}$$

با قرار دادن این مقادیر در (d) رابطه (c) به دست می‌آید.

۳۴۷. قضیه عکس. اگر O نقطه وسط پاره خط AB باشد، و C و D دو نقطه خط AB باشند، به طوری که با در نظر گرفتن اندازه و علامت داشته باشیم $OC \cdot OD = OA^2$ ، آن‌گاه $(ABCD)$ یک گستره همساز است.

در واقع با توجه به رابطه مفروض و با استفاده از روابط (e)، به آسانی (d) را بدست می آوریم، و از آن (b) نتیجه می شود.

۳۴۸. قضیه. اگر در گستره توافقی $(ABCD)$ همه پاره خطها از یک نقطه گستره، مثلث B ، اندازه گرفته شوند، آنگاه با در نظر گرفتن اندازه و علامت داریم

$$\frac{2}{BA} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{BD} \quad (f)$$

چون رابطه (b) را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\frac{AB+BC}{CB} = -\frac{AB+BD}{DB}$$

پس،

$$-1 + (BA : BC) = 1 - (BA : BD)$$

و (f) به آسانی نتیجه می شود.

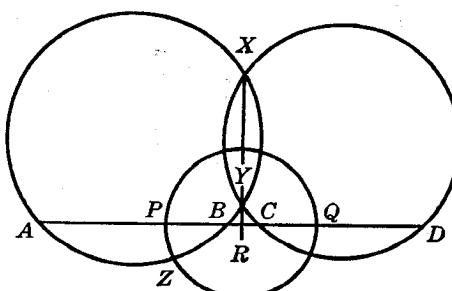
۳۴۹. قضیه عکس. اگر A, C, B ، و D چهار نقطه همخط باشند، و پاره خطهای BA, BC ، و BD در رابطه (f) صدق کنند، این نقاط یک گستره همساز تشکیل می دهند.
برای اثبات این قضیه باید گامهای بالا به صورت معکوس برداشته شود.

۳۵۰. مسئله. دو نقطه بیایید که هریک از دو جفت نقطه مفروض همخط را به طور توافقی تقسیم کنند.
دو جفت نقطه مفروض A, B ؛ و C, D (شکل ۹۴) و نقطه دلخواه X در خارج خط مفروض، دو دایره XAB و XCD را تعیین می کنند که یکدیگر را در نقطه دیگری مانند Y نیز قطع می کنند. دایره ای که مرکزش نقطه R ، محل برخورد خط XY با AB ، و شعاعش طول مماس XAB از R بر دایره XAB است، خط AB را در دو نقطه مطلوب P و Q قطع می کند.

در واقع، داریم

$$RP^r = RZ^r = RX \cdot RY = RA \cdot RB = RC \cdot RD$$

پس نقاط P و Q دو شرط بیان شده در مسئله را دارند (§۳۴۶).



شکل ۹۴

بحث. برای اینکه مسئله جواب داشته باشد، باید نقطه R خارج دایره های XAB و XCD قرار گیرد. درصورتی چنین خواهد شد که پاره خطهای AB و CD نقطه مشترکی نداشته باشند، یا یکی کاملاً داخل دیگری باشد.
درصورتی که این دو پاره خط همبوشانی داشته باشند، یعنی نقاط مشترکی داشته باشند ولی یکی کاملاً درون

دیگری نباشد، چنین نخواهد شد. اگر نقطه وسط AB و نقطه وسط CD بروم منطبق باشند، خط XY با موازی خواهد بود.

در مواردی که مسئله جواب دارد، جواب منحصر به فرد است.

تمرین

- ۱) نشان دهید اگر چهار نقطه O, A, C, D همخط باشند و با در نظر گرفتن اندازه و علامت داشته باشیم $OA^+ = OC \cdot OD$ ، آنگاه مقاینه A نسبت به O بر مذووج همساز C و D نسبت به O منطبق است.
- ۲) متوازی الاضلاع $MDOM'$ مفروض است. رأس O را به نقطه وسط MM' ، یعنی نقطه C ، وصل می‌کنیم. اگر نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه COD ضلع MD را در A و B قطع کنند، نشان دهید $MD^+ = MA \cdot MB$

- ۳) اگر نقاط C و D پاره خط AB را، که نقطه وسط آن O است، به طور همساز تقسیم کنند، ثابت کنید که

$$OC^+ + OD^+ = CD^+ + 2OA^+$$

- ۴) اگر $-1 = A' B'$ و $A' B'$ مذووجهای همساز $ABCD$ به ترتیب نسبت به دو نقطه A, C و دو نقطه C, B باشند، ثابت کنید که $-1 = A' B' CD$. راهنمایی از رابطه (f) (§۳۴۸) استفاده کنید.

- ۵) اگر نقطه وسط M $(ABCD) = -1$ باشد نشان دهید که

$$\frac{1}{CA \cdot CB} + \frac{1}{DA \cdot DB} = \frac{1}{MA \cdot MB}$$

- ۶) اگر $-1 = ABCD$ ، نشان دهید که

$$\frac{1}{BC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} + \frac{1}{CD}$$

- ۷) اگر $-1 = ABCD$ ، و نقطه وسط پاره خط AB باشد، نشان دهید که $DA \cdot DB = DC \cdot DO$.

- ۸) اگر A, B, C, D با همین ترتیب روی یک خط راست قرار داشته باشند، نشان دهید که مکان هندسی نقطه‌ای که پاره خط‌های AB و CD از آن نقطه با زاویه یکسان دیده می‌شوند دایره‌ای است که دو انتهای قطعی از آن دو نقطه‌ای هستند که دو جفت نقطه A, C ؛ B, D ، را به طور همساز تقسیم می‌کنند.

- ۳۵۱) قضیه. اگر $-1 = ABCD$ و نقطه O خارج از خط AB مفروض‌اند، اگر خطی که از B به موازات

رسم می‌شود، OC و OD را به ترتیب در P و Q قطع کند، داریم $PB = BQ$.

با توجه به دو مثلث متشابه OAC و OAD و PCB و QBD (شکل ۹۵) داریم

$$AO : PB = AC : CB \quad , \quad AO : BQ = AD : BD \quad (p)$$

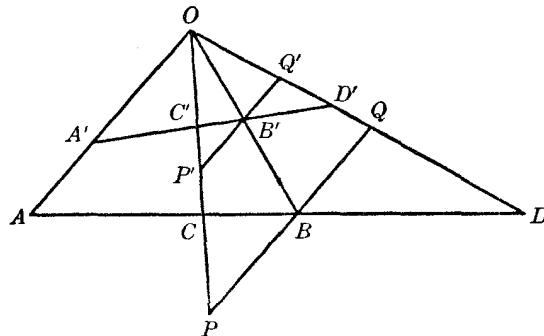
و چون $-1 = ABCD$ ، طرفهای راست این دو تساوی برابرند! پس $PB = BQ$.

- ۳۵۲) قضیه عکس. چهار نقطه همخط A, B, C, D و نقطه O خارج این خط مفروض‌اند. اگر خطی که از B به موازات OA رسم می‌شود، OC و OD را به ترتیب در P و Q قطع کند، و $PB = BQ$ ، آنگاه $(ABCD) = -1$.

- با توجه به مثلثهای متشابه رابطه (p) را داریم، و $PB = BQ$ ، طرفهای چپ تساویهای (p)

برابرند! پس طرفهای راست این تساویها نیز برابرند! و در نتیجه $-1 = ABCD$.

- ۳۵۳) قضیه. اگر $-1 = ABCD$ و نقطه O خارج خط AB مفروض‌اند. هر موربی چهار خط OA, OB, OC و OD را در چهار نقطه همساز قطع می‌کند.



شکل ۹۵

فرض کنید $A'B'C'D'$ (شکل ۹۵) یک مورب باشد و خطوطی که از B و B' به موازات OA رسم می‌شوند، OC را به ترتیب در P ، P' و OD را به ترتیب در Q ، Q' قطع کنند. با توجه به مثلثهای متشابه داریم

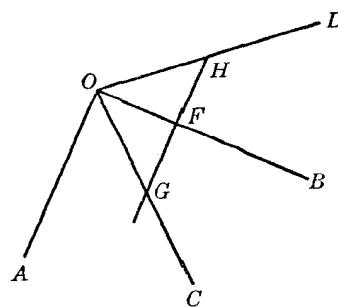
$$PB : P'B' = OB : OB' = BQ : B'Q'$$

حال چون $1 = \frac{AB}{B'C'} = \frac{ABCD}{A'B'C'D'} = -1$ داریم ($ABCD = -1$)، پس $PB = BQ$ و بنابراین، $P'B' = B'Q'$ (§۳۵۱). داریم $(A'B'C'D') = -1$ (§۳۵۲).

۳۵۴. چند تعريف. چهار خط همساز OA ، OB ، OC ، OD را که توسط یک مورب، و در نتیجه توسط هر موربی (§۳۵۳)، در چهار نقطه همساز قطع شوند، یک دسته خط همساز می‌نامیم. هر یک از این چهار خط را یک شعاع، و O را مرکز با رأس این دسته خط همساز می‌نامیم؛ OA و OB را OC و OD را دو شعاع همساز، و OD و OC را مزدوجهای همساز نسبت به OA و OB می‌نامیم، یا می‌گوییم که OC و OD و OA و OB را به صورت همساز تقسیم می‌کنند. دسته خط همساز را غالباً به صورت $O(ABCD)$ ، یا $O(AB, CD)$ نشان می‌دهند.

۳۵۵. قضیه. اگر دو شعاع همساز از یک دسته خط همساز برهم عمود باشند، این دو شعاع نیمسازهای دو زاویه‌ای هستند که توسط دو شعاع دیگر تشکیل می‌شوند.

(شکل ۹۶) مفروض است. فرض کنید یک خط موازی با OA خطوط OB ، OC ، OD را به ترتیب در F ، G ، و H قطع کند. داریم $GF = FH$ (§۳۵۱)، و اگر OA بر OB عمود باشد، مثلث OGH متساوی الساقین است؛ بنابراین قضیه ثابت می‌شود.



شکل ۹۶

۳۵۶. قضیه. اگر $(ABCD) = -1$ و $(A'B'C'D') = -1$ در نقطه‌ای مانند O قطع کنند، DD' از O می‌گذرد.

چون $(ABCD) = -1$ ، نقطه برخورد خط OD با خط $A'B'$ مزدوج همسار C' نسبت به A' و B' است، و بنابراین، بر D' منطبق است؛ پس قضیه ثابت می‌شود.

۳۵۷. نتیجه. اگر $(ABCD) = -1$ و $(AB'C'D') = -1$ ، خطوط AB و AB' دو خط متایران باشند، خطوط BB' ، CC' و DD' هم‌خواهند بود.

تمرین

(۱) مزدوج همسار شعاع OC نسبت به شعاعهای OA و OB را رسم کنید.

(۲) ثابت کنید که در مثلث ABC ، $A(OHII_b) = -1$.

(۳) نشان دهید که روی یک خط در حالت کلی یک نقطه وجود دارد، به طوری که خطوطی که از آن نقطه به دو نقطه مفروض رسم می‌شوند، زاویه‌ای تشکیل دهند که خط مفروض نیمساز آن باشد.

(۴) $(ABCD) = -1$ مفروض است. عمودهایی که در C و D بر CD رسم می‌شوند، موربی را که از A می‌گذرد در P و Q قطع می‌کنند. نشان دهید که AB نیمساز PBQ است.

(۵) ثابت کنید که (الف) خطوطی که از یک نقطه مفروض به موازات چهار خط یک دسته خط همسار رسم می‌شوند، یک دسته خط همسار تشکیل می‌دهند؛ (ب) عمودهایی که از یک نقطه مفروض بر چهار شعاع یک دسته خط همسار رسم می‌شوند، یک دسته خط همسار تشکیل می‌دهند؛ (ج) متقارنهای چهار شعاع یک دسته خط همسار نسبت به یک محور مفروض، یک دسته خط همسار تشکیل می‌دهند. راهنمایی از اصل برهم نهی استفاده کنید.

(۶) نشان دهید خطوطی که نقطه‌ای روی دایره را به دو انتهای وتری از دایره وصل می‌کنند، قطر عمود بر آن وتر را به طور همسار تقسیم می‌کنند.

(۷) در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ ، AE را به موازات BD رسم می‌کنیم؛ نشان دهید که $-1 = A(ECBD)$.

(۸) اگر A' ، B' ، C' و O' نقاط وسط اضلاع مثلث ABC باشند، ثابت کنید که $A'A$ مزدوج همسار $A'C'$ نسبت به $A'B'$ است.

(۹) AD و AA' به ترتیب ارتفاع و میانه مثلث ABC هستند؛ خطوطی که از A' به موازات AB و AC رسم می‌شوند AD را در P و Q قطع می‌کنند؛ نشان دهید که $-1 = A(DPQ)$.

(۱۰) با استفاده از نمادهای متداول که برای مثلث ABC به کار می‌رود، اگر DF پاره خط BE را در K قطع کند، نشان دهید که $-1 = E(BHKE)$ ؛ همچنین اگر EF ضلع BC را در M قطع کند، نشان دهید که $-1 = (BCDM)$.

(۱۱) از یک نقطه مفروض موربی رسم کنید که سه نقطه تلاقی آن با سه خط مفروض (جهه هم‌خواهند باشند، چه نباشند) با نقطه مفروض یک گستره همسار به وجود آورند.

(۱۲) خطی که در نقطه C بر یک دایره مماس می‌شود، امتداد قطر AB را در T قطع می‌کند؛ ثابت کنید که مماس دیگری که از T بر دایره رسم می‌شود توسط CA ، CB و CT و نقطه تماش آن خط با دایره به صورت همسار تقسیم می‌شود.

(۱۳) دایره‌ای که میانه AA' از مثلث ABC قطع آن است دایرة محیطی مثلث را در L قطع می‌کند؛ اگر ارتفاع مثلث باشد، نشان دهید که $-1 = A(LDBC)$.

تمرینهای تکمیلی

(۱) سه نقطه هیخط A , B , و C مفروض‌اند. نقاط A' , B' , و C' طوری رسم شده‌اند که $(CC'AB) = -1$, $(BB'CA) = -1$, $(AA'BC) = -1$, $(C'CA'B') = -1$, $(B'BC'A') = -1$, $(A'AB'C') = -1$.

(۲) دو خط ثابت OX و OY مفروض‌اند. مورب متغیری که از نقطه ثابت A روی OX می‌گزرد OY را در B قطع می‌کند، و دایره (B, BO) خط AB را در C و D قطع می‌کند. نشان دهید مکان هندسی نقطه M , به طوری که $(AMCD) = -1$, یک دایره است.

(۳) دو نقطه متغیر P و Q را روی قاعده BC از مثلث ABC طوری می‌گیریم که $(BCPQ) = -1$. نشان دهید مکان هندسی مرکز دایرة محیطی مثلث APQ یک خط راست است.

(۴) اضلاع AB و AC از مثلث ABC روی خطوطی که از مرکز سه مماس I و I_a به موازات ضلع BC رسم می‌شوند، پاره‌خطهای DE و FG را جدا می‌کنند. نشان دهید که

$$\frac{2}{BC} = \frac{1}{DE} + \frac{1}{FG}$$

(۵) موربی که از رأس A در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ می‌گزرد، قطر BD و اضلاع BC و CD را در نقاط E , F , و G قطع می‌کند. نشان دهید که

$$\frac{1}{AE} = \frac{1}{AF} + \frac{1}{AG}$$

الف. نقاط وارون

۳۵۸. تعريف. دو نقطه همخط با مرکز یک دایره را که حاصل ضرب فاصله‌هایشان از مرکز دایره با مربع شعاع دایره برابر باشد نقاط وارون نسبت به آن دایره، یا برای آن دایره می‌نامند (شکل ۹۷).

دو نقطه وارون در یک طرف مرکز دایره قرار دارند.

از دو نقطه وارون یکی درون دایره و دیگری بیرون دایره قرار دارد.

اگر نقطه‌ای روی دایره در نظر گرفته شود، وارون آن بر خود نقطه منطبق است.

۳۵۹. قضیه. دو نقطه وارون، قطر متاظر را به طور همساز تقسیم می‌کنند، و بر عکس.

فرض کنید P و Q (شکل ۹۷) دو نقطه وارون، و A و B دو سر قطعی باشند که از P و Q می‌گذرد و O مرکز دایره باشد. بنابر فرض، داریم $OP \cdot OQ = OB^2$ ؛ پس $-1 = (ABPQ) = (ABPQ)$ (§۳۴۶).

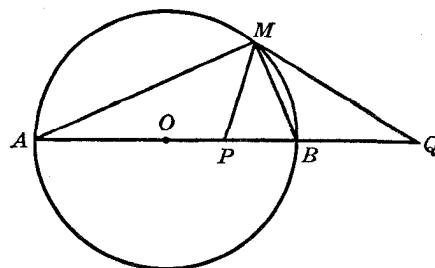
بر عکس، اگر $-1 = (ABPQ)$ ، داریم $OP \cdot OQ = OB^2$ ؛ پس نقاط P و Q نسبت به دایره وارون هستند.

۳۶۰. قضیه. نسبت فاصله‌های یک نقطه متغیر روی دایره از دو نقطه وارون مفروض، مقداری ثابت است.

فرض کنید نقاط وارون P و Q (شکل ۹۷) روی قطر AB قرار داشته باشند. گستره $(ABPQ)$ همساز است (§۳۵۹)، پس $M(ABPQ)$ یک دسته خط همساز است، که در آن M نقطه دلخواهی از دایره است.

$\angle AMB = 90^\circ$ ؛ پس MA و MB نیمسازهای $\angle PMQ$ هستند (§۳۵۵) و بنابراین،

$$MP : MQ = PB : BQ$$



شکل ۹۷

۳۶۱. تعریف. مثلى که رأسهای آن پایی عمودهایی هستند که از یک نقطه مفروض بر اضلاع مثلث مفروضی رسم شده‌اند، مثلث پایی آن نقطه نسبت به مثلث مفروض، یا برای مثلث مفروض نامیده می‌شود.

۳۶۲. قضیه. (الف) مثليهای پایی دو نقطه وارون نسبت به دایره محیطی یک مثلث مفروض نسبت به آن مثلث، متشابه‌اند. (ب) بر عکس، اگر مثليهای پایی دو نقطه نسبت به یک مثلث مفروض متشابه باشند، آن دو نقطه نسبت به دایره محیطی مثلث مفروض وارون یکدیگرند.

فرض کنید DEF و $D'E'F'$ مثليهای پایی دو نقطه P و P' نسبت به مثلث ABC باشند. در دو دایره‌ای که AP و AP' قطرشان هستند دو وتر EF و $E'F'$ (شکل ۹۸) با زاویه یکسان A دیده می‌شوند؛ پس دو مثلث متساوی‌الساقینی که EF و $E'F'$ قاعده آنها، و مراکز دو دایره متناظر رأسهای مقابل قاعده آنها هستند متشابه‌اند. پس،

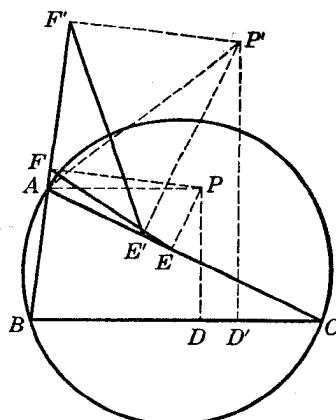
$$EF : E'F' = AP : AP'$$

به طور مشابه،

$$FD : F'D' = BP : BP', DE : D'E' = CP : CP'$$

حال اگر P و P' نسبت به دایره ABC وارون باشند، طرفهای راست این نسبتها برابرند (§۳۶۰)؛ پس طرفهای چپ نیز برابرند، و حکم مستقیم قضیه ثابت می‌شود.

بر عکس، اگر $D'E'F'$ و DEF متشابه باشند، طرفهای چپ این نسبتها برابرند؛ پس طرفهای راست نیز برابرند؛ در نتیجه با توجه به مکان هندسی (§۱۱) نقاط P و P' قطعی از دایره ABC را به طور همساز تقسیم می‌کنند، و عکس قضیه نیز ثابت می‌شود.



شکل ۹۸

تمرین

- ۱) ثابت کنید که دو جفت نقطه وارون نسبت به یک دایره یا همداایره‌اند یا همخطر.
- ۲) از نقطه P خارج از دایره مفروضی به مرکز O دو مماس بر آن دایره رسم می‌شود. نشان دهید که وارون نقطه تلاقی OP با خط واصل میان دو نقطه تمسas، نقطه P است.
- ۳) اگر دایره (B) از A ، مرکز دایره (A) بگذرد، و یک قطر (A) وتر مشترک دو دایره را در F و دایره (B) را مجدداً در G قطع کند، نشان دهید که نقاط F و G نسبت به دایره (A) وارون یکدیگرند.

۴) نشان دهید که (الف) اگر P و Q دو نقطه وارون نسبت به دایره‌ای به مرکز O باشند. و M نقطه دلخواهی از دایره باشد، مثلاً OMQ و OMP متشابه‌اند؛ (ب) اگر R و S دو نقطه وارون دیگر، و همخط باشند، زاویه‌های QMS و PMR برابر باشند.

(۵) نشان دهید که (الف) دو خطی که نقطه دلخواهی از دایره را به دو انتهای وتر دلخواهی از دایره وصل می‌کنند، قطر عمود بر آن وتر را در دو نقطه وارون قطع می‌کنند؛ (ب) دو خطی که از یک نقطه دلخواه روی یک دایره به دو نقطه وارون مفروض نسبت به آن دایره وصل می‌شوند، دایره را در دو انتهای وتری از دایره قطع می‌کنند که بر قطر شامل دو نقطه وارون عمود است؛ (ج) چهارخطی که از دو انتهای یک وتر دایره به دو نقطه وارون مفروض واقع بر قطعی عمود بر آن وتر، رسم می‌شوند، یکدیگر را دوبعد، روی آن دایره قطع می‌کنند.

(۶) اگر P و Q دو نقطه وارون نسبت به یک دایره، و CD وتری عمود بر قطر شامل P و Q باشد، ثابت کنید که پاره خطهای CP و DQ از نقطه دلخواه M بروی دایره با زاویه هایی دیده می شوند که یا برابرند یا ممکن.

ب. داردهای متعامد

۳۶۳. تع. بف. دو داره ا متعامد مه نامه، آگ مه خط المركب بن آنها مجموعه مه شعاعهاشان برای باشد.

۳۶۴ قضیه. (الف) در دو دایره متعامد، دو شعاعی که از یک نقطه مشترک دو دایره می‌گذرند برهم عمودند. (ب) بر عکس، اگر دو شعاعی که از یک نقطه مشترک دو دایره می‌گذرند، برهم عمود باشند، دو دایره متعامدند.

۳۶۵ قضیه. (الف) دو دایره متعامد باشند، دایره‌ای که خط‌المرکزین دو دایره قطر آن است، از نقاط مشترک‌شان می‌گذرد. (ب) بر عکس، اگر دایره‌ای که خط‌المرکزین دو دایره مفروض قطر آن است، از نقاط مشترک دو دایره بگذرد، آن دو دایره متعامدند.

۳۶۶- قضیه. اگر دو دایره متعامد باشند، شعاع یکی از دو دایره که از نقطه مشترک دو دایره می‌گذرد، بر دایره دیگر مماس است.

فرض کنید C یک نقطه مشترک دو دایره متعامد (A) و (B) باشد. مماسی که در C بر (B) رسم شود، بر شعاع BC عمود است؛ پس این مماس بر شعاع AC از دایره (A) منطبق است (§۳۶۴ الف).

۳۶۷- قضیه عکس. دو دایره متقاطع مفروض اند. اگر شعاع یک دایره که از یک نقطه مشترک دو دایره می‌گذارد دایره دوم مماس باشد، آنگاه دو دایره متعامدند.

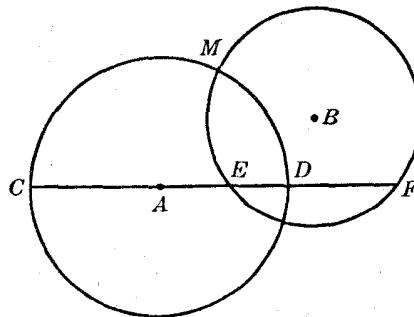
۱۴۳۷- قنوات اگر نهاده دنیا نقطه ای را که آنها که اند که اند دارند داده هم خط باشند،

۱۷۸- قضیه. اگر دو مatrice هر دو مatrice از یکی از آنها، که با ترتیب دیگر، دوم ماتریس باشند، نسبت به دایرۀ دوم وارون‌اند.

فرض کنید (A) و (B) (شکل ۹۹) دو دایره متعامد باشند. فرض کنید E و F دو نقطه (B) ، همخط با A ، مرکز (A) و C و D دو انتهای قطر AEF از دایره (A) باشند.

پس $-CDEF = (CDEF) - 1$ ، و قضیه ثابت می شود (§۳۴۷).

ثابت فرض: دو نقطه E و F از دایره (B) (شکل ۹۹) با A همخطاًند (۳۶۸) و نسبت به (A) متعامدند.



شکل ۹۹

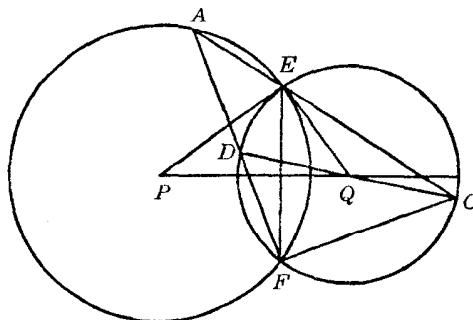
وارون اند؛ بنابراین، $AC^{\top} = AE \cdot AF$ پس $AM^{\top} = AE \cdot AF$ پس بر (B) مماس است؛ در نتیجه دو دایره متعامدند (§۳۶۷).

۳۷۰. نتیجه. اگر $-1 = (ABCD)$ ، دایره‌ای که AB قطر آن است با هر دایره‌ای که از C و D بگذرد متعامد است.

۳۷۱. مسئله. دایره‌ای رسم کنید که از دو نقطه مفروض بگذرد و با دایره مفروضی متعامد باشد. دو نقطه مفروض را A و B ، وارون یکی از آنها، مثلاً A' ، نسبت به دایره مفروض (O) را A' فرض کنید. A ، B و A' دایره مطلوب (S) را تعیین می‌کنند.

مسئله در حالت کلی یک جواب دارد، زیرا B' ، وارون B ، نیز روی (S) قرار دارد (§۳۶۸). اگر نقاط A و B با مرکز دایره (O) همخط包 باشند، مسئله بسته به این که A و B نسبت به (O) وارون هم باشند یا نباشند، یا بی‌نهایت جواب دارد، یا جواب ندارد.

۳۷۲. قضیه. دوخطی که از نقاط برخورد دو دایره متعامد به نقطه‌ای روی یکی از دایره‌ها رسم می‌شوند، دایره دیگر را در دو انتهای قطعی از آن دایره قطع می‌کنند.



شکل ۱۰۰

فرض کنید خطوط EA و FA خطوطی باشند که از E و F ، نقاط برخورد دو دایره متعامد (P) و (Q) ، به نقطه A از (P) رسم شده‌اند، و (Q) را مجدداً در C و D قطع کنند (شکل ۱۰۰)؛ داریم

$$\angle EAF = \frac{1}{2} \angle EPF = \angle EPQ , \quad \angle ECF = \frac{1}{2} \angle EQF = \angle EQP$$

پس،

$$\angle EAF + \angle ECF = \angle EPQ + \angle EQP = 90^\circ$$

بنابراین، زاویه F از مثلث CAF قائم است. پس CD از نقطه F با زاویه قائم دیده می‌شود، و قضیه ثابت شده است.

تمرین

- (۱) دایره‌ای به مرکز نقطه‌ای مفروض رسم کنید که با دایره مفروضی متعامد باشد.
- (۲) نشان دهید اگر نقاط برخورد و مرکز دو دایره، رأسهای یک چهارضلعی محاطی باشند، آنگاه دو دایره متعامدند.
- (۳) دو دایره متقاطع و دو نقطه را، هرکدام روی یکی از دایره‌ها، به طوری که در دو طرف وتر مشترک باشند در نظر بگیرید. نشان دهید اگر مجموع دو زاویه‌ای که وتر مشترک از این نقاط با آن زاویه‌ها دیده می‌شود 90° یا 270° باشد دو دایره متعامدند.
- (۴) دایره‌ای رسم کنید که از نقطه مفروضی بگذرد و با دو دایره مفروض متعامد باشد.
- (۵) نشان دهید که حاصل ضرب شعاعهای دو دایره متعامد برابر است با نصف حاصل ضرب طول وتر مشترک آنها در طول خط‌مرکزین آنها.
- (۶) دایره‌ای متعامد با دایره‌ای مفروض رسم کنید به طوری که یک سوم محیط دایره مفروض درون آن قرار گیرد.
- (الف) سه دایره رسم شده‌اند که رأسهای مثلث مفروض ABC مرکز آنها هستند و دوبهدو متعامدند. شعاع دایره‌ها را بر حسب طول اصلاح مثلث بدست آورید. (ب) نشان دهید که مربع شعاع این دایره‌ها به ترتیب برابرد با $CH \cdot CF$, $BH \cdot BE$, $AH \cdot AD$, و $AH \cdot AH$.
- (۸) نشان دهید که در مثلث ABC (الف) دایره‌هایی که به قطر AH و BC رسم می‌شوند متعامدند؛ (ب) دایره IBC با دایره‌ای که به قطر I_I رسم می‌شود متعامد است.
- (۹) نشان دهید مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که از یک نقطه مفروض می‌گذرند و با دایره مفروضی متعامدند، یک خط راست است.
- (۱۰) نشان دهید که اگر AB قطری از دایره‌ای به مرکز O , و M نقطه دلخواهی از آن دایره باشد، دایره‌های BMO و AMO متعامدند.
- (۱۱) از یک نقطه مفروض خارج از دایره‌ای مفروض قاطعی رسم کنید به طوری که حاصل ضرب فاصله نقاط برخورد آن با دایره از قطری که از نقطه مفروض می‌گذرد مقدار مفروضی باشد.
- (الف) دو قطر عمود برهم از دو دایره متعامد مفروض‌اند. نشان دهید خطهایی که از یک سر یک قطر به دو سر قطر دیگر رسم می‌شوند، از نقاط مشترک دو دایره می‌گذرند؛ (ب) نشان دهید که چهار نقطه انتهایی دو قطر عمود برهم از دو دایره متعامد یک گروه مرکز ارتفاعی تشکیل می‌دهند، و بر عکس.

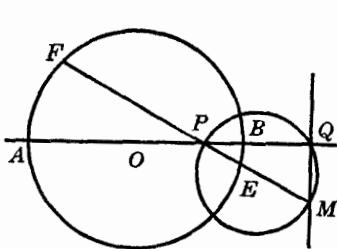
ج. قطب و قطبی

۳۷۳. قضیه. مزدوج همساز یک نقطه ثابت نسبت به دو نقطه متغیر که روی دایره مفروضی قرار دارند و با نقطه ثابت همخط اند، خط راستی را می‌یابند.
- روی دایره مفروض (O) دو نقطه E و F همخط با نقطه ثابت مفروض P در نظر بگیرید (شکل ۱۰۱)
- الف و ب). فرض کنید M مزدوج همساز P نسبت به E و F باشد. اگر AB قطری از دایره (O) باشد که از P می‌گذرد، فرض کنید Q پای عمودی باشد که از M بر قطر AB رسم می‌شود.
- قطر دایرة PMQ است، و دو نقطه E و F خط PM را به طور همساز تقسیم می‌کنند؛ پس

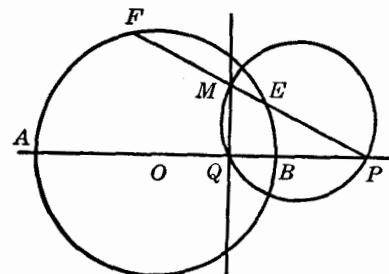
دایره‌های (O) و PQM متعامدند ($\S ۳۶۹$). در نتیجه دو نقطه P و Q که قطر AB از دایره (O) در این نقاط دایره PMQ را قطع می‌کند، نسبت به دایره (O) وارون یکدیگرند، یعنی نقطه Q مستقل از انتخاب دو نقطه E و F روی دایره (O) ، ثابت است؛ به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

۳۷۴. تعریف. خط MQ ($\S ۳۷۳$) را خط قطبی نقطه P نسبت به دایره، یا برای دایره، و نقطه P را قطب خط MQ می‌نامند.

۳۷۵. نتایج. (الف) خط قطبی یک نقطه مفروض نسبت به یک دایره، بر قطرب از دایره که از آن نقطه مفروض می‌گذرد عمود است، و نقطه برحورده وارون آن نقطه نسبت به دایره است.



شکل ۱۰۱ (ب)



شکل ۱۰۱ (الف)

(ب) قطب یک خط مفروض نسبت به یک دایره، وارون پای عمودی است که از مرکز دایره برآن خط رسم می‌شود.

۳۷۶. ملاحظه ۱. خط قطبی یک نقطه از دایره، خطی است که در آن نقطه بر دایره مماس می‌شود، و قطب خط مماس بر دایره، نقطه تماس خط با دایره است.
زیرا وارون یک نقطه واقع بر دایره بر خود آن نقطه منطبق است.

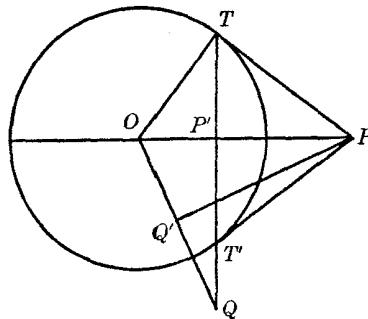
۳۷۷. ملاحظه ۲. هر نقطه‌ای از صفحه یک دایره نسبت به آن دایره یک خط قطبی دارد بهجز مرکز دایره.
هر خطی واقع در صفحه یک دایره، نسبت به آن دایره یک قطب دارد، بهجز خطهایی که از مرکز دایره می‌گذرند.

۳۷۸. ملاحظه ۳. اگر قطب داخل دایره باشد، خط قطبی دایره را قطع نمی‌کند.
اگر قطب خارج دایره باشد. خط قطبی آن خطی است که از نقاط تماس مماسهایی که از آن نقطه بر دایره رسم می‌شوند، می‌گذرد.

در واقع، اگر محل برحورده وتر TT' را، که از دو نقطه تماس می‌گذرد، با قطر OP ، که از قطب P می‌گذرد، P' بنامیم (شکل ۱۰۲)، وارون P نسبت به دایره است، زیرا در مثلث قائم الزاویه OTP داریم $OT' = OP \cdot OP'$.

۳۷۹. قضیه. اگر خط قطبی نقطه P از نقطه Q بگذرد خط قطبی نقطه Q هم از نقطه P خواهد گذشت.
اگر خط PQ دایره را در دو نقطه C و D قطع کند، برقراری قضیه تقریباً روشن است. در واقع اگر خط قطبی نقطه P از Q بگذرد، داریم $(PQCD) = -1$ ($\S ۳۷۳$): پس P مزدوج همساز Q نسبت به C و D است و خط قطبی نقطه Q هم از P خواهد گذشت.

اثبات زیر، چه خط PQ دایره را قطع کند و چه قطع نکند، معتبر است.
دو نقطه P و Q ، و P' و Q' ، وارون آنها نسبت به دایره (O, R) ، چهار نقطه همدایره‌اند، زیرا



شکل ۱۰۲

۳۸۰. قضیه. اگر $OP \cdot OP' = R^2 = OQ \cdot OQ'$ و $PQ'Q = PP'Q$ در چهارضلعی محاطی (شکل ۱۰۲) برابرند. QP' خط قطبی نقطه P است، زیرا از Q وارون P ، یعنی P' ، می‌گذرد. پس $\angle PP'Q = 90^\circ$ و در نتیجه، $\angle PQ'Q = 90^\circ$. پس خط PQ' از وارون Q ، یعنی Q' ، می‌گذرد و برعکس OQ عمود است، یعنی PQ' خط قطبی نقطه Q است (§۳۷۵)، و چون PQ' از P می‌گذرد، قضیه ثابت شده است.

۳۸۱. تعریف. دو نقطه را که خط قطبی یکی از دیگری بگذرد، نقاط مزدوج نسبت به دایره می‌نامند. هر نقطه مفروض، بینهایت نقطه مزدوج دارد، که عبارت‌اند از همه نقاط واقع بر خط قطبی آن نقطه. اگر دو نقطه مزدوج با مرکز دایره همخط باشند، آنگاه نسبت به دایره وارون یکدیگرند.

۳۸۲. تعریف. اگر قطب خط p روی خط q باشد، آنگاه قطب خط q نیز روی خط p قرار دارد. فرض کنید P و Q به ترتیب قطب‌های دو خط p و q باشند. بنابر فرض، P روی q است، یعنی خط قطبی Q از نقطه P می‌گذرد؛ پس (§۳۷۹) خط قطبی P ، یعنی خط p ، نیز از Q می‌گذرد.

۳۸۳. تعریف. دو خط را که قطب هریک روی دیگری قرار دارد خطوط مزدوج نسبت به دایره می‌نامند. هر خط مفروض، بینهایت خط مزدوج دارد، که عبارت‌اند از همه خطوطی که از قطب آن خط مفروض می‌گذرند.

۳۸۴. قضیه. (الف) خط‌های قطبی همه نقاط یک خط مفروض، از نقطه ثابتی، که قطب خط مفروض است، می‌گذرند. (ب) قطب‌های همه خطوطی که از یک نقطه مفروض می‌گذرند، روی یک خط راست، که خط قطبی نقطه مفروض است، قرار دارند.

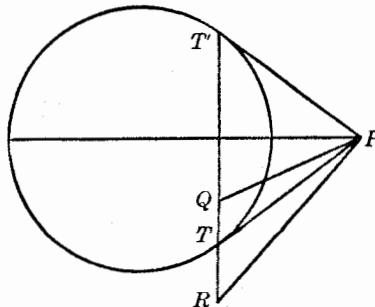
۳۸۵. نتیجه. (الف) قطب هر خط نقطه برخورد خط‌های قطبی دو نقطه از آن خط است.

(ب) خط قطبی هر نقطه خطی است که از قطب‌های دو خط گذرنده از آن نقطه، می‌گذرد.

۳۸۶. قضیه. اگر دو خط مزدوج یکدیگر را خارج از دایره قطع کنند، این دو خط نسبت به دو مماسی که از نقطه تلاقی آنها بر دایره رسم می‌شوند، مزدوج همسازند.

فرض کنید دو خط مزدوج PQ و PR را در Q و R قطع کنند (شکل ۱۰۳)، که T و T' نقاط تمسیح‌ای هستند که از P بر دایره رسم می‌شوند. قطب PR روی PQ (§۳۸۲) و روی خط قطبی P ، $TT'QR$ (§۳۷۹) قرار دارد، زیرا PR از P می‌گذرد؛ بنابرین، Q قطب PR است. پس $-1 = (TT'QR)$ یک دسته خط همساز است.

۳۸۷. قضیه. اگر دو دایره متعامد باشند، دو نقطه انتهای هر قطعی از یک دایره نسبت به دایره دیگر مزدوج‌اند.

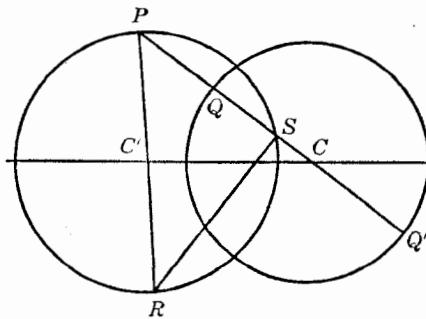


شکل ۱۰۳

خط PC (شکل ۱۰۴) که از P به مرکز دایره (C) رسم می‌شود، (C') را مجدداً در وارون P نسبت به (C) ، یعنی نقطه S قطع می‌کند (§۳۶۸)؛ پس خط قطبی P نسبت به (C) در S بر PC عمود است و (C') را مجدداً در R که انتهای دیگر قطری از (C') است که از P می‌گذرد، قطع می‌کند.

۳۸۷. قضیه عکس. اگر دو نقطه انتهاهی قطری از یک دایره نسبت به دایره‌ای دیگر مزدوج باشند، آن دو دایره متعامدند.

بنابر فرض، خط قطبی P نسبت به (C) از نقطه R می‌گذرد (شکل ۱۰۴) و همچنین، بر PC عمود است (§۳۷۵)؛ پس این خط قطبی بر RS منطبق است، یعنی S وارون P نسبت به (C) است (§۳۷۵). در نتیجه دو دایره متعامدند (§۳۶۹).



شکل ۱۰۴

۳۸۸. تعریف. یک مثلث را نسبت به یک دایره خود مزدوج یا مزدوج، یا خود قطبی یا قطبی می‌نامند اگر هر ضلع مثلث خط قطبی رأس مقابل آن ضلع باشد.

بسادگی می‌توان دید که با مفروض بودن دایره (O) بی‌نهایت مثلث از این نوع را می‌توان رسم کرد. فرض کنید P نقطه لخواهی از صفحه، Q نقطه لخواهی روی خط p ، یعنی خط قطبی P نسبت به (O) باشد؛ q ، یعنی خط قطبی Q نیز از P می‌گذرد (§۳۷۹) و p را در رأس سوم مثلث مطلوب PQR ، یعنی R ، قطع می‌کند. دو خط RQ و RP به ترتیب خطهای قطبی P و Q هستند، و قطب R بر p منطبق است (الف).

۳۸۹. ملاحظه. از سه رأس یک مثلث قطبی، یکی داخل دایره و دو رأس دیگر خارج دایره قرار دارند. اگر رأس P از مثلث PQR ، که نسبت به دایره (O) قطبی است، داخل (O) باشد، دو رأس دیگر

و R روی خط قطبی P ، و بنابراین خارج دایرة (O) قرار داردن (§۳۷۸). اگر P را خارج (O) بگیریم، خط قطبی P دایرة (O) را در دو نقطه مانند E و F ، قطع می‌کند (§۳۷۸). رأسهای Q و R نسبت به (O) مزدوج‌اند؛ بنابراین توسط E و F به صورت همساز تقسیم می‌شوند، و در نتیجه، یکی از آنها داخل و دیگری خارج دایرة (O) قرار دارد.

۳۹۰. قضیه. اگر مثلث نسبت به یک دایرة قطبی باشد، مرکز دایرة بر مرکز ارتقای مثلث منطبق است. اگر مثلث PQR نسبت به دایرة (O) قطبی باشد، عمودهایی که از P ، Q ، و R بر خطوط قطبی این نقاط، یعنی PQ ، QR و RP رسم می‌شوند از مرکز (O) می‌گذرند (§۳۷۵)؛ پس قضیه ثابت شده است.

۳۹۱. مسئله. مثلثی مفروض است. دایره‌ای رسم کنید که مثلث نسبت به آن قطبی باشد. مرکز دایرة مطلوب باید بر مرکز ارتقای مثلث مفروض ABC منطبق باشد (§۳۹۰)؛ این نقطه را H می‌نامیم. رأس A و پای ارتقای گزرنده از A ، یعنی D ، دو نقطه وارون نسبت به دایرة مطلوب‌اند؛ به همین ترتیب، B و E و C و F نقاط وارون نسبت به این دایره‌اند؛ پس مربع شعاع دایرة مطلوب باید با هریک از حاصل ضربهای زیر برابر باشد:

$$HA \cdot HD, \quad HB \cdot HE, \quad HC \cdot HF \quad (1)$$

و این حاصل ضربهای در هر مثلثی برابرند (§۱۷۲). ولی نقاط وارون A و D ؛ B و E ؛ C و F باید در یک طرف H ، یعنی مرکز دایرة مطلوب باشند (§۳۵۸)، و این شرط تنها در صورتی برقرار می‌شود که زاویه ABC زاویه منفرجه داشته باشد.

پس اگر هر سه زاویه مثلث ABC حاده باشند، مسئله جواب ندارد. اگر مثلث ABC زاویه منفرجه داشته باشد، مسئله یک جواب منحصر به فرد دارد، مرکز دایرة مطلوب (H) مرکز ارتقای مثلث ABC است و مربع شعاع (H) با هریک از حاصل ضربهای (۱) برابر است.

۳۹۲. تعریف. دایرة (H) را دایرة قطبی، یا دایرة مزدوج مثلث ABC می‌نامند.

تمرین

۱) نشان دهید زاویه بین دو خط برابر است با زاویه‌ای که پاره خط واصل بین قطبهای آنها نسبت به یک دایرة مفروض، از مرکز آن دایرة با آن زاویه دیده می‌شود.

۲) نشان دهید مکان هندسی نقطه‌ای که خطهای قطبی آن نسبت به دو دایرة مفروض برهم عمودند، دایره‌ای است که خط‌المرکزین دو دایرة قطر آن است.

۳) (الف) TQ و TP در دو انتهای وتر PQ از یک دایرة برآن دایره مماس‌اند. خطی که در نقطه دلخواه R بر دایرة مماس است، PQ را در S قطع می‌کند؛ ثابت کنید که TR خط قطبی S است. (ب) دو نقطه ثابت R و S مفروض‌اند؛ دایرة دلخواه (O) را طوری رسم می‌کنیم که در RS بر RS مماس باشد، و از S قاطع دلخواه رسم می‌کنیم تا (O) را در P و Q قطع کند. اگر مماسهایی که در P و Q بر (O) رسم می‌شوند خط RS را در U و V قطع کنند، نشان دهید که $\frac{1}{RU} + \frac{1}{RV}$ مقداری ثابت، مستقل از دایرة (O) و قاطع RSQ است.

۴) اگر خطهای قطبی رأسهای مثلث (P) نسبت به دایرة (O) اضلاع مثلث (Q) باشند، نشان دهید که خطهای قطبی رأسهای مثلث (Q) نسبت به دایرة (O) ، اضلاع مثلث (P) هستند.

۵) از یک نقطه مفروض خطی رسم کنید که از مرکز دور از دسترس دایره‌ای مفروض بگذرد.

- (۶) دایرة متعارفی از نقطه ثابت C می‌گذرد، و دو نقطه ثابت H و K نسبت به دایره مزدوج آند؛ نشان دهید مرکز دایره روی خط راستی قرار دارد که بر خط و اصل بین C و نقطه وسط پاره خط HK عمود است.
- (۷) روی یک خط مفروض دو نقطه بباید که از نقطه مفروضی روی آن خط همفاصله، و نسبت به دایرة مفروضی مزدوج باشند.
- (۸) نشان دهید که (الف) دو قطب و تر مشترک دو دایرة متعارف نسبت به این دایرهها بر مراکز این دو دایره منطبق اند؛ (ب) اگر AB و CD دو پاره خط همساز باشند، مزدوج همساز نقطه وسط AB نسبت به CD بر مزدوج همساز نقطه وسط AB نسبت به CD منطبق است.
- (۹) نشان دهید که دایرة قطبی یک مثلث، اضلاع مثلث را به صورت همساز قطع می‌کند.
- (۱۰) ثابت کنید قطب خطی که از دو نقطه مزدوج می‌گذرد، مرکز ارتقاعی مثلثی است که این دو نقطه مفروض و مرکز دایره رأسهای آن هستند.
- (۱۱) X نقطه دلخواهی روی ضلع BC از مثلث ABC است. نشان دهید دایره‌ای که AX قطر آن است با دایرة قطبی مثلث متعارف است.
- (۱۲) خطی دو دایره را در چهار نقطه قطع می‌کند. روی این خط دو نقطه بباید، به طوری که هر کدام نقطه برخورد دو خط قطبی نقطه دیگر نسبت به دو دایرة مفروض باشد.
- (۱۳) بی‌نهایت مثلث می‌توان رسم کرد که نسبت به یک دایرة مفروض قطبی باشد و نقطه مفروضی رأس مشترک همه آنها باشد. نشان دهید که (الف) مرکز نقل این مثلثها روی یک خط راست قرار دارد؛ (ب) مرکز ارتقاعی این مثلثها نقطه ثابتی است؛ (ج) مراکز دایره‌های محیطی آنها روی یک خط ثابت قرار دارد.
- (۱۴) AB و CD دو وتر از یک دایره و P و Q نقاط وسط این وترها هستند. ثابت کنید که اگر AB نیمساز زاویه CPD باشد، آنگاه CD نیمساز زاویه AQB است.
- (۱۵) تصویر نقطه M واقع بر دایرة مفروض (O) روی دو قطر عمود بهم $\|\text{u}$ و v ، به ترتیب، نقاط A و B هستند. قطب خط AB نسبت به دایرة (O) را بر u و v تصویر می‌کنیم. نشان دهید خطی که از این دو تصویر می‌گذرد بر دایره مماس است.
- (۱۶) P و Q دو نقطه دلخواه هستند و PM و QN عمودهایی هستند که از هر کدام بر خط قطبی دیگری $OP : PM = OQ : QN$ نسبت به دایره‌ای به مرکز O رسم می‌شوند، نشان دهید که

تمرینهای تكمیلی

- (۱) نشان دهید که (الف) دو خطی که در نقاط برخورد عمود منصف یک ضلع مثلثی با دو ضلع دیگر مثلث براین عمود منصف عمود می‌شوند، از رأسهای مثلث مماسی مثلث مفروض می‌گذرند؛ (ب) خط اضلاع XY و XZ را در دو نقطه P و Q که نسبت به دایرة محاطی داخلی $XYZ = XYI$ بکدیگرند قطع می‌کند و عمودهایی که در P و Q بر AI رسم می‌شوند از دو رأس B و C از مثلث مفروض می‌گذرند.
- (۲) عمودهایی از مرکز ارتقاعی یک مثلث بر خطهایی که رأسهای مثلث را به نقطه مفروضی وصل می‌کنند رسم می‌کنیم؛ نشان دهید سه نقطه‌ای که از تقاطع هر یک از این عمودها با ضلع روبروی رأس متناظر آن عمود حاصل می‌شوند همخاطاند.
- (۳) از هر رأس یک مثلث عمودی بر خطی که وسط ضلع مقابل این رأس را به مرکز ارتقاعی مثلث وصل می‌کند رسم می‌کنیم تا این ضلع را قطع کند. نشان دهید سه نقطه بدست آمده روی خط راستی عمود

بر خط اوپلر مثلث قرار دارند.

(۴) نشان دهد عمودهایی که در مرکز دایرة محاطی داخلی مثلث بر سه نیمساز داخلی این مثلث رسم می‌شوند، اضلاع متاظر را در سه نقطه روی خطی که بر خط و اصل بین مرکز دایرة محاطی و مرکز دایرة محاطی داخلی مثلث عمود است قطع می‌کنند.

(۵) A' , B' و C' نقاط برخورد موربی با اضلاع CA , BC , و AB از مثلث ABC , و H مرکز ارتقای این مثلث است. ثابت کنید عمودهایی که از A , B , و C به ترتیب بر خطوط HA' , HB' و HC' رسم می‌شوند هرمس‌اند، و نقطه برخوردشان روی عمودی واقع است که از H بر $A'B'C'$ رسم می‌شود.

(۶) نشان دهد که خطوط قطبی یک گستره همساز، یک دسته خط همساز تشکیل می‌دهند، و بر عکس.

(۷) DC و DB مماسهایی بر دایرة محاطی (O) از مثلث ABC هستند. از نقطه برخورد این دو مماس خطی به موازات خطی که از A بر (O) مماس است رسم می‌کنیم. نشان دهد که اگر این خط AB را در E و F قطع کند، D و سطح AC است.

(۸) (الف) دایرة (P) در نقاط E و F بر اضلاع AB و AC از مثلث ABC مماس است. نشان دهد خط EF ، عمودی که از P , مرکز دایرة (P), بر BC رسم می‌شود، و میانه‌ای از مثلث ABC که از رأس A می‌گذرد، هم‌س‌اند؛ (ب) X , Y , Z_a , X_a , Y_a , Z نقاط تماس اضلاع CA , BC و AB از مثلث ABC به ترتیب با دایرة محاطی داخلی (I) و دایرة محاطی خارجی (I_a) هستند. نشان دهد که نقاط برخورد YZ با دو ساع IX و $I_a X_a$ و رأس A , و همچنین نقاط برخورد $Y_a Z_a$ با دو ساع $I_a X_a$ و IX و سطح ضلع BC , همخط‌اند.

د. مرکز تشابه

۳۹۳. مسئله عکس. با مفروض بودن یک دایره، یک مرکز تجانس و یک نسبت تجانس، دایره‌ای متتجانس با دایرة مفروض رسم کردیم (§۴۷). دیدیم که نسبت ساعهای دو دایره با نسبت تجانس مفروض برابر است. و مرکز تجانس خط‌المرکزین را به نسبت مفروض تقسیم می‌کنند.

اکنون مسئله عکس را در نظر می‌گیریم. دو دایرة (A) و (B) مفروض‌اند (شکل ۱۰۵)؛ نقطه M و نسبت k را طوری بیایید که (B) متاظر (A) در تجانس (M, k) باشد.

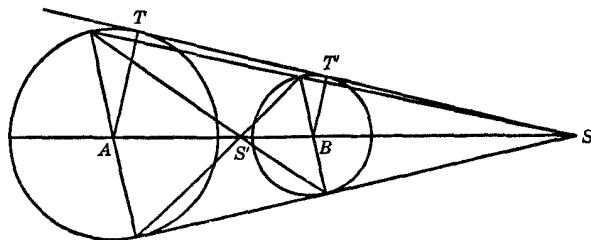
از ویژگیهایی که یادآوری کردیم توجه می‌شود که k باید با نسبت $b : a$ برابر باشد که a و b به ترتیب ساعهای دو دایرة مفروض (A) و (B) هستند؛ همچنین M باید بر یکی از دو نقطه S و S' , که خط‌المرکزین دو دایره را به طور داخلی و خارجی به نسبت $a : b$ تقسیم می‌کنند، منطبق باشد. از طرف دیگر، روش است که در هر یک از دو تجانس ($b : a$) و ($b : a$, $-a$) دایرة متاظر (A) بر (B) منطبق است. پس: دو دایره به دو صورت و فقط به دو صورت متتجانس‌اند.

۳۹۴. چند تعریف. نقطه S (§۳۹۳) را مرکز تشابه خارجی یا مستقیم، و نقطه S' را مرکز تشابه داخلی یا غیرمستقیم دو دایره می‌نامند.

مرکز تشابه خارجی با دو انتهای هردو ساع موازی هم‌جهت در دو دایره، یعنی ساعهایی از دو دایره که موازی و هر دو در یک طرف خط‌المرکزین دو دایره باشند، همخط است. مرکز تشابه داخلی با دو انتهای هردو ساع موازی مختلف‌الجهت، یعنی ساعهایی در دو دایره که موازی و در دو طرف خط‌المرکزین باشند، همخط است.

مراکز دو دایره و دو مرکز تشابه این دو دایره دو جفت نقطه همسازند.

۳۹۵. ملاحظه. (الف) اگر دو دایره برهم مماس باشند، آنگاه نقطه تماسشان یک مرکز تشابه دو دایره است.



شکل ۱۰۵

(ب) دو دایره برابر تنها یک مرکز تشابه دارند، که نقطه وسط خط‌المرکزین آنهاست.

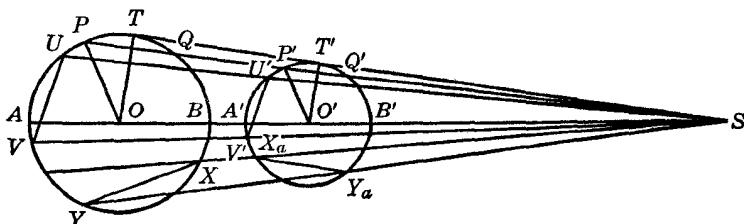
(ج) اگر دو دایره هم مرکز باشند، مرکز مشترکشان تنها مرکز تشابه آنهاست.

۳۹۶. قضیه. (الف) اگر دو دایره مماسهای مشترک خارجی داشته باشد، این مماسها از مرکز تشابه خارجی آن دو دایره می‌گذرند (شکل ۱۰۵).

(ب) اگر دو دایره مماسهای مشترک داخلی داشته باشد، این مماسها از مرکز تشابه داخلی آن دو دایره می‌گذرند.

زیرا در هریک از این دو حالت، مماس مشترک از دو انتهای دو شعاع موازی می‌گذرد.

۳۹۷. چندتعریف. (الف) فرض کنید خطی که از یکی از دو مرکز تشابه دو دایره (O) و (O')، مثلاً مرکز تشابه خارجی S ، می‌گذرد (شکل ۱۰۶) دایره (O) را در P و Q و دایره (O') را در P' و Q' قطع کند. چون S مرکز تجانس دو دایره است، برای هر نقطه P از (O) یک نقطه متناظر از (O')، مثلاً P' وجود دارد به طوری که $OP = O'P'$ موازی‌اند. نقاط P و P' را نقطات همتا روی دایره، نسبت به مرکز تجانس S می‌نامند. Q و Q' نیز دو نقطه همتا روی دو دایره نسبت به S هستند.



شکل ۱۰۶

فرض کنید U و V دو نقطه دلخواه روی (O) و U' و V' به ترتیب، نقاط همتای این دو نقطه نسبت به یک مرکز تشابه باشند، وترهای UV و $U'V'$ را وترهای همتا در دو دایره می‌نامند.

دو وتر همتا موازی‌اند، زیرا دو خط متناظر از دو شکل متجلانس‌اند، مگر اینکه هردو روی خطی که از مرکز تشابه می‌گذرد قرار داشته باشند، مثل وترهای PQ و $P'Q'$ (شکل ۱۰۶).

(ب) دو نقطه از دو دایره را که با یک مرکز تشابه دو دایره همخط باشند، ولی شعاعهایی که از این دو نقطه می‌گذرند موازی نباشند، دو نقطه پاد همتا نسبت به مرکز تشابه در نظر گرفته شده، می‌نامند؛ پس در شکل ۱۰۶، دو نقطه P و Q' ، و دو نقطه P' و Q نسبت به S پاد همتا هستند.

اگر X و Y دو نقطه از دایره (O)، و X_a و Y_a نقاط پاد همتای آنها، روی دایره (O') نسبت به یک مرکز تشابه باشند، دو وترهای XY و Y_aX_a را وترهای پاد همتا در دو دایره، نسبت به مرکز تشابه در نظر گرفته شده، می‌نامند. اگر دو دایره متقاطع باشند، در هر نقطه مشترک دو دایره دو نقطه پاد همتا از دو دایره برهم منطبق‌اند.

۳۹۸. قضیه. قاطعی که از مرکز تشابه دو دایره می‌گذرد، این دو دایره را در دو جفت نقطه همتا قطع می‌کند هر جفت از این نقاط همتا پاره خطی را تعیین می‌کنند؛ حاصل ضرب این دو پاره خط مقدار ثابتی است.

داریم (شکل ۱۰۶)

$$\frac{SP}{SA} = \frac{SP'}{SA'} = \frac{SP - SP'}{SA - SA'} = \frac{PP'}{AA'}$$

و به طور مشابه،

$$SQ : SB = QQ' : BB'$$

پس با ضرب کردن به دست می‌آوریم

$$\frac{SP \cdot SQ}{SA \cdot SB} = \frac{PP' \cdot QQ'}{AA' \cdot BB'}$$

چون سمت چپ این تساوی برابر یک است، پس

$$PP' \cdot QQ' = AA' \cdot BB' \quad (1)$$

چون طرف راست تساوی رابطه (1) به قاطع SPP' بستگی ندارد، قضیه ثابت شده است.

۳۹۹ ملاحظه. اگر دایره‌ها مماس مشترکی داشته باشند که از S بگذرد و در نقطه T و T' بر دایره‌ها مماس باشد، می‌توانیم مماس STT' را به عنوان وضعیت حدی قاطع SP ، وقتی دو پاره خط PP' و QQ' بر پاره خط TT' منطبق می‌شوند در نظر بگیریم؛ پس،

$$TT'^\ddagger = PP' \cdot QQ'$$

این رابطه را می‌توان، مانند رابطه (1) به طور مستقیم هم به دست آورد.

۴۰۰ قضیه. حاصل ضرب فواصل بک مرکز تشابه دو دایره از دو نقطه پاد همتا نسبت به آن مرکز تشابه، مقداری ثابت است.

داریم (شکل ۱۰۶)

$$SP \cdot SQ' = SP' \cdot SQ \quad \text{یا} \quad SP : SP' = SQ : SQ'$$

از طرف دیگر، داریم

$$SP \cdot SQ = SA \cdot SB, \quad SP' \cdot SQ' = SA' \cdot SB'$$

پس،

$$SA \cdot SB \cdot SA' \cdot SB' = SP \cdot SQ \cdot SP' \cdot SQ' = SP^\ddagger \cdot SQ'^\ddagger$$

چون طرف چپ این تساوی به دو نقطه پاد همتای برگزیده شده P و Q' بستگی ندارد، قضیه ثابت شده است.

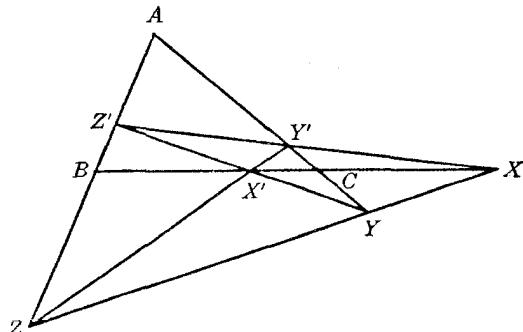
۴۰۱. نتیجه. هر دو جفت نقطه پاد همتا نسبت به یک مرکز تشابه، یا همخطاند یا همدایره.

۴۰۲. تعریف. دایره‌ای که دو مرکز تشابه دو دایره دو سر یک قطر آن هستند، دایره تشابه دو دایره نامیده می‌شود.

۴۰۳. قضیه. نسبت فاصله‌های هر نقطه دایره تشابه دو دایره مفروض از مرکز این دو دایره با نسبت شعاع‌های این دو دایره برابر است.

مراکز تشابه، خط‌المرکزین دو دایره مفروض را به نسبت شعاع‌های این دو دایره تقسیم می‌کنند (§۳۹۳)؛ پس قضیه ثابت شده است (مکان هندسی ۱۱، §۱۱).

۴۰۴. نتیجه. دایره تشابه دو دایره متقاطع از نقاط مشترک این دو دایره می‌گذرد.
 ۴۰۵. قضیه. اگر سه دایره را در نظر بگیریم، شش مرکز تشابه به دست می‌آوریم که سه‌به‌سه روی چهار خط راست قرار دارند.



شکل ۱۰۷

فرض کنید X ، Y ، و Z به ترتیب مراکز تشابه خارجی دایره‌های مفروض (B, b) و (C, c) و (A, a) و (A', a') و (B', b') نیز به ترتیب مراکز تشابه داخلی این دایره‌ها باشند (شکل ۱۰۷). داریم (§۳۹۳)

$$BX : CX = b : c, \quad CY : AY = c : a, \quad AZ : BZ = a : b$$

پس،

$$BX \cdot CY \cdot AZ = CX \cdot AY \cdot BZ$$

بنابراین، X ، Y ، و Z همخطاطاند (§۳۱۳).
 به همین ترتیب می‌توان نشان داد که سه نقطه X ، Y' ، Z' ؛ سه نقطه Y ، Z' ، X' ؛ و سه نقطه Z ، X' ، Y' نیز همخطاطاند.

۴۰۶. تعریف. چهار خطی که شش مرکز تشابه روی آنها قرار دارند (§۴۰۵) محورهای تشابه، یا محورهای تجانس سه دایره مفروض نامیده می‌شوند.

۴۰۷. نتیجه. خطی که از دو مرکز تشابه سه دایره بگذرد، از یک مرکز تشابه دیگر هم می‌گذرد.
 ۴۰۸. تعریف. می‌گوییم یک دایره به دو دایره مفروض به یک شیوه مماس است، اگر هر دو تماس داخلی یا هر دو تماس خارجی باشد. در این صورت، می‌گوییم تماسها همانندند.
 می‌گوییم یک دایره به دو دایره مفروض به شیوه‌های مختلف مماس است اگر یک تماس داخلی و یک تماس خارجی باشد. در این صورت، می‌گوییم تماسها ناهمانندند.

۴۰۹. قضیه. اگر یک دایره بر دو دایره مفروض مماس باشد، نقاط تماس، نقاط پادهمتا در این دو دایره مفروض‌اند.

اگر U و V نقاط تماس دایرة (M) به ترتیب، با دو دایرة (A) و (B) باشند، مرکز تشابه دایره‌های

(M) و V مرکز تشابه دایره‌های (M) و (B) (الف) است؛ پس خط UV از یک مرکز تشابه دایره‌های (A) و (B) می‌گذرد (۴۰۷). خط UV، بسته به اینکه نقاط تماس U و V همانند یا ناهمانند باشند (۴۰۸) از مرکز تشابه خارجی، یا داخلی، دایره‌های (A) و (B) می‌گذرد.

تمرین

- ۱) نشان دهید هر دایره‌ای که از مراکز دو دایرة مفروض بگذرد، با دایرة تشابه این دو دایرة مفروض متعامد است.
- ۲) نشان دهید مماسهایی که در یک نقطه برخورد دو دایره بر آن دو دایره رسم می‌شوند از هر دو مرکز تشابه دو دایره هم‌فاصله‌اند.
- ۳) (الف) نشان دهید که مرکز تقل و مرکز ارتقایی هر مثلث مراکز تشابه دایرة محیطی و دایرة نه نقطه آن مثلث هستند؛ (ب) نشان دهید که مرکز دایرة محاطی داخلی هر مثلث یک مرکز تشابه دایرة محیطی مثلث و دایره‌ای است که از مراکز سه مماس خارجی مثلث می‌گذرد.
- ۴) از یک نقطه مفروض خطی رسم کنید که نسبت دو پاره‌خطی که دو دایرة مفروض روی آن جدا می‌کنند با نسبت شعاعهای دو دایره برابر باشد.
- ۵) دو دایره (E) و (F) در نقطه A؛ دو دایرة (F) و (D) در نقطه B؛ دو دایرة (D) و (E) در نقطه PQ برهم مماس‌اند. دو خط BA و BC دایرة (E) را مجدداً در P و Q قطع می‌کنند. نشان دهید که DF از مرکز دایرة (E) می‌گذرد و با DF موازی است.
- ۶) نشان دهید دوازده مرکز تشابه چهار دایرة سه مماس یک مثلث که دویه‌دو در نظر گرفته شوند، عبارت‌اند از (الف) شش نقطه برخورد اضلاع مثلث با نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه‌های مقابل این ضلعها؛ و (ب) رأسهای مثلث مفروض که هر کدام دوبار به حساب می‌آیند.
- ۷) نشان دهید دایره‌ای که قطر آن نیمساز داخلی یک زاویه مثلث مفروضی است، دایرة تشابه دایرة محاطی داخلی و دایرة محاطی خارجی متناظر با آن نیمساز مثلث است. دایرة تشابه دو دایرة محاطی خارجی مثلث را بایابید.
- ۸) ضلع BC از مثلث ABC در X بر دایرة محاطی داخلی (I) و در X_1 بر دایرة محاطی خارجی نسبت به BC، یعنی (I_1) مماس است. نشان دهید خط X_1X از روپروری قطری X در دایرة (I)، که آن را X' می‌نامیم، می‌گذرد. گزاره مشابهی را در مورد روپروری قطری X_1 در (I) بیان کنید.
- ۹) (الف) با استفاده از نمادهایی که در مسئله قبل به کار برده شد، نشان دهید که اگر خط $A'I$ ارتفاع AD از مثلث ABC را در P قطع کند، آنگاه AP با شعاع دایرة محاطی داخلی ABC برابر است. گزاره مشابهی را برای دایرة محاطی خارجی بیان و اثبات کنید. (ب) اگر عمودی که از A' بر AI رسم می‌شود، AD را در Q قطع کند، نشان دهید که از A' بر QX عمود است.
- ۱۰) با استفاده از همان نمادهایی به کار رفته در تمرین قبل، نشان دهید که X مرکز تشابه خارجی دایرة محاطی داخلی و دایره‌ای است که ارتفاع AD قطع آن است.
- ۱۱) با استفاده از همان نمادهایی به کار رفته در تمرین قبل، نشان دهید مماس دومی که از A' بر (I) رسم می‌شود، مماسی که در X' بر (I) رسم می‌شود، و خط YZ که نقاط تماس (I) با BA و CA را به هم وصل می‌کند، هم‌اند. گزاره مشابهی را برای (I_1) بیان و اثبات کنید.
- ۱۲) با استفاده از نمادهایی به کار رفته در تمرین قبل، نشان دهید که اگر خطوطی که از B و C به موازات X_1X باشند، هم‌اند. گزاره مشابهی را برای (I_1) بیان و اثبات کنید.

تمرینیای تکمیل

- ۱) اگر PQ قطر متغیری از یک دایره به مرکز A باشد، و B و C دو نقطه ثابت همخط با A باشند، نشان دهید که مکان هندسی نقطه $M = (CP, BQ)$ یک دایره است.
- ۲) خطی رسم کنید که فاصله‌هایش از سه رأس یک مثلث مفروض، با سه پاره خط مفروض p, q ، و r متناسب باشند.
- ۳) دو مماس مشترک خارجی دایره‌های ABC و DEF هستند؛ و BE یکی از مماسهای مشترک داخلی آنهاست. قطراهایی که از B و E می‌گذرند، AC و DF را به ترتیب در G و H قطع می‌کنند. نشان دهید که GH از وسط BE می‌گذرد. نشان دهید که اگر جای «مماسهای خارجی» و «مماسهای داخلی» را عوض کنیم، باز هم گزاره فوق برقرار است.
- ۴) دایره (O') از مرکز دایره (O) می‌گذرد. مماسهای مشترک دو دایره در نقاط A و B بر (O') مماس‌اند. نشان دهید که AB بر (O) مماس است.
- ۵) نشان دهید پاره خطی که انتهای دو شعاع موازی دو دایره را به هم وصل می‌کند، از دو نقطه تلاقی دو دایره با زاویه ثابتی دیده می‌شود.

۵. قوت یک نقطه نسبت به یک دایره

۴۱۰. قضیه. نقطه مفروضی را در داخل یا در بیرون دایره‌ای مفروض در نظر می‌گیریم. در هر حالت حاصل ضرب فاصله‌های این نقطه مفروض از دو نقطه همخط با آن که بر روی دایره واقع باشند، مقدار ثابتی است.

فرض کنید E و F دو نقطه از دایره مفروض (O) همخط با نقطه مفروض L باشند (شکلهای ۱۰۸ الف و ب)، و A و B دو سر قطربازی از (O) باشند که از L می‌گذرد. دو مثلث LBE و LAF همزاویه، و در نتیجه، متشابه‌اند؛ پس،

$$LE \cdot LF = LA \cdot LB \quad \text{یا} \quad LA : LF = LE : LB$$

طرف راست تساوی دوم به نقاط E و F بستگی ندارد؛ بنابراین، قضیه ثابت شده است.

۴۱۱. ملاحظه. اگر L بیرون دایره (O) ، و T نقطه تمسیح مماسی باشد که از L بر (O) رسم می‌شود (شکل ۱۰۸ ب) به سادگی می‌توان نشان داد که $LE \cdot LF = LT^2$.

۴۱۲. تعریف. مقدار ثابت بیان شده در ۴۱۰، قوت نقطه نسبت به دایره، یا برای دایره، نامیده می‌شود.

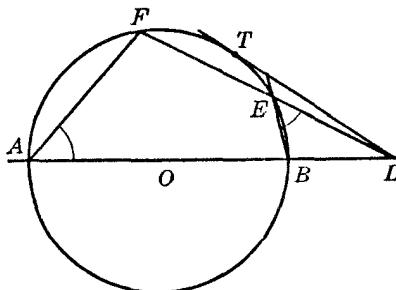
۴۱۳. نتیجه. اگر $OA = OB = r$ ، و $LO = d$ ، در شکل ۱۰۸ (الف) داریم

$$LA \cdot LB = (LO + OA)(OB - OL) = r^2 - d^2$$

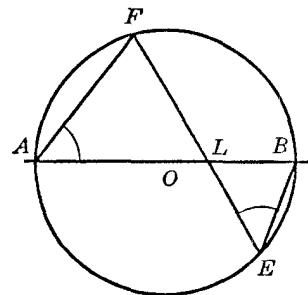
و در شکل ۱۰۸ (ب) داریم

$$LA \cdot LB = (LO + OA)(LO - OB) = d^2 - r^2$$

اگر اندازه‌های منفی را پذیریم می‌توانیم این دو نتیجه را به این صورت بیان کنیم: قوت یک نقطه نسبت به یک دایره، با در نظر گرفتن اندازه و علامت، عبارت است از مربع فاصله نقطه از مرکز دایره منهای مربع شعاع دایره.



شکل ۱۰۸ (ب)



شکل ۱۰۸ (الف)

۴۱۴. ملاحظه ۱. (الف) قوت یک نقطه نسبت به یک دایره، بسته به این که نقطه خارج، داخل، یا روی دایره باشد، مثبت، منفی یا صفر است.

(ب) وقتی نقطه خارج دایره است، قوت آن نسبت به دایره با مربع مماسی که از آن نقطه بر دایره رسم می‌شود برابر است.

(ج) وقتی نقطه درون دایره است، قوت آن نسبت به دایره برابر است با منفی مربع نصف وتری که بر قطرگذرنده از آن نقطه عمود است.

(د) قوت مرکز دایره نسبت به دایره با منفی مربع شعاع آن برابر است.

۴۱۵. ملاحظه ۲. اگر نقطه L از دایره (O) ثابت بماند، و \angle شعاع دایره (O) ، کوچک شود تا به صفر برسد، دایره (O) یک دایره تک نقطه‌ای می‌شود، ولی منفوم قوت نسبت به دایره، به صورت رابطه بیان شده در ۴۱۳، در مورد این دایره تک نقطه‌ای هم قابل اعمال است.

۴۱۶. قضیه. (الف) اگر دو دایره متعامد باشند، مربع شعاع هر یک از دایره‌ها با قوت مرکز آن دایره نسبت به دایره دیگر برابر است.

(ب) بر عکس، اگر مربع شعاع یک دایره با قوت مرکز آن دایره نسبت به یک دایره دیگر برابر باشد، دو دایره متعامدند.

اگر دو دایره مفروض (A, a) و (B, b) متعامد باشند، داریم (§۳۶۳)

$$AB^r = a^r + b^r$$

پس،

$$a^r = AB^r - b^r, \quad b^r = AB^r - a^r$$

که اثبات قسمت (الف) قضیه به حساب می‌آید.
بر عکس، اگر داشته باشیم

$$AB^r = a^r + b^r$$

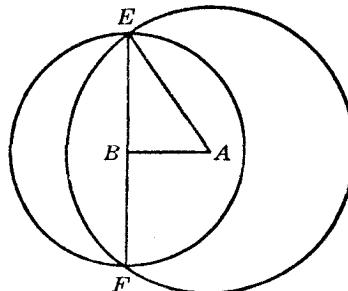
آن‌گاه

$$a^r = AB^r - b^r$$

که ثابت می‌کند دو دایره متعامدند (§۳۶۳).

۴۱۷. نتیجه. اگر نقطه‌ای خارج دایره‌ای مفروض باشد، قوت آن نسبت به آن دایره برابر است با مربع شعاع دایره‌ای که نقطه مفروض مرکز آن است، و با دایره مفروض متعامد است.

۴۱۸. تعریف. اگر وتر مشترک دو دایره متقاطع (A) و (B) قطر دایره (B) باشد، می‌گوییم دایره (B) توسط (A) نصف می‌شود، و دایره (A) منصف دایره (B) است (شکل ۱۰۹).



شکل ۱۰۹

۴۱۹. قضیه. اگر دایره‌ای توسط یک دایره مفروض نصف شود، مربع شعاع دایره نصف شده برابر است با متنی قوت مرکز دایره نصف شده نسبت به دایره منصف.
اگر دایره (B) توسط دایره مفروض (A) نصف شود، و E و F دو سر وتر مشترک آنها باشند (شکل ۱۰۹)، داریم

$$BE^2 = AE^2 - AB^2 = -(AB^2 - AE^2) \text{ یا } AE^2 = BE^2 + AB^2$$

که اثبات قضیه به حساب می‌آید.

۴۲۰. نتیجه. دایره (A) و نقطه B مفروض اند؛ اگر B خارج (A) باشد، B مرکز دایره‌ای متعامد با (A) است؛ اگر B داخل (A) باشد، B مرکز دایره‌ای است که توسط (A) نصف می‌شود. در حالت اول، مربع شعاع دایره (B) برابر است با قوت نقطه B نسبت به (A)؛ در حالت دوم، مربع شعاع (B) برابر است با متنی قوت نقطه B نسبت به (A).

تمرین

۱) نشان دهید که (الف) مکان هندسی نقطه‌ای که قوتیش نسبت به یک دایره ثابت است، دایره‌ای هم مرکز با آن دایره است؛ (ب) مکان هندسی مرکز دایره‌ای با شعاع ثابت و متعامد با دایره‌ای مفروض، دایره‌ای هم مرکز با دایره مفروض است.

۲) نشان دهید که اگر مجموع قوتها مرکز یکی از دو دایره مفروض نسبت به این دو دایره برابر صفر باشد، دو دایره متعامدند.

۳) نشان دهید که (الف) مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع قوتها بیش نسبت به دو دایره مفروض ثابت است، دایره‌ای است که مرکزش نقطه وسط خط‌المرکزین دو دایره مفروض است، و بر عکس؛ (ب) مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع قوتها بیش نسبت به سه دایره مفروض ثابت است، دایره‌ای است که مرکزش مرکز نقل مثبتی است که رأسهای آن مرکز سه دایره مفروض هستند، و بر عکس.

۴) مربع فاصله بین یک نقطه ثابت و یک نقطه متغیر برابر است با مجموع (یا تفاضل) قوتها این دو نقطه نسبت به یک دایرة ثابت. مکان هندسی نقطه متغیر را بیابید.

۵) دو نقطه نسبت به یک دایره وارون یکدیگرند؛ نشان دهید که (الف) مجموع قوتها این دو نقطه نسبت به دایره برابر است با مربع فاصله این دو نقطه از یکدیگر؛ (ب) حاصل ضرب قوتها این دو نقطه نسبت به دایره برابر است با متنی حاصل ضرب مربع شعاع دایره و مربع فاصله بین دو نقطه.

(۶) دو نقطه نسبت به یک دایره وارون یکدیگرند. نشان دهید که مجموع معکوس قوتهای این دو نقطه نسبت به دایره برابر است با منفی معکوس مربع شعاع دایره.

(۷) نشان دهید که قوت مرکز ارتفاعی یک مثلث نسبت به دایره محیطی مثلث چهار برابر قوت همان نقطه نسبت به دایره نه نقطه مثلث است.

(۸) نشان دهید که مجموع قوتهای رأسهای یک مثلث نسبت به دایره نه نقطه مثلث برابر است با یک چهارم مربع اضلاع مثلث.

(۹) $ABCD$ مستطیلی است که در دایره‌ای به مرکز O محاط شده است؛ PY ، PX' ، PX ، و PY' عمودهایی هستند که از یک نقطه دلخواه P بر اضلاع AB ، CD ، AD ، و BC رسم شده‌اند. ثابت کنید که $PY' \cdot PX \cdot PX' + PY \cdot PY'$ با قوت P نسبت به دایرة O برابر است.

تمرینهای تکمیلی

(۱) دایره‌ای متغیر با شعاع ثابت، با دایرة ثابتی متعامد است. نشان دهید که دو انتهای قطری از دایرة متغیر که راستای ثابتی دارد، روی دو دایرة ثابت حرکت می‌کنند.

(۲) نقاط M و M' روی یک خط ثابت طوری تغییر می‌کنند که حاصل ضرب فاصله‌هایشان از یک نقطه ثابت خط، ثابت می‌ماند. نشان دهید که مکان هندسی مرکز دایره‌ای که از نقاط M و M' و یک نقطه ثابت صفحه می‌گذرد، یک خط راست است.

(۳) دایرة محاطی خارجی (I_1) از مثلث ABC ، دایرة محیطی مثلث ABC را که مرکز آن نقطه O است در D ، و D از دایرة (O) را در قطع می‌کند. نشان دهید که $I_1 E$ با قطر دایرة محیطی مثلث ABC برابر است.

(۴) محل دایرة محیطی یک مثلث، محل نقطه برخورد نیمساز داخلی یک زاویه مثلث با ضلع مقابل این زاویه، و حاصل ضرب دو ضلع دیگر مثلث مفروض‌اند. مثلث را رسم کنید.

(۵) نشان دهید که مربع شعاع دایرة قطبی یک مثلث با نصف قوت مرکز ارتفاعی مثلث نسبت به دایرة محیطی مثلث برابر است (راهنمایی: از ۱۷۶ و ۳۸۹ استفاده کنید).

(۶) نشان دهید که مجموع قوتهای نقاط متقابل مترانی مرکز ارتفاعی یک مثلث نسبت به رأسهای مثلث، نسبت به دایرة محیطی مثلث برابر است با مجموع مربع اضلاع مثلث.

(۷) دو دایرة نابرابر به طور داخلی در A مماس‌اند. مماسی که در نقطه B بر دایرة کوچکتر رسم می‌شود، دایرة بزرگتر را در C و D قطع می‌کند. نشان دهید که AB نیمساز زاویه CAD است.

(۸) خطوطی که رأسهای A ، B ، و C از مثلث ABC را به نقطه‌ای مانند S وصل می‌کنند، اضلاع مقابل را به ترتیب در L ، M ، و N قطع می‌کنند، و دایرة (LMN) این اضلاع را مجدداً در L' ، M' ، و N' قطع می‌کند. نشان دهید که خطوط AL' ، BM' ، و CN' هم‌رسانند.

و. محور اصلی دو دایره

۴۲۱. قضیه. نقطه‌ای طوری حرکت می‌کند که قوتهایش نسبت به دو دایرة مفروض همواره برابرند؛ مکان هندسی این نقطه خط راستی عمود بر خط مرکزین دو دایرة مفروض است.

دایره‌های (A, a) و (B, b) مفروض‌اند. اگر X نقطه‌ای از مکان هندسی مطلوب باشد، بنابر فرض داریم

$$XA^2 - XB^2 = a^2 - b^2 \quad \text{یا} \quad XA^2 - a^2 = XB^2 - b^2$$

و با توجه به مکان هندسی ۱۲ از ۱۱، قضیه ثابت می‌شود.

۴۲۲. تعریف. خط مذکور (۴۲۱) را محور اصلی دو دایره می‌نامند.

۴۲۳. نتیجه. قوتهای یک نقطه مشترک از دو دایره مفروض، نسبت به این دو دایره، برابرند، زیرا هر دو صفرند (۴۱۴ الف): پس، محور اصلی دو دایره متقاطع خطی است که از نقاط برخورد دو دایره می‌گذرد.

۴۲۴. ملاحظه. (الف) اگر a یا b ، یا هر دو صفر باشند باز هم قضیه ۴۲۱ معتبر است (۴۱۵)، یعنی می‌توانیم در مورد محور اصلی یک دایره و یک نقطه، و حتی محور اصلی دو نقطه حرف بزنیم، که در حالت اخیر، محور اصلی، عمودمنصف پاره خط بین دو نقطه است.

(ب) اگر دو دایره بر هم مماس باشند، محور اصلی آنها همان مماس مشترک آنها در نقطه تماسشان است.

(ج) دو دایره هم مرکز محور اصلی ندارند.

۴۲۵. قضیه. محورهای اصلی سه دایره با مرکزهای غیر همخط که دو به دو در نظر گرفته شوند، همسنند.
اگر محور اصلی دایره‌های (A) و (B) محور اصلی دایره‌های (A) و (C) را در نقطه R قطع کند، و اگر R_a, R_b, R_c و R_e به ترتیب قوتهای نقطه R نسبت به (A)، (B)، و (C) باشند، داریم

$$R_b = R_c \quad \text{پس} \quad R_a = R_e \quad \text{و} \quad R_a = R_b$$

یعنی نقطه R روی محور اصلی دایره‌های (B) و (C) هم قرار دارد، و قضیه ثابت شده است.

۴۲۶. مسئله. محور اصلی دو دایره را رسم کنید.

(الف) اگر دو دایره متقاطع باشند، خطی که از نقاط برخوردشان می‌گذرد محور اصلی آنهاست (۴۲۳).

(ب) اگر دو دایره مفروض متقاطع نباشند، دایرة (C) را طوری رسم می‌کنیم که هم (A) و هم (B) را قطع کند. فرض کند وتر مشترک (A) و (C)، وتر مشترک (B) و (C) را در نقطه R قطع کند. محور اصلی (A) و (B) از نقطه R می‌گذرد (۴۲۵) و بر AB ، یعنی خط‌المرکزین این دو دایره، عمود است.

(ج) اگر دایرة (A) به نقطه A تبدیل شود، دایرة (C) را طوری رسم می‌کنیم که از A بگذرد و (B) را قطع کند. فرض کنید مماسی که از نقطه A بر (C) رسم می‌شود، وتر مشترک (B) و (C) را در R قطع کند. خطی که از R بر خط AB عمود می‌شود، محور اصلی مطلوب است.

۴۲۷. قضیه. (الف) مکان هندسی نقطه‌ای که بتوان از آن نقطه مماسهای با طول یکسان بر دو دایره مفروض رسم کرد، محور اصلی دو دایره است (۴۱۴ الف، ۴۲۱).

(ب) اگر دو دایره مماسهای مشترک داشته باشند، آنگاه نقاط وسط مماسهای مشترک روی محور اصلی دو دایره قرار دارند.

۴۲۸. قضیه. (الف) مرکز دایره‌ای که بادو دایره مفروض متعامد باشد، روی محور اصلی دو دایره مفروض قرار دارد.

(ب) اگر مرکز دایره‌ای روی محور اصلی دو دایره باشد، و اگر دایره موردنظر با یکی از این دو دایره متعامد باشد، آنگاه با دیگری هم متعامد است.

اگر دایرة (M, m) با دو دایره (A) و (B) متعامد باشد، قوت M نسبت به هر دو دایره برابر m^2 است (۴۱۶ الف): پس M روی محور اصلی (A) و (B) قرار دارد.

اگر دایرة (M, m) با دایرة (A) متعامد باشد، قوت M نسبت به (A) برابر m^2 است. اگر M روی محور اصلی دایره‌های (A) و (B) قرار داشته باشد، قوت M نسبت به (B) برابر m^2 است (۴۱۶ الف):

پس دایرة (B) با (M, m) متعامد است (§۴۱۶ ب).

۴۲۹. قضيه. خطوط قطبی نقطه‌ای واقع بر محور اصلی دو دایرة مفروض، نسبت به این دو دایرة، یکدیگر را روی محور اصلی قطع می‌کنند.

فرض کنید Q نقطه برخورد دو خط قطبی نقطه P نسبت به دو دایرة (A) و (B) باشد، و فرض کنید که P روی محور اصلی این دو دایرة، که خط u است، قرار داشته باشد. نقاط P و Q هم نسبت به (A) و (B) نسبت به (B) مزدوج‌اند؛ بنابراین، دایره‌ای که قطر آن است با (A) و (B) متعامد است (§۳۸۷). پس نقطه وسط PQ ، یعنی نقطه O ، روی u قرار دارد (§۴۲۸). پس دو نقطه P و O از سه نقطه همخط P, O و Q روی خط u قرار دارند؛ پس نقطه سوم، یعنی Q نیز روی خط u قرار دارد و قضيه ثابت شده است. این اثبات چه دایره‌های مفروض متقاطع باشند و چه نباشند معتبر است. ولی وقتی دو دایرة دو نقطه مشترک E و F دارند، گزاره تقریباً روشن است، زیرا هر دو خط قطبی P از مزدوج همساز P نسبت به E و F می‌گذرند.

۴۳۰. نتيجه. اگر از یک نقطه واقع بر محور اصلی دو دایره چهار مساز بر این دایره‌ها رسم شود، دو وتری که هر کدام در یک دایره دو نقطه تماس را به یکدیگر وصل می‌کنند، یکدیگر را روی محور اصلی دو دایرة قطع می‌کنند.

تمرین

۱) نشان دهید که اگر مربع شعاع‌های دو دایره به یک مقدار زیاد یا کم شوند، محور اصلی دو دایره تغییر نمی‌کند.

۲) نشان دهید که اگر از یک نقطه روی محور اصلی دو دایره، دو قاطع رسم کنیم که هر کدام یکی از دو دایره را قطع کند چهار نقطه برخورد این قاطعها با دو دایره، چهار نقطه همداایره هستند.

۳) نشان دهید مکان هندسی نقطه‌ای کم‌تفاضل قوتایش نسبت به دو دایرة مفروض ثابت است، خط راستی موازی با محور اصلی دو دایره است.

۴) در صفحه یک دایرة مفروض، دایره‌ای دیگر با شعاع مفروض رسم می‌کنیم، به طوری که محور اصلی دو دایره از نقطه ثابت مفروضی بگذرد. نشان دهید که مکان هندسی مرکز دایرة دوم یک دایره است.

۵) نشان دهید که محور ارتفاعی یک مثلث محور اصلی دایرة محیطی و دایرة نه نقطه آن مثلث است.

۶) نقطه‌ای روی خط راستی عمود بر خط‌مرکزین دو دایره حرکت می‌کند. نشان دهید که نقطه برخورد خطوط قطبی این نقطه نسبت به دو دایره خط راستی موازی با خط مفروض را می‌پیماید.

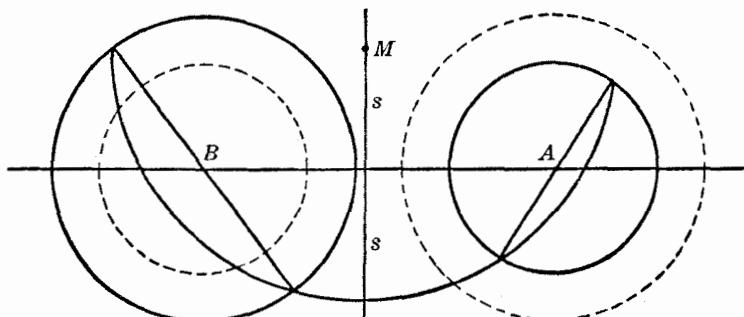
۷) (الف) وتر مشترک یک دایرة ثابت و دایرة متغیری که از نقطه ثابتی می‌گذرد، مماسی را که در این نقطه ثابت بر دایرة متغیر رسم می‌شود در نقطه P قطع می‌کند. نشان دهید که مکان هندسی نقطه P یک خط راست است. (ب) از یک نقطه مفروض خطی رسم کنید که از مرکز دور از دسترس یک دایرة مفروض بگذرد.

۸) از یک نقطه مفروض مماسهایی بر دایرة مفروضی که مرکز آن دور از دسترس است، رسم کنید.

۹) نشان دهید که هر ارتفاع مثلث، محور اصلی دو دایره‌ای است که قطرهایشان میانه‌های رسم شده از دو رأس دیگر مثلث هستند.

۱۰) نشان دهید که محور اصلی یک دایره و یک نقطه، عمود منصف پاره خط بین آن نقطه و نقطه وارونش نسبت به دایره است.

- (۱۱) یک دایره با دو دایرۀ مفروض مماس بر هم متعامد است. نشان دهید که این دایرۀ در نقطۀ تمسّق دو دایرۀ مفروض بر خط‌المرکزین این دو دایرۀ مماس است.
- (۱۲) نشان دهید که اگر چهار دایرۀ سه مماس یک مثلث را دو به دو در نظر بگیریم، محورهای اصلی آنها، نیمسازهای زاویه‌های مثلث میانک مثلث مفروض هستند.
- (۱۳) دو دایرۀ را که قطرهایشان قطرهای AC و BD از ذوزنقۀ $ABCD$ هستند در نظر بگیرید. نشان دهید که محور اصلی این دو دایرۀ از نقطۀ برخورد اضلاع ناموازی BC و AD از ذوزنقه می‌گذرد.



شکل ۱۱۰

۴۳۱. قضیه. مکان هندسی مرکز دایرۀ ای که دو دایرۀ مفروض را نصف می‌کند، خط راستی عمود بر خط‌المرکزین دو دایرۀ مفروض است.

اگر دایرۀ (M, m) دایرۀ‌های مفروض (A, a) و (B, b) (شکل ۱۱۰) را نصف کند، داریم (§۴۱۹)

$$MA^r + a^r = m^r = MB^r + b^r$$

پس،

$$MA^r - MB^r = b^r - a^r \quad (۱)$$

و قضیه ثابت می‌شود (مکان هندسی ۱۱، ۱۲) (§۱۱).

۴۳۲. تعریف. خط s را که با معادله (۱) (§۴۳۱) توصیف می‌شود گاهی محور پاداصلی دو دایرۀ مفروض می‌نامند.

۴۳۳. ملاحظه. برای نقطۀ M' واقع بر محور اصلی r برای دایرۀ‌های (A, a) و (B, b) ، داریم

$$M'A^r - M'B^r = a^r - b^r \quad (۲)$$

رابطه‌های (۱) و (۲) نشان می‌دهند که دو خط s و r نسبت به نقطۀ وسط خط‌المرکزین AB متقارن‌اند.

همچنین، می‌توان دید که s محور اصلی دو دایرۀ (A, b) و (B, a) است (شکل ۱۱۰).

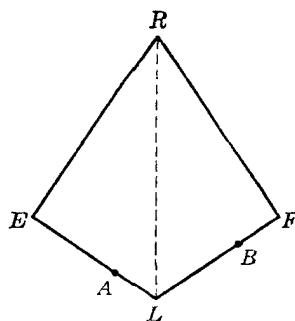
۴۳۴. قضیه. دو وتر پاد همتا در دو دایرۀ، یکدیگر را روی محور اصلی دو دایرۀ قطع می‌کنند.

اگر M و Q دو نقطۀ از دایرۀ (O) ، و N' و P' نقاط پادهمتای آنها از دایرۀ (O') ، نسبت به یک مرکز تشابه دایرۀ‌های (O) و (O') باشند، چهار نقطۀ M ، Q ، N' ، P' روی دایرۀ‌ای (§۴۰۱)، مانند دایرۀ (S) ، قرار دارند.

وتر MQ محور اصلی دو دایرۀ (S) و (O) ، و وتر $N'P'$ محور اصلی دو دایرۀ (S) و (O') است؛ پس

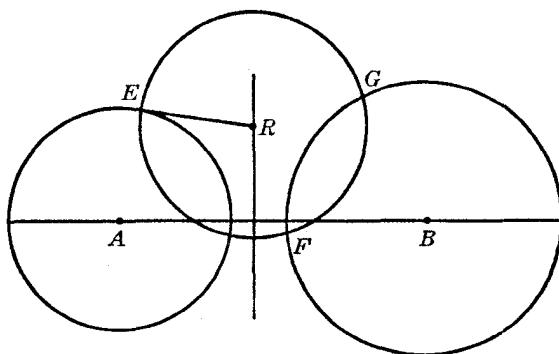
$N'P'$ روی محور اصلی دو دایره (O) و (O') یکدیگر را قطع می‌کنند (§۴۲۵). ۴۳۵ قضیه. اگر دو مماس شده بر دو دایره یکدیگر را روی محور اصلی این دو دایره قطع کنند، آنگاه نقاط تمسّق نقاط پاده‌متأ در دایره‌های مفروض‌اند.

فرض کنید مماسهای RF و RE (شکل ۱۱۱) که به ترتیب در نقاط E و F بر دو دایره (A) و (B) رسم شده‌اند یکدیگر را در R ، روی محور اصلی (A) و (B) قطع کنند، و دو خط EA و BF یکدیگر را در نقطه L قطع کنند. مماسهای RF و RE برابرند (الف)؛ پس با توجه به مثنهای قائم‌الزاویه همنهشت $LE = LF$ ، داریم $RFL = REL$. پس دایره‌ای که به مرکز L و به شعاع $LE = LF$ رسم می‌شود، در نقاط E و F بر دایره‌های (A) و (B) مماس است؛ در نتیجه، قضیه ثابت شده است (§۴۰۹).



شکل ۱۱۱

۴۳۶. قضیه عکس. اگر دو نقطه از دو دایره پاده‌متأ باشند، مماسهایی که در این نقاط بر دایره‌ها رسم می‌شوند، یکدیگر را روی محور اصلی دو دایره قطع می‌کنند.

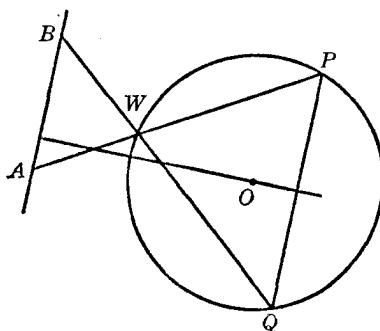


شکل ۱۱۲

فرض کنید مماسی که در E بر دایره (A) رسم می‌شود (شکل ۱۱۲) محور اصلی دو دایره (A) و (B) ، را در R قطع کند. دایره (R, RE) با هر دو دایره (A) و (B) متعامد است (§۳۶۴ ب، §۴۲۸ ب)؛ پس مماسهایی که در F و G ، یعنی نقاط برخورد (B) با (R, RE) بر (B) رسم می‌شوند، از نقطه R می‌گذرند (§۳۶۴). پس بنابر قضیه (§۴۳۵)، دو نقطه E و F و همچنین، دو نقطه E و G نقاط پاده‌متأ روی (A) و (B) هستند، ولی نقطه E روی دایره (A) تنها دو نقطه پاده‌متأ روی (B) دارد؛ پس این دو نقطه همان F و G هستند، و همان‌طور که دیدیم قضیه‌ای که باید اثبات شود برای دو نقطه E و F و دو نقطه E و G معتبر است.

۴۳۷. نتیجه. چهار نقطه برحور دو دایره با دایره‌ای که با هر دو متتعامد است، سه جفت خط را تعیین می‌کنند؛ بک جفت از این خطها یکدیگر را روی محور اصلی دو دایره و دو جفت خط دیگر در مراکز تشابه دو دایره یکدیگر را قطع می‌کنند.

۴۳۸. قضیه. دو دایره و نقطه‌ای روی دایره تشابه آنها مفروض‌اند. وارونهای این نقطه نسبت به دو دایره، نسبت به محور اصلی دو دایره متقارن‌اند.



شکل ۱۱۳

اگر P و Q (شکل ۱۱۳) نقاط وارون نقطه W نسبت به دایره‌های مفروض (A, a) و (B, b) باشند، داریم

$$AP \cdot AW = a^r, \quad BQ \cdot BW = b^r$$

و اگر W نقطه‌ای روی دایره تشابه دو دایره مفروض باشد، داریم (§۴۰۳)

$$WA : WB = a : b$$

دو تساوی اول را بر هم تقسیم می‌کنیم و با در نظر گرفتن تساوی سوم به دست می‌آوریم

$$AP : BQ = AW : BW$$

یعنی AB و PQ موازی‌اند.

ولی دایره WPQ با هر دو دایره مفروض متتعامد است (§۳۶۹)؛ پس عمودی که از O ، مرکز دایره WPQ ، بر AB رسم می‌شود محور اصلی دو دایره (A, a) و (B, b) است، و چون AB با PQ موازی است، این عمود، عمودمنصف وتر PQ از دایرة WPQ نیز هست؛ به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

۴۳۹. نتیجه. دو خط قطبی هر یک از دو مرکز تشابه دو دایره مفروض، نسبت به آن دو دایره، نسبت به محور اصلی دو دایره متقارن‌اند.

تمرین

۱) نشان دهید که مکان هندسی مرکز دایره‌ای که از یک نقطه مفروض می‌گذرد و دایره مفروضی را نصف می‌کند، یک خط راست است.

۲) دایره‌ای رسم کنید که از دو نقطه مفروض بگذرد و دایره مفروضی را نصف کند.

۳) دایره‌ای رسم کنید که از یک نقطه مفروض بگذرد و دو دایره مفروض را نصف کند.

- (۴) نشان دهید مکان هندسی مرکز دایره‌ای که با یک دایرة مفروض معتماد است و دایرة مفروض دیگری را نصف می‌کند، خط راستی عمود بر خط المركzin دو دایرة مفروض است.
- (۵) دایره‌ای رسم کنید که با دو دایرة مفروض معتماد باشد و دایرة مفروض سومی را نصف کند.
- (۶) دایره‌ای رسم کنید که از نقطه مفروضی بگذرد، دایرة مفروضی را نصف کند، و با دایرة مفروض دیگری معتماد باشد.
- (۷) دو دایرة (O) و (O') مفروض اند؛ خطوطی که نقطه M از دایره (O) را به دو مرکز شتابه (O) و (O') وصل می‌کنند، (O') را در چهار نقطه قطع می‌کنند. نشان دهید که از این چهار نقطه دو نقطه روپروری قطري در (O') هستند و دو نقطه دیگر، مستقل از محل M ، با یک نقطه ثابت همخطاًند.
- (۸) نشان دهید اگر دایرة (L) با دو دایرة مفروض (A) و (B) معتماد باشد، محورهای اصلی (L) و (A)، و (L) و (B) یکدیگر را در قطب خط AB نسبت به (L) قطع می‌کنند و نقاط برخوردشان با خط AB قطبهاي محور اصلی (A) و (B) سبب استند.

تمرینهای تكميلی

- (۱) نشان دهید که محور اصلی دو دایره از محورهای اصلی هریک از این دو دایره با دایره‌ای که خط المركzin دو دایره قطر آن است، هم فاصله است.
- (۲) خطی دو دایرة معتماد را در دو جفت نقطه همساز قطع می‌کند. نشان دهید که این خط از مرکز یکی از دایره‌ها (یا از مرکزهای هر دو دایره) می‌گذرد.
- (۳) دو دایرة متغیر بر هم مماس‌اند و در دو نقطه ثابت بر خط مفروضی نیز مماس‌اند. نشان دهید که مکان هندسی نقطه وسط مماس مشترک خارجی دوم این دو دایره، یک دایره است.
- (۴) دو دایرة متغیر که نسبت شعاع‌هایشان مقدار ثابتی است، در دو نقطه ثابت بر خط مفروضی مماس‌اند و هر دو در یک طرف این خط قرار دارند. مکان هندسی نقطه برخورد مماس مشترک خارجی دوم این دو دایره با محور اصلی دو دایره را به دست آورید.
- (۵) خطی که با قاعدة BC از مثلث ABC پادموازی است، AB و AC را در P و Q و قطع می‌کند و خطی موازی BC اضلاع AB و AC را در E و F قطع می‌کند. نشان دهید وقتی که خط EF تغییر می‌کند محور اصلی دو دایرة BFQ و CEP ثابت می‌ماند.
- (۶) نقاط A و B روی دایره‌ای (P) و (Q) مفروض اند. نقطه C را روی محور اصلی این دو دایره طوری بیابید که اگر خطوط CB و CA دایره‌های (P) و (Q) را در E و F نیز قطع کنند، خط EF بر محور اصلی دو دایره عمود باشد.
- (۷) فرض کنید R و R' نقاط وسط مماسهای OP و $O'P'$ باشند که از نقطه O بر دایرة مفروضی رسم شده‌اند. از نقطه T روی RR' مماسهایی بر دایره رسم می‌کنیم؛ نشان دهید اگر وتری که نقاط تماس این دو مماس اخیر دو سر آن هستند، RR' را در U قطع کند، زاویه TOU قائم است.

ز. دایره‌های هم محور

- (۴۰) تعریف. گروهی از دایره‌ها را که یک خط ثابت محور اصلی هر دو دایره از این گروه باشد، یک دسته دایره هم محور می‌نامیم.
- خط ثابت مذکور را محور اصلی دسته دایرة هم محور می‌نامیم.

۴۴۱. تعیین یک دسته دایره هم محور. برای تشکیل دادن یک دسته دایره هم محور می‌توان یک دایره (A) و محور اصلی τ را به دلخواه برگزید. هر دایره (B) ، بسته به این کاممحور اصلی دو دایره (A) و (B) بر τ منطبق باشد یا نه، یا متعلق به این دسته دایره است یا نیست؛ زیرا اگر (C) دایره دیگری باشد به طوری که محور اصلی دو دایره (A) و (C) بر τ منطبق باشد، آن‌گاه محور اصلی دو دایره (B) و (C) نیز بر τ منطبق است.

برای تعیین یک دسته دایره هم محور می‌توان دو دایره (A) و (B) را به دلخواه برگزید. محور اصلی این دو دایره نقش محور اصلی دسته دایره هم محور را خواهد داشت.

پس در مجموع می‌توان گفت: یک دسته دایره هم محور با یک دایره و محور اصلی، یا با دو دایره از آن دسته تعیین می‌شود.

۴۴۲. قضیه. (الف) قوت نقطه‌ای روی محور اصلی یک دسته دایره هم محور نسبت به همه دایره‌های این دسته مقدار ثابتی است.

(ب) برعکس، اگر قوت یک نقطه نسبت به همه دایره‌های یک دسته دایره هم محور یکسان باشد، آن نقطه روی محور این دسته دایره است.

۴۴۳. قضیه. مراکز دایره‌های یک دسته دایره هم محور همخاطباند. فرض کنید A مرکز دایره مفروضی از دسته دایره هم محور، و M مرکز دایره دلخواه دیگری از این دسته باشد. خط AM بر τ ، یعنی محور اصلی دسته دایره عمود است؛ پس مرکز هر دایره‌ای از دسته دایره روی خطی قرار دارد که از A می‌گذرد و بر τ عمود است.

۴۴۴. تعریف. خطی که مرکز همه دایره‌های یک دسته دایره هم محور روی آن قرار دارد، خط مرکزی دسته دایره نامیده می‌شود.

۴۴۵. بحث. (الف) اگر τ ، محور اصلی یک دسته دایره هم محور، یکی از دایره‌ها را در دو نقطه E و F قطع کند، همه دایره‌های دسته باید از این دو نقطه بگذرند، زیرا قوت E (یا F) نسبت به یکی از دایره‌های دسته صفر است (§۴۱۴). پس قوت آن باید نسبت به همه دایره‌های دیگر این دسته نیز صفر باشد (§۴۴۲ ب). نقاط E و F را نقاط اساسی دسته دایره می‌نامیم، و می‌گوییم که دسته دایره متقاطع، یا از نوع متقاطع، است.

(ب) اگر خط τ یکی از دایره‌های دسته را قطع نکند، آن‌گاه هیچ دایره دیگری از دسته را قطع نمی‌کند.

(ج) اگر τ بر یکی از دایره‌های دسته، مثلاً در T ، مماس باشد همه دایره‌های دسته در T بر τ مماس‌اند و یک دسته دایره هم محور مماس بر هم داریم.

نکته. در آنچه در بی می‌آید، گزاره‌های مربوط به دسته دایره‌های هم محور تنها برای انواع (الف) و (ب) بیان می‌شوند.

۴۴۶. مسئله. دایره‌ای متعلق به یک دسته دایره هم محور را رسم کنید که نقطه مفروضی مرکز آن باشد. فرض بر این است که نقطه مفروض M روی خط مرکزی دسته دایره قرار دارد. در غیر این صورت، مسئله قابل حل نیست.

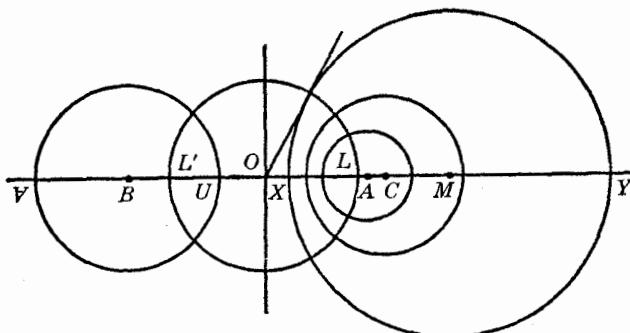
(الف) در حالت دسته دایره متقاطع، شعاع دایره مطلوب (M) برابر طول پاره خطی است که M را به یکی از نقاط اساسی E و F وصل می‌کند. اگر M بر نقطه بخورد محور اصلی τ و خط مرکزی c منطبق باشد، شعاع دایره مطلوب ممکن را دارد، و EF قطر دایره مطلوب است.

به ازای هر M مفروض روی خط c ، مسئله یک و تنها یک جواب دارد.

(ب) در حالت دسته دایره غیر متقاطع (شکل ۱۱۴)، محور τ ، و در نتیجه نقطه O که نقطه بخورد r

با خط مرکزی c است، در خارج دایره‌های دسته قرار دارد؛ پس می‌توان از O بر هر یک از دایره‌های دسته، مانند (A) ، مماسی رسم کرد. چون O روی c است، طول این مماس با طول مماسی که از O بر هر دایره دسته، از جمله دایره مطلوب (M) ، رسم می‌شود برابر است. پس اگر شعاع m شعاع (M) و t طول مماس رسم شده از O بر هر دایرة دسته باشد، داریم

$$m^t = OM^t - t^t \quad (1)$$



شکل ۱۱۴

پس اگر فاصله مرکز مفروض، M ، از نقطه O بزرگتر از t باشد، مسئله یک، و تنها یک جواب خواهد داشت.

۴۴۷. تعریف. نقاط L و L' (شکل ۱۱۴) را که نقاط برخورد خط c با دایرة (O, t) هستند نقاط حدی دسته دایرة هم محور غیر متقاطع می‌نامند.

مرکز هیچ یک از دایره‌های دسته داخل پاره خط LL' نیست، و هر نقطه خط c که خارج پاره خط LL' باشد مرکز دایره‌ای از این دسته است.

از رابطه (۱) (§۴۴۶) نتیجه می‌شود که هر چه M به L (یا L') نزدیکتر شود، شعاع دایرة (M) به صفر نزدیکتر می‌شود. به این دلیل، L و L' را گاهی دایره‌های تک نقطه‌ای دسته دایرة می‌نامند.

۴۴۸. قضیه. (الف) نقاط حدی یک دسته دایره هم محور، نسبت به هر یک از دایره‌های دسته وارون یکدیگرند.

(ب) بر عکس، اگر دو نقطه نسبت به همه دایره‌های یک مجموعه از دایره‌ها وارون یکدیگر باشند، آن دایره‌ها یک دسته دایرة هم محور تشکیل می‌دهند.

اگر X و Y (شکل ۱۱۴) نقاط برخورد خط مرکزی دسته دایره‌ها با هر دایرة دسته باشد، داریم

$$OL^t = t^t = OX \cdot OY$$

پس $-1 = (LL'XY)^{-1}$ ، و قضیه ثابت شده است.

اگر دو نقطه L و L' نسبت به دایره‌های متعلق به گروهی از دایره‌ها وارون یکدیگر باشند، مرکز همه دایره‌های این گروه روی خط LL' قرار خواهد داشت، و اگر X و Y نقاط برخورد LL' با یک دایرة دلخواه گروه دایره‌ها باشند، بنابر فرض، برای نقطه وسط LL' ، یعنی O ، داریم

$$OX \cdot OY = OL^t$$

پس قوت نقطه O نسبت به همه دایره‌های این گروه یکسان است. پس دایره‌ها یک دسته دایرة هم محور تشکیل می‌دهند، و محور اصلی آنها در نقطه O بر خط LL' عمود است.

۴۴۹. نتیجه. (الف) هر دایره‌ای که از نقاط حدی یک دسته دایره هم محور غیر متقاطع بگذرد، بر همه دایره‌های دسته عمود است.

(ب) خطوط قطبی یک نقطه حدی نسبت به دایره‌های یک دسته دایره هم محور، خطی است که در نقطه حدی دیگر بر خط مرکزی این دسته دایره عمود است.

۴۵۰. قضیه. یک دسته دایره هم محور نباید بیش از دو نقطه حدی داشته باشد.

فرض کنید (A) و (B) دو دایره تعیین کننده یک دسته دایره هم محور باشند، و فرض کنید که خط مرکزی AB این دو دایره را به ترتیب در X, Y و U, V قطع کند (شکل ۱۱۴). اگر L و L' دو نقطه حدی دسته دایره باشند، باید داشته باشیم

$$(XYLL') = -1, \quad (UVLL') = -1$$

پس دو نقطه L و L' تنها نقاط حدی دسته دایره هستند (835°).

۴۵۱. مسئله. از یک نقطه مفروض دایره‌ای رسم کنید که به دسته دایره هم محور مفروضی متعلق باشد. از نقطه دلخواه M روی محور اصلی دسته دایره قاطعی رسم کنید تا یکی از دایره‌های دسته، مثلاً (A)، را در نقاط E و F قطع کند، و روی خط MP، که از M به نقطه مفروض P رسم می‌شود، نقطه Q را در همان طرف M قرار دارد طوری انتخاب کنید که $MP \cdot MQ = ME \cdot MF$. اگر عمودمنصف PQ دسته را در U قطع کند، دایرة (U, UP) شرایط مطلوب مسئله را دارد. در واقع، نقطه M نسبت به دایرة (A) و (U, UP) قوت یکسانی دارد، پس محور اصلی این دو دایره بر محور اصلی دسته دایره منطبق است، و (U, UP) متعلق به این دسته دایره است.

مسئله یک و تنها یک جواب دارد.

روش حل را می‌توان به هر دو نوع دسته دایره اعمال کرد. ولی در مورد دسته دایره متقاطع، نقطه مفروض و نقاط اساسی دسته جواب را مستقیماً به دست می‌دهند.

۴۵۲. مسئله. دایره‌ای رسم کنید که بر خط مفروضی مماس، و به یک دسته دایره هم محور مفروض متعلق باشد.

از نقطه برخورد خط مفروض s و محور اصلی r، یعنی نقطه M، مماس MT را بر دایره دلخواهی از دسته، مثلاً (A)، رسم می‌کنیم و روی s پاره خط‌های MP = MP' = MT را جدا می‌کنیم. اگر عمودهای PU و P'U' که در نقاط P و P' بر s عمودند خط مرکزی c را در U و U' قطع کند، دو دایرة (U, UP) و (U', U'P')

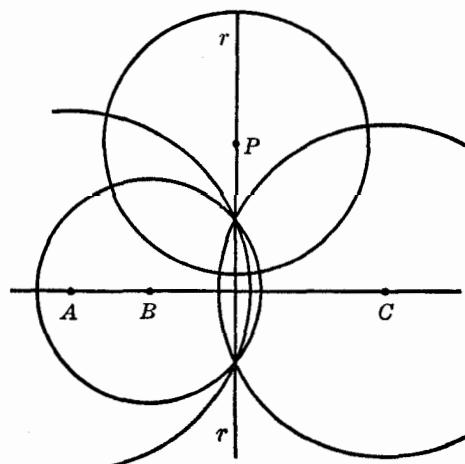
حالی را که s با r موازی است، و همچنین حالتی را که s خط r را بین دو نقطه اساسی دسته دایره متقاطع قطع می‌کند در نظر بگیرید.

تمرین

۱) نشان دهید که (الف) اگر یک نقطه وجود داشته باشد که قوتهاش نسبت به گروهی از دایره‌ها که مرکزهای آنها همخطاند مقدار ثابتی باشد، آن دایره‌ها یک دسته دایره هم محور تشکیل می‌دهند؛ (ب) اگر دو نقطه وجود داشته باشند که قوت هر کدام نسبت به گروهی از دایره‌ها مقدار ثابتی باشد، آن دایره‌ها یک دسته دایره هم محور تشکیل می‌دهند.

۲) نشان دهید اگر دایره‌هایی با یک دایره مفروض متعامد، و مرکزهایشان روی یک قطر دایره مفروض واقع باشند، آن دایره‌ها یک دسته دایره هم محور تشکیل می‌دهند.

- (۳) اگر دو نقطه متغیر P و P' نسبت به دایره مفروضی مزدوج، و روی خط ثابتی قرار داشته باشد، نشان دهید دایره‌هایی که PP' قطر آنهاست یک دسته دایره هم محور تشکیل می‌دهند.
- (۴) نشان دهید دایره‌هایی که مراکشان روی یک خط ثابت واقع است و دایره مفروضی را نصف می‌کنند، یک دسته دایره هم محور تشکیل می‌دهند.
- (۵) خطی بر دایره‌های (A) و (B) در نقاط T و T' مماس است، و دایرة (C) که با (A) و (B) هم محور است، T' را در E و F قطع می‌کند. نشان دهید که $-1 = (EFTT')$.
- (۶) دایره‌ای به شعاع مفروض رسم کنید که متعلق به یک دسته دایره هم محور مفروض باشد.
- (۷) نشان دهید (الف) سه دایره‌ای که هر کدام از نقطه مفروض P و دو سریکی از ارتفاعهای مثلث مفروضی می‌گذرند، نقطه مشترک دیگری نیز، مانند P' ، دارند؛ (ب) اگر P مرکز نقل مثلث باشد، P' روی محور ارتفاعی مثلث قرار دارد؛ (ج) اگر P روی محیطی باشد، P' روی دایرة نه نقطه است.
- (۸) اگر وتری از یک دایره متعلق به دسته دایره هم محوری از یک نقطه حدی دسته بگذرد، نشان دهید که تصویر این وتر روی خط مرکزی دسته قطري یک دایرة دسته است.
۴۵۳. قضيه. اگر مرکز دایره‌ای روی محور اصلی یک دسته دایره هم محور باشد، و این دایره با یکی از دایره‌های دسته متعامد باشد، آنگاه با همه دایره‌های دسته متعامد است.
- فرض کنید (A) دایره‌ای از دسته دایره هم محور (U)، و (P, p) دایره‌ای متعامد با (A) باشد که مرکزش، یعنی نقطه P ، روی محور اصلی (U)، خط r است. قوت P نسبت به هر (A) برابر p^2 است (§۴۱۴ الف)، و چون P روی r است، قوت P نسبت به هر دایره‌ای از (U) برابر p^2 است (§۴۴۰ الف)؛ پس (P, p) با هر دایره‌ای از U متعامد است (§۴۱۴ ب).
۴۵۴. نتیجه. اگر دایره‌ای با دو دایره از یک دسته دایره هم محور متعامد باشد، آنگاه با همه دایره‌های آن دسته متعامد است.
۴۵۵. قضيه. دایره‌های متعامد با دایره‌های یک دسته دایره هم محور، یک دسته دایره هم محور تشکیل می‌دهند.
- (الف) دسته دایره مفروض (U) از نوع متقاطع است. محور اصلی (U)، یعنی خط r ، از مرکز هر دایره (P) (شکل ۱۱۵) متعامد با دایره‌های (A)، (B)، (C)، ... متعلق به دسته (U) می‌گذرد (§۴۲۸)؛



شکل ۱۱۵

پس نقاط اساسی (U) نسبت به (P) وارون یکدیگرند ($\S ۳۶۸$)؛ پس قضیه ثابت شده است ($\S ۴۴۸$).

(ب) دسته دایره مفروض (U) از نوع نامتعاقع است. اگر (P) دایره‌ای متعدد باهمه دایره‌های (U) باشد، آنگاه مرکزش، P ، بر روی محور اصلی r از دسته (U) قرار دارد ($\S ۴۲۸$). از طرف دیگر، r عمود منصف پاره خط LL' است، که L و L' نقاط حدی (U) هستند ($\S ۴۲۷$). پس می‌توان دایره (P') را طوری رسم کرد که مرکزش P باشد و از نقاط L و L' بگذرد؛ این دایره با همه دایره‌های دسته U متعدد است ($\S ۴۴۹$).

پس هر دایرة (A) از دسته (U) هم با (P') و هم با (P) متعدد است. ولی نقطه P تنها می‌تواند مرکز یک دایرة متعدد با (A) باشد؛ پس (P) بر (P') منطبق است و از نقاط L و L' می‌گذرد، و به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

۴۵۶. تعریف. دسته دایرة (W)، متشکل از دایره‌های متعدد با دایره‌های دسته دایرة (U) را مزدوج (U) می‌نامند. روشن است که (U) نیز مزدوج (W) است.

در دو دسته دایرة هم محور مزدوج، هر دایرة یک دسته باهمه دایره‌های دسته دیگر متعدد است.

۴۵۷. ملاحظه. از دو دسته دایرة هم محور مزدوج، یکی از نوع متعاقع و دیگری از نوع نامتعاقع است، و نقاط اساسی یکی نقاط حدی دیگری است. به علاوه، محور اصلی و خط مرکزی یک دسته به ترتیب، خط مرکزی و محور اصلی دسته دیگر است.

دو دسته دایرة هم محور مزدوج با دو نقطه مفروض تعیین می‌شوند.

۴۵۸. قضیه. سه یا بیش از سه دایره که با یک دایره متعدد باشند و مراکزشان روی خط ثابتی قرار داشته باشند یک دسته دایرة هم محور تشکیل می‌دهند.

در واقع، اگر (W) دسته دایره‌ای باشد که توسط دایرة مفروض (A) و خط مفروض به عنوان محور اصلی تعیین می‌شود، این دایره‌ها دسته دایرة مزدوج (U) را تعیین می‌کنند.

۴۵۹. مسئله. دایره‌ای رسم کنید که از یک نقطه مفروض بگذرد و با دایره‌های یک دسته دایرة هم محور متعدد باشد.

دایرة مطلوب به دسته دایرة (W) که مزدوج دسته دایرة هم محور مفروض (U) است تعلق دارد ($\S ۴۵۶$)؛ پس مسئله به مسئله‌ای که قبلاً ($\S ۴۵۱$) حل کرده‌ایم تبدیل می‌شود.

۴۶۰. قضیه. خطهای قطبی یک نقطه نسبت به دایره‌های یک دسته دایرة هم محور همسانند.

فرض کنید خطوط قطبی نقطه مفروض P نسبت به دو دایره دسته دایرة مفروض (U)، مثلاً (A) و (B)، یکدیگر را در Q قطع کنند. در این صورت، دایرة (PQ) که قطر آن است با (A) و (B) متعدد است ($\S ۳۸۷$)؛ پس (PQ) با هر دایرة دیگری از (U)، مثلاً (C) متعدد است ($\S ۴۵۴$)، و بنابراین، P و Q نسبت به (C) مزدوج‌اند؛ پس خط قطبی P نسبت به (C) نیز از Q می‌گذرد و قضیه ثابت می‌شود.

۴۶۱. ملاحظه. دایرة (PQ) به دسته دایرة مزدوج دسته دایرة (U)، یعنی دسته دایرة (W) متعلق است؛ پس Q روی قطعی P ، در دایره‌ای است که از P می‌گذرد و به دسته دایرة (W) متعلق است. این راهی برای تعیین نقطه Q است.

همچنین می‌توان مشاهده کرد که چون دایرة (P) از نقطه P می‌گذرد و به دسته دایرة مفروض (U) تعلق دارد، با (PQ) متعدد است، خط Q در P بر P (بر P) مماس است، و Q متقابل P نسبت به نقطه برخورد این مماس با محور اصلی (U) است. این راه دیگری برای تعیین نقطه Q است.

۴۶۲. قضیه عکس. اگر خطوط قطبی نقطه مفروضی نسبت به سه، یا بیش از سه دایره با مرکزهای همخط، هر سه باشند، آن دایره‌ها هم محورند.

اگر Q نقطه مشترک خطوط قطبی نقطه P نسبت به دایره‌های (A) , (B) , (C) , ... باشد، این دایره‌ها با دایره‌ای که PQ قطر آن است متعامدند (§۳۸۷)؛ پس قضیه ثابت می‌شود (§۴۵۸).

۴۶۳. قضیه. اگر دو نقطه نسبت به یک دایره مزدوج باشند، مربع فاصله بین آنها با مجموع قوتهاشان نسبت به آن دایره برابر است.

فرض کنید A و B دو نقطه مزدوج نسبت به دایره مفروض (M) باشند.

(الف) خط AB دایره (M) را در دو نقطه C و D قطع می‌کند. فرض کنید O نقطه وسط AB باشد. با در نظر گرفتن اندازه و علامت، داریم

$$\begin{aligned} AC \cdot AD &= (AO + OC)(AO + OD) \\ &= AO^2 + AO(OC + OD) + OC \cdot OD \\ BC \cdot BD &= (BO + OC)(BO + OD) \\ &= BO^2 + BO(OC + OD) + OC \cdot OD \end{aligned}$$

با جمع کردن این رابطه‌ها و مشاهده این که

$$AO^2 = BO^2, \quad AO + BO = 0$$

به دست می‌آوریم

$$AC \cdot AD + BC \cdot BD = 2AO^2 + 2OC \cdot OD \quad (1)$$

ولی A و B نسبت به (M) مزدوج‌اند، و توسط C و D به صورت همساز تقسیم می‌شوند؛ پس (۱) به صورت زیر در می‌آید (§۳۴۶) :

$$AC \cdot AD + BC \cdot BD = 2AO^2 + 2AO^2 = 4AO^2 = AB^2 \quad (2)$$

و قضیه ثابت می‌شود.

(ب) خط AB دایره (M) را قطع نمی‌کند. هر دو نقطه A و B خارج (M) قرار دارند و آنها را می‌توان مرکزهای دو دایره (A) و (B) متعامد با (M) در نظر گرفت. چون نقاط A و B نسبت به (M) مزدوج‌اند، دایره (AB) که AB قطر آن است، با (M) متعامد است (§۳۸۷)؛ پس سه دایره (A) , (B) و (AB) هم محورند (§۴۵۸) و متقاطع، زیرا دسته دایره مزدوج که توسط (M) و خط AB به عنوان محور اصلی تعیین می‌شود، غیر متقاطع است.

پس دایره (AB) از نقاط برخورد دایره‌های (A) و (B) می‌گذرد؛ پس AB^2 با مجموع مربع شعاعهای (A) و (B) ، یعنی قوتها A و B نسبت به (M) برابر است.

۴۶۴. قضیه عکس. اگر مربع فاصله بین دو نقطه با مجموع قوتها این دو نقطه نسبت به دایره‌ای مفروض برابر باشد، آن‌گاه آن دو نقطه نسبت به دایره مفروض مزدوج‌اند.

(الف) خط واصل بین نقاط مفروض A و B دایره مفروض (M) را در دو نقطه C و D قطع می‌کند. بنابر فرض، رابطه (۲) برای نقاط A و B برقرار است (§۴۶۳) و رابطه (۱) برای هر چهار نقطه همخطی برقرار

است؛ پس با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) داریم

$$OC \cdot OD = AO^2 \quad \text{یا} \quad 2AO^2 + 2OC \cdot OD = AB^2 = 4AO^2$$

یعنی C و D را به صورت همساز تقسیم می‌کنند، و قضیه ثابت می‌شود.

(ب) خط AB دایرة (M) را قطع نمی‌کند. مریع AB ، بنابر فرض، با مجموع مریع شعاعهای (A) و (B)، که با (M) متعامدند و A و B مراکزشان هستند، برابر است. پس (A) و (B) با هم متعامدند؛ بنابر این، دایرة (AB) که AB قطر آن است، از نقاط برخورد این دو دایرہ می‌گذرد، یعنی با آنها هم محور است. پس (AB) با (M) متعامد است (§۴۵۴)؛ و قضیه ثابت می‌شود (§۳۸۶).

۴۶۵. ملاحظه. ضمیماً ثابت کردہ‌ایم که دو دایرہ متعامد با یک دایرہ سوم، که مرکزهایشان نسبت به آن دایرہ سوم مزدوج باشد، با هم متعامدند.

۴۶۶. نتیجه. اگر سه دایرہ دوبعد باهم متعامد باشند، مراکز هر دو تابی از آنها نسبت به سومی مزدوج‌اند.

تمرین

(۱) دایرہ‌ای رسم کنید که متعلق به دسته دایرہ هم محور مفروضی باشد و دایرہ مفروضی را که متعلق به این دسته دایرہ نیست نصف کند.

(۲) مکان هندسی وارون یک نقطه نسبت به دایرہ‌های یک دسته دایرہ هم محور را بیابید.

(۳) نشان دهید که مماس مشترک دو دایرہ یک دسته دایرہ هم محور غیر متقاطع، از یک نقطه حدی دسته با زاویه قائمه دیده می‌شود.

(۴) نقطه‌ای روی محور اصلی یک دسته دایرہ هم محور است؛ و PH مماسی است که از P بر یکی از دایرہ‌های دسته رسم شده است؛ ثابت کنید که $LH = PL$ ، که یک نقطه حدی دسته دایرہ مفروض است.

(۵) نشان دهید مماسی که از یک نقطه حدی بر دایرہ دلخواهی از یک دسته دایرہ هم محور رسم می‌شود، توسط محور اصلی دسته نصف می‌شود.

(۶) نشان دهید مماسی که از یک نقطه حدی بر دایرہ‌ای از یک دسته دایرہ هم محور رسم می‌شود، توسط هر دایرہ‌ای از دسته به طور همساز تقسیم می‌شود.

(۷) A, B, C, D نقاط برخورد دو دایرہ نامتقاطع با خط‌مرکزین آنها و L یکی از نقاط حدی آنهاست و $AL : LB = CL : LD$. نشان دهید که دو دایرہ برابرند.

(۸) برای هر رأس یک مثلث دایرہ‌ای رسم کردہ‌ایم که از آن رأس بگذرد، با دایرہ محیطی مثلث متعامد باشد، و مرکزش روی ضلع مقابل آن رأس باشد. نشان دهید که این سه دایرہ هم محورند.

(۹) مماسهایی که در رأسهای A ، B ، و C از یک مثلث حاده بر دایرہ محیطی آن مثلث رسم شده‌اند، به ترتیب اضلاع BC ، CA ، و AB را در U, V و W قطع کرده‌اند. ثابت کنید دایره‌هایی که AU, BV ، و CW قطوشان هستند هم محورند، و محور اصلی آنها خط اویلر مثلث است.

(۱۰) خط قطبی یک نقطه ثابت، نسبت به یک دایرہ متغیر ثابت است. نشان دهید که خط قطبی هر نقطه دیگری نسبت به این دایرہ، از نقطه ثابتی می‌گذرد.

(۱۱) یک دسته دایرہ هم محور مفروض است. نشان دهید خطی که از یک نقطه ثابت واقع بر محور اصلی و قطب این محور نسبت به دایرہ متغیری از دسته دایرہ می‌گذرد، آن دایرہ را در دو نقطه قطع می‌کند، و آن دو نقطه به دایرہ ثابتی تعلق دارند.

۴۶۷. قضیه. محورهای اصلی دایره‌های یک دسته دایره هم محور با دایره‌ای که متعلق به این دسته دایره نیست، همسان و نقطه همسی آنها روی محور اصلی دسته دایره قرار دارد.

فرض کنید (A) و (B) دو دایره دلخواه از دسته دایره (U) باشند، و (S) دایره‌ای باشد که متعلق به (U) نیست. سه محور اصلی سه جفت دایره

$$(S), (A) ; \quad (A), (B) ; \quad (S), (B) \quad (1)$$

یک نقطه مشترک دارند ($\S ۴۲۵$) که آن را I می‌نامیم. حال اگر (C) دایره دیگری از (U) باشد، سه محور اصلی سه جفت دایره

$$(S), (A) ; \quad (A), (C) ; \quad (S), (C) \quad (2)$$

نیز نقطه مشترکی، مانند I' ، دارند. ولی دو محور اول (۲) همان دو محور اول (۱) هستند؛ پس I' بر I منطبق است و قضیه اثبات می‌شود.

۴۶۸. ملاحظه. (الف) اگر I خارج (S) باشد، آنگاه I مرکز دایره‌ای متعامد با (S) و متعلق به دسته دایره هم محور (W) ، یعنی مزدوج دسته دایره (U) ، است.
 (ب) دایره (S) نسبت به دسته دایره هم محور (W) نیز نقطه مشابهی، مانند J ، دارد که روی محور اصلی (W) واقع است، و محور اصلی (W) همان خط مرکزی (U) است ($\S ۴۵۷$). نقاط I و J نسبت به (S) مزدوج‌اند ($\S ۴۶۵$).

۴۶۹. مسئله. دایره‌ای رسم کنید که متعلق به یک دسته دایره هم محور مفروض باشد و با دایره‌ای مفروض که متعلق به این دسته دایره نیست متعامد باشد.

فرض کنید (S) دایره مفروض، (U) دسته دایره مفروض، c خط مرکزی (U) و (W) دسته دایره مزدوج (U) باشد. محور اصلی (S) و دایره دلخواهی از (W) ، مثلاً (K) ، محور اصلی (W) ، یعنی c ، را در نقطه J قطع می‌کند. دایره‌ای متعلق به (U) و به مرکز J جواب مسئله است ($\S ۴۶۸$ ب).

اگر J خارج (S) باشد مسئله یک جواب دارد.

اگر (S) متعلق به دسته دایره (W) باشد، هر دایره‌ای از (U) جواب مسئله است.

۴۷۰. مسئله. دایره‌ای رسم کنید که متعلق به دسته دایره هم محور مفروضی باشد و بر دایره مفروضی که متعلق به این دسته دایره نیست، مماس باشد.

فرض کنید که محور اصلی دایره مفروض (S) و دایرة دلخواهی از دسته دایره هم محور مفروض (U) ، محور اصلی (U) را در I قطع کند، و T و T' نقاط تماش (S) با مماسهایی باشند که از I بر آن رسم می‌شوند. اگر خطوط ST و ST' خط مرکزی (U) را در دو نقطه C و C' قطع کنند، دایره‌های (C, CT) و (C', CT') دو جواب مسئله‌اند.

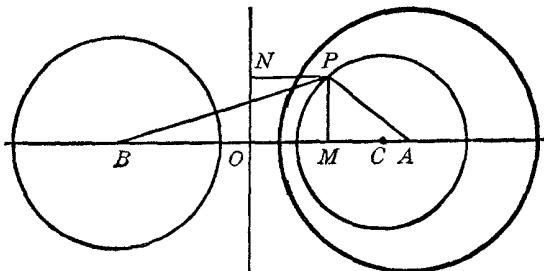
اگر I داخل دایره (S) باشد مسئله جواب ندارد.

به عنوان تمرین، حالتی را که مرکز (S) روی خط مرکزی (U) قرار دارد، و حالتی را که (S) متعلق به (U) است، جداگانه بررسی کنید.

۴۷۱. قضیه کیسی. قوت یک نقطه نسبت به یک دایره، منها قوت آن نقطه نسبت به دایره‌ای دیگر، با در نظر گرفتن اندازه و علامت، برابر است با دو برابر فاصله آن نقطه از محور اصلی دو دایره (ابتدا پاره خط روی محور اصلی)، ضربدر خط‌المرکزین دو دایره (ابتدا پاره خط در مرکز دایره‌ای که اول در نظر گرفته شده است).
 فرض کنید (A, a) و (B, b) دایره‌های مفروض، O محل برخورد AB و محور اصلی

آنها، و M و N پای عمودهای PM و PN باشند که از نقطه مفروض P بر AB و محور اصلی r رسم می‌شوند. اگر d^r تقاضل مورد نظر باشد، داریم

$$d^r = (PA^r - a^r) - (PB^r - b^r) = (PA^r - PB^r) - (a^r - b^r)$$



شکل ۱۱۶

با توجه به مثلهای قائم الزاویه PMA و PMB ، داریم

$$PA^r = PM^r + AM^r, PB^r = PM^r + BM^r$$

پس،

$$PA^r - PB^r = AM^r - BM^r$$

چون قوت O نسبت به دو دایره برابر است، داریم

$$OA^r - OB^r = a^r - b^r \quad \text{یا} \quad OA^r - a^r = OB^r - b^r$$

پس داریم

$$d^r = (AM^r - BM^r) - (OA^r - OB^r)$$

از این رابطه، با برداشتن گامهای زیر و در نظرگرفتن اندازه و علامت، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} d^r &= (AM + MB)(AM - MB) - (AO + OB)(AO - OB) \\ &= AB(AM - MB - AO + OB) \\ &= AB[(AO + OM) - (MO + OB) - AO + OB] \\ &= 2AB \cdot OM = 2AB \cdot NP \end{aligned}$$

۴۷۲. نتیجه. قوت یک نقطه واقع بر یک دایره نسبت به دایره‌ای دیگر، با در نظرگرفتن اندازه و علامت، برابر است با دو برابر حاصل ضرب فاصله آن نقطه از محور اصلی دو دایره (ابتداً پاره خط روی محور اصلی) در خط‌المرکزین دو دایره (ابتداً پاره خط در مرکز دایره‌ای که قوت نسبت به آن سنجیده می‌شود).
زیرا قوت یک نقطه واقع بر یک دایره، نسبت به آن دایره صفر است.

۴۷۳. قضیه. اگر دایره‌ای با دو دایره مفروض هم محور باشد، قوتهای هر نقطه این دایره نسبت به دایره‌های مفروض نسبت ثابتی دارند.
این نسبت، با در نظرگرفتن اندازه و علامت، با نسبت فاصله‌های مرکز دایره از مرکزهای دایره مفروض

اول و دایرۀ مفروض دوم برابر است.

فرض کنید P نقطۀ دلخواهی از دایرۀ (S) باشد که با دو دایرۀ مفروض (A) و (B) هم محور است.

همچنین فرض کنید که u و v قوتهای P نسبت به (A) و (B) باشند. اگر N پای عمودی باشد که از P بر محور اصلی دسته دایرۀ (A) ، (B) و (S) رسم می‌شود، با در نظر گرفتن اندازه و علامت، داریم (§۴۷۲)

$$u = 2NP \cdot AS, \quad v = 2NP \cdot BS$$

پس،

$$u : v = AS : BS$$

و این نسبت مستقل از محل P ببروی (S) است.

۴۷۴. ملاحظه. نسبت $v : u$ (§۴۷۳) بسته به این که S ببروی پاره خط AB باشد یا خارج آن، منفی یا مثبت است.

۴۷۵. قضیۀ عکس. مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت قوتهایش نسبت به دو دایرۀ مفروض، با در نظر گرفتن اندازه و علامت ثابت است، دایرۀ‌ای هم محور با دایرۀ‌های مفروض است.

اگر P نقطه‌ای از مکان هندسی باشد، مرکز دایرۀ (S) که از P می‌گذرد و با دایرۀ‌های مفروض (A) و (B) هم محور است (§۴۵۱)، خط‌المرکزین AB را به طور داخلی (در صورت منفی بودن نسبت مفروض) یا به طور خارجی (در صورت مثبت بودن نسبت مفروض) به طور یکتا تقسیم می‌کند (§۴۷۴). پس محل مرکز S ، و در نتیجه دایرۀ (S) ، با نسبت مفروض، و مستقل از محل P ، به طور یکتا تعیین می‌شود؛ بنابراین قضیۀ اثبات می‌شود.

۴۷۶. ملاحظه. اگر نسبت تنها با در نظر گرفتن اندازه مفروض باشد (§۴۷۵) مکان هندسی P از دو دایرۀ هم محور با دایرۀ‌های مفروض تشکیل می‌شود. مرکز این دایرۀ‌ها خط‌المرکزین دایرۀ‌های مفروض را به طور داخلی و خارجی به نسبت مفروض تقسیم می‌کنند.

۴۷۷. قضیه. دایرۀ تشابه دو دایرۀ مفروض، با این دایرۀ‌ها هم محور است.
اگر P یک نقطۀ دایرۀ تشابه دو دایرۀ مفروض (a) و (b) باشد، داریم

$$(PA^r - a^r) : (PB^r - b^r) = a^r : b^r \quad \text{یا} \quad PA : PB = a : b$$

پس نسبت قوتهای هر نقطۀ دایرۀ تشابه دو دایرۀ مفروض، نسبت به این دو دایرۀ ثابت است؛ پس قضیۀ ثابت می‌شود (§۴۷۵).

۴۷۸. نتیجه. یکی از دو مرکز تشابه دو دایرۀ غیرمتقطع بین نقاط حدی دو دایرۀ قرار دارد.
نقاط حدی L و L' برای دو دایرۀ (A) و (B) نسبت به هر دایرۀ هم محور با (A) و (B) (§۴۴۸)
الف) و به خصوص نسبت به دایرۀ تشابه (A) و (B) (§۴۷۷) واخون یکدیگرند. پس مرکز تشابه S و S' برای دایرۀ‌های (A) و (B)، توسط نقاط L و L' به طور همساز تقسیم می‌شوند.

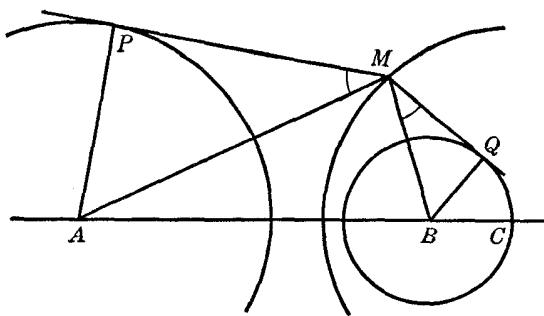
۴۷۹. ملاحظه ۱. اگر از یک نقطۀ دایرۀ تشابه دو دایرۀ، بتوان مماسهایی براین دو دایرۀ رسم کرد، نسبت این مماسهای با نسبت شعاع دایرۀ‌ها برابر است.

۴۸۰. ملاحظه ۲. دو دایرۀ از هر نقطۀ دایرۀ تشابه آنها، با زاویه‌های برابر دیده می‌شوند.
زیرا اگر MP و MQ (شکل ۱۱۷) مماسهایی از نقطۀ M روی دایرۀ تشابه دایرۀ‌های (A, a) و (B, b)

براین دایره‌ها باشند، داریم (§۴۷۹)

$$MP : MQ = a : b$$

پس دو مثلث قائم‌الزاویه MPA و MQB متشابه‌اند.



شکل ۱۱۷

۴۸۱. قضیه. دایرهٔ تشابه دو دایرهٔ تنها دایره‌ای است که با این دو دایره هم محور است و خط‌المرکزین آنها را به طور همساز تقسیم می‌کند.

اگر A و B مرکزهای دایره‌های مفروض (A) و (B) باشند، دایره‌هایی به قطر پاره خط همساز پاره خط AB ، یک دسته دایرهٔ هم محور (X) تشکیل می‌دهند که نقاط A و B نقاط حدی آن است (§۴۴۸ ب)، و دایرهٔ تشابه دو دایره (A) و (B) به (X) تعلق دارد.

از طرف دیگر، دایرهٔ تشابه (S) به دسته دایرهٔ هم محور (Z) که توسط دایره‌های (A) و (B) تعیین می‌شود (§۴۷۷)، نیز متعلق است. دو دسته دایره (X) و (Z) نمی‌توانند بیش از یک دایره مشترک داشته باشند (§۴۴۱)؛ بنابراین قضیه اثبات می‌شود.

۴۸۲. تعریف. دو دایره (S) و (S') که با دایره‌های (A) و (B) هم محورند و مرکزشان مرکز تشابه دو دایره (A) و (B) است، دایره‌های پاد متشابه دایره‌های (A) و (B) نامیده می‌شوند.

مرکز تشابه خارجی، یا مستقیم، مرکز دایره پاد متشابه خارجی، یا مستقیم، است و مرکز تشابه داخلی، یا غیرمستقیم، مرکز دایره پاد متشابه داخلی، یا غیرمستقیم است. اگر دو دایره مفروض متقاطع باشند، هر دو دایره پاد متشابه حقیقی‌اند، ولی اگر دو دایره مفروض غیرمتقاطع باشند، تنها یک دایره پاد متشابه حقیقی است (§۴۷۸).

۴۸۳. قضیه. دو دایرهٔ پاد متشابه دو دایرهٔ متقاطع باهم متعامدند. دایره‌های متقاطع (A) و (B) مفروض‌اند. دو دایرهٔ پاد متشابه آنها (S) و (S') ، و دایرهٔ تشابه آنها، (SS') ، هم محورند، زیرا هر سه به دسته دایره تعیین شده توسط (A) و (B) تعلق دارند (§۴۷۷، §۴۸۲)؛ پس قضیه ثابت می‌شود (§۳۶۵ ب).

۴۸۴. قضیه. مکان هندسی نقطه M که قوتیايش نسبت به دو دایره مفروض، اندازهٔ یکسان و علامت مخالف هم دارند، دایره‌ای هم محور با آن دو دایره است.

نسبت قوتیای نقطه M برای دو دایره مقدار ثابت ۱ - است؛ پس قضیه ثابت می‌شود (§۴۷۵).

۴۸۵. تعریف. مکان هندسی M (§۴۸۴) دایرهٔ اصلی دو دایره مفروض نامیده می‌شود.

۴۸۶. ملاحظه. اگر (A, a) و (B, b) دو دایره مفروض باشند، برای هو نقطه M از دایره اصلی (L) داریم

$$MA^2 + MB^2 = a^2 + b^2 \quad \text{یا} \quad MA^2 - a^2 = -(MB^2 - b^2)$$

پس مرکز دایره (L) ، یعنی نقطه L ، (مکان هندسی ۱۰، ۱۱) وسط پاره خط AB است، و مربع شعاع (L) از رابطه زیر به دست می آید:

$$\frac{1}{4}(a^2 + b^2 - AB^2) \quad \text{یا} \quad \frac{1}{4}(a^2 + b^2) - \frac{1}{4}AB^2 \quad (1)$$

۴۸۷. بحث. (الف) اگر دایره های مفروض متقاطع باشند، دایره اصلی آنها همیشه حقیقی است، زیرا همواره می توان یک دایره هم محور با آنها رسم کرد که مرکزش وسط خط مرکزین باشد.

(ب) اگر دایره های مفروض (B, b) و (A, a) متقاطع نباشند، دایره اصلی (L) در صورتی حقیقی است که AB خارج پاره خطی باشد که دو انتهایش نقاط حدی دسته دایره هم محور تعیین شده توسط دایره های مفروض است. اگر A و B هردو در یک طرف محور اصلی باشند، حتماً این شرط برقرار است، ولی اگر A و B در دو طرف محور اصلی باشند، این شرط ممکن است برقرار باشد و ممکن است برقرار نباشد.

رابطه (۱) آزمایش دیگری را فراهم می کند (§۴۸۶). بسته به اینکه $\frac{1}{4}AB^2 - a^2 + b^2$ مثبت، صفر، یا منفی باشد. دایرة اصلی، یک دایرة حقیقی، یک نقطه، یا یک دایرة موهومی است.

(ج) اگر $AB^2 = a^2 + b^2$ ، یعنی مربع شعاع (L) ، با $\frac{1}{4}AB^2$ برابر باشد، یعنی اگر دایره های مفروض متعامد باشند، دایرة اصلی آنها دایره ای است که خط مرکزین دو دایره قطر آن است.

۴۸۸. قضیه. اگر دو وتری که دو دایره مفروض روی یک مورب جدا می کنند همساز باشند، آنگاه نقطه های وسط این دو وتر روی دایرة اصلی دو دایره مفروض قرار دارند، و بر عکس.

اگر CD و EF دو وتری باشند که دایره های (A) و (B) روی یک مورب جدا می کنند، و P نقطه وسط CD باشد، قوتهای P نسبت به دو دایرة (A) و (B) به ترتیب عبارت اند از

$$PC \cdot PD = -PC' \cdot , \quad PE \cdot PF$$

حال اگر $-1 = (CDEF)$ ، داریم (§۳۴۶)

$$PC' = PE \cdot PF \quad (1)$$

و برای نقطه وسط EF هم رابطه مشابهی برقرار است. پس قضیه ثابت می شود (§۴۸۴).

بر عکس، اگر P روی دایرة اصلی (A) و (B) باشد، بنابر تعریف، داریم

$$PC' = PE \cdot PF \quad \text{یا} \quad -PC' = -PE \cdot PF$$

و دو وتر CD و EF همسازند (§۳۴۷).

۴۸۹. نتیجه. از هر نقطه M روی دایرة اصلی دو دایره مفروض، در حالت کلی، دو قاطع می گذرد که دایره های مفروض روی آنها وترهای همساز جدا می کنند. این دو قاطع دو خطی هستند که در M بر خطوطی که از M و مرکز دایره ها می گذرند، عمودند.

ولی باید توجه که با فرض حقیقی بودن دایرة (L) ، همیشه می توان عمودهایی بر M رسم کرد، اگرچه ممکن است این عمودها دایره های مفروض را در نقاط حقیقی قطع نکنند.

۴۹۰. ملاحظه. قاطعی که دو دایره متعامد بروی آن دو وتر همساز جدا می‌کنند، از مرکز حداقل یکی از دایره‌ها می‌گذرد. زیرا اگر دایره‌های مفروض متعامد باشند، مراکشان روی دایرة اصلی آنها قرار دارد (۴۸۷ج)، و اگر M نقطه‌ای روی دایرة اصلی (L) باشد، و A و B مرکزهای دو دایرة مفروض باشند، عمودی که در M بر AM رسم می‌شود، از روپرتوی قطری A در دایرة (L)، یعنی B می‌گذرد.

تمرین

- ۱) دایرة متغیر APQ از نقطه ثابت A می‌گذرد و خط مفروضی را در P و Q قطع می‌کند. قوت A نسبت به دایرة متغیر دیگر (M) که از P و Q می‌گذرد ثابت است. نشان دهید که فاصله بین مراکز دو دایرة متغیر ثابت است.
- ۲) دایرة متغیر از یک نقطه ثابت می‌گذرد و مرکز آن روی یک دایرة ثابت قرار دارد. نشان دهید که محور اصلی دایرة متغیر و دایرة ثابت بر دایرة ثابت دیگری مماس است.
- ۳) مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که طول مماس رسم شده از آن بر یک دایرة مفروض، واسطه هندسی بین یک پاره‌خط مفروض و فاصله آن نقطه از یک خط ثابت است.
- ۴) نشان دهید دایره‌ای که یک نیمساز داخلی مثلثی قطر آن است، با دایرة محاطی داخلی و دایرة محاطی خارجی که مرکزش روی نیمساز مذکور است، هم محور است. گزاره مشابهی را برای یک نیمساز خارجی بیان و اثبات کنید.
- ۵) نشان دهید دایره‌ای که دو انتهای یک قطوش مرکز تقل و مرکز ارتقای یک مثلث است، با دایرة محیطی و دایرة نه نقطه آن مثلث هم محور است.
- ۶) خطی که از یک نقطه برخورد دو دایره می‌گذرد، آن دایره‌ها را در نقاط P و Q هم قطع می‌کند. نشان دهید که وسط پاره‌خط PQ روی دایرة اصلی آن دو دایرة قرار دارد.
- ۷) از یک نقطه مفروض در صفحه قاطعی رسم کنید، به طوری که وترهای جدا شده روی آن توسط دو دایرة مفروض همساز باشند.
- ۸) خطی به موازات یک خط مفروض رسم کنید، به طوری که دو دایرة مفروض را در دو جفت نقطه همساز قطع کند.
- ۹) از نقطه مشترک O بین سه دایرة (P), (Q), و (R) قاطعی رسم کنید که دایره‌ها را در نقاط A , B , و C قطع کند و نسبت $AB : AC$ مقدار مفروضی باشد.
- ۱۰) چهار نقطه در صفحه مفروض آند. قوت هر نقطه را نسبت به دایره‌ای که از سه نقطه دیگر می‌گذرد به دست می‌آوریم. نشان دهید که مجموع معکوس این چهار قوت صفر است.
- ۱۱) (الف) نشان دهید که قوت یک نقطه نسبت به دایرة اصلی دو دایرة مفروض، با نصف مجموع قوتها آن نقطه نسبت به دو دایرة مفروض برابر است؛ (ب) سه دایرة مفروض آند، و هردو تایی از آنها یک دایرة اصلی دارند. نشان دهید که مجموع قوتها یک نقطه نسبت به آن سه دایره، با مجموع قوتها آن نقطه نسبت به دایره‌های اصلی برابر است.

ح. سه دایره

۴۹۱. مسئله. دایره‌ای رسم کنید که با سه دایره که مرکزهایشان همخاط نیستند متعامد باشد. مرکز دایرة مطلوب، که آن را R می‌نامیم، لزوماً روی سه محور اصلی دایره‌های (A) و (B), دایره‌های (C), و دایره‌های (A) و (C) قرار دارد (۴۲۸ج)؛ پس R نقطه مشترک این سه محور اصلی است.

دایرة (R) به مرکز R و متعامد با یکی از دایره‌های (A) ، (B) ، یا (C) جواب مسئله است.

۴۹۲. تعریف. نقطه R (§۴۹۱) مرکز اصلی یا مرکز تعامد سه دایره نامیده می‌شود.

دایرة (R) را دایرة متعامد سه دایرة مفروض می‌نامند.

۴۹۳. ملاحظه. قوت مرکز اصلی R نسبت به هر سه دایره یکسان است، و R همیشه یک نقطه حقیقی است.

دایرة (R) تنها در صورتی وجود دارد که قوت R نسبت به دایره‌های مفروض مشیت باشد، یا به عبارت دیگر، اگر R خارج دایره‌های مفروض باشد.

۴۹۴. قضیه. دایرة مفروض مکان هندسی نقطه‌ای است که خطوط قطبی آن نسبت به سه دایرة مفروض همسن باشند.

اگر خطوط قطبی نقطه P نسبت به سه دایرة مفروض یکدیگر را در Q قطع کنند، دایرة (PQ) که قطر آن است، با هر سه دایرة متعامد است (§۳۸۷)؛ پس (PQ) بر دایرة متعامد (R) برای دایره‌های مفروض منطبق است.

توجه کنید که روی دایرة متعامد (R) نیز قرار دارد، و نقاط P و Q در (R) رو بروی قطري هم هستند.

۴۹۵. قضیه. اگر (O) دایره‌ای باشد که از مرکزهای سه دایرة مفروض (A, a) ، (B, b) ، و (C, c) بگذرد، و (R) دایرة متعامد این سه دایره باشد، فاصله‌های A ، B ، و C از محور اصلی دایره‌های (R) و (O) با a^1 ، b^1 ، و c^1 متناسب است.

اگر p فاصله A از محور اصلی m باشد، آنگاه کمیت $RO \cdot 2p$ با تقاضل قوتهای A نسبت به (R) و (O) برابر است (§۴۷۱). این قوتها به ترتیب a^1 و صفر هستند، پس،

$$p : a^1 = 1 : 2RO \quad \text{یا} \quad a^1 = 2p \cdot RO$$

چون طرف راست این تساوی ثابت است، قضیه ثابت می‌شود.

۴۹۶. قضیه. سه دایرة مفروض که دویده دو در نظر گرفته شوند سه دایرة تشابه هم محور دارند.

دایره‌های مفروض (A) ، (B) ، و (C) هستند و (S_{ab}) ، یعنی دایرة تشابه دو دایرة (A) و (B) ، با این دو دایرة هم محور است (§۴۷۷)؛ پس (S_{ab}) با دایرة متعامد (R) برای دایره‌های (A) ، (B) ، و (C) متعامد است (§۴۵۴).

مرکزهای دایره‌های (A) و (B) ، یعنی دو نقطه A و B قطر (S_{ab}) را به صورت همساز تقسیم می‌کنند (§۳۹۹)؛ پس A و B نسبت به (S_{ab}) وارون یکدیگرند، و دایرة (O) که از مرکز A ، B ، و C می‌گذرد با (S_{ab}) متعامد است.

برای دایرة تشابه (B) و (C) ، یعنی (S_{bc}) ، و دایرة تشابه (C) و (A) ، یعنی (S_{ca}) نیز رابطه مشابهی برقرار است.

پس سه دایرة تشابه با دو دایرة (R) و (O) متعامدند؛ پس قضیه ثابت می‌شود (§۴۵۵).

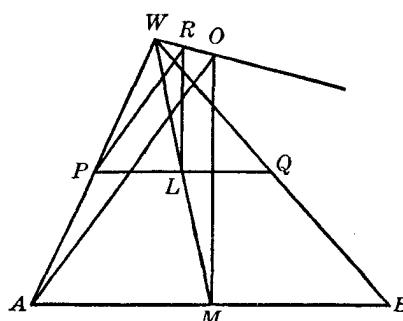
۴۹۷. ملاحظه. اگر دایرة (R) وجود نداشته باشد، باز هم قضیه ثابت می‌شود. چون استدلال فوق نشان می‌دهد که قوت R نسبت به سه دایرة یکسان است، و برای O ، مرکز (O) ، نیز مطلب مشابهی صادق است؛ پس خط OR محور اصلی هردوتایی از سه دایرة تشابه است.

۴۹۸. نتیجه. مراکز سه دایرة تشابه (S_{ab}), (S_{bc}), و (S_{ca}) روی محور اصلی دایرها (R) و قرار دارند.

۴۹۹. تعریف. اگر دسته دایرة هم محور تشکیل شده از سه دایرة تشابه دایرها مفروض ($\S ۴۹۶$) دو نقطه اساسی داشته باشد، آنها را نقاط همپوشانی سه دایرة مفروض می‌نامند.

نقاط همپوشانی سه دایرة حدی دسته دایرة هم محور تعیین شده توسط دایرة متعامد سه دایرة مفروض و دایرها است که از مراکز دایرها می‌گذرد ($\S ۴۵۷$).

۵۰۰. قضیه. سه وارون یک نقطه همپوشانی سه دایرة (A), (B), و (C) مرکز اصلی آنها، و O مرکز دایرة فرض کنید W نقطه همپوشانی سه دایرة (A), (B), و (C) باشد (شکل $(O) = ABC$).



شکل ۱۱۸

وارونهای W نسبت به (A) و (B), یعنی نقاط P و Q , روی خطی موازی با AB قرار دارند ($\S ۴۳۸$)؛ پس نقاط L و M , وسطهای PQ و AB , با W همخطاطاند. عمودمنصفهای PQ و AB به ترتیب از R و (O) می‌گذرند؛ پس،

$$WP : WA = WL : WM = WR : WO$$

در نتیجه، خطوط PR و AO موازی‌اند، و داریم

$$RP : OA = WR : WO$$

سه جمله آخر این تناسب به دایرة در نظر گرفته شده (A) بستگی ندارند؛ پس قضیه ثابت می‌شود.

۵۰۱. ملاحظه. اگر (R') دایرها باشد که از وارونهای W نسبت به سه دایرة مفروض می‌گذرد، نقطه W خط‌المرکزین دو دایرة (O) و (R'), یعنی پاره خط RO , را به نسبت شعاعهای دایرها (O) و (R'), یعنی RP و OA تقسیم می‌کند؛ پس W مرکز تشابه این دو دایرة است.

۵۰۲. قضیه. اگر شعاعهای سه دایرة متغیر که مراکز ثابت دارند طوری تغییر کنند که باهم متناسب بمانند، دایرها متعامد آنها یک دسته دایرة هم محور تشکیل می‌دهند.

نسبت شعاعهای هر دو دایرها از این سه دایرة متغیر ثابت است، پس مراکز تشابه این دو دایر ثابت است. همین مطلب در مورد دایرة تشابه آنها نیز صادق است. سه دایرة تشابه هم محور، و با دایرة متعامد (R)

برای دایره‌های مفروض، متعامدند (§۴۹۶)؛ پس (R) یک دسته دایره هم محور مزدوج با دسته دایره تعیین شده توسط دایره‌های تشابه را توصیف می‌کند.

۳۵۰. قضیه. سه نقطه نامحاط و یک خط مفروض اند؛ می‌توان سه دایره به مرکز این نقاط رسم کرد به طوری که خط مفروض یک محور تشابه آن سه دایره باشد.

فرض کنید Y و Z نقاط برخورد خط مفروض با اضلاع AC و AB از مثلث ABC باشند که A ، B ، C سه نقطه مفروض اند؛ فرض کنید Y' و Z' مزدوجهای همساز Y و Z نسبت به دو جفت نقطه A ، C و A ، B باشند؛ و فرض کنید (YY') و (ZZ') دایره‌هایی باشند که YY' و ZZ' قطر آنها هستند.

دایره (A) به مرکز A و شعاع دلخواه، دایره (B) به مرکز B و هم محور با (A) و (C) ، و دایره (C) به مرکز C و هم محور با (A) و (B) سه دایره‌ای هستند که ویژگی مطلوب را دارند.

دایره (ZZ') با (A) و (B) هم محور است و خط‌المرکزین این دو دایره، یعنی پاره‌خط AB ، را به طور همساز تقسیم می‌کند؛ پس (ZZ') دایرة تشابه (A) و (B) است (§۴۸۱) و Z یک مرکز تشابه این دو دایره است.

به طور مشابه، Y یک مرکز تشابه دو دایره (A) و (C) است و قضیه ثابت می‌شود (§۴۰۷).

باید توجه کنید که X ، محل برخورد خط مفروض YZ و BC ، یک مرکز تشابه دو دایره (B) و (C) است و دایرة تشابه (XX') برای دایره‌های (B) و (C) ، توسط X و مزدوج همساز آن نسبت به نقاط B و C ، یعنی نقطه X' ، تعیین می‌شود.

۴۵۰. ملاحظه. شعاع (A) را بدلخواه برگزیدیم؛ پس می‌توان سه دایره را به بینهایت شکل مختلف رسم کرد، ولی شعاع‌های مجموعه دایره‌های رسم شده متناسب خواهد بود.

۵۰۰. قضیه. سه دایره (A) ، (B) و (C) مفروض اند؛ اگر (D) و (E) به ترتیب دایره‌های اصلی (A) ، (B) و (C) باشند، آنگاه محور اصلی دایره‌های (D) و (E) بر محور اصلی دایره‌های (B) و (C) منطبق است.

دایره‌های (D) و (E) به ترتیب با دو جفت دایره (B) ، (A) و (C) ، (A) هم محورند؛ پس قوتهای مرکز اصلی سه دایره، یعنی نقطه R ، نسبت به دایره‌های (D) و (E) برابرند، زیرا با قوت R نسبت به (A) برابرند. بنابراین، محورهای اصلی دو جفت دایره (D) ، (E) و (B) ، (C) دو عمودی هستند که از مرکز اصلی R به خطوط DE و BC رسم می‌شوند. ولی BC و DE موازی اند، زیرا D نقطه وسط AB و E نقطه وسط AC است (§۴۸۶)، پس قضیه ثابت می‌شود.

تمرین

۱) مرعشعاع‌های سه دایرة مفروض را به مقدار مساوی زیاد، یا کم می‌کنیم. نشان دهید که مرکز اصلی سه دایره تغییر نمی‌کند.

۲) نشان دهید مرکز اصلی سه دایره‌ای که قطرهایشان اضلاع یک مثلث هستند، مرکز ارتفاعی آن مثلث است.

۳) نشان دهید که مرکز ارتفاعی مثلث ABC مرکز اصلی سه دایره‌ای است که قطرهایشان سه پاره‌خط سوایی AP ، BQ ، و CR هستند.

۴) دایره‌ای رسم کنید که مماسهای رسم شده به آن از سه نقطه مفروض دارای طولهای مفروضی باشند.

۵) سه دایرة مفروض اند، نقطه‌ای بیاید که با سه وارونش نسبت به سه دایرة مفروض چهار نقطه همدایره تشکیل دهد.

- (۶) سه دایرۀ نامتقاطع مفروض‌اند. هر دو تایی از این دایرۀ‌ها دو نقطۀ حدی دارند، نشان دهید که این سه جفت نقطۀ حدی همدایرۀ‌اند.
- (۷) سه دایرۀ مفروض‌اند. نشان دهید سه محور پاد اصلی این دایرۀ‌ها، که دوبه‌دو در نظر گرفته شوند، همسن‌اند.
- (۸) اگر هریک از سه دایرۀ مفروض بر دو دایرۀ دیگر مماس باشند، نشان دهید که دایرۀ متعمد آنها یک دایرۀ سه مماس متشی است که رأسهای آن مراکز سه دایرۀ مفروض‌اند.
- (۹) سه دایرۀ مفروض‌اند، دایرۀ چهارمی رسم کنید که محورهای اصلی آن با هریک از آن سه دایرۀ به ترتیب از سه نقطۀ مفروض بگذرند.
- (۱۰) سه دایرۀ با مرکزهای ناهمخط مفروض‌اند. نشان دهید که از شش دایرۀ پاد متشابه آنها، وقتی دوبه‌دو در نظر گرفته می‌شوند، هر سه تایی که مراکزشان همخط باشد، هم محورند.
- (۱۱) نشان دهید که فواصل یک نقطۀ همپویای سه دایرۀ از مراکز این دایرۀ‌ها، با شعاع دایرۀ‌های متناظر، متناسب‌اند.
- (۱۲) سه دایرۀ (A)، (B)، و (C) مفروض‌اند و خطی موازی با AB ، BC را در E قطع می‌کند. (D) دایرۀ‌ای به مرکز D و هم محور با (A) و (E) دایرۀ‌ای به مرکز E و هم محور با (A) و (C) است. نشان دهید که محور اصلی (D) و (E) بر محور اصلی (B) و (C) منطبق است.
- (۱۳) (الف) روی سه ضلع یک مثلث سه جفت نقطۀ مشخص شده است، به طوری که هر دو جفت نقطۀ چهار نقطۀ همدایرۀ‌اند. نشان دهید که هر سه جفت نقطۀ روی یک دایرۀ‌اند؛ (ب) اگر سه جفت نقطۀ شده باشند، به طوری که
- $$AC' \cdot AC'' = AB' \cdot AB'', BA' \cdot BA'' = BC' \cdot BC'', CB' \cdot CB'' = CA' \cdot CA''$$
- نشان دهید که این سه جفت نقطۀ همدایرۀ‌اند.
- ### تمرینهای تكميلي
- (۱) نشان دهید که از مرکز ارتفاعی یک مثلث بر خط واصل بین یک رأس و نقطۀ برخورد ضلع مقابل آن رأس با ضلع متناظر مثلث ارتفاعی، رسم می‌شود روی دایرۀ محیطی مثلث قرار دارد.
- (۲) از مثلثی محل مرکز ارتفاعی، محل یک رأس و محل نقطۀ برخورد ضلع مقابل آن رأس با ضلع متناظر مثلث ارتفاعی مفروض است، مثلث را رسم کنید.
- (۳) نشان دهید که پاد مرکز یک چهارضلعی محاطی، نسبت به دایرۀ‌هایی که قطرهایشان دو ضلع روبروی هم در چهارضلعی هستند، قوتی یکسان دارد.
- (۴) سه دایرۀ با مرکز ناهمخط و یک نقطۀ مفروض‌اند. سه دایرۀ رسم می‌کنیم که از نقطۀ مفروض بگذرند و هر کدام با دو دایرۀ از سه دایرۀ مفروض هم محور باشند، نشان دهید که این سه دایرۀ یک نقطۀ مشترک دیگر نیز دارند.
- (۵) روی یک دایرۀ چهار نقطۀ دلخواه A ، B ، C ، و D مشخص شده است؛ E در AB و F در AC و G در AD و H در BC و I در CD و J در EF و K در FG و L در GH و M در HI و N در IJ و O در JK و P در KL و Q در MN و R در OP و S در QR و T در PS و U در ST و V در QU و W در RV و X در WV و Y در UX و Z در TY و W در ZX و Y در WZ و U در YZ و V در UY و T در UV و S در TV و R در SV و Q در RS و P در QS و O در SP و N در PO و M در ON و L در OM و K در OL و J در OK و I در OL و H در OI و G در OJ و F در OJ و E در OK و H در OF و I در OF و J در OG و K در OG و L در OG و M در OG و N در OG و P در OG و Q در OG و R در OG و S در OG و T در OG و U در OG و V در OG و W در OG و X در OG و Y در OG و Z در OG و W در ZX و Y در WZ و U در YZ و V در UY و T در UV و S در TV و R در SV و Q در RS و P در QS و O در SP و N در PO و M در ON و L در OM و K در OL و J در OK و I در OL و H در OI و G در OJ و F در OJ و E در OK و H در OF و I در OF و J در OG و K در OG و L در OG و M در OG و N در OG و P در OG و Q در OG و R در OG و S در OG و T در OG و U در OG و V در OG و W در OG و X در OG و Y در OG و Z در OG و W در ZX و Y در WZ و U در YZ و V در UY و T در UV و S در TV و R در SV و Q در RS و P در QS و O در SP و N در PO و M در ON و L در OM و K در OL و J در OK و I در OL و H در OI و G در OJ و F در OJ و E در OK و H در OF و I در OF و J در OG و K در OG و L در OG و M در OG و N در OG و P در OG و Q در OG و R در OG و S در OG و T در OG و U در OG و V در OG و W در OG و X در OG و Y در OG و Z در OG و W در ZX و Y در WZ و U در YZ و V در UY و T در UV و S در TV و R در SV و Q در RS و P در QS و O در SP و N در PO و M در ON و L در OM و K در OL و J در OK و I در OL و H در OI و G در OJ و F در OJ و E در OK و H در OF و I در OF و J در OG و K در OG و L در OG و M در OG و N در OG و P در OG و Q در OG و R در OG و S در OG و T در OG و U در OG و V در OG و W در OG و X در OG و Y در OG و Z در OG و W در ZX و Y در WZ و U در YZ و V در UY و T در UV و S در TV و R در SV و Q در RS و P در QS و O در SP و N در PO و M در ON و L در OM و K در OL و J در OK و I در OL و H در OI و G در OJ و F در OJ و E در OK و H در OF و I در OF و J در OG و K در OG و L در OG و M در OG و N در OG و P در OG و Q در OG و R در OG و S در OG و T در OG و U در OG و V در OG و W در OG و X در OG و Y در OG و Z در OG و W در ZX و Y در WZ و U در YZ و V در UY و T در UV و S در TV و R در SV و Q در RS و P در QS و O در SP و N در PO و M در ON و L در OM و K در OL و J در OK و I در OL و H در OI و G در OJ و F در OJ و E در OK و H در OF و I در OF و J در OG و K در OG و L در OG و M در OG و N در OG و P در OG و Q در OG و R در OG و S در OG و T در OG و U در OG و V در OG و W در OG و X در OG و Y در OG و Z در OG و W در ZX و Y در WZ و U در YZ و V در UY و T در UV و S در TV و R در SV و Q در RS و P در QS و O در SP و N در PO و M در ON و L در OM و K در OL و J در OK و I در OL و H در OI و G در OJ و F در OJ و E در OK و H در OF و I در OF و J در OG و K در OG و L در OG و M در OG و N در OG و P در OG و Q در OG و R در OG و S در OG و T در OG و U در OG و V در OG و W در OG و X در OG و Y در OG و Z در OG و W در ZX و Y در WZ و U در YZ و V در UY و T در UV و S در TV و R در SV و Q در RS و P در QS و O در SP و N در PO و M در ON و L در OM و K در OL و J در OK و I در OL و H در OI و G در OJ و F در OJ و E در OK و H در OF و I در OF و J در OG و K در OG و L در OG و M در OG و N در OG و P در OG و Q در OG و R در OG و S در OG و T در OG و U در OG و V در OG و W در OG و X در OG و Y در OG و Z در OG و W در ZX و Y در WZ و U در YZ و V در UY و T در UV و S در TV و R در SV و Q در RS و P در QS و O در SP و N در PO و M در ON و L در OM و K در OL و J در OK و I در OL و H در OI و G در OJ و F در OJ و E در OK و H در OF و I در OF و J در OG و K در OG و L در OG و M در OG و N در OG و P در OG و Q در OG و R در OG و S در OG و T در OG و U در OG و V در OG و W در OG و X در OG و Y در OG و Z در OG و W در ZX و Y در WZ و U در YZ و V در UY و T در UV و S در TV و R در SV و Q در RS و P در QS و O در SP و N در PO و M در ON و L در OM و K در OL و J در OK و I در OL و H در OI و G در OJ و F در OJ و E در OK و H در OF و I در OF و J در OG و K در OG و L در OG و M در OG و N در OG و P در OG و Q در OG و R در OG و S در OG و T در OG و U در OG و V در OG و W در OG و X در OG و Y در OG و Z در OG و W در ZX و Y در WZ و U در YZ و V در UY و T در UV و S در TV و R در SV و Q در RS و P در QS و O در SP و N در PO و M در ON و L در OM و K در OL و J در OK و I در OL و H در OI و G در OJ و F در OJ و E در OK و H در OF و I در OF و J در OG و K در OG و L در OG و M در OG و N در OG و P در OG و Q در OG و R در OG و S در OG و T در OG و U در OG و V در OG و W در OG و X در OG و Y در OG و Z در OG و W در ZX و Y در WZ و U در YZ و V در UY و T در UV و S در TV و R در SV و Q در RS و P در QS و O در SP و N در PO و M در ON و L در OM و K در OL و J در OK و I در OL و H در OI و G در OJ و F در OJ و E در OK و H در OF و I در OF و J در OG و K در OG و L در OG و M در OG و N در OG و P در OG و Q در OG و R در OG و S در OG و T در OG و U در OG و V در OG و W در OG و X در OG و Y در OG و Z در OG و W در ZX و Y در WZ و U در YZ و V در UY و T در UV و S در TV و R در SV و Q در RS و P در QS و O در SP و N در PO و M در ON و L در OM و K در OL و J در OK و I در OL و H در OI و G در OJ و F در OJ و E در OK و H در OF و I در OF و J در OG و K در OG و L در OG و M در OG و N در OG و P در OG و Q در OG و R در OG و S در OG و T در OG و U در OG و V در OG و W در OG و X در OG و Y در OG و Z در OG و W در ZX و Y در WZ و U در YZ و V در UY و T در UV و S در TV و R در SV و Q در RS و P در QS و O در SP و N در PO و M در ON و L در OM و K در OL و J در OK و I در OL و H در OI و G در OJ و F در OJ و E در OK و H در OF و I در OF و J در OG و K در OG و L در OG و M در OG و N در OG و P در OG و Q در OG و R در OG و S در OG و T در OG و U در OG و V در OG و W در OG و X در OG و Y در OG و Z در OG و W در ZX و Y در WZ و U در YZ و V در UY و T در UV و S در TV و R در SV و Q در RS و P در QS و O در SP و N در PO و M در ON و L در OM و K در OL و J در OK و I در OL و H در OI و G در OJ و F در OJ و E در OK و H در OF و I در OF و J در OG و K در OG و L در OG و M در OG و N در OG و P در OG و Q در OG و R در OG و S در OG و T در OG و U در OG و V در OG و W در OG و X در OG و Y در OG و Z در OG و W در ZX و Y در WZ و U در YZ و V در UY و T در UV و S در TV و R در SV و Q در RS و P در QS و O در SP و N در PO و M در ON و L در OM و K در OL و J در OK و I در OL و H در OI و G در OJ و F در OJ و E در OK و H در OF و I در OF و J در OG و K در OG و L در OG و M در OG و N در OG و P در OG و Q در OG و R در OG و S در OG و T در OG و U در OG و V در OG و W در OG و X در OG و Y در OG و Z در OG و W در ZX و Y در WZ و U در YZ و V در UY و T در UV و S در TV و R در SV و Q در RS و P در QS و O در SP و N در PO و M در ON و L در OM و K در OL و J در OK و I در OL و H در OI و G در OJ و F در OJ و E در OK و H در OF و I در OF و J در OG و K در OG و L در OG و M در OG و N در OG و P در OG و Q در OG و R در OG و S در OG و T در OG و U در OG و V در OG و W در OG و X در OG و Y در OG و Z در OG و W در ZX و Y در WZ و U در YZ و V در UY و T در UV و S در TV و R در SV و Q در RS و P در QS و O در SP و N در PO و M در ON و L در OM و K در OL و J در OK و I در OL و H در OI و G در OJ و F در OJ و E در OK و H در OF و I در OF و J در OG و K در OG و L در OG و M در OG و N در OG و P در OG و Q در OG و R در OG و S در OG و T در OG و U در OG و V در OG و W در OG و X در OG و Y در OG و Z در OG و W در ZX و Y در WZ و U در YZ و V در UY و T در UV و S در TV و R در SV و Q در RS و P در QS و O در SP و N در PO و M در ON و L در

سوم را نصف کند.

(۷) مورب DEF امتداد اضلاع AB , BC و CA از مثلث ABC را در نقاط D , E , و F قطع می‌کند. سه دایره‌ای که این نقاط مرکزشان هستند و با دایرة محیطی ABC متعامدند، امتداد اضلاع متاظر را در P , Q , R و خود اضلاع را در P' , Q' و R' قطع می‌کند. نشان دهید که سه تایی‌های R : P , Q , R و P , Q , R '؛ R , Q , R '؛ P , Q , R '؛ P' , Q' , R' ؛ P , Q' , R' ؛ BQ , AP : CR ', BQ ', AP : CR '؛ CR ', BQ ', AP : CR ' همسانند.

ط. مسئله آپولونیوس

(۶) ده مسئله. مسئله تعیین دایره‌ای را که سه شرط از شرط‌های زیر را داشته باشد در نظر بگیرید: شرط P : دایره از نقطه مفروضی بگذرد؛ شرط L : دایره بر خط مفروضی مماس باشد؛ شرط C : دایره بر دایرة مفروضی مماس باشد. بهاین ترتیب ده مسئله خواهیم داشت که می‌توان آنها را به صورت نمادین زیر نشان داد (۱) PPP , (۲) PPL , (۳) PLL , (۴) PLC , (۵) PPC , (۶) PCC , (۷) PLC , (۸) LLC , (۹) LCC , (۱۰) CCC .

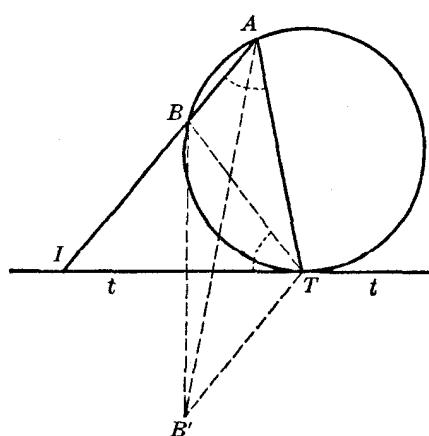
(۷) مسئله ۱. دایره‌ای رسم کنید که از سه نقطه مفروض بگذرد (PPP).

(۸) مسئله ۲. دایره‌ای رسم کنید که از دو نقطه مفروض بگذرد و بر خط مفروضی مماس باشد. (§۴۵۲)(PPL)

راه دیگر. فرض کنید A و B دو نقطه مفروض باشند، خط AB خط مفروض t را در I قطع کند، و در T بر دایرة مطلوب ABT مماس باشد (شکل ۱۱۹). اگر B' متقابن B نسبت به t باشد، تساویهای زیر را بین زاویه‌ها داریم

$$\begin{aligned}\angle ATB' &= \angle ATB + \angle BTB' = \angle ATB + \angle BTI + \angle BTI \\ &= \angle ATB + \angle BAT + \angle BTI = \angle IBT + \angle BTI \\ &= 180^\circ - \angle BIT\end{aligned}$$

پس پاره خط معلوم AB' از نقطه T با زاویه معلومی دیده می‌شود؛ پس T را می‌توان تعیین کرد (مکان هندسی ۷، ۱۱۹).



شکل ۱۱۹

متقارن T نسبت به I جواب دیگری را برای مسئله به دست می‌دهد.

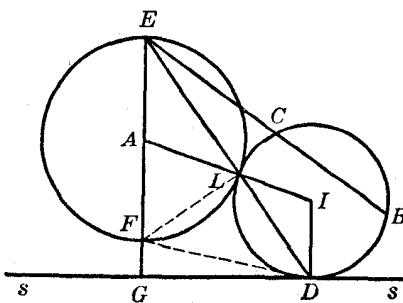
۵۰۹. مسئله ۳. دایره‌ای رسم کنید که بر دو خط مفروض مماس باشد و از یک نقطه مفروض بگذرد (PLL). دایرة مطلوب از P' ، متقارن P نسبت به نیمساز زاویه‌ای که دو خط تشکیل می‌دهند، نیزمی‌گذرد و مسئله به مسئله قبل تبدیل می‌شود.

۵۱۰. مسئله ۴. دایره‌ای رسم کنید که بر سه خط مفروض مماس باشد (LLL) (§۱۱۷). حالتی را در نظر بگیرید که دو خط، یا هر سه خط، موازی باشند.

۵۱۱. مسئله ۵. دایره‌ای رسم کنید که از دو نقطه مفروض بگذرد و بر دایرة مفروض مماس باشد (PPC) (§۴۷۰).

۵۱۲. مسئله ۶. دایره‌ای رسم کنید که از یک نقطه مفروض بگذرد و بر یک خط و یک دایرة مفروض مماس باشد (PLC).

فرض کنید دایرة مطلوب (I) (شکل ۱۲۰) از نقطه مفروض B بگذرد، بر دایرة مفروض (A) در نقطه L و بر خط مفروض s در نقطه D مماس باشد. نقطه L یک مرکز تشابه دو دایره است، پس خط LD از یک انتهای قطر EF از دایرة (A) که با شعاع ID از دایرة (I) موازی است می‌گذرد. پس نقطه E معلوم است، زیرا قطر عمود بر خط s از دایرة (A) است.



شکل ۱۲۰

فرض کنید EF خط s را در G قطع کند. قطر EF از نقطه L با زاویه قائمه دیده می‌شود؛ پس هم از L و هم از G با زاویه قائمه دیده می‌شود و $LFGD$ یک چهارضلعی محاطی است. پس داریم

$$EF \cdot EG = EL \cdot ED = EB \cdot EC.$$

و بازه خط EC را می‌توانیم به عنوان جزء چهارم تناسب رسم کنیم. این پاره خط نقطه C را روی خط EB تعیین می‌کند، و مسئله به مسئله (PPC) تبدیل می‌شود، و دو جواب برای مسئله عنوان شده به دست می‌آید. می‌توان کاری کرد که F نقش E را داشته باشد، به این ترتیب دو جواب دیگر به دست می‌آید، و مسئله چهار جواب دارد.

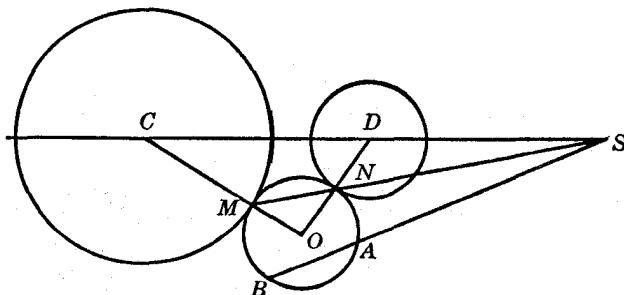
۵۱۳. مسئله ۷. دایره‌ای رسم کنید که از یک نقطه مفروض بگذرد و بر دو دایرة مفروض مماس باشد (PCC) (§۴۰۹). نقاط تمسیح دایرة مطلوب (O) (شکل ۱۲۱) با دایره‌های مفروض (C) و (D) را به ترتیب، M و N نامیم. این دو نقطه با مرکز تشابه دایره‌های (C) و (D)، یعنی نقطه S ، ممکن است (SA)؛ پس اگر

یعنی خطی که از S و نقطه مفروض A بر روی (O) می‌گذرد، (O) را در نقطه B هم قطع کند، آنگاه داریم

$$SA \cdot SB = SM \cdot SN$$

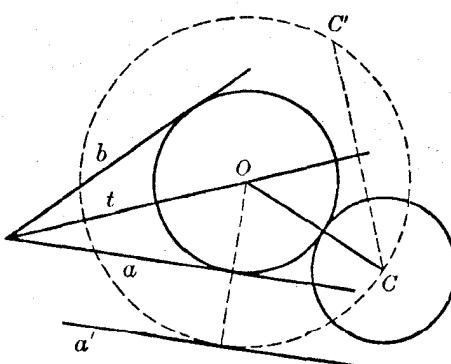
طرف راست تساوی فوق مقداری معلوم است ($\S ۴۰۰$)؛ پس B را می‌توان روی خط مفروض SA تعیین کرد و مسئله به حالت (PPC) تبدیل می‌شود، و دو جواب برای مسئله عنوان شده بدست می‌آید.

با استفاده از مرکز تشابه دیگر دایره‌های (C) و (D) ، یعنی $'S$ دو جواب دیگر برای مسئله به دست می‌آید، و مسئله روی هم رفته چهار جواب دارد.



شکل ۱۲۱

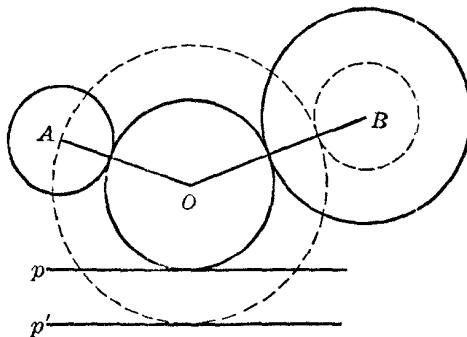
۵۱۴. مسئله ۸. دایره‌ای رسم کنید که بر دو خط و یک دایره مفروض مماس باشد (LLC).
فرض کنید a و b دو خط مفروض، (C, c) دایره مفروض، و (O, r) دایرة مطلوب باشند. دایرة $(O, r + c)$ (شکل ۱۲۲) از نقطه C و متقارن C نسبت به نیمساز زاویه متشکل از a و b ، یعنی نقطه C' ، هم می‌گذرد زیرا O روی نیمساز t قرار دارد. بعلاوه، $(O, r + c)$ بر خط a' ، که به فاصله c از a و به موازات a قرار دارد، نیز مماس است. پس مسئله $(O, r + c)$ است، و با ترسیم $(O, r + c)$ ، مرکز (O, r) تعیین می‌شود.



شکل ۱۲۲

مسئله (PPL) دو جواب دارد. متقارن C را می‌توان نسبت به هر یک از دو نیمساز زاویه بین a و b تعیین کرد و خط موازی a ، یعنی a' را می‌توان در هر یک از دو طرف a رسم کرد؛ پس مسئله (LLC) می‌تواند هشت جواب داشته باشد.

۵۱۵. مسئله ۹. دایره‌ای مماس بر یک خط و دو دایره مفروض، رسم کنید (LCC).
 فرض کنید p خط مفروض، (A, a) و (B, b) دایره‌های مفروض، و (O, r) دایرة مطلوب باشد (شکل ۱۲۳). اگر a کوچکتر از b باشد، دایرة $(O, r+a)$ از نقطه A می‌گذرد، بر دایرة $(B, b-a)$ مماس است، و بر خط p' که به فاصله a به موازات p رسم می‌شود نیز مماس است. پس ترسیم $(O, r+a)$ یک مسئله است و بارسم آن مرکز O مشخص می‌شود.



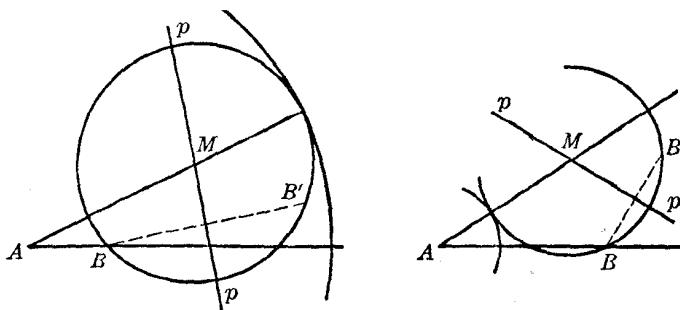
شکل ۱۲۳

چون مسئله (PLC) چهار جواب دارد، و p' را می‌توان در هر دو طرف p رسم کرد، مسئله (LCC) می‌تواند هشت جواب داشته باشد.

۵۱۶. مسئله آبولونیوس. دایره‌ای مماس بر سه دایرة مفروض رسم کنید (CCC).
 فرض کنید که (A, a) ، (B, b) و (C, c) دایره‌های مفروض باشند و (r) دایرة مطلوب باشد. اگر a کوچکترین شعاع مفروض باشد، دایرة $(O, r+a)$ از A می‌گذرد و بر دایره‌های $(B, b-a)$ و $(C, c-a)$ مماس است. پس ترسیم $(O, r+a)$ یک مسئله (PCC) است و O تعیین می‌شود. مسئله می‌تواند هشت جواب داشته باشد.

۵۱۷. مسئله. روی یک خط مفروض نقاطی تعیین کنید که مجموع (یا تفاضل) فاصله‌هایش از دو نقطه مفروض مقدار مفروضی باشد.

فرض کنید که p خط مفروض، A و B نقاط مفروض، m طول مفروض و M نقطه مطلوب روی p باشد. دایرة (M, MB) (شکل ۱۲۴) از متقابل B نسبت به p می‌گذرد و بر دایرة (A, m) مماس است؛ پس (M, MB) را می‌توان رسم کرد (§۵۱۱) و به این ترتیب M مشخص می‌شود.



شکل ۱۲۴

تمرین

- ۱) نقطه A خارج دایرة (O) مفروض است. دایره‌ای رسم کنید که بر دایرة (O) و خط OA مماس و مرکزش روی خط مماس از A بر (O) باشد.
- ۲) دایره‌ای رسم کنید، به طوری که وترهایی که از برخورد آن باشد دایرة مفروض تعیین می‌شوند، طولهای مفروضی داشته باشند.
- ۳) از مثلثی قاعده، ارتفاع وارد بر قاعده و مجموع (یا تفاضل) طول اضلاع دیگر آن مفروض اند. مثلث را رسم کنید.
- ۴) از مثلثی قاعده، مجموع (یا تفاضل) طول دو ضلع دیگر، و زاویه‌ای که میانه وارد بر قاعده با قاعده می‌سازد مفروض است. مثلث را رسم کنید.
- ۵) از مثلثی قاعده، ارتفاع وارد بر قاعده، و مجموع طول میانه‌های وارد بر اضلاع جانبی $(a, h_a, m_b + m_c)$ مفروض اند. مثلث را رسم کنید.
- ۶) نقطه P روی ضلع AB از مثلث ABC مفروض است. نقطه Q را روی AC طوری تعیین کنید که طول PQ با مجموع فاصله‌های نقاط P و Q از ضلع BC برابر باشد.
- ۷) روی یک خط مفروض نقطه‌ای بیابید که مجموع طول میانه‌ای که از آن بر دو دایرة مفروض رسم می‌شوند مقدار مفروضی باشد.

تمرینهای تكميلی

- ۱) اگر G مرکز نقل مثلث ABC باشد، نشان دهید که قوتها رأسهای A, B و C به ترتیب نسبت به دایره‌های GBC, GCA ، و GAB ، برابرند.
- ۲) نقطه M را روی دایرة محیطی مثلث ABC طوری تعیین کنید که داشته باشیم $MA' = MB \cdot MC$.
- ۳) ABC یک مثلث، A' نقطه وسط BC و P قطب BC نسبت به دایرة محیطی مثلث است. از نقطه وسط $A'P$ خطی به موازات BC رسم می‌کنیم TAB و AC ، یا ادامه آنها، را در Q و R قطع کند؛ نشان دهید که A, P, Q, R ، و A' همدایره هستند.
- ۴) دو نقطه P و Q روی دایرة محیطی (O) از مثلث ABC مفروض اند. دو دایره رسم می‌کنیم که از این دو نقطه بگذرند و در A' و A'' بر BC مماس باشند. $B', B'', C', C'', A', A'', C'A$ و CA فرض کنید. با فرض اینکه $A', A'', C', C'', B', B'', A''$ خارج (O) و A'' داخل (O) باشند، نشان دهید که (C', B'', A'') ، (C'', B', A') ، (C', B', A'') ، (A', B'', C'') ، (A'', B', C') ، (A'', B'', C'') ، (A', B', C') ، (A', B'', C'') خطوط (CC'', BB', AA'') ، (AA'', BB', CC') ، (CC'', BB'', AA'') ، (AA', BB', CC'') همداشت هستند.

- ۵) نشان دهید که نسبت فاصله‌های مراکز دو دایره از محور اصلی آنها، با نسبت فاصله‌های این خط از قطبها نسبت به دایره‌ها برابر است.

- ۶) سه دایره با مرکزهای A, B, C در نقطه D مشترک‌اند و یکدیگر را دو به دو در نقاط A', B', C' و O' قطع می‌کنند. وتر مشترک DC' در دو دایرة اول، دایرة سوم را در C'' قطع می‌کند. A'' و B'' را نقاط متناظری روی دو دایرة دیگر فرض کنید. ثابت کنید که پاره‌خطهای $A'A'', A''B'', B'B'', C'C'', C''A'$ و $O'C'$ دو برابر ارتفاعهایی از مثلث ABC هستند.

- ۷) دو دایرة (O, R) و (O', R') چنان‌اند که می‌توان چهار ضلعی‌ای رسم کرد که محاط در (O, R) و محیط بر (O', R') باشند.

- اگر $c = OO'$ ، ثابت کنید که (الف) $(R^2 + c^2)^2 = 2R^2(R^2 - c^2)$ ؛ (ب) R^2 نمی‌تواند کوچکتر از $2R'^2$ باشد؛ (ج) اگر $R^2 = 2R'^2$ دایره‌ها هم مرکزند و همه چهار ضلعی‌ها مربع‌اند.

- (۸) روی مماسی بر یک دایره، دو نقطه به فاصله‌ای یکسان از یک نقطه ثابت این خط مماس مشخص شده است. نشان دهید که مکان هندسی تلاقی دو مماسی که از این دو نقطه بر دایره رسم می‌شوند، یک خط راست است.
- (۹) در یک اتاق دایره‌ای شکل، یک گوی را باید در چه جهتی روی گفتابیم تا پس از دو انعکاس حاصل از برخورد با دیوار، از محل اولیه‌اش بگذرد؟
- (۱۰) سه دایره رسم شده‌اند که هر سه در یک نقطه بر دایره محیطی یک مثلث مماس خارجی‌اند و هر کدام بر یکی از اضلاع آن مثلث مماس‌اند. ثابت کنید که (الف) نقاط تمسas با اضلاع مثلث همخاطراند؛ (ب) اگر این دایره‌ها بر دایره محیطی مماس داخلی باشند، نقاط تمسas با اضلاع مثلث پاهای سه خط سوای هم‌رسانند.
- (۱۱) از یک مثلث محل دایره محاطی داخلی، محل وسط یک ضلع، و محل نقطه‌ای روی نیمساز خارجی زاویه مقابل آن ضلع مفروض است. این مثلث را رسم کنید.
- (۱۲) مماس مشترک دایره‌های (O) و (O') در نقاط A و A' بر این دو دایره مماس‌اند. از یک نقطه ثابت AA' قاطع متغیر رسم می‌کنیم که (O) را در B و C و (O') را در B' و C' قطع کند. نشان دهید مکان هندسی نقاط برخورد خطوط AB و AC با خطوط $A'B'$ و $A'C'$ دایره‌ای هم محور با دایره‌های (O) و (O') است.
- (۱۳) دایرة متغیر (M) در I بر دایرة مفروض (O) مماس است و با دایرة دیگر (O') متعامد است و آن را در H و K قطع می‌کند. اگر خطوط HK و IO' یکدیگر را در P قطع کنند و IO دایرة (M) را در N هم قطع کند، نشان دهید که (الف) خطوط MN و MP خط OO' را در دو نقطه ثابت قطع می‌کنند؛ (ب) دایرة متغیر (M) بر یک دایرة ثابت دیگر مماس است.
- (۱۴) در یک مثلث سه خط سوایی هم‌رسان داریم؛ سه دایره رسم می‌کنیم به‌طوری که هر کدام از خطوط سوایی قطر یکی از آنها باشد. از مرکز ارتقایی مثلث بر هر یک از خطوط سوایی عمودی رسم می‌کنیم تا دایرة متناظر با آن خط را در دو نقطه قطع کند. نشان دهید که شش نقطه‌ای که به این ترتیب تعیین می‌شوند، هم‌دایره‌اند.
- (۱۵) در یک مثلث سه خط سوایی هم‌رسان داریم؛ سه دایرة رسم می‌کنیم به‌طوری که هر ضلع مثلث قطر یکی از آنها باشد. از مرکز ارتقایی مثلث بر هر یک از خطوط سوایی عمودی رسم می‌کنیم تا دایرة متناظر را در دو نقطه قطع کند. نشان دهید که شش نقطه‌ای که به این ترتیب تعیین می‌شوند، هم‌دایره‌اند.
- (۱۶) سه دایرة رسم کردۀ این که قطر هر کدام یکی از سه خط سوایی هم‌رسان یک مثلث است. سه دایرة نیز رسم کردۀ این که قطر هر کدام یکی از اضلاع همان مثلث است. هر دایرة رسم شده روی خط سوایی، دایرة رسم شده روی ضلع متناظر را در دو نقطه قطع می‌کند. نشان دهید شش نقطه‌ای که به‌این ترتیب حاصل می‌شود، هم‌دایره‌اند.
- (۱۷) خط راستی رسم می‌کنیم که از مرکز دایرة محیطی مثلث ABC بگذرد و اضلاع AB ، BC و CA را در P ، Q ، و R قطع کند؛ ثابت کنید دایره‌هایی که PQ ، AP ، BQ ، و CR قطرهایشان هستند دو نقطه مشترک دارند، یکی روی دایرة محیطی و دیگری روی دایرة نه نقطه. همچنین، نشان دهید که وتر مشترک دایره‌ها از مرکز ارتقایی مثلث می‌گذرد. اگر P' ، Q' ، و R' متقابلهای P ، Q ، و R نسبت به مرکز دایرة محیطی مثلث، یعنی نقطه O ، باشند، نشان دهید که خطوط AP' ، BQ' و CR' یکدیگر را روی دایرة محیطی مثلث قطع می‌کنند.
- (۱۸) سه دایرة رسم کنید که هر کدام از دو رأس یک مثلث بگذرند و بر دایرة محاطی داخلی آن عمود باشند. نشان دهید که (الف) مثلثی که رأسهای آن مراکز این سه دایره‌اند، با مثلثی که رأسهای آن نقاط تمسas

- دایره محاطی داخلی آنده، متجانس است؛ (ب) مراکز دایره‌های محیطی این دو مثلث بر هم منطبق‌اند، و تقاضل شعاع‌های دایره‌های محیطی با نصف شعاع دایرة محاطی داخلی مثلث اصلی برابر است.
- دایره‌های محاطی خارجی را نیز در نظر بگیرید.
- (۱۹) دو نقطه ثابت A و B مفروض‌اند. خط متغیری را در نظر می‌گیریم که از نقطه ثابت دیگری می‌گذرد. دو دایره رسم شده‌اند که به ترتیب، از A و B می‌گذرند و بر خط مذکور در M و N مماس‌اند. ثابت کنید دایره‌ای که از M ، N ، و A (یا B) می‌گذرد، از نقطه ثابت دیگری نیز می‌گذرد.
- (۲۰) اگر S یک مرکز شتابه دو دایرة متعامد متقاطع در نقاط A و C باشد، و اگر B و D نقاط برخورد خط‌المرکزین دایره‌ها با خطوط قطبی S نسبت به این دو دایره باشند، ثابت کنید که $ABCD$ یک مریع است.
- (۲۱) از دو دایره، دو مرکز شتابه، طول یک مماس مشترک و راستای مماس مشترک دیگر مفروض‌اند. دو دایره را رسم کنید.
- (۲۲) مکان هندسی نقطه P را که مماسهای PA ، PB و PC رسم شده از آن نقطه بر سه دایرة هم محور مفروض در رابطه $PA \cdot PB : PC^2 = k$ صدق می‌کنند، به دست آورید.
- (۲۳) دو نقطه متغیر C و D روی خط ثابت s قرار دارند و از نقطه O ، مرکز دایرة مفروض (O) هم‌فاصله‌اند. از این دو نقطه مماسهای CE و DF را بر (O) رسم می‌کنیم. این دو مماس یکدیگر را در M قطع می‌کنند. (الف) مکان هندسی M را بیابید؛ (ب) مکانهای هندسی مرکز دایرة محاطی داخلی و ارتفاعی مثلث MEF را بیابید. (ج) اگر P نقطه مفروضی باشد، مکان هندسی مرکز دایرة محیطی PEF را بیابید.
- (۲۴) دو دایره یکدیگر را در A و B قطع می‌کنند و در C و D بر یک دایرة دیگر مماس‌اند. نشان دهید که $AC : AD = BC : BD$.
- (۲۵) دو دایرة متقاطع داریم که یک دایرة متغیر بر آنها مماس است. نشان دهید که خط قطبی یک نقطه مشترک دو دایرة متقاطع نسبت به دایرة متغیر از یک نقطه ثابت می‌گذرد. (فرض می‌کنیم که دایرة متغیر به یک شیوه بر دو دایرة متقاطع مماس است، یعنی هر دو مماس داخلی هستند یا خارجی). نشان دهید اگر دو دایرة مفروض مماس باشند، این قضیه برای نقطه تماس آن دو دایره نیز صادق است.
- (۲۶) نشان دهید سه وتر تقاطع دایرة محیطی یک مثلث با دایره‌های محاطی خارجی، اصلاح متاظر مثلث را در سه نقطه همخلط قطع می‌کنند.
- (۲۷) اگر سه مماس p ، q ، و r که از رأسهای یک مثلث بر دایرة (S) رسم می‌شوند چنان باشند که یکی از حاصل ضربهای ap ، bq و cr با مجموع دو حاصل ضرب دیگر برابر باشد، ثابت کنید که (S) بر دایرة محیطی مثلث مماس است. a ، b ، و c طول اصلاح مثلث هستند.
- (۲۸) چهار دایره می‌توان رسم کرد که بر اصلاح AB و AC از مثلث ABC و دایرة محیطی مثلث (O) مماس باشند. نشان دهید هر یک از چهار خط قطبی A نسبت به این چهار دایره، از یکی از مراکز سه مماس مثلث ABC می‌گذرد.
- (۲۹) (الف) دو دایرة متعامد (A) و (B) مفروض‌اند. نشان دهید که دایرة اصلی (A) و (B) دایرة شتابه دایره‌های پادمتشاره (A) و (B) است. (ب) دایره‌های (A) و (B) دایره‌های پادمتشاره دایره‌های پادمتشاره (A) و (B) هستند.
- (۳۰) نشان دهید که مرکز تجانس مثلثهای ارتفاعی و مماسی مثلث مفروض (T) (§۱۹۱) قطب محور ارتفاعی (T) نسبت به دایرة محیطی (T) است.

انعکاس

۵۱۸. چند تعریف. اگر یک نقطه O به عنوان مرکز یا قطب انعکاس، و یک ثابت k به عنوان ثابت انعکاس مفروض باشند، به هر نقطه P از صفحه، نقطه P' روی خط OP ، را متناظر می‌کنیم به طوری که داشته باشیم $OP \cdot OP' = k$.

اگر ثابت k مثبت باشد، دو نقطه P و P' در یک طرف مرکز انعکاس O گرفته می‌شوند؛ اگر k منفی باشد، نقاط P و P' در دو طرف O قرار می‌گیرند.

اگر ثابت انعکاس k مثبت باشد، دایره (O) به مرکز O و شعاع \sqrt{k} ، دایره انعکاس نامیده می‌شود. هر نقطه روی محیط (O) برعکس خودش منطبق است، و اگر P و P' منعکس هم باشند، نسبت به دایره (O) والرون هم خواهند بود (§۳۵۸). شعاع (O) را شعاع انعکاس می‌نامند.

خط OP ، که از P به مرکز انعکاس O رسم می‌شود، بردار شعاع P نامیده می‌شود.

انعکاس به مرکز O و ثابت k را گاهی با ناماد (O, k) نمایش می‌دهند.

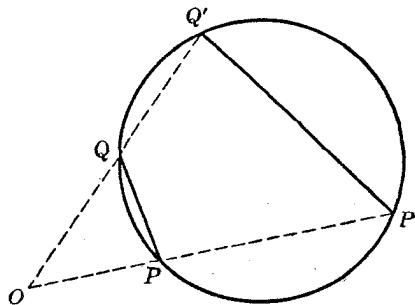
اگر نقاط P و P' در انعکاس (O, k) باهم متناظر باشند، و نقطه P خم مفروض (C) را بیماید، خم (C') که مسیر حرکت P' است، منعکس خم (C) نامیده می‌شود.

۵۱۹. قضیه. دو نقطه P و Q و نقاط متناظرشان P' و Q' یا همخطاًند یا همدایره.

در حالت دوم خطوط PQ و $P'Q'$ نسبت به بردارهای شعاع OP و OQ پادموازی‌اند.

۵۲۰. مسئله. طول بردارهای شعاع دو نقطه مفروض، و طول پاره‌خطهای واصل بین این دو نقطه مفروض است. طول پاره خط واصل بین منعکسهای دو نقطه را بیایید.

فرض کنید P' و Q' نقاط متناظر دو نقطه مفروض P و Q ، در انعکاس (O, k) باشند (شکل ۱۲۵).



شکل ۱۲۵

داریم $OP \cdot OP' = k$ و با توجه به مثلهای مشابه OPQ و $OP'Q'$ ، داریم

$$P'Q' : PQ = OP' : OQ = OP \cdot OP' : OP \cdot OQ = k : OP \cdot OQ$$

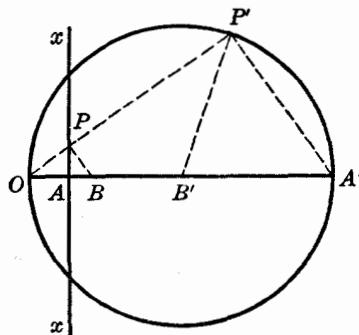
پس

$$P'Q' = PQ(k : OP \cdot OQ) \quad (f)$$

۵۲۱. قضیه. اگر نقطه‌ای روی خط راستی که از مرکز انعکاس نمی‌گذرد حرکت کند، منعکس آن دایره‌ای را می‌پساید که از مرکز انعکاس می‌گذرد.

فرض کنید A پای عمودی باشد که از O بر خط مفروض x رسم می‌شود؛ فرض کنید P نقطه دلخواهی از x باشد، و A' و P' منعکس A و P باشند (شکل ۱۲۶). خطوط AP و $A'P'$ نسبت به خطوط OAA' و OPP' پادموازی‌اند ($\S ۵۱۹$)؛ پس $\angle A'P'P = \angle PAO = ۹۰^\circ$ و مکان هندسی P' دایره (OA') است. OA' قطری از آن است.

راه دیگر. فرض کنید B متقابن O نسبت به x ، و B' منعکس B باشد (شکل ۱۲۶). چهار نقطه B ، B' ، P ، P' همدایره‌اند، پس دو مثلث $OB'P'$ و OBP متشابه‌اند و چون $\angle OPB = \angle OP'B'$ متساوی الساقین است، داریم $OPB = OP'B'$ ؛ پس نقطه متغیر P' از نقطه ثابت B' فاصله ثابتی برابر OP دارد، و قضیه ثابت می‌شود.



شکل ۱۲۶

۵۲۲. ملاحظه. (الف) این قضیه معمولاً به این صورت مختصرتر بیان می‌شود: منعکس یک خط راست، دایره‌ای است که از مرکز انعکاس می‌گذرد.

(ب) دو اثبات ارائه شده دو راه برای ترسیم دایره منعکس یک خط ارائه می‌کنند.

(ج) در شکل ۱۲۶، هر دو نقطه متناظر یک طرف مرکز انعکاس O قرار دارند، که نشان می‌دهد ثابت انعکاس k مثبت و دایره انعکاس (O) حقیقی است. ولی اثبات‌های ارائه شده به ازای k منفی نیز معتبرند. خواننده می‌تواند شکل مربوط به حالت دوم را خود رسم کند.

(د) اگر دایره انعکاس حقیقی باشد، خط مفروض محور اصلی این دایره و دایره منعکس این خط است.

در واقع داریم (شکل ۱۲۶)

$$AO \cdot AA' = AO(AO + OA') = AO^r + AO \cdot OA' = AO^r - OA \cdot OA'$$

قوت A نسبت به دایره (OA') ، و $OA \cdot OA'$ قوت A نسبت به دایره انعکاس (O) است.

زیرا $OA \cdot OA'$ با مریع شعاع (O) برابر است؛ پس گواره بیان شده ثابت می‌شود.
(ه) داریم

$$k = OB \cdot OB' = 2OA \cdot OB'$$

پس شعاع OB' از دایره انعکاس (OA') برابر ($2OA$) است.

۵۲۳. قضیه عکس. اگر نقطه‌ای روی دایره‌ای که از مرکز انعکاس می‌گذرد حرکت کند، آنگاه نقطهٔ منعکس آن روی خط راستی حرکت می‌کند که بر خط واصل بین مرکز دایرهٔ مفروض و مرکز انعکاس عمود است. اثبات به سادگی و با طی کردن گامهای طی شده در اثبات قضیه (۴۵۲۱)، از آخر به اول، صورت می‌گیرد.

این قضیه معمولاً به این شکل مختصر بیان می‌شود: منعکس دایره‌ای که از مرکز انعکاس می‌گذرد، یک خط راست است.

۵۲۴. قضیه. یک خط راست و یک دایره را می‌توان به دو شکل مختلف منعکس هم دانست.
با توجه به دو قضیه قبیل (۴۵۲۳، ۴۵۲۱) می‌توان نتیجه گرفت که اگر یک خط و یک دایره دو شکل منعکس هم باشند، مرکز انعکاس انتهای قطری از دایره است که بر خط مفروض x عمود است. از طرف دیگر، اگر قطر مذکور را d بنامیم، و اگر انتهای O از قطر d را مرکز انعکاس و حاصل ضرب فاصله O از x و قطر دایره را ثابت انعکاس k در نظر بگیریم، خط x در این انعکاس به دایره (O) تبدیل می‌شود (۴۵۲۱)؛ به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

اگر x بر دایره مماس باشد، روپرتوی قطری نقطهٔ تماس تنها مرکز انعکاس موجود است.

۵۲۵. قضیه. اگر نقطه‌ای روی دایره‌ای حرکت کند که از مرکز انعکاس نمی‌گذرد، آنگاه نقطهٔ منعکس دایره‌ای را می‌سیماید که از مرکز انعکاس نمی‌گذرد.

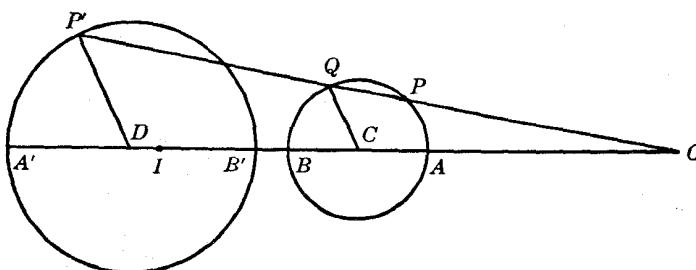
فرض کنید خط OP از مرکز انعکاس O و نقطهٔ دلخواه P از دایرهٔ مفروض (C) بگذرد و دایرة (C) را در Q نیز قطع کند (شکل ۱۲۷)؛ همچنین، فرض کنید P' منعکس P در انعکاس (O, k) باشد. اگر p قوت نسبت به (C) باشد،

$$OP \cdot OP' = k, \quad OP \cdot OQ = p$$

پس،

$$OP' : OQ = k : p$$

پس P که تغییر می‌کند، Q نیز روی دایرة (C) حرکت می‌کند، و نقطهٔ P' دایرة (D) متجانس با (C)



را می‌پساید، نقطه O مرکز تجانس و $p : k$ نسبت تجانس است.
۵۲۶. ملاحظه. (الف) این قضیه‌گاهی به شکل مختصر زیر بیان می‌شود: منعکس یک دایره، یک دایره است.

(ب) مرکز انعکاس یک مرکز تشابه دایرة مفروض و دایرة منعکس آن است.

(ج) دو نقطه منعکس P و P' دو نقطه پادهمشکل در دو دایرة منعکس هستند. نقطه P' دایرة (D)

را در جهت خلاف جهت حرکت نقطه P بر روی دایرة (C) ، می‌پساید.

(د) اگر R و R' شعاع دایرها (C) و (D) باشند، داریم (شکل ۱۲۷)

$$R' : R = OP' : OQ = OP : OP' : OP \cdot OQ = k : p$$

پس،

$$R' = R(k : p)$$

(ه) اگر ثابت انعکاس با قوت مرکز انعکاس نسبت به دایرة مفروض برابر باشد، منعکس دایره، خود آن دایره خواهد بود، زیرا در این صورت P' بر Q منطبق است.
 وقتي ثابت انعکاس مثبت، و در نتیجه دایرة انعکاس حقیقی است، نتیجه به دست آمده را می‌توان این طور بیان کرد: دایرها متعامد با دایرة انعکاس، بر خودش منعکس می‌شود.

۵۲۷. مشاهده. توجه به این نکته مهم است که مرکز دایرة (D) منعکس مرکز دایرة مفروض (C) نیست. منعکس مرکز دایرة (C) ، نقطه I ، را می‌توان به صورت زیر به دست آورد.
 فرض کنید نقطه C مرکز دایرة (C) باشد. A و B را دو نقطه روپروری قطری (C) در نظر بگیرید که روی خط OCD هستند، و A' و B' را منعکس آنها فرض کنید (شکل ۱۲۷). با در نظر گرفتن علامت و اندازه، داریم

$$OA + OB = 2OC \quad \text{و} \quad OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OI = k$$

با تقسیم جمله‌های تساوی اول بر این حاصل ضربهای برابر خواهیم داشت

$$\frac{1}{OA'} + \frac{1}{OB'} = \frac{2}{OI}$$

یعنی نقطه I مزدوج همساز O نسبت به A' و B' است (§۳۴۸)، یا به عبارت دیگر، مرکز یک دایره در انعکاس، روی وارون مرکز دایرة منعکس شده نسبت به دایرة انعکاس قرار می‌گیرد.

۵۲۸. قضیه. هر دو دایرها را می‌توان به دو طریق مختلف منعکس یکدیگر دانست.
 اگر دو دایره نسبت به هم منعکس باشند، مرکز انعکاس یک مرکز تشابه در دو دایره است (§۵۲۶ ب)، و ثابت انعکاس با حاصل ضرب فاصله این مرکز تشابه از دو نقطه پادهمشکل در دو دایره، نسبت به مرکز تشابه در نظر گرفته شده، برابر است (§۵۲۶).

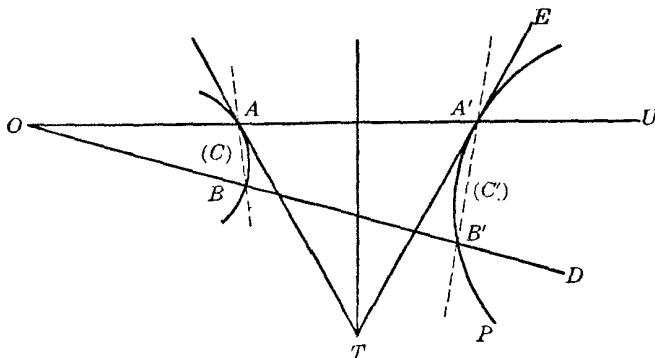
از طرف دیگر، اگر دو دایر مفروض باشند، و اگر مرکز و ثابت انعکاس را به صورت بیان شده در بالا برگزینیم، یک دایره منعکس دایرة دیگر خواهد بود (§۵۲۵). به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

۵۲۹. چند تعریف. اگر دو خم یک نقطه مشترک، مانند P ، داشته باشند، زاویه بین مماسهایی که در P بر دو خم رسم می‌شوند زاویه برخورد دو خم خوانده می‌شود.
 زاویه برخورد یک خم و یک خط راست زاویه بین خط راست و مماسی است که در نقطه برخورد بر خم رسم می‌شود.

مثلاً زاویه برخورد یک خط راست و یک دایره تها و تنها بشرطی قائل است که آن خط از مرکز دایره بگذرد.

۵۳۰. قضیه. مماسهای رسم شده بر دو شکل منعکس، در نقاط متناظر آن دو شکل، نسبت به عمودمنصف پاره خط واصل بین نقاط تمسق، متقابراند.

A, A' و B, B' را دو جفت نقطه متناظر در دو خم منعکس (C) و (C') فرض کنید (شکل ۱۲۸). در چهار ضلعی محاطی $ABB'A'$ داریم $\angle A'AB = \angle A'B'D$ (§۵۱۹).



شکل ۱۲۸

اگر B به A نزدیک شود، حالت حدی وتر AB ، همان مماس AT است که در A بر (C) رسم می‌شود؛ در این صورت B' نیز به A' نزدیک می‌شود، و حالت حدی وتر $A'B'$ نیز مماس $A'T$ است که در A' بر (C') رسم می‌شود؛ حالت حدی خط OBB' نیز خط TAA' است. پس حالت حدی زاویه‌های $\angle EA'U = \angle AA'T$ و $\angle A'B'D = \angle A'AB$ را داریم، و به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود. توجه کنید که گرچه $\angle TA'A$ و $\angle TAA'$ هم اندازه هستند، ولی اگر بردار شاعر OAA' را خط ابتدای زاویه در نظر بگیریم، علامت زاویه‌ها مخالف هم‌اند.

۵۳۱. قضیه. اگر دو خم متقاطع باشد، زاویه برخوردشان با زاویه برخورد دو شکل منعکس آنها در نقطه متناظر برابر است.

فرض کنید AT و AR مماسهای دو خم در نقطه برخورد A ، و $A'R$ و $A'T$ مماسهای دو خم منعکس آنها در نقطه A' ، که با A متناظر است، باشند. نقاط T و R روی عمودمنصف پاره خط AA' قرار دارند، و $\angle TA'R$ و $\angle TAR$ از دو مثلث همنهشت $TA'R$ و TAR برابرند.

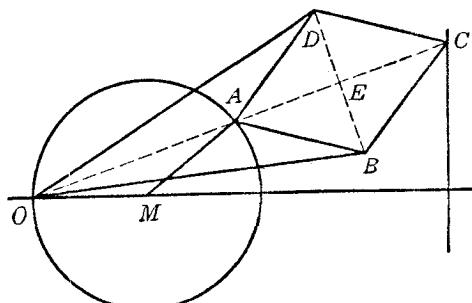
این قضیه مهم غالباً به این صورت بیان می‌شود: زاویه‌ها در انعکاس حفظ می‌شوند.

۵۳۲. نتیجه. (الف) تمام در انعکاس حفظ می‌شود. (ب) مماس بودن در انعکاس حفظ می‌شود.

۵۳۳. حجره پوشلیه. فرض کنید $ABCD$ (شکل ۱۲۹) یک لوزی متشکل از چهار میله صلب هم طول لولا شده به یکدیگر باشد و فرض کنید که لولاهای B و D با دو میله صلب به نقطه ثابت O لولا شده‌اند.

نقاط O, C, A, E ، یعنی نقطه وسط BD ، روی عمودمنصف BD قرار دارند، و داریم

$$\begin{aligned} OA \cdot OC &= (OE - AE)(OE + AE) = OE^r - AE^r \\ &= (OD^r - DE^r) - (AD^r - DE^r) = OD^r - AD^r \end{aligned}$$



شکل ۱۲۹

پس A و C منعکس هم هستند، مرکز دایره انعکاس نقطه O است، و شعاع آن یک ضلع مثلث قائم الزاویه‌ای است که وتر و ضلع قائم دیگرشن دارای طولهای ثابت OD و AD هستند. پس اگر نقطه A روی یک خم حرکت دهیم، نقطه C روی خم منعکس آن حرکت خواهد کرد.

در حالت خاص، اگر A با یک میله صلب به نقطه ثابت M متصل باشد و $MA = MO$ را روی دایره‌ای که از O می‌گذرد حرکت می‌کند؛ بنابراین نقطه C روی خط راستی عمود بر MO (§۵۲۳) حرکت می‌کند. این ممکنیسم، که حجره پوسلیه نامیده می‌شود حرکت دایره‌ای را به حرکت مستقیم الخط تبدیل می‌کند.

۵۳۴. مشاهده. وقتی شکل (F) در یک انعکاس به شکل (F') تبدیل می‌شود، رابطه‌های موجود در شکل (F) ، به صورتی کم و بیش تغییر یافته، در شکل (F') ظاهر می‌شود. این خاصیت انعکاس به ما امکان می‌دهد بدانیم برای اینکه شکل (F') دارای ویژگی (P') باشد، شکل (F) باید کدام ویژگی (P) را داشته باشد و بر عکس.

این رابطه بین ویژگی‌های دو شکل (F) و (F') را می‌توان به صورت زیر به کار برد. برای اینکه ثابت کنیم شکل (F) ویژگی خاصی دارد، آن را با انعکاسی مناسب به شکل (F') تبدیل می‌کنیم. غالباً چنان می‌شود که در شکل جدید به آسانی می‌توان یک ویژگی مشاهده کرد که ویژگی متناظرش در شکل (F) همان است که در صدد اثباتش هستیم. این تاظر دو شکل اثبات مطلوب است.

مطلوب مشابهی در مورد ترسیمهای هندسی صادق است.

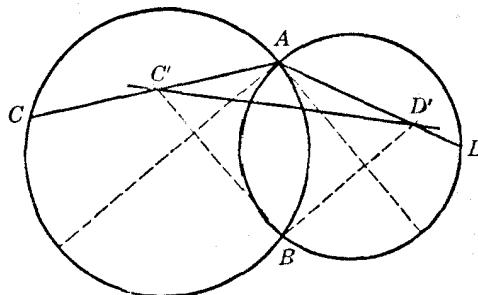
قضیه زیر مثالی از کاربرد این روش است.

۵۳۵. قضیه. چهار نقطه، سه به سه چهار دایره را تعیین می‌کنند؛ اگر از این چهار دایره دو دایره متعامد باشند، آنگاه دو دایره دیگر نیز متعامدند.

شکل (۱۳۰) چهار نقطه مفروض اند. فرض کنید که دو دایره ABC و ABD متعامد باشند. در انعکاسی که (A, AB) دایره انعکاس آن است، نقطه B به خودش، و دایره‌های ABC و ABD به دو خط راست تبدیل می‌شوند (§۵۲۲). این دو خط در B بر هم عمودند (§۵۳۲ الف) و به ترتیب از منعکس‌های C و D ، یعنی نقاط C' و D' می‌گذرند.

دایره CDA به خط $C'D'$ (§۵۲۳) و دایرة CDB به دایرة $C'D'B$ (§۵۲۵) تبدیل می‌شود. چون $\angle C'D'B$ قائم است، خط $C'D'$ قطری از دایرة $C'D'B$ است و بنابراین، بر دایره عمود است. پس می‌توان نتیجه گرفت که دایره‌های (CDB) و (CDA) متعامدند (§۵۳۲ الف) و قضیه ثابت می‌شود.

روش دیگر. در انعکاس (C, p) ، که در آن p قوت نقطه C نسبت به دایرة ABD است، دایرة ABD به خودش تبدیل می‌شود (§۵۲۶ ه)، و خطوط CD ، CA ، CB ، و DA این دایره را در A' ، B' ، و D' (منعکس‌های



شکل ۱۳۰

نقاط A , B , و D نیز قطع می‌کنند. دایرة CAB به خط راست $A'B'$ تبدیل می‌شود، و این خط یک قطر دایرة ABD است، زیرا دایره‌های ABC و ABD بنا بر فرض برهم عمودند. دایره‌های CDB و CDA به خطوط CDB و $D'A'$ تبدیل می‌شوند. این دو خط برهم عمودند؛ پس دایره‌های CDB و CDA نیز برهم عمودند.

۵۳۶. قضیة بسط آن. در هر چهارضلعی مجموع حاصل ضربهای دو ضلع رو بروی هم، بسته به محاطی نبودن یا بودن چهارضلعی، بزرگتر یا برابر حاصل ضرب قطرهاست. فرض کنید $OABC$ چهارضلعی مفروض (شکل ۱۳۱) و A' , B' , C' , نقاط منعکس A , B , C در انعکاس (O, k) باشند. داریم ($\S ۵۲۵$)

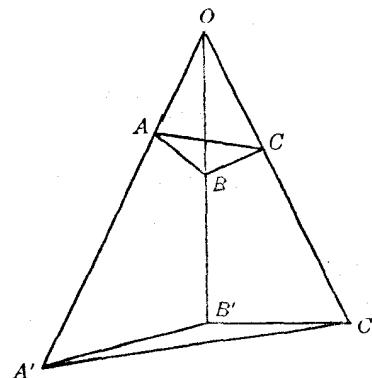
$$\frac{AB}{OA \cdot OB} = \frac{A'B'}{k}, \quad \frac{BC}{OB \cdot OC} = \frac{B'C'}{k}, \quad \frac{AC}{OA \cdot OC} = \frac{A'C'}{k}$$

حال اگر $OABC$ محاطی نباشد، نقاط A' , B' , C' همخيط نیستند ($\S ۵۲۵$)؛ پس،

$$A'B' + B'C' > A'C' \quad (1)$$

پس،

$$\frac{AB}{OA \cdot OB} + \frac{BC}{OB \cdot OC} > \frac{AC}{OA \cdot OC} \quad (2)$$



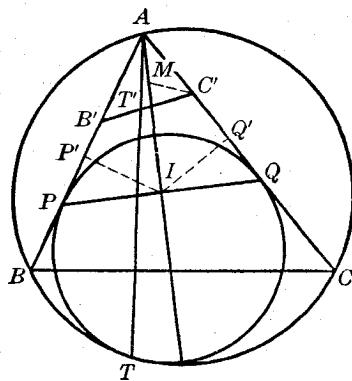
شکل ۱۳۱

$$AB \cdot OC + BC \cdot OA > AC \cdot OB \quad (3)$$

ولی اگر $OABC$ محاطی باشد، نقاط A' , B' , C' همخط اند (§۵۲۳)؛ پس در (۱)، (۲)، و (۳) علامت $>$ باید با علامت تساوی ($=$) عوض شود.

۵۳۷. قضیه. اگر دایره‌ای بر دو ضلع یک مثلث و بر دایره محیطی آن مماس داخلی (یا خارجی) باشد، خطی که از نقاط تماس آن با اضلاع می‌گذرد، از مرکز دایره محاطی داخلی (یا دایره محاطی خارجی متناظر) نیز می‌گذرد.

فرض کنید دایره PQT در نقطه T بر دایره محیطی (O) از مثلث ABC مماس داخلی باشد (شکل ۱۳۲) و در نقاط P و Q بر اضلاع AB و AC مماس باشد. فرض کنید I نقطه وسط PQ باشد. اگر $B'C'$ و $C'A'$ منعکسهای B و C ، در انعکاس (A, AI) باشند، خط $B'C'$ منعکس (O) است و خط AT را در T' منعکس $B'C'$ قطع می‌کند.



شکل ۱۳۲

فرض کنید P' و Q' منعکسهای P و Q باشند، داریم $AP \cdot AP' = AI^2$. و چون مثلث AIP در رأس I قائم است، نقطه P' پای عمودی است که از I بر تو AP رسم می‌شود. مطلب مشابهی در مورد Q' صادق است. حال چون دایره $P'Q'T'$ منعکس دایره PQT است، و در نتیجه در T' بر T' مماس است (§۵۳۲ ب)، I مرکز دایره محاطی خارجی مثلث $AB'C'$ نسبت به A است. دایره $IB'C'$ را در M ، مرکز دایره محاطی داخلی مثلث C' ، قطع می‌کند (§۱۲۲ الف)، و در چهار ضلعی محاطی $IB'MC'$ داریم

$$\angle B'IM = \angle B'C'M = \frac{1}{2} \angle B'C'A = \frac{1}{2} \angle ABC$$

زیرا خطوط BC و $B'C'$ نسبت به AB و AC پاد موازی‌اند. خطوط BI و $B'I$ نیز نسبت به AB و $B'C'$ پادموازی‌اند، زیرا نقاط B' و I منعکسهای B و I هستند؛ پس،

$$\angle ABI = \angle B'IA = \angle B'IM = \frac{1}{2} \angle ABC$$

و I مرکز دایره محاطی داخلی ABC است. اثبات در حالت مماس خارجی نیز مشابه همین اثبات است.

۵۳۸. مسئله. انعکاسی باید که سه دایرهٔ مفروض را به خودشان منعکس کند.

قوت مرکز انعکاس مطلوب S ، نسبت به هریک از دایره‌های مفروض باید برابر ثابت انعکاس k باشد ($\S ۵۲۶$)؛ پس سه قوت باید برابر باشند، یعنی S باید مرکز اصلی سه دایرهٔ مفروض باشد. همچنین ثابت انعکاس باید با قوت S نسبت به دایره‌های مفروض برابر باشد. مسئله یک و تنها یک جواب دارد ($\S ۴۹۳$).

اگر مراکز سه دایرهٔ مفروض همخاط باشند، بسته به اینکه دایره‌ها هم محور باشند یا نباشند، مسئله یا بی‌نهایت جواب دارد یا جواب ندارد.

۵۳۹. مسئله. انعکاسی باید که سه دایرهٔ مفروض با مراکز ناهمخاط را به سه دایرهٔ که مراکزشان روی خط مفروضی باشند تبدیل کند.

سه دایرهٔ منعکس بر خط مفروض s عمودند، پس s منعکس دایره‌ای است که از مرکز انعکاس مطلوب می‌گذرد و بر سه دایرهٔ مفروض عمود است، یعنی O نقطه‌ای روی دایرهٔ متعماد (R) برای سه دایرهٔ مفروض است. پس اگر (R) حقیقی باشد، O یکی از دو انتهای قطر عمود بر s در دایره (R) است.

۵۴۰. قضیه. ثابت کنید که یک دسته دایرهٔ هم محور به یک دسته دایرهٔ هم محور منعکس می‌شود.

فرض کنید (P) و (Q) دو دایرهٔ دلخواه از دسته دایرهٔ هم محور (E) باشند، که مزدوج دسته دایرهٔ هم محور مفروض (F). است. فرض کنید هر دایره (C') از دسته دایره (F) به دایره (C')، که بر منعکس‌های (P) و (Q) [یعنی (P') و (Q')] عمود است، تبدیل شود ($\S ۵۳۲$ ؛ پس (C') دسته دایرهٔ هم محور (F') را تعیین می‌کند ($\S ۴۵۵$).

۵۴۱. بحث. یکی از دو دسته دایرهٔ هم محور مزدوج مفروض (E) و (F)، مثلاً (F)، دو نقطه اساسی A و B دارد که نقاط حدی دسته دایره دیگر (E) هستند. دایره‌های منعکس (F)، یعنی دایره‌های (F') از منعکس‌های A و B ، یعنی A' و B' می‌گذرند.

دایره‌های (E) به دایره‌های یک دسته دایرهٔ هم محور (E')، تبدیل می‌شوند که مزدوج (F') است؛ پس نقاط A' و B' نقاط حدی (E') هستند.

اگر یکی از نقاط A و B ، مثلاً A ، را مرکز انعکاس بگیریم. دایره‌های (F) به خطهای راستی تبدیل می‌شوند که از A' ، منعکس B ، می‌گذرند؛ هر دایره (E') بر خطوطی که از B' می‌گذرند عمود است، یعنی مرکز مشترک همه دایره‌های (E') است.

۵۴۲. نتیجه. در انعکاس، دو نقطهٔ وارون نسبت به یک دایرهٔ مفروض، به دو نقطهٔ وارون نسبت به دایرهٔ منعکس دایرهٔ مفروض، تبدیل می‌شوند.

نقاط حدی A و B ($\S ۵۴۱$) نسبت به هر دایره‌ای از (E)، مثلاً (M)، وارون یکدیگرند، و نقاط A' و B' نسبت به (M')، منعکس (M)، وارون یکدیگرند.

۵۴۳. قضیه. دو دایرهٔ منعکس و دایرهٔ انعکاس هم محورند.

فرض کنید (C) و (C') دو دایرهٔ منعکس باشند و فرض کنید (S) دایرهٔ انعکاس باشد. اگر (S) و (C) دو نقطه مشترک داشته باشند، دایره (C') از این دو نقطه می‌گذرد، زیرا نقاط (S) روی خودشان منعکس می‌شوند.

اگر (S) و (C) نقطه مشترک نداشته باشند، یک دسته دایرهٔ هم محور نامقاطع را تعیین می‌کنند که دو نقطهٔ حدی L و L' دارد. این نقاط که نسبت به (S) وارون یکدیگرند، به یکدیگر منعکس می‌شوند و چون نسبت به (C) وارون یکدیگر هستند، نسبت به (C') وارون یکدیگرند ($\S ۵۴۲$ ؛ پس (S)، (C) و (C') به یک دسته دایرهٔ هم محور متعلق‌اند ($\S ۴۴۸$ ب).

۵۴۴. نتیجه. اگر دو دایره نسبت به یک دایره دیگر، به عنوان دایره انعکاس، منعکس هم باشند، آنگاه این دایره، دایره تشابه آن دو دایره است.

مرکز دایره سوم (S) مرکز تشابه دو دایره (C) و (C') است (§۵۲۶ ب)، و (S) با (C) و (C')، هم محور است بنابراین گزاره بیان شده درست است.

۵۴۵. قضیه. در هر مثلث، دایره محیطی، دایره نه نقطه، دایره قطبی و دایره محیطی مثلث مماسی هم محورند.

رأس A و پای ارتقای AD از مثلث ABC نسبت به دایره قطبی (H) از مثلث ABC وارون یکدیگرند؛ گزاره های مشابهی برای دو نقطه B و E و همچنین، برای دو نقطه C و F برقرارند. پس دایره محیطی (H) = DEF نسبت به (H) منعکس یکدیگرند؛ پس (O)، (N) و (T) هم محورند (§۵۴۳).

نقطه برخورد مماسهایی که از B و C بر (O) رسم می شوند، قطب BC نسبت به (O) است؛ پس اگر این نقطه برخورد را L بنامیم، L و نقطه وسط BC ، A' ، BC ، N ، B' و همچنین دو نقطه N و C' برقرارند. پس دایره محیطی (T) از مثلث مماسی و (N) = $A'B'C'$ منعکس یکدیگرند و در نتیجه، (O)، (T) و (N) هم محورند. در نتیجه چهار دایره (O)، (N)، (H)، و (T) هم محورند (§۴۴۱).

۵۴۶. نتیجه. مرکز دایره محیطی مثلث مماسی روی خط اویلر مثلث مفروض قرار دارد (§۴۴۳).

تمرین

۱) نشان دهید مماسهایی که از مرکز انعکاس بر یک خم رسم می شوند، بر خم منعکس نیز مماس اند.

۲) اگر دو دایره نسبت به مرکز دلخواهی منعکس شوند، خط المترکن آنها به چه شکلی منعکس می شود؟

۳) نشان دهید اگر نقاط P و Q با مرکز انعکاس همخخط باشند (§۵۲۰) باز رابطه (f) صادق است.

۴) نشان دهید که منعکس یک گستره همسار، نسبت به نقطه ای روی خط گستره، یک گستره همسار است.

۵) سه نقطه ناهمخط P ، A ، B و نقطه متغیر M ، همخخط با A و B مفروض اند. ثابت کنید زاویه برخورد دو دایرة PAM و PBM ثابت است.

۶) مماس LM که از نقطه متغیر M روی دایرة مفروض (O) بر این دایره رسم می شود، خط s را در L قطع می کند. نشان دهید که مکان هندسی تصویر M بر OL یک دایره است.

۷) دایرة (O)، دو نقطه A و B ، و خط متغیری که از B می گذرد مفروض اند. این خط متغیر دایرة (O) را در C و D قطع می کند و خطوط AC و AD دایرة (O) را در E و F نیز قطع می کنند. نشان دهید که مرکز دایرة AEF یک خط راست را می پیماید.

۸) خطوطی که از A و B ، دو انتهای قطر AB از دایرة مفروض (O)، به نقطه ثابت P وصل می شوند، (O) را در A' و B' نیز قطع می کنند، نشان دهید که دایرة $PA'B'$ بر (O) عمود است.

۹) دو دایرة مفروض (A) و (B) در نقاط E و F باهم برخورد می کنند. خطوط MEE' و MFF' که از E و F و نقطه دلخواه M بر روی دایرة (B) می گذرند، (A) را در E' و F' قطع می کنند. ثابت کنید که وتر $E'F'$ بر MB عمود است.

۱۰) دو وتر متعامد BC و DE از یک دایرة مفروض، درون دایره، در نقطه A ، یکدیگر را قطع می کنند. نشان دهید ارتقایی که از رأس A در مثلث ABD رسم می شود یک میانه مثلث ACE است.

(۱۱) نقاط A' , B' , و C' روی ارتفاعهای AH , AH , و CH از مثلث ABC مشخص شده‌اند، به طوری که با در نظر گرفتن اندازه و علامت، داریم

$$HA \cdot HA' = HB \cdot HB' = HC \cdot HC'$$

نشان دهید که H یک مرکز سه‌مماس مثلث $A'B'C'$ است.

(۱۲) مماس متغیری بر دایره‌ای به مرکز A , دایرة دیگری به مرکز B , را در نقاط C و D قطع می‌کند. ثابت کنید که دایرة BCD بر یک دایرة ثابت مماس است. راهنمایی. انعکاس (B, BC') را در نظر بگیرید.

(۱۳) زاویه BAC با اندازه ثابت حول رأس ثابت A دوران می‌کند و خط ثابت s را در B و C قطع می‌کند. نشان دهید که دایرة ABC بر یک دایرة ثابت مماس است.

(۱۴) نشان دهید که حاصل ضرب قوتهای یک مرکز تشابه دو دایرة نسبت به آن دو دایره، با توان چهارم ساعت دایرة پاد متشابه آن دو دایره برابر است.

(۱۵) اگر دایرة (B) از مرکز دایرة (A) بگذرد، نشان دهید که محور اصلی (A) و (B) , منعکس (B) , در انعکاس با دایرة انعکاس (A) است.

(۱۶) نشان دهید دایرة تشابه و محور اصلی دو دایره نسبت به دایرة پاد متشابه آن دو دایره، منعکس یکدیگرند.

(۱۷) دو دایرة متعامد و دو قطر عمود برهم آنها را در نظر بگیرید. نشان دهید از چهار خطی که سرهای این دو قطر را به یکدیگر وصل می‌کنند، دو تا از یک نقطه برخورد دو دایره و دو تا از نقطه برخورد دیگر دو دایره می‌گذرند.

(۱۸) (الف) ثابت کنید که منعکس دایرة محیطی (O) از مثلث ABC نسبت به دایرة محاطی داخلی (I) , به عنوان دایرة انعکاس، دایرة نه نقطه مثلث XYZ است. X , Y و Z نقاط تماس دایرة (I) با اضلاع مثلث ABC هستند. (ب) با استفاده از انعکاس رابطه اویلر، $d^3 - R^3 = 2Rr$, را ثابت کنید؛ (ج)

عبارت‌های مشابه مربوط به دایره‌های محاطی خارجی را بیان و آنها را با استفاده از انعکاس ثابت کنید.

(۱۹) چهار نقطه در یک صفحه مفروض اند: منعکس هر دسته سه‌تایی را نسبت به نقطه چهارم می‌باییم، نشان دهید که چهار مثلث منعکس حاصل متشابه‌اند.

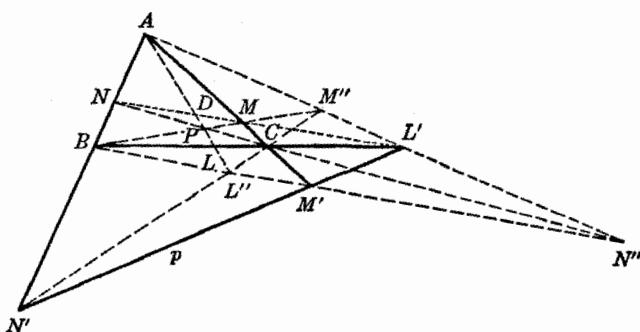
(۲۰) دایره‌ای رسم کنید که از دو نقطه مفروض بگذرد، و دایرة مفروضی را با زاویه‌ای معین قطع کند.

(۲۱) انعکاس این قضیه را بیان کنید: ارتفاعهای یک مثلث همسانند. راهنمایی. مرکز ارتفاعی را به عنوان مرکز انعکاس برگزینید.

هندسه نوین مثلث

الف. قطب و خط قطبی نسبت به یک مثلث

۵۴۷. روابط همساز. (الف) فرض کنید P نقطه‌ای در صفحه مثلث ABC باشد (شکل ۱۳۳)، و L ، M ، N نقاط برخورد خطوط CP و BP ، AP با اضلاع CA ، BC ، AB ؛ و L' ، M' ، N' مزدوجهای همساز L ، M و N نسبت به جفت رأسهای متناظر مثلث ABC باشند.



شکل ۱۳۳

قضیه. نقاط L' ، M' و N' همخاطلاند.

(ب) فرض کنید p خطی در صفحه مثلث ABC باشد که امتداد اضلاع AB ، BC ، CA را در نقاط L' ، M' و N' قطع کند، و L ، M ، N ، L' ، M' و N' نسبت به جفت رأسهای متناظر ABC باشند.

قضیه. خطوط AL ، BM و CN هموس اند.

در هر دو مورد (الف) و (ب)، بنابر مطالع گفته شده در ترسیم، با در نظر گرفتن اندازه و علامت، داریم

$$\frac{BL'}{L'C} = -\frac{BL}{LC}, \quad \frac{CM'}{M'A} = -\frac{CM}{MA}, \quad \frac{AN'}{N'B} = -\frac{AN}{NB}$$

پس با ضرب کردن این برابریها بدست می‌آوریم

$$\frac{BL' \cdot CM' \cdot AN'}{L'C \cdot M'A \cdot N'B} = \frac{BL \cdot CM \cdot AN}{LC \cdot MA \cdot NB} \quad (F)$$

در حالت (الف)، سمت راست رابطه (F)، بنابر قضیه سوا، برابر واحد است و از تساوی حاصل، بنابر قضیه مثلاً توں، نتیجه می شود که نقاط L' ، M' و N' همخط اند.

در مورد (ب)، بنابر قضیه مثلاً توں، سمت چپ رابطه (F) برابر واحد است و از تساوی حاصل، بنابر قضیه سوا، نتیجه می شود که خطوط AL ، BM و CN همروز اند.

۵۴۸. چند تعریف. خط $L'M'N'$ (§۵۴۷) را قطبی سه خطی یا خط همساز نقطه P برای مثلث ABC ، و P را قطب سه خطی یا قطب همساز خط p برای مثلث ABC می نامند.

۵۴۹. قضیه. قطبی سه خطی یک نقطه برای یک مثلث محور منظری آن مثلث، و مثلث سوایی نقطه مفروض برای مثلث مفروض است، و برعکس.
داریم (شکل ۱۳۳)

$$(ABNN') = -1, \quad (ACMM') = -1$$

و دوگستره همساز در نقطه A مشترک اند، پس (§۳۵۷) خطوط BC ، MN و $M'N'$ همروز اند، یعنی نقطه L' با M و N همخط است. به طور مشابه، M' با L و N ، و N' با L و M همخط است، و قضیه ثابت می شود.

۵۵۰. ملاحظه. مثلث ABC و نقطه P مفروض اند. قضیه فوق (§۵۴۹) راه ساده‌ای برای ترسیم قطبی سه خطی P برای ABC ، یعنی خط p ، تنها با استفاده از خطکش به دست می دهد.

۵۵۱. قضیه. قطبی سه خطی یک نقطه برای یک مثلث، قطبی سه خطی مثلث سوایی این نقطه نسبت به مثلث مفروض نیز هست.

داریم $-1 = A(BCLL')$ (شکل ۱۳۳)؛ پس نقطه L' مزدوج همساز D ، نقطه برخورد APL و $L'MN$ ، نسبت به M و N است (§۳۵۳). پس L' نقطه‌ای از قطبی سه خطی P برای مثلث LMN است. برای M' و N' نیز چنین است، پس قضیه ثابت می شود.

۵۵۲. تعریف. رأسهای (AL' ، BM')، $M'' = (CN', AL')$ ، $L'' = (BM', CN')$ از مثلثی را که از خطوط AL' ، BM' و CN' تشکیل می شود (§۵۴۷) وابسته‌های همساز P برای مثلث ABC می نامند.

۵۵۳. قضیه. وابسته‌های همساز نقطه P (§۵۵۲) روی خطوط AP ، BP و CP قرار دارند، و به ترتیب با نقاط A و B ، L ، M و C و N همساز از نقطه P تقسیم می شوند.
با توجه به دو دسته خط همساز (شکل ۱۳۳)

$$B(ACMM') = -1, \quad C(ABNN') = -1$$

که توسط خط APL قطع می شوند، نتیجه می شود که BM' و CN' از مزدوجهای همساز P نسبت به A و L می گذرند؛ پس این مزدوج همساز نقطه L'' بین دو خط BM' و CN' مشترک است. در مورد M'' و N'' و نیز گزاره‌های مشابهی برقرارند.

۵۵۴. نتیجه. وابسته‌های همساز نقطه P نسبت به مثلث ABC رأسهای یک مثلث منظری نسبت به ABC هستند؛ نقطه P مرکز منظری، و قطبی سه خطی P برای ABC محور منظری است.

۵۵۵. ملاحظه. اگر مثلث ABC و خط $p = L'M'N'$ مفروض باشند، خطوط AL' ، BM' و CN' نقاط L'' ، M'' و N'' را تعیین می‌کنند و خطوط AL'' ، BM'' و CN'' یکدیگر را در قطب همساز خط p برای مثلث ABC ، یعنی نقطه P ، قطع می‌کنند.

۵۵۶. قضیه. نقطه P و سه وابسته همساز آن نسبت به یک مثلث ABC چهار نقطه هستند، که هر سه تایی از آنها مثلث محیط بر ABC و منظری نسبت به آن را تشکیل می‌دهند، و نقطه چهارم مرکز منظری است. محورهای منظری خطوط $LM'N$ ، $L'MN$ و $LM'N'$ هستند.

اتبات به آسانی با توجه به شکل ۱۳۳ بدست می‌آید.

۵۵۷. ملاحظه. شکل ۱۳۳ با مفروض بودن ABC و نقطه P رسم شده است. ولی اگر به جای P یکی از وابسته‌های همساز آن نسبت به ABC ، مثلاً L'' را نیز داشته باشیم باز هم می‌توانیم همین شکل را بدست آوریم، زیرا مزدوج همساز L'' نسبت به A و L نقطه P است و بقیه شکل به همان صورت قبل رسم می‌شود.

تمرين

(۱) نشان دهيد که محور ارتقاعی یک مثلث، قطبی سه خطی مرکز ارتقاعی مثلث نسبت به آن مثلث و نسبت به مثلث ارتقاعی آن است؛ رأسهای مثلث مفروض وابسته‌های همساز مرکز ارتقاعی نسبت به مثلث ارتقاعی هستند.

(۲) نشان دهيد که قطبی سه خطی مرکز دایرة محاطی داخلی یک مثلث از پای نیمسازهای خارجی می‌گذرد، و بر خط واصل بین مرکز دایرة محیطی و مرکز دایرة محاطی داخلی عمود است؛ همچنین نشان دهيد که مراکز دایره‌های محاطی خارجی وابسته‌های همساز مرکز دایرة محاطی داخلی هستند.

(۳) وابسته‌های همساز مرکز نقل مثلث را رسم کنيد. آیا مرکز نقل قطبی سه خطی دارد؟

(۴) نقاط برخورد خطوط AP ، BP و CP با اضلاع CA ، BC و AB از مثلث ABC ، و نقاط برخورد همین اضلاع با قطبی سه خطی P برای ABC هستند. نشان دهيد که نقاط وسط LL' ، MM' و NN' همخاطراند.

(۵) اگر A' نقطه برخورد ضلع BC از مثلث ABC با قطبی سه خطی نقطه P واقع بر دایرة محیطی ABC باشد، نشان دهيد که دایرة APA' از نقطه وسط ضلع BC می‌گذرد.

(۶) نشان دهيد می‌توان سه دایره رسم کرد که مراکزشان رأسهای یک مثلث مفروض باشند، به طوری که پاهای سه خط سوایی مفروض، مراکز تشابه دوبعدی آن سه دایره باشند.

(۷) فرض کنيد L ، M و N پای سه خط سوایی AP ، BP و CP از مثلث ABC باشند، و P' نقطه‌ای از قطبی سه خطی P برای ABC باشد. اگر خطوط AP' ، BP' و CP' و خطوط LM ، MN و NL در X ، Y و Z قطع کنند، نشان دهيد که مثلث XYZ بر مثلث ABC محیط است.

ب. هندسه لوموان

I. میانه‌های متقابن

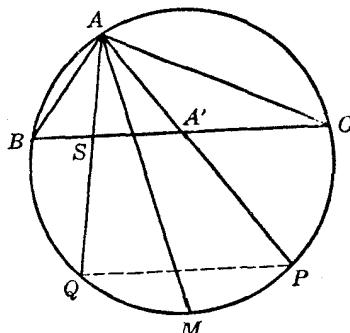
۵۵۸. تعریف. متقابن هر میانه یک مثلث نسبت به نیمساز داخلی رسم شده از همان رأس، میانه متقابن خوانده می‌شود.

هر مثلث سه میانه متقابن دارد.

توجه کنید که هر میانه و میانه متقابن متناظر با آن، نسبت به نیمساز خارجی رسم شده از همان رأس نیز متقابن‌اند.

۵۵۹. قضیه. نقاط برحورد یک میانه و میانه متقارن متناظر با دایره محیطی مثلث، خطی موازی با ضلع روبروی رأس در نظر گرفته شده را تعیین می‌کنند.

وسط کمان PQ (شکل ۱۳۴) که توسط میانه AP و میانه متقارن AQ روی دایرة محیطی مثلث ABC جدا می‌شود، بروسط کمان BC از این دایره منطبق است؛ پس دو وتر BC و QP موازی‌اند.



شکل ۱۳۴

این گزاره راه ساده‌ای برای رسم میانه‌های متقارن یک مثلث در اختیارمان می‌گذارد.

۵۶۰. قضیه. میانه متقارنی که از یک رأس مثلثی رسم می‌شود، از نقطه برحورد مماسهایی که در دو رأس دیگر مثلث بر دایرة محیطی رسم می‌شوند می‌گذرد.

نقطه برحورد مماسهای DC و DB بر دایرة محیطی (O) از مثلث ABC در نقاط B و C را D نامیم؛ D قطب BC برای (O) است؛ پس قطر II' از دایرة (O) (شکل ۱۳۵) که از D می‌گذرد، عمودمنصف BC است. پس $-1 = (DA'I'I')$ ، و بنابراین، $-1 = A(DA'I'I')$.

زاویه IAI' قائم است؛ پس AI و AI' نیمسازهای $\angle DAA'$ هستند (§۳۵۵). ولی AI نیمساز داخلی زاویه A است و AA' میانه ABC است؛ پس AD بنابر تعريف، میانه متقارن رسم شده از رأس A در مثلث ABC است.

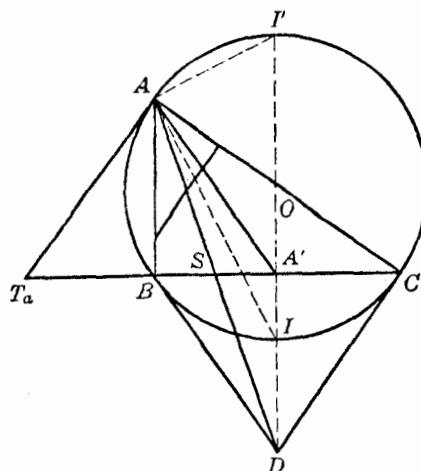
۵۶۱. قضیه. هر میانه متقارن ضلع روبرویش را به دو پاره‌خط تقسیم می‌کند به طوری که طول این پاره‌خطها با مربع اضلاع مجاور مثلث متناسب‌اند.

خط قطبی نقطه D (شکل ۱۳۵)، یعنی خط AT ، مماس BC را که در نقطه A بر دایرة محیطی (O) رسم شده است، در قطب میانه متقارن AD ، یعنی T قطع می‌کند؛ اگر نقطه برحورد AD و BC و نقطه S باشد، پاره‌خط ST توسط نقاط B و C از دایرة (O) به طور همساز تقسیم می‌شوند. چون T پاره‌خط BC را به طور خارجی به نسبت $AB : AC^2$ تقسیم می‌کند (§۳۱۹) قضیه ثابت می‌شود.

۵۶۲. ملاحظه. ضمناً صحبت کردیم که هر میانه متقارن مثلث مزدوج همساز خط مماس بر دایرة محیطی در رأس متناظر، نسبت به دو ضلعی است که از آن رأس می‌گذرند.

۵۶۳. تعریف. مماسهایی را که در رأسهای مثلث بر دایرة محیطی مثلث رسم می‌شوند گاهی میانه‌های متقارن خارجی مثلث می‌نامند.

۵۶۴. قضیه. (الف) هر میانه متقارن از وسط پاره‌خط پاد موازی ضلعی که به آن وارد می‌شود می‌گذرد. در واقع پاد موازی BC نسبت به AB و AC (شکل ۱۳۵) با مماس AT موازی است (§۱۸۵، §۱۹۱)؛ بنابراین قضیه ثابت می‌شود (§۳۵۱).



شکل ۱۳۵

(ب) بر عکس، اگر پاره خطی بین دو ضلع یک مثلث، توسط میانه متقارن متاظر نصف شود، آن پاره خط نسبت به آن دو ضلع، پاد موازی ضلع سوم مثلث است.
مسئله ۴۴۱ تنها یک جواب دارد، پس قضیه ثابت می شود.

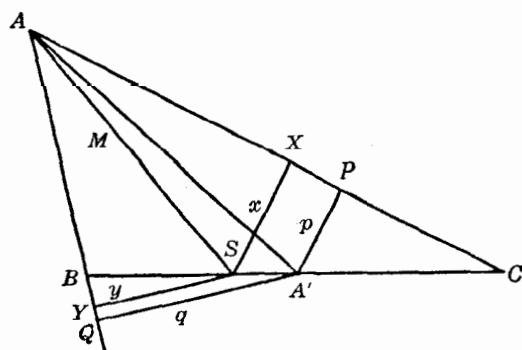
۵۶۵. قضیه. فاصله هر نقطه روی میانه متقارن از دو ضلع مجاور، با طول این دو ضلع متناسب است.
فرض کنید x و y فاصله پای میانه متقارن AS (شکل ۱۳۶) از اضلاع AC و AB از مثلث ABC باشند. چون مثلثهای ASC و ASB یک ارتقای مشترک دارند که از A می گذرد، داریم

$$bx : cy = ASC : ASB = SC : SB = b^r : c^r \quad (\text{مسئله } ۵۶۱)$$

پس،

$$x : y = b : c$$

چون فاصله هر نقطه AS از AC و AB با x و y متناسب است، قضیه ثابت می شود.



شکل ۱۳۶

۵۶۶. ملاحظه. قضیه بالا (۵۶۵) برای میانه متقارن خارجی مثلث نیز صادق است. اثبات مشابه اثبات بالاست.

۵۶۷. قضیه. اگر فاصله‌های یک نقطه از دو ضلع یک مثلث با این اضلاع متناسب باشند، آن نقطه روی میانه متقارن وارد بر ضلع سوم قرار دارد.

فرض می‌کنیم که نقطه داخل زاویه بین دو ضلع در نظر گرفته شده قرار داشته باشد.

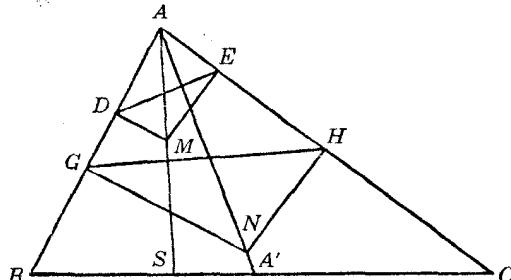
اگر M نقطه‌ای باشد که فاصله‌های از b و c با b و c متناسب باشد، و S نقطه برخورد AM و BC باشد (شکل ۱۳۶)، فاصله‌های S تا b و c نیز با b و c متناسب‌اند. پس S پاره خط BC را به دو پاره خط تقسیم می‌کند که بنابر آنچه در اثبات قضیه قبل گفته شد (۵۶۵)، نسبت‌شان $c : b$ است. چون تنها یک نقطه وجود دارد که BC را به طور داخلی به‌این نسبت تقسیم می‌کند، قضیه ثابت می‌شود.

۵۶۸. قضیه. اگر از یک نقطه میانه متقارن (یا میانه) عمودهایی بر اضلاع مجاور رسم شود، خطی که بای این عمودها را به هم وصل می‌کند بر میانه (یا میانه متقارن) متناظر عمود است.

فرض کنید که در مثلث ABC ، AA' و AS میانه و میانه متقارن رسم شده از رأس A باشند (شکل ۱۳۷). اگر MD و ME عمودهایی باشند که از M ، واقع بر AS ، بر اضلاع AB و AC رسم شده‌اند، چهارضلعی $ADME$ محاطی است، پس،

$$\angle DEM = \angle DAM = \angle EAA'$$

ME بر AE عمود است؛ پس ED بر AA' عمود است.
به طور مشابه، می‌توان نشان داد که GH بر AS عمود است.



شکل ۱۳۷

۵۶۹. قضیه. اگر دو پادموازی دو ضلع یک مثلث طولهایی برابر داشته باشند، یکدیگر را روی میانه متقارن وارد بر ضلع سوم قطع می‌کنند.

فرض کنید DE و FH (شکل ۱۳۸) به ترتیب با اضلاع AC و AB از مثلث ABC پادموازی باشند و M نقطه برخورد آنها باشد. داریم

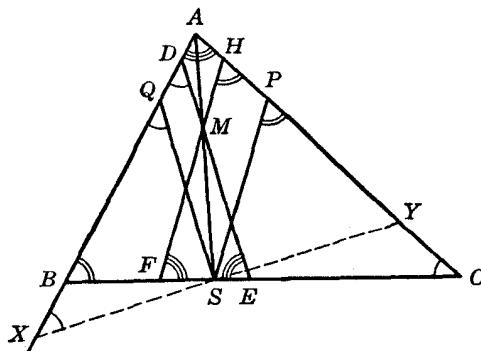
$$\angle HFC = \angle DEB = \angle A$$

پس مثلث FME متساوی الساقین است، و

$$ED = FH, FM = EM$$

$$DM = HM$$

پس



شکل ۱۳۸

فرض کنید S نقطه برحور AM و SP باشد و BC خطوطی باشند که از S به موازات DE و FH رسم شده‌اند. با توجه به مثلثهای مشابه، داریم

$$SQ : MD = AS : AM = SP : MH$$

و چون $SQ = SP$ ، داریم $MD = MH$
مثلثهای BSQ و CSP هردو با مثلث ABC مشابه‌اند؛ پس،

$$BS : SQ = c : b, \quad SP : SC = c : b$$

با ضرب کردن این روابط در یکدیگر، بدست می‌آوریم

$$BS : SC = c^2 : b^2$$

چون $SQ = SP$. پس S پای میانه متقابن است (۵۶۱).

۵۷۰. قضیه عکس. میانه متقابن وارد بر یک ضلع مثلث، مکان هندسی نقاطی است که می‌توان از آنها پادموازیهای هم طولی برای دو ضلع دیگر مثلث رسم کرد.

۵۷۱. نتیجه. میانه متقابن وارد بر هر ضلع مثلث، مکان هندسی نقاطی است که می‌توان از آنها پادموازیهای مساوی برای دو ضلع دیگر مثلث رسم کرد.

تمرین

(۱) روی ضلع AB از مثلث ABC ، AB' را برابر AC ، و روی ضلع AC از این مثلث، AC' را برابر AB جدا می‌کنیم. نشان دهید که نقطه وسط $B'C'$ روی میانه متقابن گذرنده از رأس A در مثلث ABC قرار دارد.

(۲) دو مربع رسم کرده‌ایم که اضلاع AB و AC از مثلث ABC به ترتیب، یک ضلع هر کدام هستند و هر دو مربع خارج مثلث ABC قرار دارند، نشان دهید که اضلاع روپروری AB و AC در این دو مربع یکدیگر را در نقطه‌ای قطع می‌کنند که روی میانه متقابن گذرنده از رأس A در مثلث ABC قرار دارد.

(۳) از مثلثی ارتفاع، میانه و میانه متقابن رسم شده از یک رأس مفروض‌اند. مثلث را رسم کنید.

(۴) از نقطه وسط یک ضلع مثلث عمودهایی بر دو ضلع دیگر رسم می‌کنیم. نشان دهید خطی که پای این عمودها را بهم وصل می‌کند بر میانه متقابن وارد بر آن ضلع عمود است.

- ۵) نشان دهید که هر ضلع مثلث و میانه متقارن وارد برآن، نسبت به دایرة محیطی مثلث مزدوج است.
- ۶) روی ضلع BC از مثلث ABC نقطه D را طوری تعیین کنید که اگر از این نقطه خطوطی موازی AB و AC رسم کنیم، F و E را در AB و AC قطع کنند و EF را پادموازی BC باشد.
- ۷) میانه متقارنی که در مثلث ABC از رأس A می‌گذرد، دایرة محیطی مثلث را در D قطع می‌کند، و P و R تصاویر نقطه D روی اضلاع CA ، BC و AB هستند، نشان دهید که $PQ = PR$.
- ۸) نشان دهید که این خطوط همسانند: خطی که از رأس A در مثلث ABC به موازات ضلع BC رسم می‌شود، خطی که از مرکز دایرة محیطی (O) بر میانه متقارن گذرنده از رأس A عمود می‌شود، و خطی که از T محل برخورد میانهای رسم شده بر دایرة محیطی مثلث در B و C ، بر AO رسم می‌شود.
- ۹) اگر A' و B' در انگکاسی به مرکز O ، منعکس نقاط A و B باشند، نشان دهید که میانه و میانه متقارن گذرنده از رأس O در مثلث AOB به ترتیب میانه متقارن و میانه مثلث $A'OB'$ هستند.
- ۱۰) نشان دهید که نقاط برخورد سه میانه متقارن یک مثلث با دایرة محیطی مثلث، رأسهای مثلثی هستند که میانه‌های متقارش همان میانه‌های متقارن میانه هستند.
- ۱۱) میانه و میانه متقارن رسم شده از رأس A در مثلث ABC دایرة محیطی مثلث را در M' و N' قطع می‌کنند. نشان دهید که خطوط سیمسون M' و N' به ترتیب بر AN' و AM' عمودند.

II. نقطه لوموان

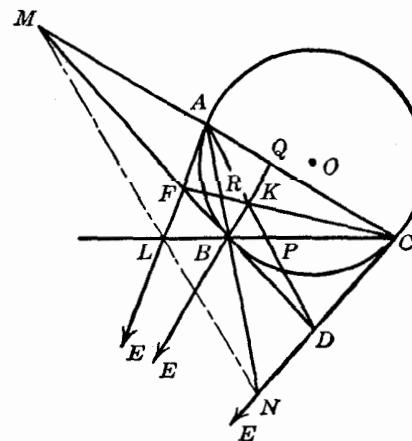
۵۷۲. قضیه. سه میانه متقارن مثلث همسانند.
- فرض کنید K نقطه مشترک دو میانه متقارن BK و AK از مثلث ABC (شکل ۱۳۹) باشد، و p ، q ، r فاصله‌های K از اضلاع a ، b و c از مثلث ABC باشند. داریم (§۵۶۵)

$$p : r = a : c, \quad q : r = b : c$$

پس

$$p : q = a : b$$

بنابراین، CK میانه متقارن سوم مثلث ABC است (§۵۶۷).



شکل ۱۳۹

۵۷۳. تعریف. نقطه هم‌رسی میانه‌های متقاضن یک مثلث، نقطه میانه‌های متقاضن یا نقطه لوموان مثلث نامیده می‌شود. این نقطه را معمولاً با K نشان می‌دهند.

۵۷۴. نتیجه. فاصله‌های نقطه لوموان K از اضلاع مثلث، با طول اضلاع متناسب‌اند، و K تنها نقطه‌ای در داخل مثلث است که چنین خاصیتی دارد. البته رأسهای مثلث مماسی مثلث مفروض نیز این خاصیت را دارند (§۵۶۶، §۵۶۰).

۵۷۵. ملاحظه. قضیه (§۵۷۲) را می‌توان با استفاده از ویژگی‌های دیگر میانه‌های متقاضن ثابت کرد. خواننده باید بتواند با استفاده از §۵۶۱ و قضیه سوا این کار را بکند. راههای دیگر را بعداً گوشزد خواهیم کرد.

۵۷۶. تعریف. هر خط مماس بر دایره محیطی در یک رأس مثلث ضلع روی روی آن رأس را در یک نقطه قطع می‌کند. سه نقطه‌ای که به‌این ترتیب به‌دست می‌آیند روی یک خط قرار دارند (§۳۱۹) که محور لوموان مثلث خوانده می‌شود.

۵۷۷. قضیه. نقطه لوموان یک مثلث قطب محور لوموان مثلث نسبت به دایره محیطی مثلث است. اگر مماس AL بر دایره محیطی (O) از مثلث ABC در رأس A ، ضلع BC را در L قطع کند (شکل ۱۳۹)، خط قطبی L نسبت به (O) از A و D ، یعنی قطب BC ($\text{§}۳۷۹$)، می‌گذرد؛ پس این خط قطبی همان میانه متقاضن AD است (§۵۶۰). برای نقاط مشابه M و N نیز وضعیت چنین است. چون نقاط L ، M ، و N همخطواند، نتیجه می‌شود که سه میانه متقاضن AD ، BE ، و CF هم‌اند، و نقطه مشترکشان قطب LMN است.

توجه کنید که چون نقطه لوموان داخل مثلث، و بنابراین داخل دایره محیطی است، محور لوموان دایره محیطی را قطع نمی‌کند.

۵۷۸. تعریف. قطری از دایره محیطی مثلث که از نقطه لوموان می‌گذرد، قطر بروکار مثلث نامیده می‌شود.

۵۷۹. نتیجه. قطر بروکار مثلث بر محور لوموان عمود است (§۳۷۵ الف).

۵۸۰. ملاحظه. دایرة محیطی (O) از مثلث ABC دایرة محاطی داخلی مثلث مماسی DEF از مثلث ABC است، و در نتیجه، میانه‌های متقاضن DA ، EB و FC هم‌اند (§۳۳۰) و نقطه لوموان مثلث DEF نقطه زرگون مثلث مماسی ABC آن است.

۵۸۱. قضیه. نقطه لوموان یک مثلث، قطب سه خطی محور لوموان برای آن مثلث است. نقطه برخورد محور لوموان LMN با ضلع BC ، نقطه L و پای میانه متقاضن AP از مثلث ABC نقطه P است (شکل ۱۳۹). مزدوج همساز L نسبت به B و C نقطه P است. نتیجه مشابهی برای دو نقطه M و N همچنین برای دو نقطه N و R صادق است. بنابراین، هم می‌توان نتیجه گرفت که میانه‌های متقاضن LMN ، CR و BQ هم‌اند و هم اینکه نقطه مشترک میانه‌های متقاضن، یعنی K ، قطب سه خطی برای ABC است.

۵۸۲. نتیجه. رأسهای مثلث مماسی یک مثلث مفروض، وابسته‌های همساز نقطه لوموان مثلث مفروض هستند.

۵۸۳. قضیه. مرکز نقل مثلث پایی نقطه لوموان، همان نقطه لوموان است.

فرض کنید X ، Y ، و Z (شکل ۱۴۰) تصاویر نقطه لوموان K از مثلث ABC بر اضلاع CA ، BC ، و AB باشند و خطی که از Y به موازات KZ رسم می‌شود، امتداد XX' را در X' قطع کند.

مئنهای KYX' و ABC متشابه‌اند، زیرا اضلاعشان دو به دو برهمن عمودند؛ پس،

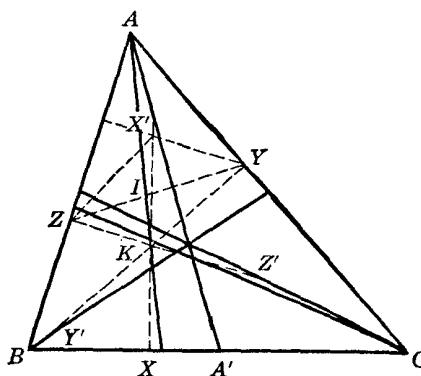
$$KY : AC = YX' : AB$$

ولی (§۵۶۵)

$$KY : AC = KZ : AB$$

پس $X'YZKZ$ متوازی‌الاضلاع است و خط KX' از وسط YZ می‌گذرد، یعنی میانه مثلث XYZ است. برای YK و ZK نیز مطلب مشابهی صادق است. بنابراین قضیه ثابت می‌شود.

۵۸۴. نتیجه. خطوط YX' و ZK با ZX' و KY موازی‌اند و بنابراین، بر AB و AC عمودند؛ پس مرکز ارتفاعی مثلث AYZ است و بنابراین، خط YZ عمود است، یعنی AX' میانه‌گذرنده از رأس A در مثلث ABC است (§۵۶۸).



شکل ۱۴۰

از طرف دیگر، اگر I وسط YZ باشد، داریم

$$KX' = 2KI = KX$$

پس، متقارن تصویر نقطه لوموان بر یک ضلع مثلث، نسبت به نقطه لوموان، روی میانه وارد بر آن ضلع فرار دارد.

۵۸۵. مسئله. از مثلثی محل دو رأس و محل نقطه لوموان مفروض است. مثلث را رسم کنید.

راه حل اول. فرض کنید X تصویر نقطه لوموان K (شکل ۱۴۰) بر ضلع واصل بین دو رأس مفروض B و C باشد. A' ، A' ، BC و X' ، X' ، X ، متقارن X نسبت به K ، روی میانه‌ای از مثلث مطلوب ABC قرار دارند که از رأس A می‌گذرد (§۵۸۴).

خطی که از تصویرهای K روی AC و AB ، یعنی نقاط Y و Z ، می‌گذرد بر $AX'A'$ عمود است (§۵۶۵) و از نقطه وسط X' ، KX' ، یعنی نقطه I ، می‌گذرد (§۵۸۴). پس نقطه Z را می‌توان نقطه برخورد عمودی که از I بر $A'X'$ رسم می‌شود و دایره‌ای که KB قطر آن است، در نظر گرفت. خطوط BZ و $A'X'$ رأس A را تبعین می‌کنند. مسئله ممکن است دو یا یک جواب داشته باشد یا اصلاً جواب نداشته باشد.

راه حل دوم. فرض کنید B و C رأسهای مفروض باشند، K نقطه لوموان مثلث مطلوب ABC و مرکز تقلیل آن مثلث باشد. اگر خطوطی که از A به موازات BG و CG رسم می‌شوند BC را در D و E قطع

کنند، و A' وسط BC باشد، داریم

$$A'B : BD = A'G : GA = A'C : CE = 1 : 2$$

پس،

$$BD = CE = BC = a$$

و نقاط D و E را می‌توان رسم کرد.
از طرف دیگر، داریم (§۵۵۸)

$$\angle DAB = \angle GBA = \angle KBA', \quad \angle CAE = \angle GCA = \angle KCA'$$

پس پاره خط‌های معلوم BD و CE از رأس A با دو زاویه معلوم دیده می‌شوند؛ پس A روی دو کمان معلوم (§۱۱)، مکان هندسی ۷) قرار دارد. مسئله ممکن است دو یا یک جواب داشته، یا اصلاً جواب نداشته باشد.

۵۸۶. قضیه. نقطه لوموان یک مثلث، نقطه بروخورد خطوطی است که وسط هر ضلع مثلث را به وسط ارتفاع وارد برآن ضلع وصل می‌کنند.

فرض کنید A رأس مثلث، P پای میانه متقابن AP ، K نقطه لوموان، و D قطب BC نسبت به دایره محیطی (O) از مثلث ABC باشد؛ و P پاره خط KD را به طور همساز تقسیم می‌کنند (§۵۸۲)؛ پس $A'D(APKD) = -1$ ، که در آن A' وسط BC است. ارتفاع AA_h با $A'D$ موازی است؛ پس از نقطه $A'K$ می‌گذرد (§۳۵۱). برای دو ارتفاع دیگر نیز مطلب مشابهی صادق است.

۵۸۷. قضیه. نقطه همنوای مرکز ارتفاعی مثلث، نقطه لوموان مثلث پاد مکمل است.
ارتفاع $A'D'$ از مثلث پاد مکمل $A'B'C'$ برای مثلث ABC ، ضلع BC را در نقطه همنوای پای ارتفاع AD از مثلث ABC ، یعنی نقطه P ، قطع می‌کند و P نقطه وسط ارتفاع $A'D'$ است. از طرف دیگر، A نقطه وسط $B'C'$ است. پس در مثلث ABC خط همنوای AD است، و در مثلث $A'B'C'$ خط AP وسط ضلع $B'C'$ ، یعنی نقطه A' ، را به وسط ارتفاع $A'D'$ ، یعنی نقطه P ، وصل می‌کند. برای CR و BQ نیز مطلب مشابهی صادق است. بنابراین، قضیه ثابت می‌شود (§۵۸۶).

تمرین

(۱) اگر DEF مثلث ارتفاعی مثلث ABC باشد، نشان دهید که نقاط لوموان مثلثهای BFD ، AEF و CDE روی میانه‌های ABC قرار دارند.

(۲) مثلث ABC مفروض است، نشان دهید که سه مثلث $A'BC$ ، $A'BC$ و $C'BA$ وجود دارند، به طوری که هر کدام یک ضلع مشترک با مثلث ABC دارند و نقطه لوموان آنها همان نقطه لوموان K از مثلث ABC است. ثابت کنید که خطوط $A'A$ ، $B'B$ ، $C'C$ هرمس‌اند.

(۳) نشان دهید که فاصله‌های رأسهای یک مثلث از محور لوموان مثلث، با مربع ارتفاعهای متناظر متناسب‌اند.

(۴) مثلثی را که محل تصاویر نقطه لوموان آن بر روی سه ضلع مفروض است، رسم کنید.

(۵) از مثلثی محل یک رأس، محل مرکز تقلیل، و محل نقطه لوموان مفروض است. مثلث را رسم کنید.

(۶) از مثلثی راستای اضلاع AB و AC و محل نقطه لوموان مفروض است. مثلث را رسم کنید.

(۷) نشان دهید که اضلاع مثلث پادک نقطه لوموان یک مثلث مفروض، با میانه‌های مثلث مفروض متناسب‌اند، و زاویه‌های مثلث پادک با زاویه‌های بین میانه‌های مثلث مفروض برابرند.

۸) از رأسهای یک مثلث عمودهایی بر میانه‌ها رسم می‌کنیم، نشان دهید نقطه لوموان مثلث تشکیل شده بر مرکز مثلث مفروض منطبق است.

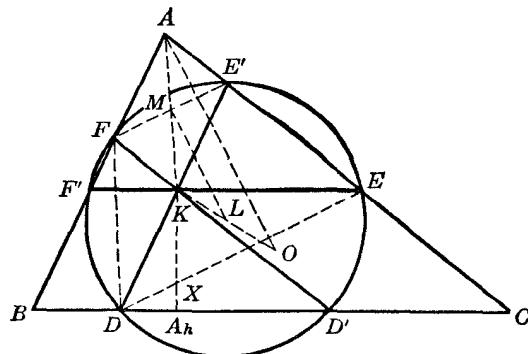
۹) از رأسهای B و C در مثلث ABC خطوطی به موازات مماسی که در A بر دایرة محیطی (O) رسم شده است، رسم می‌کنیم، تا اضلاع AC و AB را در A' و A'' قطع کند. خط $A'A''$ ضلع BC را در U قطع می‌کند. نشان دهید که AU و BV و CW خطهایی هستند، هم‌رساند.

۱۰) روی اضلاع یک مثلث سه مربع رسم می‌کنیم، به طوری که هر ضلع مثلث یک ضلع یکی از این مربعها باشد، و مربعها خارج مثلث قرار گیرند. در هر مربع ضلع موازی با ضلع مثلث را امتداد می‌دهیم تا یک مثلث تشکیل شود. از هر رأس مثلث حاصل خطی به رأس متناظرش در مثلث اصلی رسم می‌کنیم. نشان دهید که این سه خط هم‌رساند. (نقطه همرسی بر نقطه لوموان مثلث اصلی منطبق است).

III. دایرۀ لوموان

۵۸۸) قضیه. خطوطی که از نقطه لوموان یک مثلث موازی با اضلاع مثلث رسم می‌شوند، اضلاع مثلث را در شش نقطه همدایره قطع می‌کنند.

فرض کنید نقطه K نقطه لوموان مثلث ABC باشد و خطوط رسم شده از K به موازات اضلاع BC و CA و AB به ترتیب EKF' ، EKF' ، و DKE' باشند (شکل ۱۴۱) که این اضلاع را در نقاط D' ، D ، D' ، D ، E' ، E ، F' ، F ، E' ، E قطع می‌کنند. چون $AFKE'$ متوازی‌الاضلاع است، خط $E'F$ توسط میانه متقابله AK نصف می‌شود و بنابراین، با BC پادموازی است (§۵۶۴ ب)، پس با EF نیز پادموازی است، یعنی چهار نقطه E ، E' ، F ، F' همدایره‌اند.



شکل ۱۴۱

به دلایل مشابه، گروههای چهارتایی F ، E' ، D' ، D ، F' ، E ، D' ، D و F' ، E' ، D ، D' نیز همدایره‌اند. اگر این سه دایره متمایز باشند محورهای اصلی آنها $FF' = AB$ ، $EE' = CA$ ، $DD' = BC$ باشد هم‌رسانند (§۴۲۵)، و مسلماً این طور نیست. از طرف دیگر اگر دو دایره منطبق باشند، دایرۀ سوم هم بر آنها منطبق است. پس نتیجه می‌گیریم که نقاط D ، E ، D' ، E' ، F ، F' و E همدایره‌اند.

۵۸۹) چند تعریف. دایرۀ ای که از این شش نقطه می‌گذرد (§۵۸۸) دایرۀ اول لوموان نامیده می‌شود. خطوط موازی در نظر گرفته شده را غالباً موازیهای لوموان می‌خوانند.

۵۹۰) قضیه. مرکز دایرۀ اول لوموان مثلث نقطه وسط پاره خطی است که مرکز دایرۀ محیطی و نقطه لوموان مثلث را به هم وصل می‌کند.

فرض کنید O مرکز دایرة محیطی مثلث ABC (شکل ۱۴۱)، L وسط OK و M وسط پاره خط‌های $E'F$ باشد. پاره خط LM نقاط وسط دو ضلع مثلث KOA را بهم وصل می‌کند، پس با ضلع سوم آن، یعنی OA ، موازی است: شعاع OA از دایرة محیطی بر $E'F$ عمود است، زیرا $E'F$ با BC پادموازی است (§۱۸۵، §۱۸۸، §۵۸۸)؛ پس ML عمود منصف $E'F$ است. بطور مشابه، عمود منصفهای DF' و $D'E$ نیز از L می‌گذرند. پس قضیه ثابت می‌شود.

۵۹۱. ملاحظه. مثلثهای DEF و $D'E'F'$ همنهشت‌اند.
در دایرة اول لوموان داریم (شکل ۱۴۱)

$$\angle FDE = \angle FF'E = \angle B, \angle DEF = \angle DD'F = \angle C$$

پس مثلث DEF با مثلث ABC مشابه است، این مطلب در مورد مثلث $F'D'E'$ نیز صادق است. پس دو مثلث DEF و $D'E'F'$ متشابه‌اند و در یک دایرة محاط شده‌اند؛ پس همنهشت‌اند.

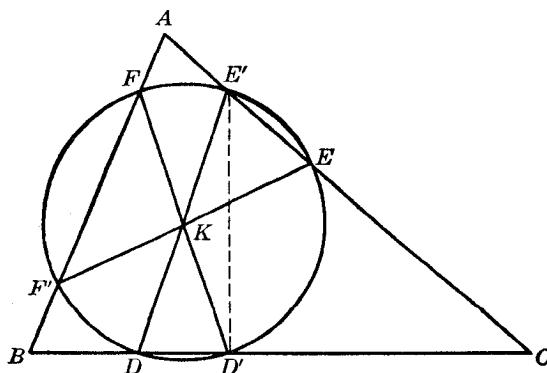
۵۹۲. قضیه. پاره خط‌هایی که دایرة اول لوموان روی اضلاع یک مثلث جدا می‌کند، با مکعب اضلاع متاظر متناسب‌اند.

اگر AA_h و KX دو عمود از A و K بر BC باشند (شکل ۱۴۱)، در مثلثهای مشابه ABC و KDD' داریم

$$DD' : KX = BC : AA_h = BC' : 2S$$

که در آن S مساحت ABC است. KX و دو فاصله متاظر دیگر با اضلاع متاظر مثلث ABC متناسب‌اند (§۵۷۴)؛ بنابراین قضیه ثابت می‌شود.

۵۹۳. قضیه. سه خط پادموازی با اضلاع یک مثلث که از نقطه لوموان می‌گذرند، روی جفت اضلاع غیرمتاظرشان شش نقطه تعیین می‌کنند؛ این شش نقطه روی دایره‌ای قرار دارند که مرکزش نقطه لوموان است. سه پادموازی رسم شده برایند (§۵۷۰) و توسط نقطه لوموان K نصف می‌شوند (§۵۶۴)؛ پس K از سرهای این سه پاره خط همفاصله است و بنابراین مرکز دایره‌ای است که از شش نقطه در نظر گرفته شده می‌گذرد (شکل ۱۴۲).



شکل ۱۴۲

۵۹۴. چند تعریف. سه پادموازی در نظر گرفته شده (§۵۹۳) را غالباً پادموازیهای لوموان می‌نامند. دایره‌ای که از این شش نقطه می‌گذرد، دایرة دوم لوموان، یا دایرة کسینوس مثلث نام دارد. نام دوم به

سبب ویژگی زیر به آن داده شده است.

۵۹۵. قضیه. پاره خط‌هایی که دایره دوم لوموان روی اضلاع یک مثلث جدا می‌کنند با کسینوسهای زاویه‌های مقابل اضلاع متناسب‌اند.

فرض کنید سه پادموازی EKF' ، $D'KF$ و $D'K$ (شکل ۱۴۲) که از نقطه لوموان K نسبت به اضلاع AB ، BC و CA رسم شده‌اند، این اضلاع را در D ، E ؛ D' ، E' ؛ و F ، F' قطع کنند. پاد موازی DE' قطري از دایره (K) است (§۵۹۳)، پس در مثلث قائم الزاویه $D'DE'$ داریم:

$$DD' = DE' \cos \angle D'DE' = DE' \cos A$$

به طور مشابه،

$$EE' = EF' \cos B, \quad FF' = FD' \cos C$$

و چون $DE' = EF' = FD'$ (§۵۹۳) است، قضیه ثابت می‌شود.

۵۹۶. قضیه. دایره اول لوموان دایره دوم لوموان را نصف می‌کند. از نقطه لوموان K در مثلث ABC خط $B'C'$ را موازی با BC و خط $B''C''$ را پادموازی با BC رسم می‌کنیم. چهار نقطه B' ، C' ، B'' و C'' همدایره‌اند؛ پس داریم $KB' \cdot KC' = KB'' \cdot KC''$

یعنی نقطه K روی محور اصلی دو دایره لوموان قرار دارد. چون K مرکز دایره دوم لوموان است، اثبات قضیه کامل شده است.

تمرین

- (۱) نشان دهید که در شکل ۱۴۱ پاره خط‌های $E'F$ ، $D'E$ و $F'D$ برابرند.
- (۲) نشان دهید که در شکل ۱۴۱ اگر خط‌های $E'F$ ، $D'E$ و $F'D$ را امتداد دهیم، مثلثی تشکیل می‌شود، که دایرة محاطی داخلی اش بر دایرة اول لوموان مثلث ABC منطبق و با دایرة نه نقطه آن برابر است.
- (۳) نشان دهید که مجموع مساحت‌های $CD'E$ ، $AE'F$ و $BF'D$ (شکل ۱۴۱) با مساحت DEF برابر است.
- (۴) نشان دهید که خطوط $E'F$ ، $D'E$ و $F'D$ (شکل ۱۴۱) به ترتیب اضلاع BC ، CA و AB را روی محور اصلی دایرة محاطی و دایرة اول لوموان مثلث ABC قطع می‌کنند.
- (۵) نشان دهید که محور اصلی دایرة اول لوموان و دایرة نه نقطه یک مثلث از نقاط برخورد موازیهای لوموان و اضلاع متناظر مثلث ارتقای عبور می‌کند.
- (۶) نشان دهید که محور اصلی دایرة دوم لوموان و دایرة نه نقطه یک مثلث از نقاط برخورد پادموازیهای لوموان با اضلاع متناظر مثلث میانک عبور می‌کند.

ج- دایره‌های آپولونیوسی

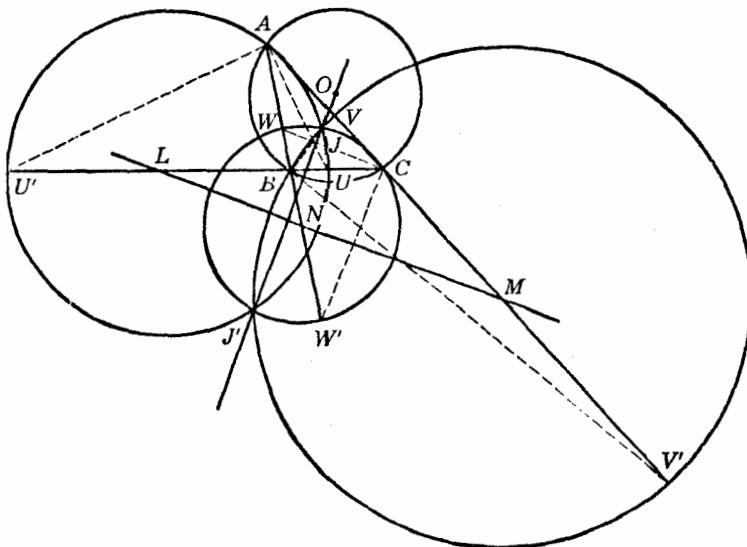
۵۹۷. تعریف. نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه‌های A ، B ، و C از مثلث ABC اضلاع مقابل این رأسها، یعنی CA ، BC و AB را به ترتیب در نقاط U ، U' ، V ، V' ؛ و W ، W' قطع می‌کنند (شکل ۱۴۳). دایره‌هایی که UU' ، VV' و WW' قطوشان هستند، دایره‌های آپولونیوسی مثلث ABC نامیده می‌شوند.

۵۹۸. قضیه. دایره‌های آپولونیوسی از رأسهای متناظر مثلث می‌گذرند. دایرة (L) که UU' قطر آن است، مکان هندسی نقاطی است که نسبت فواصلشان از نقاط B و

برابر است با (مکان هندسی ۱۱، ۱۱) (۸۱۱)

$$BU : CU = BU' : CU'$$

چون $CU : AB : AC = BU : AB : AC$ پس از این مکان هندسی است. برای دو دایره آپولونیوسی (M) و (N) نیز مطلب مشابهی صادق است.



شکل ۱۴۳

راه دیگر. پاره خط UU' از نقطه A با زاویه قائم دیده می شود، پس A روی دایره (L) قرار دارد. برای دایره های آپولونیوسی (M) و (N) نیز مطلب مشابهی صادق است.

۵۹۹. قضیه. دایره محیطی مثلث بر سه دایره آپولونیوسی مثبت عمود است.

داریم $-1 = (BCUU') : (BCU)$; پس نقاط B و C نسبت به دایره (L) وارون یکدیگرند (شکل ۱۴۳); پس (L) بر دایره محیطی (O) از مثلث ABC عمود است (§۳۶۹). برای دایره های (M) و (N) نیز وضعیت مشابهی داریم.

۶۰۰. قضیه. سه دایره آپولونیوسی یک مثلث دو نقطه مشترک دارند. دایره آپولونیوسی (M) از رأس B ، که داخل دایره (L) است، می گذرد؛ پس دو دایره (L) و (M) متقاطع‌اند (شکل ۱۴۳). به طور مشابه، دایره های (L), (N) و (M) نیز چنین‌اند. اگر J یکی از دو نقطه برخورد (L) و (M) باشد، داریم (§۵۹۸)

$$JA : JC = BA : BC, JB : JC = BA : CA$$

پس،

$$JA : JB = CA : CB$$

يعني نقطه J روی دایره (N) هم هست.

راه دیگر، دایره‌های (L) ، (M) ، و (N) بر دایره محیطی (O) از مثلث ABC عمودندن (§۵۹۹)، پس مراکزشان L ، M ، و N نقاط برخورد مماسهایی که در A ، B ، و C بر دایره (O) رسم می‌شوند با اضلاع CA ، BC ، AB هستند. چون L ، M ، و N همخطداند (§۳۱۹) و روی محور لوموان مثلث ABC قرار دارند (§۵۷۶)، دایره‌های (L) ، (M) و (N) هممحورند (§۴۵۸). این دسته دایره هممحور از نوع متقاطع است، زیرا دسته دایرة هممحور مذووج آن، که توسط (O) و خط LMN تعیین می‌شود از نوع نامتقاطع است، زیرا محور لوموان LMN دایرة محیطی (O) را قطع نمی‌کند (§۵۷۷).

۱۶۰. تعریف. دو نقطه J و J' ، نقاط مشترک دایره‌های آپولونیوسی یک مثلث، نقاط همپویای آن مثلث نامیده می‌شوند.

۱۶۱. قضیه. نقاط همپویای یک مثلث روی قطر بروکار آن مثلث قرار دارند. محور اصلی JJ' برای سه دایرة آپولونیوسی بر خط مرکزی آنها، یعنی محور لوموان مثلث، عمود است و

از مرکز دایرة محیطی مثلث، یعنی نقطه O می‌گذرد (الف): بنابراین اثبات قضیه کامل می‌شود (§۵۷۹).

۱۶۲. نتیجه. نقاط همپویا نسبت به دایرة محیطی وارون یکدیگرند و قطر بروکار را به طور همساز تقسیم می‌کنند (§۴۴۸).

۱۶۳. قضیه. دایره‌های آپولونیوسی یک مثلث، دایره‌های شابه سه دایره‌اند، که مراکزشان رأسهای مثلث مفروض‌اند و شعاع‌هایشان با ارتقاهای متناظر مثلث متناسب‌اند.

داریم (§۵۹۸) (شکل ۱۴۳)

$$BU : CU = AB : AC = h_b : h_c = kh_b : kh_c$$

که در آن، k یک ضریب دلخواه است. پس U مرکز شابه داخلی دو دایرة (B, kh_b) و (C, kh_c) است، پس U مرکز شابه خارجی آنهاست.

به همین ترتیب، V و V' ، و W و W' مراکز شابه جفت دایره‌های (C, kh_c) و (A, kh_a) ، و (A, kh_a) و (B, kh_b) هستند.

۱۶۴. ملاحظه. ویژگی‌های §۵۹۹ و §۶۰۰ نتایج بی‌واسطه این قضیه هستند (§۴۹۶، §۶۰۴).

۱۶۵. قضیه. وتر مشترک دایرة محیطی و یک دایرة آپولونیوسی یک مثلث بر میانه متقارن متناظر با آن دایره منطبق است.

دایرة محیطی (O) (شکل ۱۴۴) و یک دایرة آپولونیوسی، مثلاً (L) ، متعامدند (§۵۹۹)؛ پس وتر مشترکشان خط قطبی مرکز دایرة (L) نسبت به (O) است؛ در نتیجه اثبات قضیه کامل می‌شود (§۵۶۱).

۱۶۶. نتیجه. نقاط برخورد میانه‌های متقارن یک مثلث با دایرة محیطی، روی دایره‌های آپولونیوسی متناظر نیز قرار دارند.

۱۶۷. قضیه. خط قطبی مرکز دایرة محیطی یک مثلث نسبت به یک دایرة آپولونیوسی بر میانه متقارن متناظر با آن دایرة آپولونیوسی منطبق است.

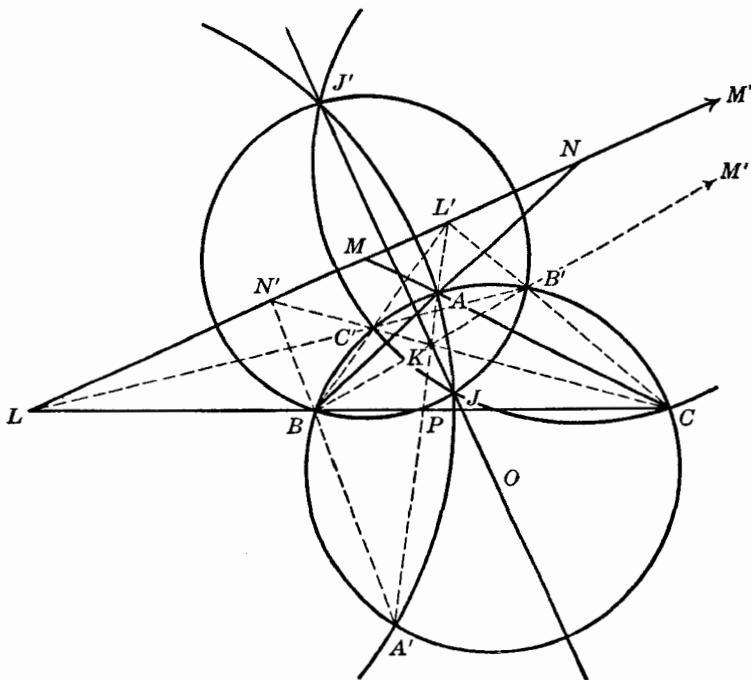
در واقع، وتر مشترک دو دایرة متعامد (O) و (L) (§۶۰۶) خط قطبی O نسبت به (L) نیز هست.

۱۶۸. نتیجه. نقاط همپویای یک مثلث توسط مرکز دایرة محیطی و نقطه لوموان به طور همساز تقسیم می‌شوند.

۶۱۰. ملاحظه. قطب دایره بروکار نسبت به یک دایرة آپولونیوسی مثلث، نقطه برخورد محور لوموان و میانه متقارن گذرنده از رأس در نظر گرفته شده است.

قطب قطر بروکار OK نسبت به دایرة (L) روی قطر LMN از دایرة (L) ، که بر OK عمود است، و روی خط قطبی نقطه O نسبت به دایرة (L) ، یعنی خط AK قرار دارد.

۶۱۱. مشاهده. فرض کنید A', B', C' (شکل ۱۴۴) نقاط برخورد میانه‌های متقارن AKA' ، BKB' و CKC' از مثلث ABC با دایرة صحیطی (O) از آن مثلث باشند، پس (O) دایرها آپولونیوسی (M) و (N) را در چهار نقطه C, B', B, C' قطع می‌کند و براین دایرها عمود است (§۵۹۹)؛ پس دو خط BB' و CC' روی محور اصلی دایرها (M) و (N) یکدیگر را قطع می‌کنند (§۴۳۷) و نقطه برخورد آنها K است؛ دو خط BC و $B'C'$ در یکی از مراکز تشابه (M) و (N) یکدیگر را قطع می‌کنند، و دو خط BC' و $B'C$ در مراکز تشابه دیگر (M) و (N) یکدیگر را قطع می‌کنند. مراکز تشابه روی خط‌المرکزین دو دایره، یعنی محور لوموان LMN قرار دارند.



شکل ۱۴۴

۶۱۲. قضیه. مرکز هر دایرة آپولونیوسی یک مثلث، یک مرکز تشابه دو دایرة آپولونیوسی دیگر آن مثلث است. یکی از دو مرکز تشابه دو دایرة (M) و (N) (شکل ۱۴۴) روی خط BC و روی محور لوموان LMN از مثلث ABC قرار دارد (§۶۱۱)، و این دو خط در مرکز دایرة آپولونیوسی سوم مثلث ABC ، یعنی نقطه L ، باهم برخورد می‌کنند.

۶۱۳. نتیجه. هر میانه متقارن یک مثلث، محور لوموان را در یک مرکز تشابه دو دایرة آپولونیوسی گذرنده از در رأس دیگر مثلث، قطع می‌کند.

دومین مرکز تشابه دایره‌های (M) و (N) را نقطه L' (شکل ۱۴۴) می‌نامیم. L' و M و N به طور همساز تقسیم می‌شوند؛ پس دو خط AL' و AL توسط خطوط ABN و ACM به طور همساز تقسیم می‌شوند، یعنی AL' میانه متقارن گذرنده از رأس A است (§۵۶۲).

۶۱۴. قضیه. نقاط برخورد دو میانه متقارن یک مثلث با دایره محیطی، با مرکز دایره آپولونیوسی گذرنده از رأس سوم همخط اند.

خطوط BC و $B'C'$ (شکل ۱۴۴) (§۶۱۱) محور لوموان را در نقطه L قطع می‌کنند (§۶۱۲).

۶۱۵. قضیه. دو خطی که دو رأس یک مثلث را به نقاط برخورد میانه‌های متقارن این رأسها با دایره محیطی وصل می‌کنند، یکدیگر را در نقطه برخورد میانه متقارن سوم با محور لوموان، قطع می‌کنند.

خطوط BC' و $B'C$ یکدیگر را در مرکز تشابه L' از دو دایره آپولونیوسی (M) و (N) قطع می‌کنند (§۶۱۱)، و این نقطه محل برخورد میانه متقارن AKA' با محور لوموان LMN نیز هست (§۶۱۳).

۶۱۶. قضیه. سه نقطه برخورد میانه‌های متقارن یک مثلث با دایره محیطی، رأسهای مثلثی هستند که دایره‌های آپولونیوسی آن، همان دایره‌های آپولونیوسی مثلث اصلی است.

دایرة آپولونیوسی (L) از مثلث $A'B'C'$ که از A' می‌گذرد باید بر (O) عمود باشد (شکل ۱۴۴) و مرکزش روی مماس بر (O) در A' و روی خط $B'C'$ باشد. هردو خط از نقطه L می‌گذرند (§۶۱۴، §۶۰۶)؛ پس (L) بر دایرة (L) از مثلث ABC منطبق است. برای دایره‌های (M) و (N) نیز مطلب مشابهی صادق است.

۶۱۷. نتیجه. دو مثلث در نظر گرفته شده میانه‌های متقارن یکسان، نقطه لوموان یکسان، محور لوموان یکسان، و نقاط همیویای یکسان دارند.

۶۱۸. تعریف. یک مثلث و مثلثی را که رأسهای آن نقاط برخورد میانه‌های متقارن مثلث اول با دایرة محیطی ایش هستند، مثلثی هم میانه متقارن می‌نامند. علت این نامگذاری با توجه به ویژگیهای دو مثلث (§۶۱۷) روشن است.

۶۱۹. قضیه. نقطه برخورد یک میانه متقارن یک مثلث با ضلع روبرو، نقطه لوموان مثلث است که یک رأس آن رأس متاظر مثلث هم میانه متقارن است و دو رأس دیگر آن نقاط همیویای دو مثلث هم میانه متقارن مفروض هستند.

دایرة محیطی (O) از مثلث ABC (شکل ۱۴۴) دایرة آپولونیوسی مثلث $A'JJ'$ متاظر با رأس A' است، زیرا (O) از A' می‌گذرد، بر دایرة محیطی (L) از مثلث $A'JJ'$ عمود است، و مرکزش روی ضلع مقابل رأس A' ، یعنی JJ' ، قرار دارد. پس، وتر مشترک $A'A$ در دایره‌های (O) و (L) میانه متقارن مثلث $A'JJ'$ است (§۶۰۶).

اگر P نقطه برخورد میانه متقارن AA' و ضلع BC باشد، آنگاه $-1 = \text{انداخته}(LPBC)$ ؛ پس $N'LPBC = -1$. ولی خطوط $N'C$ و $N'B$ همان خطوط $A'JJ'$ هستند (§۶۱۵)؛ پس $N'CC'K$ و $N'BA'$ عمود است، و مرکزش روی ضلع $A'JJ'$ از مثلث $A'KL'P$ است (§۶۱۰)؛ پس مزدوج همساز L' نسبت به رأس A' و K ، نقطه برخورد $A'L'$ با ضلع JJ' ، یعنی نقطه P است که نقطه لوموان مثلث $A'JJ'$ است (§۵۸۱). بدین ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

۶۲۰. ملاحظه. Q و R ، نقاط برخورد میانه‌های متقارن BK و CK از مثلث ABC با اضلاع CA و AB ، $AA'K$ و $AA'K$ ، نقاط برخورد میانه‌های $B'JJ'$ و $C'JJ'$ هستند. P ، Q' و R' ، نقاط برخورد میانه‌های متقارن

$CC'K$, $BB'K$, $C'A'$, $B'C'$ و $A'B'$ از مثلث هم میانه متقارن، نقاط لوموان مثلثهای AJJ' , CJJ' و BJJ' هستند.

۶۲۱. قضیه. نقاط همپویای یک مثلث و یک رأس آن مثلث، مثلث دیگری را تعیین می‌کنند که نقاط همپویای آن رأسهایی از مثلث هم میانه متقارن مثلث اصلی هستند که با رأس در نظر گرفته شده مثلث اصلی متناظر نیستند.

خط واصل بین L , مرکز دایره محیطی مثلث $A'JJ'$ (شکل ۱۴۴)، و نقطه لوموان P از مثلث $A'JJ'$ (§۶۱۹) قطر بروکار $A'JJ'$ است؛ پس LP دایرة آپولونیوسی (O) از مثلث $A'JJ'$ را در نقاط همپویای B و C از مثلث $A'JJ'$ قطع می‌کند، و قضیه ثابت می‌شود.

۶۲۲. ملاحظه. محور لوموان مثلث $A'JJ'$ (§۶۲۱) بر قطر بروکار LP عمود است و از مرکز دایرة آپولونیوسی (O) از مثلث $A'JJ'$ می‌گذرد؛ پس محور لوموان $A'JJ'$ عمود منصف BC است.
پس محورهای لوموان شش مثلث $A'JJ'A$, $JJ'B'$, $JJ'C'$, $JJ'B$, $JJ'A$ ، و $JJ'C$ یک نقطه مشترک دارند.

۶۲۳. مسئله. مثلثی را که محل نقطه لوموان، محل مرکز دایره محیطی و محل یک رأس آن مفروض است (K, O, A)، رسم کنید.

فرض کنید خط AK دایرة (O, OA) را در A' نیز قطع کند (شکل ۱۴۴). اگر L' مزدوج همسار K نسبت به A و A' (§۵۷۷) و P مزدوج همسار L' نسبت به K و A' باشد (§۶۱۹)، خطی که P را به L , قطب AK نسبت به دایرة (O, OA)، وصل می‌کند این دایرة را در دو رأس دیگر مثلث مطلوب ABC قطع می‌کند.
با فرض اینکه K داخل دایرة (O, OA) قرار داشته باشد، مسئله یک و تنها یک جواب دارد.

۶۲۴. قضیه. هر دایرة آپولونیوسی یک مثلث، دو دایرة آپولونیوسی دیگر را با زاویه 120° قطع می‌کند.
نقطه L (شکل ۱۴۴) مرکز تشابه دو دایرة آپولونیوسی (M) و (N) است (§۶۱۲)، و دایرة (L) با (M) و (N) هم محور است؛ پس این دو دایرة نسبت به (L) منعکس یکدیگرند (§۵۴۳, §۵۲۷) و بنابراین، زاویه بین (L) و (M) با زاویه بین (L) و (N) برابر است، یعنی (L) زاویه بین دایره‌های (M) و (N) را نصف می‌کند.
دایرة (M) نسبت به (L) و (N) و دایرة (N) نسبت به (L) و (M) نیز چنین وضعیتی دارد. پس هریک از دایره‌های آپولونیوسی زاویه بین دو دایرة دیگر را نصف می‌کند (§۵۳۱)؛ پس قضیه ثابت می‌شود.

تمرین

۱) نشان دهید که عمودمنصفهای نیمسازهای داخلی زاویه‌های یک مثلث اضلاع متناظر مثلث را در سه نقطه همخط قطع می‌کنند.

۲) در مثلث ABC داریم $AB > CA > BC$. نشان دهید که مجموع معکوس قطرهای دایره‌های آپولونیوسی متناظر با اضلاع BC و AB با معکوس قطر دایرة آپولونیوسی متناظر با CA برابر است.

۳) نشان دهید که فاصله‌های رأسهای یک مثلث از یک نقطه همپویا به ترتیب با اضلاع روپرتوی آن رأسها متناسب‌اند.

۴) سه دایرة رسم کنید، به طوری که مرکز هرکدام روی دایرة تشابه دو دایرة دیگر باشد.

۵) نشان دهید که میانه رسم شده از یک رأس مثلث دایرة آپولونیوسی گذرنده از آن رأس و دایرة محیطی را در دو نقطه قطع می‌کند که همراه با دو رأس دیگر مثلث رأسهای یک متوازی‌الاضلاع هستند.

۶) نشان دهید که متقارنهای دایره‌های آپولونیوسی یک مثلث نسبت به عمودمنصفهای اضلاع متناظرشان، هم محورند و محور اصلی آنها از مرکز دایرة محیطی مثلث می‌گذرد.

د. خطوط همزاویه

۶۲۵. تعریف. دو خط که از رأس یک زاویه می‌گذرند و با نیمساز آن زاویه، زاویه‌هایی برابر می‌سازند، همزاویه، یا مزدوچهای همزاویه نامیده می‌شوند.

پس ارتفاع و قطر دایره محیطی گذرنده از یک رأس مثلث، دو خط همزاویه هستند (§۷۳ ب). یک مثل دیگر از مزدوچهای همزاویه، میانه و میانه متقابن گذرنده از یک رأس مثلث هستند (§۵۵۸).

نیمساز یک زاویه بر مزدوچ همزاویه خود منطبق است.

۶۲۶. قضیه. خطی که نقاط برخورد دو خط همزاویه با دایره محیطی مثلث را بهم وصل می‌کند با ضلع مقابل به رأس در نظر گرفته شده، موازی است.

۶۲۷. قضیه. خطی که تصاویر یک نقطه دلخواه بر اضلاع یک زاویه را بهم وصل می‌کند، بر مزدوچ همزاویه خطی که از آن نقطه به رأس زاویه وصل می‌شود، عمود است.

اینها تعمیم قضیه‌های مربوط به میانه‌های متقابن (§۵۶۸) هستند. اثباتها نیز شبیه اثباتهای قبلی است.

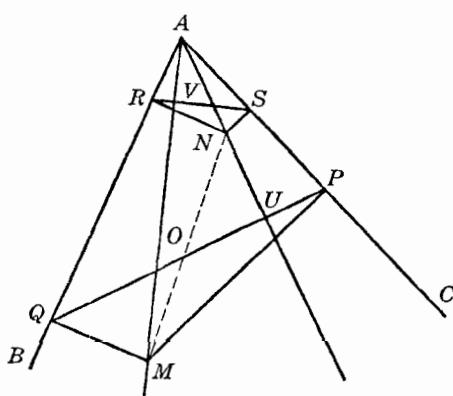
۶۲۸. قضیه. فاصله‌های دو نقطه روی دو خط همزاویه از اضلاع زاویه باهم تناسب معکوس دارند.

فرض کنید M و N دو نقطه از خطوط همزاویه AM و AN (شکل ۱۴۵) باشند و MP ، MQ و NR چهار عمودی باشند که از M و N بر اضلاع AB و AC از زاویه BAC رسم شده‌اند.

با توجه به دو مثلث قائم‌الزاویه متشابه AMP و ANS و همچنین، دو مثلث قائم‌الزاویه متشابه AMP ، ANR داریم

$$MQ : NS = AQ : AS = AM : AN = AP : AR = MP : NR \quad (1)$$

و قضیه با توجه به تساوی دو نسبت اول و آخر اثبات می‌شود.



شکل ۱۴۵

۶۲۹. نتیجه. حاصل ضرب فاصله‌های دو نقطه واقع بر روی دو خط هم‌زاویه از یک ضلع زاویه با حاصل ضرب فاصله‌های این دو نقطه از ضلع دیگر زاویه برابر است.

داریم (§۶۲۸)

$$MP \cdot NS = MQ \cdot NR$$

۶۳۰. قضیه عکس. اگر فاصله‌های دو نقطه از اضلاع یک زاویه تناسب معکوس داشته باشند، آنگاه آن دو نقطه روی دو خط همزاویه قرار دارند.
بنابر فرض، داریم (شکل ۱۴۵)

$$MP : MQ = NR : NS$$

و زاویه‌های M و N مکمل زاویه A هستند؛ پس دو مثلث MPQ و NRS متشابه‌اند؛ پس زاویه‌های NRS برابرند. حال با توجه به دو چهارضلعی محاطی $APMQ$ و $ARNS$ ، داریم

$$\angle QAM = \angle QPM \quad \angle NAS = \angle NRS$$

و اثبات قضیه کامل است (§۶۲۵).

۶۳۱. قضیه. تصویرهای دو نقطه از دو خط همزاویه روی اضلاع زاویه چهار نقطه همدایره هستند.
با توجه به رابطه (۱) (§۶۲۸)، داریم

$$AQ \cdot AR = AP \cdot AS$$

پس P, R, Q ، و S همدایره‌اند.

۶۳۲. نتیجه. دو خط PQ و RS نسبت به اضلاع زاویه PAQ پادموازی‌اند.

۶۳۳. ملاحظه. مرکز دایره $PQRS$ (شکل ۶۳۱) نقطه وسط MN است (شکل ۱۴۵). مرکز دایرة مذکور، نقطه مشترک عمودمنصفهای پاره‌خط‌های QR و PS است، و هرکدام از این عمودمنصفها از وسط MN ، یعنی نقطه O ، می‌گذرند.

۶۳۴. قضیه. اگر دو خط نسبت به اضلاع یک زاویه پادموازی باشند، عمدهایی که از رأس زاویه بر آنها رسم می‌شوند، در آن زاویه، خطوط همزاویه هستند.

اگر PQ و RS نسبت به اضلاع $\angle PAQ$ (شکل ۱۴۵) پادموازی باشند، و U و V پای عمدهای رسم شده از A بر PQ و RS باشند، در مثلثهای قائم‌الزاویه AUP و ARV زاویه‌های P و R برابرند، پس زاویه‌های RAV و PAU برابرند، و اثبات قضیه کامل می‌شود.

تمرین

(۱) مزدوج همزاویه خطی که از رأس A در مثلث ABC به موازات ضلع BC رسم می‌شود، ضلع BC را در M قطع می‌کند، و S محل برخورد میانه متقابله AS و ضلع BC است. نشان دهید که $.BM : CM = BS : CS$.

(۲) (الف) M و N نقاط برخورد BC و دو خط همزاویه AN و AM هستند، نشان دهید که $CM : CN : BM : BN = b^2 : c^2$: (ب) خطوطی را که از هر رأس مثلث به نقطه برخورد ضلع مقابل آن رأس با یک مورب، رسم می‌شوند در نظر بگیرید. نشان دهید که مزدوجهای همزاویه این اضلاع مقابل را در سه نقطه همخاط قطع می‌کنند.

(۳) نشان دهید که مزدوج همزاویه خطی که از یک نقطه به رأس یک زاویه وصل می‌شود، عمود منصف پاره‌خط واصل بین نقاط متقابله نقطه مفروض نسبت به اضلاع زاویه است.

(۴) دو مثلث ABC و $A'B'C'$ منظری هستند و در دایرة (O) (محاطاند؛ A'' ، B'' ، C'' نقاط برخورد $A'A$ ، $B'B$ ، و $C'C$ با مزدوجهای همزاویه خطوط AB ، BC ، و CA هستند. نشان دهید که خطوط

CC'' و BB'' و AA'' هم‌رساند.

(۵) اگر P نقطه مشترک دایره‌های محیطی چهار مثلث تعیین شده توسط چهار خط مفروض ($\S ۲۹۷$) باشد، نشان دهید که مزدوجهای همزاویه شش خط واصل بین P و نقاط برخورد چهار خط مفروض، موازی‌اند.

(۶) دو خط مزدوج همزاویه در یک مثلث مفروض‌اند؛ پاره‌خطی را که روی یکی از این خطوط توسط رأس و ضلع مقابل جدا می‌شود در وتری که دایره محیطی روی دیگری جدا می‌کند ضرب می‌کنیم. نشان دهید

که این حاصلضرب با حاصلضرب دو ضلع مثلث که از رأس مذکور می‌گذرند برابر است.

(۷) در چهار نقطه همداire روى اضلاع يك زاويه عمودهایي بر آن اضلاع رسم می‌کنیم. نشان دهید که اين عمودها يك متوازي‌الاضلاع تشکيل می‌دهند که در آن، هر دو رأس روپروری هم روی خطوطی همزاویه نسبت به زاویه مفروض قرار دارند.

(۸) قضیه. مزدوجهای همزاویه سه خطی که از یک نقطه به رأسهای مثلث رسم می‌شوند، هم‌رساند. فرض کنید M' (شکل ۱۴۶) نقطه برخورد AM' ، همزاویه BM' ، با CM' ، همزاویه BM ، باشد.

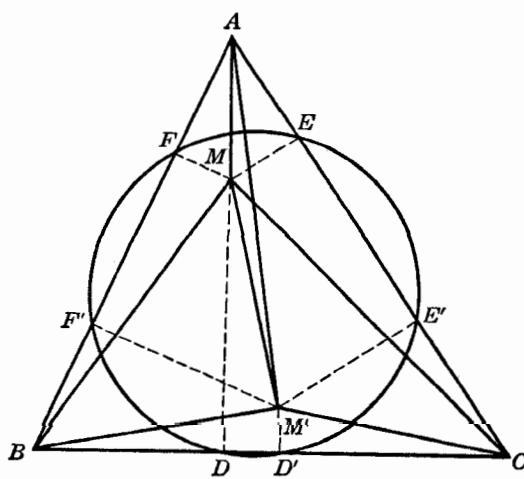
(۸۶۲۸) داریم

$$ME : MF = M'F' : M'E' \quad \text{و} \quad MF : MD = M'D' : M'F'$$

پس با ضرب کردن به دست می‌آوریم

$$ME : MD = M'D' : M'E'$$

يعنى خطوط CM' و CM مزدوجهای همزاویه هستند ($\S ۶۳۰$)؛ به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.



شکل ۱۴۶

(۶۳۶). تعریف. نقاط M و M' را نقاط مزدوج همزاویه یا نقاط همزاویه نسبت به مثلث ABC می‌خوانند. پس مرکز ارتفاعی و مرکز دایرة محیطی دو نقطه مزدوج همزاویه نسبت به مثلث هستند؛ مرکز ثقل و نقطه لوموان نیز دو نقطه همزاویه دیگر نسبت به مثلث هستند.

مزدوج همزاویه مرکز دایرة محاطی داخلی مثلث، نسبت به آن مثلث، بر خودش منطبق است.

۶۳۷. نتیجه. عمودهایی که از رأسهای یک مثلث بر اضلاع متاظر مثلث پادک یک نقطه مفروض رسم می‌شوند همروز آند.

در واقع، خطوط AM' , AM , BM , BM' , CM (شکل ۱۴۶) بر EF , FD , و DE عمودند (§۶۲۷).

۶۳۸. ملاحظه. اگر نقطه M (§۶۳۵) روی دایره محیطی مثلث قرار داشته باشد، آنگاه خطوط همزاویه AM و BM , CM موازی‌اند و برعکس، اگر مزدوجهای همزاویه خطوط AM , BM و CM موازی باشند، آنگاه نقطه M روی دایره محیطی مثلث قرار دارد.

اگر X , Y , Z تصاویر M بر روی اضلاع ABC باشند، مزدوجهای همزاویه AM , BM , و CM ، یعنی خطوط p , q , r , بر خطوط YZ , ZX , و XY عمودند (§۶۲۷). اگر M روی دایرة محیطی (O) از مثلث ABC باشد، نقاط X , Y , Z همخطا‌ند (§۲۸۲ الف): پس p , q , و r موازی‌اند. برعکس، اگر p , q , و r موازی باشند، YZ , ZX , و XY نیز موازی‌اند (§۶۲۷)، یعنی نقاط X , Y , و Z همخطا‌ند، و M روی (O) قرار دارد (§۲۸۲ ب).

۶۳۹. تعریف. از یک نقطه خطوطی به رأسهای یک مثلث رسم می‌کنیم، و براین خطوط عمودهایی در محل رأسها رسم می‌کنیم. این عمودها مثلثی تشکیل می‌دهند که مثلث پادپایی آن نقطه نسبت به مثلث مفروض خوانده می‌شود.

۶۴۰. قضیه. اگر دو نقطه نسبت به یک مثلث همزاویه باشند، مثلث پایی یک نقطه با مثلث پادپایی نقطه دیگر متحابش است.

اگر E و F پای عمودهایی باشند که از نقطه مفروض M بر اضلاع AC و AB از مثلث ABC رسم می‌شوند، خط EF بر مزدوج همزاویه AM در زاویه A عمود است (§۶۲۷)؛ مزدوج AM از نقطه M' , که مزدوج همزاویه M نسبت به مثلث ABC است، می‌گذرد؛ پس EF با ضلعی از مثلث پادپایی M' که از A می‌گذرد، موازی است.

برای اضلاع دیگر مثلث پایی M و مثلث پادپایی M' نیز مطلب مشابهی صادق است. پس اثبات قضیه کامل است.

۶۴۱. قضیه. شش تصویر دو نقطه مزدوج همزاویه بر اضلاع مثلث همدایرهاند. شش تصویر، چهار به چهار روی دایره‌هایی قرار دارند که مراکرشن وسط پاره خط واصل بین دو نقطه مزدوج همزاویه است (§۶۳۱)؛ پس سه دایره بر هم منطبق‌اند.

۶۴۲. تعریف. این دایره (§۶۴۱) را غالباً دایره پایی دو نقطه مزدوج همزاویه می‌نامند.

۶۴۳. قضیه عکس. دایرة محیطی مثلث پایی یک نقطه نسبت به یک مثلث مفروض، اضلاع مثلث مفروض را در رأسهای مثلث پایی یک نقطه دیگر قطع می‌کند، که این نقطه مزدوج همزاویه نقطه اول نسبت به مثلث مفروض است.

فرض کنید (L) دایرة محیطی مثلث پایی XYZ برای نقطه M نسبت به مثلث ABC باشد. اگر $X'Y'Z'$ مثلث پایی نقطه M' (مزدوج همزاویه M برای مثلث ABC) نسبت به مثلث ABC باشد، شش نقطه X , Y , Z , X' , Y' , و Z' روی یک دایره (§۶۴۱) منطبق بر (L) قرار دارند، زیرا دو دایره در سه نقطه X , Y , و Z مشترک‌اند. به این ترتیب اثبات قضیه کامل می‌شود.

۶۴۴. قضیه. اگر دو نقطه نسبت به یک مثلث همزاویه باشند، آنگاه هر کدام مرکز دایره‌ای هستند که از متقاطعهای نقطه دیگر نسبت به اضلاع مثلث می‌گذرد.

فرض کنید D, E, F تصاویر نقطه M بر اضلاع مثلث ABC ، و D', E', F' و M' متقارن‌های M نسبت به اضلاع مثلث ABC باشند.

نقطه M مرکز تجانس دو مثلث DEF و $D'E'F'$ است، و نسبت تجانس $2 : 1$ است؛ پس اگر L و L' مراکز دایره‌های محیطی DEF و $D'E'F'$ باشند، داریم $2 : 1 = ML : ML' = 1$ ، یعنی L' متقارن نسبت به L است، پس L' بر مزدوج همزاریه M نسبت به ABC ، یعنی نقطه M' ، منطبق است (§۶۴۱).

۶۴۵ قضیه. دایره مفروضی روی اضلاع یک مثلث سه پاره خط جدا می‌کند؛ مرکز اصلی سه دایره‌ای که این سه پاره خط قطرشان هستند، مزدوج همزاریه مرکز دایره مفروض نسبت به مثلث است.

فرض کنید D, E, F ، و F' نقاط وسط پاره خط‌هایی باشند که دایره مفروض (M) روی اضلاع CA, BC و AB از مثلث ABC جدا کرده است، و $(D), (E), (F)$ دایره‌هایی باشند که پاره خط‌های جدا شده قطرشان هستند.

خطوط AC و AB محورهای اصلی دایره‌های $(M), (F)$ و (E) هستند؛ پس نقطه A روی محور اصلی دایره‌های (E) و (F) قرار دارد (§۴۲۵). پس محور اصلی (E) و (F) عمودی است که از A بر ضلع EF مثلث پایی DEF برای نقطه M نسبت به ABC رسم می‌شود. مطلب مشابهی برای محورهای اصلی $(F), (D)$ و (E) صادق است. به این ترتیب اثبات قضیه کامل می‌شود (§۶۳۷).

۶۴۶ قضیه. اگر دو نقطه مزدوج همزاریه نسبت به یک مثلث با مرکز دایره محیطی مثلث همخط ط باشند، آنگاه دایره پایی آنها بر دایره نه نقطه مثلث مماس است.

اگر X و Y دوانهای یک قطر دایره محیطی مثلث ABC باشند، آنگاه x و y ، یعنی خطهای سیمسون X و Y ، بر هم عمودند و نقطه $L = xy$ روی دایره نه نقطه (N) برای مثلث ABC قرار دارد (§۲۹۰). تصاویر دو نقطه X و Y بر روی BC ، یعنی X' و Y' ، به ترتیب روی x و y قرار دارند و نسبت به A' ، نقطه وسط BC ، متقارن‌اند؛ پس دایره $(X'Y')$ که قطر آن است از L می‌گذرد.

دایره محیطی P و R شعاع دایره محیطی مثلث ABC باشد، داریم

$$A'D : A'X' = OP : R, \quad A'D' : A'X' = OP' : R$$

پس با ضرب کردن این روابط در یکدیگر به دست می‌آوریم

$$A'D \cdot A'D' : A'X'^\dagger = OP \cdot OP' : R^\dagger$$

یا، چون L روی $(X'Y')$ قرار دارد،

$$A'D \cdot A'D' : A'L^\dagger = OP \cdot OP' : R^\dagger$$

طرف راست این تناسب به ضلع BC بستگی ندارد؛ به نقطه $xy = L$ نیز بستگی ندارد؛ پس اگر نقاط وسط AC و AB را B' و C' ، و تصاویر نقاط P و P' برای این اضلاع را E', E' و F', F' بنامیم، خواهیم داشت

$$A'D \cdot A'D' : A'L^\dagger = B'E \cdot B'E' : B'L^\dagger = C'F \cdot C'F' : C'L^\dagger \quad (a)$$

حال فرض کنید که P و P' برای ABC مزدوج همزاریه باشند. شش تصویر D, D', \dots برای نقاط P, P' روی یک دایره (S) قرار دارند (§۶۴۱)، و حاصل ضربهای $A'D \cdot A'D'$ ، $A'E \cdot A'E'$ ، \dots قوتهای نقاط B', B' ، A', A' ، C', C' برای (S) هستند. اگر $A'L^\dagger, A'L^\dagger, \dots$ را قوتهای نقاط A', B', C' نسبت به دایره نقطه‌ای (L) در نظر بگیریم،

از رابطه (a) نتیجه می‌شود که دایرة (N) با دایرهاي (S) و (L) هم محور است (§۴۷۵)؛ پس نقاط N، مرکز (N)، L و S، مرکز (S)، همخطاند. به علاوه چون نقطه روی (N) قرار دارد؛ محور اصلی این دسته دایرة هم محور در L بر (N) مماس است؛ پس دایرة (S) نیز از L می‌گذرد و بنابراین، در L بر (N) مماس است.

۶۴۷. نتیجه. اگر نقاط P و P' در یک مرکز سه مماس مثلث ABC بر هم منطبق باشند (§۶۳۴)، دایرة (S) همان دایرة سه مماس خواهد بود؛ پس، هر دایرة سه مماس یک مثلث بر دایرة نه نقطه آن مثلث مماس است. این همان قضية فوئر باخ است (§۲۱۵).

۶۴۸. ملاحظه. از اثبات قضية قبل (§۶۴۴)، نتیجه می‌شود که نقطه فوئر باخ (§۲۱۴) نسبت به یک دایرة سه مماس مفروض، نقطه بخورد خطوط سیمسون دو انتهای قطری از دایرة محیطی است، که از مرکز سه مماس متاظر می‌گذرد. پس نقاط فوئر باخ را می‌توان بدون استفاده از دایرة نه نقطه یا دایرهاي سه مماس تعیین کرد.

تمرین

(۱) دو نقطه همزاویه برای یک مثلث مفروض‌اند. نشان دهید که حاصل ضرب فاصله‌های آنها از هر ضلع مثلث مقداری ثابت است.

(۲) نشان دهید که مجموع زاویه‌هایی که یک ضلع مثلث با آنها از دو نقطه همزاویه دیده می‌شود، به اندازه زاویه روپروری آن ضلع از زاویه نیم صفحه (180°) بیشتر است.

(۳) نشان دهید که رأسهای مثلث مماسی یک مثلث، مزدوجهای همزاویه رأسهای مثلث پادمکمل آن مثلث هستند.

(۴) از هر رأس مثلث خطی به تصویر مرکز دایرة محیطی بر روی عمودمنصف ضلع مقابل رسم می‌کنیم. نشان دهید که این سه خط همسان (نقطه همرسی مزدوج همنوای نقطه ژرگون مثلث است).

(۵) متقاضهای یک دایره نسبت به سه ضلع یک مثلث را به دست می‌آوریم. نشان دهید که مرکز اصلی این سه دایره، مزدوج همزاویه مرکز دایرة مفروض نسبت به آن مثلث است.

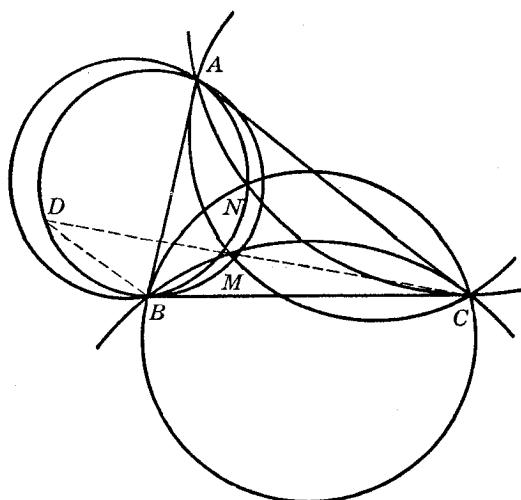
۵. هندسه بروکار

I. نقاط بروکار

۶۴۹. تعریف. دایرة (AB) را که از رأسهای A و B از مثلث ABC می‌گذرد و در B بر ضلع BC مماس است (شکل ۱۴۷) در نظر بگیرید. همچنین می‌توان دایرة (BC) را که از B و C می‌گذرد و در C بر AC مماس است، و دایرة (CA) را که از C و A می‌گذرد و در A بر AB مماس است در نظر گرفت. این دایرها را گروه مستقیم دایرهاي الحاقی می‌نامیم.

اگر رأسهای A، B، C را دوتا در جایگشت دایرهاي BAC در نظر بگیریم، گروه غیر مستقیم دایرهاي الحاقی (AC)، (BA) و (CB) را به دست می‌آوریم. دایرة (BA) دایرهاي است که از A و B می‌گذرد و در A بر ضلع AC مماس است؛ برای دو دایر دیگر تعريف مشابهی وجود دارد.

۶۵۰. قضیه. سه دایرة الحاقی گروه مستقیم یک نقطه مشترک دارند. دو دایرة (AB) و (BC) در نقطه B مشترک‌اند (شکل ۱۴۷)؛ پس در نقطه دیگری داخل مثلث ABC نیز مشترک‌اند که آن را M می‌نامیم. دایرة (AB) در B بر BC مماس است، پس $\angle AMB = ۱۸۰^\circ - B$ و $\angle BMC = ۱۸۰^\circ - C$ ؛ پس، همچنین $\angle AMC = ۳۶۰^\circ - (۱۸۰^\circ - B) - (۱۸۰^\circ - C) = B + C = ۱۸۰^\circ - A$.



شکل ۱۴۷

پس نقطه M روی کمانی از دایره (AC) که داخل قرار دارد؛ و اثبات قضیه کامل می‌شود.

۶۵۱. قضیه. سه دایرهٔ الحاقی گروه غیر مستقیم یک نقطهٔ مشترک، مانند N دارند.

اثبات شبیه اثبات قضیه قبل (۶۵۰) است.

۶۵۲. تعریف. دو نقطه M و N (۶۵۱) را نقاط بروکار مثلث می‌نامند. این نقاط را معمولاً با Ω و Ω' نشان می‌دهند.

۶۵۳. قضیه. (الف) $\angle MAB = \angle MBC = \angle MCA$ تنها نقطه‌ای است که این ویژگی را دارد.

(ب) $\angle NAC = \angle NCB = \angle NBA$ تنها نقطه‌ای است که این ویژگی را دارد (شکل ۱۴۷).

زاویه MAB در دایره (AB) محاط است و برابر نصف \widehat{BM} است؛ که از وتر BM و مماس BC تشکیل می‌شود نیز نصف \widehat{BM} است؛ پس این دو زاویه برابرند. به همین ترتیب $\angle MBC$ با $\angle MCA$ برابر است.

حال اگر M' نقطهٔ دیگری باشد، به طوری که $\angle M'AB = \angle M'BC$ ، آنگاه دایره‌ای که از M' ، A ، و B می‌گذرد بر BC در B مماس است، یعنی M' نقطه‌ای از دایره (AB) است. به طور مشابه، برای اینکه داشته باشیم M' بر M منطبق است. قسمت (ب) هم به همین ترتیب ثابت می‌شود.

۶۵۴. قضیه. نقاط بروکار دو نقطهٔ همزاویهٔ مثلث هستند.

اگر N' مزدوج همزاویهٔ نقطهٔ بروکار M باشد (شکل ۱۴۷)، آنگاه داریم

$$\angle MAB = \angle N'AC, \quad \angle MBC = \angle N'BA, \quad \angle MCA = \angle N'CB$$

و چون

$$\angle MAB = \angle MBC = \angle MCA$$

پس،

$$\angle N'AC = \angle N'BA = \angle N'CB$$

یعنی N' بر N منطبق است (§۶۵۳).

۶۵۵. تعریف. زاویه MAB را که برابر زاویه NAC نیز هست (§۶۵۴)، زاویه بروکار مثلث می‌نامند و معمولاً آن را با ω نشان می‌دهند.

۶۵۶. ترسیم. مثلث ABC (شکل ۱۴۸) و یک دایره گروه مستقیم دایره‌های الحاقی، مثلاً (CA) ، مفروض‌اند. نقطه بروکار M و زاویه بروکار را می‌توان به صورت زیر ترسیم کرد.

از نقطه تماس A در دایرة (CA) خطی موازی با ضلع BC رسم می‌کنیم، تا (CA) را در I قطع کند. خط BI که از I به رأس سوم مثلث، یعنی B وصل می‌شود، دایرة (CA) را در نقطه مطلوب M قطع می‌کند، و $\angle IBC$ زاویه بروکار مثلث ABC است.

در واقع، داریم

$$\angle MAB = \angle MCA = \angle MIA = \angle MBC$$

نقطه بروکار دوم نیز به طور مشابه رسم می‌شود.

۶۵۷. ملاحظه ۱. در مثلثهای ACI و ACB داریم $\angle IAC = \angle ACB$ و $\angle AIC = \angle BAC$ ؛ پس $\angle ACI = \angle ABC$ ؛ یعنی خط CI بر دایرة محیطی مثلث ABC ، یعنی دایرة (O) ، مماس است. پس برای تعیین نقطه I می‌توان AI را موازی با BC ، و CI را مماس بر دایرة محیطی (O) در رسم C کرد. پس نقطه بروکار را می‌توان بدون استفاده از دایرة الحاقی تعیین کرد؛ با دوبار تکرار این ترسیم نقطه بروکار تعیین می‌شود.

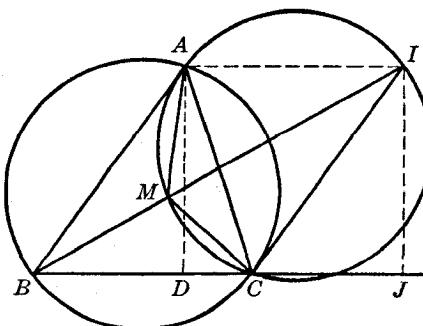
۶۵۸. ملاحظه ۲. فرض کنید D و J پای ارتفاعهای باشد که از A و I بر BC رسم می‌شود (شکل ۱۴۸). داریم

$$\frac{BJ}{IJ} = \frac{BD}{IJ} + \frac{DC}{IJ} + \frac{CJ}{IJ} = \frac{CJ}{IJ} + \frac{BD}{AD} + \frac{DC}{AD}$$

یا

$$\cot \omega = \cot A + \cot B + \cot C$$

۶۵۹. قضیه. یک زاویه مثلث و یکی از زاویه‌های بروکار آن، شکل مثلث را تعیین می‌کنند.



شکل ۱۴۸

از رأس A از زاویه مفروض BAC (شکل ۱۴۸) و از نقطه دلخواه C بر روی ضلع AC از زاویه AC دو خط AM و CM را در داخل زاویه رسم می‌کنیم، به طوری که به ترتیب بالاضلاع AB و AC زاویه‌ای برابر زاویه بروکار ω بسازند و یکدیگر را در M قطع کنند. اگر B نقطه‌ای روی ضلع AB از زاویه مفروض باشد، به طوری که پاره خط CM از آن با زاویه ω دیده شود، مثلث ABC دارای زاویه مفروض A و زاویه بروکار ω خواهد بود.

در حالت کلی روی خط AB دو نقطه B و B' وجود دارند که از آنها پاره خط CM با زاویه ω دیده می‌شود. دو مثلث ABC و $AB'C'$ با هم به طور معکوس متشابه‌اند.

۶۶۵. مسئله. مثلثی را با مفروض بودن یک ضلع، یک زاویه، و زاویه بروکار رسم کنید. دو زاویه مفروض مثلثی متشابه با مثلث مطلوب را تعیین می‌کنند (۶۶۵۹)؛ سپس به سادگی می‌توان مثلث مطلوب را کامل کرد.

۶۶۶. قضیه. نقاط برحور دایرهٔ محیطی یک مثلث با خطوطی که از رأسهای مثلث به یک نقطه بروکار رسم می‌شوند، رأسهای مثلثی همنهشت با مثلث مفروض هستند.

فرض کنید خطوط $B\Omega$ ، $A\Omega$ و $C\Omega$ دایرهٔ محیطی (O) از مثلث ABC را در B' ، C' و A' قطع کنند. در مثلث $A'B'C'$ (شکل ۱۴۹) داریم

$$\angle A' = \angle B'A'C + \angle C'A'C = \angle B'AC + \angle C'BC = \angle B'AC + \angle BAB' = \angle A$$

برای زاویه‌های B' و C' نیز مطلب مشابهی صادق است. پس دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند و در یک دایرهٔ محاط‌اند؛ پس با هم همنهشت‌اند.

برای نقطه بروکار دوم نیز وضعیت مشابهی برقرار است.

توجه کنید که مثلث $A'B'C'$ را می‌توان از مثلث ABC ، با دورانی حول مرکز دایرهٔ محیطی O برابر زاویه ω در جهت پاد ساعتگرد به دست آورد، زیرا

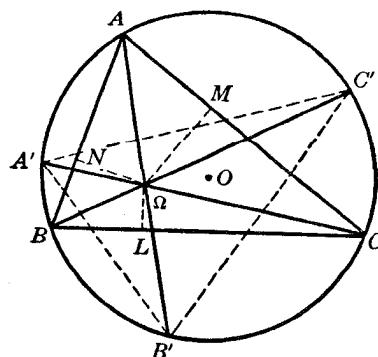
$$\angle AOA' = 2\angle ACA' = 2\omega$$

۶۶۷. ملاحظه. نقطه Ω نقطه بروکار دوم مثلث $A'B'C'$ است، زیرا

$$\angle \Omega A'C' = \angle CA'C' = \angle CBC' = \omega$$

به طور مشابه،

$$\angle \Omega C'B' = \angle BC'B' = \angle BAB' = \omega$$



شکل ۱۴۹

۶۶۳ نتیجه. دو نقطه بروکار یک مثلث از مرکز دایره محیطی مثلث همفاصله‌اند.
در دو مثلث همنهشت ABC و $A'B'C'$ ، نقطه Ω از مثلث $A'B'C'$ با نقطه Ω' از مثلث ABC متناظر است، پس دو نقطه Ω و Ω' از مرکز مشترک دایره محیطی شان همفاصله‌اند.

۶۶۴ قضیه. مثلث پایی یک نقطه بروکار با مثلث مفروض متشابه است.
فرض کنید L, M, N ، و N تصاویر نقطه بروکار Ω بر اضلاع CA, BC و AB از مثلث ABC (شکل ۱۴۹) باشند. با توجه به تعریف نقطه بروکار و دو چهارضلعی محاطی ΩMAN و ΩNBL ، به ترتیب خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\angle A &= \angle \Omega AN + \angle \Omega AM = \angle \Omega BL + \angle \Omega AM = \angle \Omega NL + \angle \Omega AM \\ &= \angle \Omega NL + \angle \Omega NM = \angle MNL\end{aligned}$$

و به طور مشابه، زاویه‌های دیگر متناظر در مثلثهای ABC و MNL با یکدیگر برابرند.
برای Ω' نیز همین طور است.

۶۶۵ نتیجه. مثلثهای پایی دو نقطه بروکار همنهشت‌اند.
زیرا متشابه‌اند (§۶۶۴) و در یک دایره محاط‌اند (§۶۵۴).

تمرین

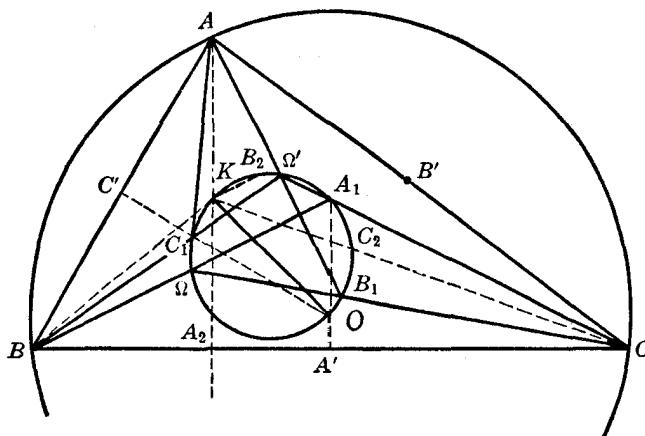
- (۱) نشان دهد که مثلثهای پادپایی نقاط بروکار با مثلث مفروض متشابه‌اند.
- (۲) از مثلثی راستای دو ضلع و محل یک نقطه بروکار مفروض است. مثلث را رسم کنید.
- (۳) نشان دهد که: (الف) مثلثهای ΩCA و $\Omega' BA$ متشابه‌اند (دیگر مثلثهای متشابه را نیز نام ببرید)؛ (ب) $A\Omega : A\Omega' = b : c$ (دورابطه متشابه دیگر را بیان کنید)؛ (ج) $B\Omega : C\Omega' = C\Omega : A\Omega' = b : c$ (د) $A\Omega : B\Omega : C\Omega = (b : a) : (c : b) : (a : c)$ (دورابطه متشابه دیگر را بیان کنید)؛ (ه) و به طور متشابه برای Ω' .
- (۴) خطوطی که از نقاط بروکار مثلث ABC به رأسهای آن وصل می‌شوند، دایره محیطی را در A' ، A'' ، B' ، B'' ، C' ، C'' قطع می‌کنند، و K ، K' و K'' نقاط لوموان مثلثهای $A'B'C'$ ، ABC و $A''B''C''$ هستند. ثابت کنید که خطوط KK' و KK'' هر کدام از یک نقطه بروکار مثلث ABC می‌گذرند.

II. دایرة بروکار

۶۶۶ تعریف. دایرة (OK) که پاره‌خط واصل بین مرکز دایرة محیطی O و نقطه لوموان K از مثلث ABC قطر آن است، دایرة بروکار ABC نامیده می‌شود (شکل ۱۵۰).
عمودمنصفهای اضلاع CA و BC ، AB و CK دایرة بروکار (OK) را در رأسهای A ، B ، و C از مثلث اول بروکار برای مثلث ABC قطع می‌کنند.
میانه‌های AK ، BK ، و CK از مثلث ABC دایرة (OK) را در A ، B ، و C قطع می‌کنند، که مثلث $A_1 B_1 C_1$ مثلث دوم بروکار برای مثلث ABC است.

۶۶۷ قضیه. نقاط بروکار یک مثلث روی دایرة بروکار آن مثلث قرار دارد.
زاویه $KA_1 O$ قائم است (شکل ۱۵۰)؛ پس KA با BC موازی است و در نتیجه $A_1 A'$ با فاصله KA از BC برابر است. پس (§۵۷۴) $A_1 A' : BC = B_1 B' : CA = C_1 C' : AB$

$$A_1 A' : BC = B_1 B' : CA = C_1 C' : AB \quad (1)$$



شکل ۱۵۰

حال نشان می‌دهیم که نقطه برخورد AC با BA , BA , BC , BC , CA , CA ، یعنی نقطه P , روی دایره (OK) قرار دارد.
از رابطه (۱) نتیجه می‌شود که دو مثلث متساوی الساقین ABC و BCA متشابه‌اند؛ پس

$$\angle BAA' = \angle ACC' = \angle PCO$$

پس نقاط A , C , O با P و O همدایره‌اند؛ پس P روی (OK) قرار دارد. باز با درنظر گرفتن مثلثهای BCA و CAB می‌توان نشان داد که A, B و B, C روی (OK) یکدیگر را قطع می‌کنند. پس سه خط A, B, C و C, A, B در نقطه P , روی دایره (OK) یکدیگر را قطع می‌کنند. اکنون با توجه به تشابه سه مثلث متساوی الساقین C, AB , B, CA ، و A, BC داریم

$$\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$$

پس P بر نقطه بروکار Ω منطبق است.

به طور مشابه، می‌توانیم نشان دهیم که سه خط A, C , B, A , و C, B روی (OK) و در نقطه دوم بروکار Ω' یکدیگر را قطع می‌کنند.

۶۶۸. ملاحظه. با توجه به سه مثلث متساوی الساقین متشابه در نظر گرفته شده (§۶۶۷)، داریم

$$AC : AB = c : b, \quad BA : BC = a : c, \quad CA : CB = a : b$$

۶۶۹. قضیه. دایره بروکار با دایره اول لوموان مثلث هم مرکز است.
در واقع، مرکز هر دو دایره نقطه وسط پاره خط بین مرکز دایره محیطی و نقطه لوموان مثلث است (§۶۶۶، §۶۶۷).

۶۷۰. قضیه. (الف) دایره بروکار یک مثلث بر دایره‌های آپولونیوسی آن عمود است.
(ب) محور اصلی دایره بروکار و دایره محیطی بر محور لوموان مثلث منطبق است.
(الف) نقطه لوموان K مزدوج مرکز دایرة محیطی O , نسبت به هر یک از دایره‌های آپولونیوسی مثلث است (§۶۰۸)؛ پس قضیه برقرار است (§۳۸۷).
(ب) دایره بروکار (OK) و دایرة محیطی (O) هر دو بر دایره‌های آپولونیوسی مثلث عمودند (§۵۹۹)؛

پس (OK) و (O) یک دسته دایرة (U) را مزدوج با دسته دایرة (W) ، متشکل از دایره‌های آبیولوژیوسی، تشکیل می‌دهند (§۴۵۶). پس خط مرکزی (W) ، یعنی محور لوموان $(\S ۶۰۰)$ ، محور اصلی U است (§۴۵۵)، پس اثبات کامل می‌شود.

۶۷۱. قضیه. دایرة بروکار بر محور اصلی دو دایرة لوموان مماس است.
خط‌المرکزین دو دایرة لوموان روی قطر بروکار مثلث قرار دارد، و محور اصلی این دو دایرة از نقطه لوموان مثلث می‌گذرد (§۵۹۶)، پس قضیه برقرار است.

۶۷۲. قضیه. خطوطی که رأسهای یک مثلث را به رأسهای متناظر دایرة اول بروکار وصل می‌کنند، یکدیگر را در نقطه همنوای نقطه لوموان نسبت به مثلث، قطع می‌کنند.

خط A_1OA' (شکل ۱۵۰) از قطب U برای ضلع BC نسبت به دایرة معیطي (O) از مثلث ABC می‌گذرد؛ میانه متقارن AK نیز همین طور است (§۵۶۰). اگر K' نقطه برخورد AK و BC باشد، خط KA موازی با شعاع $A'K'$ از دسته خط همساز $A'A(K'KU)$ ، خط $A'A$ را در نقطه وسط پاره خط KA قطع می‌کند، یعنی خطوط AA' و AK همتوна هستند. برای دو خط BB' و BK ، و همچنین دو خط CC' و CK نیز مطلب مشابهی صادق است، پس قضیه برقرار است.

۶۷۳. ملاحظه. مثلث اول بروکار با مثلث اصلی به سه طریق منظری است، و مراکز منظری دو نقطه بروکار و نقطه همنوای نقطه لوموان هستند (§۶۷۲).

۶۷۴. قضیه. مثلث اول بروکار مشابه معکوس مثلث مفروض است.
در واقع داریم (شکل ۱۵۰)

$$\angle A = \angle B_1KC_1 = \angle B_1A_1C_1$$

زیرا اصلاح این زاویه‌ها موازی‌اند؛ برای دو زاویه دیگر مثلثها نیز چنین است.

۶۷۵. قضیه. مرکز نقل یک مثلث، مرکز نقل مثلث اول بروکار نیز هست.
فرض کنید X متقارن A نسبت به BC باشد (شکل ۱۵۰). به آسانی می‌توان دید که $\angle C_1BX = \angle B$ و داریم (§۶۶۸)

$$BC_1 : BX = BC_1 : BA_1 = c : a$$

پس میلهای BC_1 و AB_1 متشابه‌اند. به طور مشابه، می‌توان نشان داد که مثلث CB_1X با ABC متشابه است. پس دو مثلث BC_1X و BC_1A_1 متشابه‌اند. ولی $BX = CX$ ؛ پس دو مثلث همنهشت‌اند، و داریم

$$B_1X = BC_1 = AC_1 \quad C_1X = CB_1 = AB_1$$

پس AC_1XB_1 متوازی‌الاضلاع است. فرض کنید U نقطه برخورد قطرهای B_1C_1 و AX از این متوازی‌الاضلاع باشد. خطوط AA' و A_1U میانه‌های مثلث AA_1X هستند؛ پس یکدیگر را در نقطه G ، به نسبت یک سوم و دو سوم قطع می‌کنند. از طرف دیگر خطوط AA' و A_1U به ترتیب میانه‌های مثلث ABC و مثلث $A_1B_1C_1$ هستند؛ پس G مرکز نقل هر دو مثلث است.

۶۷۶. قضیه. مثلثی را با مفروض بودن محل مثلث اول بروکار آن، رسم کنید.
مثلث مطلوب ABC و مثلث اول بروکار $A_1B_1C_1$ مشابه معکوس هستند (§۶۷۴) و مثلث اول بروکار مثلث $A_1B_1C_1$ ، که آن را مثلث $A'B'C'$ می‌نامیم، مشابه معکوس این مثلث است؛ پس دو مثلث ABC و

$A'B'C'$ مستقیماً متشابه‌اند. به علاوه، زاویه‌های (B, C_1, BC) و $(B, C_1, B'C')$ برابرند؛ پس خطوط BC و $B'C'$ موازی‌اند. یعنی مثلثهای ABC و $A'B'C'$ متوالی‌اند.

مثلثهای A, B, C و A, B, C' مرکز تقلیل یکسانی دارند (§۶۷۵)، همین‌طور مثلثهای A, B, C' و A', B', C' متوالی‌اند. $A'B'C'$ یکسان است و بنابراین، مرکز تجانس آنها نیز هست. به علاوه، پس مرکز تقلیل G در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ باشد (شکل ۱۵۱) و داریم

$$GA' : GA_1 = GA_1 : GA$$

پس پاره خط GA را می‌توان رسم و نقطه A را روی خط GA' مشخص کرد. نقاط B و C را می‌توان به عنوان نقاط متناظر B' و C' در تجانس $(G, GA' : GA_1)$ تعیین کرد.

۶۷۶. قضیه. عمودهایی که از وسط اضلاع مثلث اول بروکار بر اضلاع متناظر مثلث مفروض رسم می‌شوند، یکدیگر را در مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث مفروض قطع می‌کنند.

عمودهایی که از وسط اضلاع مثلث A, B, C (شکل ۱۵۰) بر اضلاع ABC رسم می‌شوند، با خطوط OA ، OB و OC موازی‌اند؛ پس این عمودها یکدیگر را در نقطهٔ مکمل O برای مثلث G مرکز تقلیل A, B, C است. قطع می‌کنند، یعنی در نقطهٔ O' که برای آن داریم $GO : GO' = -1 : 2$ است. پس O' مرکز دایرهٔ ABC نیز هست (§۶۷۵)؛ پس O' مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث ABC است.

۶۷۸. قضیه. خطوطی که از رأسهای یک مثلث به موازات اضلاع متناظر مثلث اول بروکار رسم می‌شوند، یکدیگر را روی دایرهٔ محیطی مثلث مفروض قطع می‌کنند.

فرض کنید خطوطی که از رأسهای B و C در مثلث ABC به موازات اضلاع A, C و A, B از مثلث اول بروکار A, B, C رسم می‌شوند (شکل ۱۵۰) یکدیگر را در R قطع کنند؛ در این صورت داریم

$$\angle BRC = \angle B_1 A_1 C_1 = \angle BAC$$

پس R روی دایرهٔ محیطی (O) از مثلث ABC قرار دارد، و R و A در یک طرف ضلع BC قرار دارند. پس می‌بینیم که خط BR ، خطوطی را که از C و A به موازات اضلاع متناظر مثلث A, B, C رسم می‌شوند، در نقطهٔ R واقع بر (O) قطع می‌کند.

۶۷۹. تعریف. نقطه R (§۶۷۸) را نقطهٔ اشتایز مثلث می‌نامند.

۶۸۰. نتیجه. خطوطی که از رأسهای یک مثلث بر اضلاع متناظر مثلث اول بروکار عمود می‌شوند، از یک نقطه می‌گذرند.

در واقع این عمودها از نقطه N ، روپ روی قطری R در دایرهٔ (O) ، می‌گذرند.

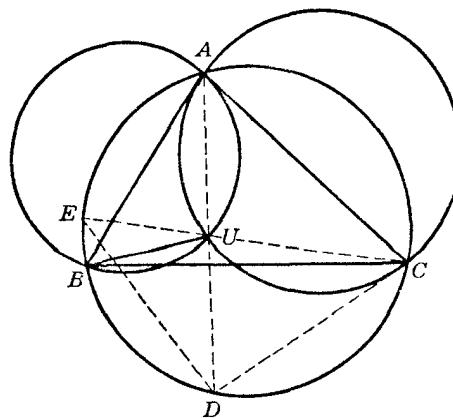
۶۸۱. تعریف. نقطه N (§۶۸۰) را نقطهٔ تاری مثلث مفروض می‌نامند.

۶۸۲. قضیه. دایرهٔ محیطی مثلث روی میانه‌های متقارن (امتداد داده شده) مثلث پاره خط‌هایی جدا می‌کند، که نقاط وسط آنها رأسهای مثلث دوم بروکار هستند.

زاویه OK که در دایرة (OK) محاط است (شکل ۱۵۰) قائم است؛ پس OA عمودی است که از مرکز دایرةٔ (OK) بر میانهٔ متقارن AK از مثلث ABC رسم شده است؛ و قضیه ثابت می‌شود.

۶۸۳. قضیه. دایره‌های الحاقی مستقیم و غیرمستقیم مماس بر اضلاع یک زاویهٔ مثلث، یکدیگر را در رأس متناظر مثلث دوم بروکار قطع می‌کنند.

فرض کنید U نقطهٔ برخورد دو دایرةٔ الحاقی (CA) و (BA) از مثلث ABC باشد (شکل ۱۵۱) و



شکل ۱۵۱

خطوط AU و CU دایره محیطی (O) را در D و E قطع کنند. داریم

$$\angle UAB = \angle ACU = \angle ACE = \angle ADE \quad (1)$$

$$\angle UBA = \angle CAU = \angle CAD = \angle CED$$

پس سه مثلث UDE ، UAC و UAB متشابه‌اند. پس

$$\angle BCA = \angle ECD \quad \text{و} \quad \angle BAD = \angle BCD$$

یعنی وترهای AB و DE برابرند، و در نتیجه مثلثهای UAB و UDE همنهشت‌اند، و $AU = UD$.
در مثلثهای متشابه UAC و UAB ارتقاهای رسم شده از U با اضلاع AB و AC متناسب‌اند؛ پس
 U نقطه‌ای از میانه متقاضن گذرنده از A در مثلث ABC است (§۵۶۷). پس قضیه ثابت می‌شود.

تمرین

- ۱) نشان دهید خط قطبی مرکز دایرة محیطی یک مثلث نسبت به دایرة دوم لوموان، محور اصلی این دایرة و دایرة بروکار است.
- ۲) نشان دهید که خطوط واصل بین رأسهای یک مثلث و رأسهای متناظر مثلث اول بروکار اضلاع متناظر مثلث مفروض را به نسبت عکس مربع دو ضلع تقسیم می‌کنند.
- ۳) نشان دهید محور لوموان و دایرة بروکار نسبت به دایرة محیطی مثلث منعکس یکدیگرند.
- ۴) نشان دهید پاره خط‌های واصل بین نقطه لوموان و رأسهای مثلث اول بروکار توسط میانه‌های متناظر مثلث مفروض نصف می‌شوند.
- ۵) نشان دهید در هر مثلث خطی که از نقطه لوموان K به مرکز دایرة نه نقطه O' ، واصل می‌شود از مرکز دایرة بروکار مثلث پادمکمل، Z' ، می‌گذرد و $KO' = O'Z'$.
- ۶) نشان دهید که مرکز دایرة محیطی O در مثلث ABC ، نقطه لوموان K مثلث میانک $A_1B_1C_1$ و مرکز دایرة محیطی مثلث پادمکمل $A'B'C'$ ، نقطه Z' ، همخط‌اند، و $OK = KZ'$.
- ۷) نشان دهید که نقطه لوموان و مرکز دایرة محیطی یک مثلث، نقطه استاینبر و نقطه تاری مثلث اول بروکار هستند.
- ۸) نشان دهید که خط سیمسون یک نقطه برخورد قطر بروکار و دایرة محیطی مثلث، با نیمساز زاویه متشکل از یک ضلع مثلث و ضلع متناظر مثلث اول بروکار یا موازی است یا بر آن عمود است.

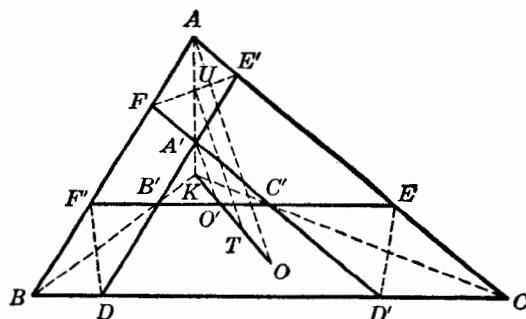
و، دایره‌های تاکر

۶۸۴. نقاط همدایره. مثلث $A'B'C'$ را متجانس مستقیم مثلث ABC ، به مرکز تجانس نقطه لوموان K در مثلث ABC رسم می‌کنیم (شکل ۱۵۲). فرض کنید اضلاع $C'A'$ ، $B'C'$ و $A'B'$ اضلاع AC و AB و BC را به ترتیب در نقاط E و F و D قطع کنند.

قضیه. شش نقطه D ، E ، F ، D' ، E' و F' همدایره‌اند.

قطر $E'F$ از متوازی‌الاضلاع $AE'A'F$ در نقطه U توسط قطر AA' نصف می‌شود، یعنی توسط میانه متقارن $AA'K$ از مثلث ABC ؛ پس $E'F$ با BC پادموازی است. به طور مشابه، $F'D$ با AC و $D'E$ با AB پادموازی است.

دو خط موازی DD' و EF و دو خط پادموازی $D'E$ ، DF برای اضلاع AC و AB ، یک ذوزنقه متساوی‌الساقین تشکیل می‌دهند؛ پس نقاط D ، F و E ، D' و F' روی یک دایره‌اند. به طور مشابه، نقاط E ، F و D' روی یک دایره‌اند؛ نقاط F ، D ، E' و E نیز روی یک دایره‌اند. این دایره‌ها نمی‌توانند مجزا باشند، زیرا در این صورت محورهای اصلی آنها خطوط ED' ، FE' و DF' هستند که یک مثلث تشکیل می‌دهند، حال آنکه محورهای اصلی سه دایره مجزا هم‌رسانند (§۴۲۵)؛ پس حداقل دو دایره از این سه دایره بر هم منطبق‌اند، و قضیه ثابت می‌شود.



شکل ۱۵۲

۶۸۵. تعریف. این دایره (§۶۸۴) دایرهٔ تاکر مثلث نامیده می‌شود.
نسبت تجانس مثلثهای ABC و $A'B'C'$ را به دلخواه می‌توان برگزید؛ پس مثلث ABC بی‌نهایت دایرهٔ تاکر دارد.

اگر یکی از رأسهای A' ، $A'B'C'$ ، مثلاً A' ، روی میانهٔ متقارن متناظرش AK انتخاب شود، نسبت تجانس تعیین می‌شود. اگر A' همان A باشد، دایرةٔ تاکر متناظر همان دایرةٔ محیطی مثلث ABC خواهد بود. اگر A' همان K باشد، یعنی وقتی پادموازیهای $D'F$ ، ... از K می‌گذرند، دایرةٔ تاکر بر دایرةٔ اول لوموان مثلث ABC منطبق است.

۶۸۶. قضیه. مرکز دایره‌های تاکر روی قطر بروکار مثلث مفروض قرار دارد.
شعاع $O'A'$ از دایرةٔ محیطی مثلث $A'B'C'$ (شکل ۱۵۲) با ساعع OA از دایرةٔ محیطی مثلث ABC موازی است، و $O'A'$ با K و O همخط است (§۴۷)؛ پس خط UT که از U ، نقطه وسط AA' ، به موازات UT رسم می‌شود، از T نقطه وسط OO' ، OO' عمود است (§۱۸۵، §۱۸۸)؛ پس

عمودمنصف وتر $E'F$ از دایره تاکر است. به طور مشابه، عمودمنصفهای DF و $D'E'$ از T می‌گذرند، و قضیه ثابت می‌شود.

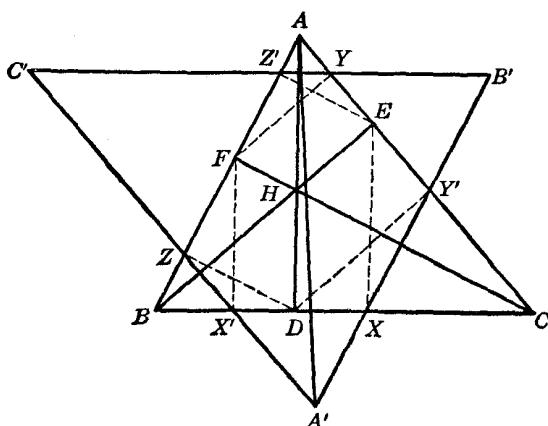
۶۸۷. قضیه. مرکز T دایره تاکر ($\S ۶۸۶$) مرکز دایره محاطی داخلی مثلث $A''B''C''$ است، که با امتداد دادن خطهای $D'E$, $E'F$, $F'D$ تشکیل می‌شود.

پاره خطهای $E'F$, $F'D$, و $D'E$ برابرند ($\S ۶۸۲$): بنابراین، این وترهای دایره تاکر از مرکز T دایره همفاصله‌اند، و قضیه ثابت می‌شود.

۶۸۸. قضیه. مثلث $A''B''C''$ ($\S ۶۸۷$) با مثلث مماسی (Q) مثلث ABC متجانس است، و نقطه لوموان ABC مرکز تجانس است.

پادموزایهای $D'E$ و $D''E'$ برای اضلاع AB و AC برابرند، پس نقطه برخوردهایشان، یعنی رأس A'' مثلث $A''B''C''$ ، روی میانه متقاضن AK از مثلث ABC قرار دارد ($\S ۵۶۹$). چنین است برای B'' و C'' . خطوط $E'F$, $D'E$ و $F'D$ بالاضلاع (Q) موازی‌اند، و رأسهای (Q) روی میانه‌های متقاضن ABC قرار دارند ($\S ۵۶۰$): پس قضیه ثابت می‌شود.

۶۸۹. قضیه. شش تصویر رأسهای مثلث ارتقایی بر اضلاع مثلث همدایره‌اند. فرض کنید H مرکز ارتقایی و DEF مثلث ارتقایی باشند (شکل ۱۵۳). فرض کنید X و X' تصاویر E و F بر BC ; Y و Y' تصاویر D و G بر CA ; و Z و Z' تصاویر F و E بر AB باشند.



شکل ۱۵۳

در مثلث AEF خط YZ' پای ارتفاع EZ' را به پای ارتفاع FY وصل می‌کند؛ پس YZ' با EF پادموازی است، و چون EF با BC پادموازی است، خطوط YZ' و BC موازی‌اند. به طور مشابه، ZX' و XY' را امتداد دهیم مثلث $A'B'C'$ متجانس با ABC موازی‌اند. یعنی اگر خطوط ZX' , YZ' , ZY' , XX' , و XY' را امتداد دهیم مثلث $A'B'C'$ متجانس با ABC پادموازی‌اند. شکل می‌شود.

خط AA' از وسط $Y'Z$ می‌گذرد، زیرا این دو خط قطراهای متوازی‌الاضلاع $AZA'Y'$ هستند. حال با توجه به دو مثلث متشابه HEF و $DY'Z$ و نتیجه‌ی کی‌گیریم که EF و $Y'Z$ موازی، و درنتیجه BC پادموازی است؛ پس AA' میانه متقاضن مثلث ABC است. برای B و B' و CC' نیز مشابه این مطلب صادق است. پس مرکز تجانس دو مثلث ABC و $A'B'C'$ روی نقطه لوموان K از مثلث قرار دارد؛ پس شش نقطه

X' , X , Z , Y' , Y , Z' روی یک دایره قرار دارند (§۶۸۱۴).

۶۹۰. تعریف. این دایره (§۶۸۱۹) دایرهٔ تیلور مثلث نامیده می‌شود.
از اثبات قضیه فوق نتیجه می‌شود که دایرهٔ تیلور یکی از دایره‌های تاکر مثلث است.

ز. قطب ارتفاعی

۶۹۱. قضیه. عمدهایی که از تصاویر رأسهای مثلث بر روی یک خط راست، بر اضلاع روی روی آن رأسها رسم می‌شوند هم‌اند.

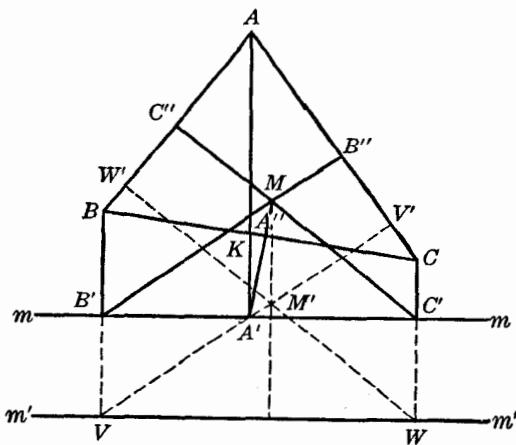
فرض کنید A' , B' , C' (شکل ۱۵۴) تصاویر رأسهای A , B , C از مثلث مفروض ABC بر خط مفروض m , m' , m'' , $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ و $A''B''$ عمدهایی رسم شده بر اضلاع CA , BC , AB باشند. اگر خطوط $C'C''$ و $B'B''$ و $A'A''$ خط^۱ N را در M و M' قطع کنند و AA'' ضلع BC را در K قطع کند، اضلاع دو مثلث $A'C'N$ و KAB و $A'B'M$ و KAC و همجنین، اضلاع دو مثلث $A'C'N$ و KAB بر هم عمودند؛ پس،

$$A'M : A'B' = CK : AK, \quad A'C' : A'N = AK : BK$$

خطوط AA' , BB' و CC' موازی‌اند؛ پس،

$$A'B' : A'C' = BK : CK$$

با ضرب کردن سه تناسب فوق در یکدیگر به دست می‌آوریم $A'M = A'N$ ؛ پس N و M بر هم منطبق‌اند، و قضیه ثابت می‌شود.



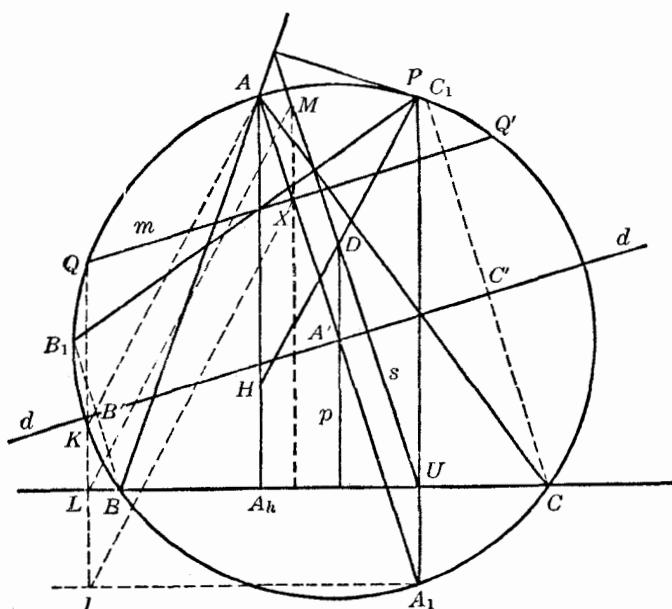
۱۵۴

۶۹۲. تعریف. نقطه M (§۶۹۱) قطب ارتفاعی خط m نسبت به مثلث ABC نامیده می‌شود.

۶۹۳. ملاحظه. قطب‌های ارتفاعی دو خط موازی روی خط مشترکی عمود بر آن دو خط قرار دارند، و فاصله بین قطب‌های ارتفاعی با فاصله بین خطوط موازی برابر است.
در واقع، مثلث $M'VW$ (شکل ۱۵۴) را می‌توان از مثلث $C'B'C$, با حرکت دادن رأسهای B' و C' در جهت $B'V$ به اندازه $B'V = C'W$ به دست آورد.

همچنین می‌توان دید که فاصله‌های دو خط m و m' از قطب‌های ارتفاعی متناظر شان، M و M' ، برابر است.

۶۹۴. قضیه. قطب ارتفاعی یک قطر دایره محاطی مثلث، بر روی دایره نه نقطه آن مثلث قرار دارد.
فرض کنید عمدهای CC' , BB' , AA' که از رأسهای مثلث ABC بر قطر d از دایرة محیطی ABC رسم می‌شوند، دایرة محیطی (O) را در نقاط A , B , C , A' , B' , C' قطع کنند (شکل ۱۵۵). سه عمودی که از AB , CA , BC بر اضلاع P , Q , Q' رسم می‌شوند (O) را در نقطه P ، یعنی قطب خط سیمسون عمود بر d ، قطع می‌کنند (§۲۸۸).



شکل ۱۵۵

وسط وتر AA' از ارتفاع ABC در مثلث AA_hA' و عمود AA' به BC ، همفاصله است؛ پس عمود p از A' به BC در نقطه D پاره خط PH را نصف می‌کند، که H مرکز ارتفاعی مثلث ABC است. عمدهای q و r از B' و C' به CA و AB نیز به دلایل مشابه از D می‌گذرند؛ پس نقطه $D = pqr$ قطب ارتفاعی قطر d است. پس D روی دایرة نه نقطه ABC قرار دارد (§۲۹۱)، و قضیه ثابت می‌شود.
باید توجه کرد که ضمناً وجود قطب ارتفاعی قطر d ، و بنابراین، قطب ارتفاعی هر خطی (§۶۹۳) را ثابت کرده‌ایم.

۶۹۵. نتیجه. خط s که از D به موازات $A'A$ رسم می‌شود، یا به عبارت دیگر، بر d عمود است (شکل ۱۵۵)، خط سیمسون نقطه P است (§۲۸۹). قطب ارتفاعی هر خطی موازی با d روی s است (§۶۹۳)؛ پس، قطب ارتفاعی یک خط شبیت به یک مثلث روی خط سیمسون عمود بر آن خط قرار دارد.

۶۹۶. ملاحظه. (الف) قطب ارتفاعی D (شکل ۱۵۵) برای قطر d از دایرة محیطی مثلث ABC را می‌توان به صورت زیر تعیین کرد.

عمودی که از A بر d رسم می‌شود آن را در A' و دایره محیطی را در A قطع می‌کند؛ خط s که از تصویر BC بر A ، یعنی نقطه U ، به موازات AA' رسم می‌شود، عمودی را که از A' بر BC رسم می‌شود در نقطه مطلوب D قطع می‌کند.

(ب) اگر m خط دلخواهی موازی با d باشد، قطب ارتقای آن، M ، نقطه برخورد s (§۶۹۳) با عمودی است که از X ، نقطه برخورد m و AA' ، بر BC رسم می‌شود.

۶۹۷. قضیه. اگر خطی دایره محیطی مثلث را قطع کند، آنگاه خطوط سیمیسون نقاط برخورد آن با دایره یکدیگر را در قطب ارتقای آن خط نسبت به مثلث قطع می‌کند.

فرض کنید m دایره محیطی (O) از مثلث ABC را در Q و Q' قطع کند (شکل ۱۵۵) و عمود QL که از Q بر BC رسم می‌شود (O) را در K و خط IA را، که از A موازی با BC رسم می‌شود، در I قطع کند. با در نظر گرفتن دو چهارضلعی محاطی A, XQI و A, KQ ، داریم

$$\angle IXA_1 = \angle IQA_1 = \angle KQA_1 = \angle KAA_1$$

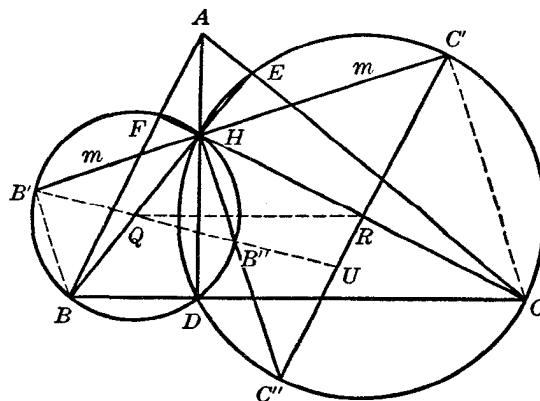
پس XI موازی است.

از طرف دیگر، پاره خطهای XM و LI با A موازی و برابرند، و LM با XI موازی است؛ پس خط سیمیسون Q است (§۲۸۹). برای Q' نیز مطلب مشابهی صادق است، پس قضیه ثابت می‌شود.

۶۹۸. نتیجه. نقاط فوئران یک مثلث قطبی ارتقای قطرهایی از دایره محیطی هستند که از مراکز سه میاس می‌گذرند (§۶۴۸).

۶۹۹. قضیه. اگر یک خط از مرکز ارتقای مثلث بگذرد، متقانن قطب ارتقای آن خط نسبت به آن خط روی دایره نه نقطه مثلث قرار دارد.

فرض کنید B' و C' ، تصاویر رأسهای B و C از مثلث ABC (شکل ۱۵۶) روی خط $m = B'HC'$ باشند، که از مرکز ارتقای مثلث، H ، می‌گذرد. B' و C' روی دایره‌های (Q) و (R) که CH و BH قطرشان هستند، قرار دارند. اگر M قطب ارتقای m باشد، خطوط $B'M$ و $C'M$ بر AB و AC عمودند (§۶۸۹) و بنابراین، به ترتیب با BH و CH موازی‌اند، یعنی $C'M$ و $B'M$ متقانهای Q و R نسبت به خط m هستند (Q و R مراکز دایره‌های (Q) و (R) هستند).



شکل ۱۵۶

حال نشان می‌دهیم که نقطه $U = (B'Q, C'R)$ روی دایره نه نقطه (N) از مثلث ABC قرار دارد.
اگر B'' روپروری قطری B' در (Q) ، و C'' روپروری قطری C' در (R) باشند، آنگاه B'' و C'' روی خطی
که از H بر m عمود می‌شود قرار دارند، و داریم

$$\begin{aligned}\angle QUR &= \angle B''UR = \angle UC''B'' + \angle UB''C'' = \angle UC''B'' + \angle QB''H \\ &= \angle RC''H + \angle QB''H = \angle RHC'' + \angle QHB'' = \angle QHR = \angle QDR\end{aligned}$$

پس چهار نقطه U, D, Q, R همدایره‌اند. D پای ارتفاع AD است و نقاط اویلر Q و R روی دایره نه نقطه
 (N) از مثلث ABC قرار دارند؛ پس قضیه ثابت می‌شود.

تمرین

- ۱) نشان دهید که مرکز ارتفاعی مثلث، قطب ارتفاعی اضلاع مثلث، نسبت به مثلث است.
- ۲) رأسهای مثلث ABC را روی خط مفروض m تصویر می‌کنیم و از تصویرها خطوطی موازی اضلاع
متناظر ABC رسم می‌کنیم تا مثلث $A'B'C'$ حاصل شود. نشان دهید که قطب ارتفاعی m نسبت به
با A', B', C' همدایره است.
- ۳) قطب ارتفاعی خط m نسبت به مثلث ABC ، و M قطب ارتفاعی m نسبت به مثلث میانک
آن، یعنی A, B, C است. خطی که از M بر m می‌گذرد، m را در نقطه G' قطع می‌کند به طوری که
 $MG' = 2G'M$. نشان دهید که C' تصویر G مرکز تقل مثلث ABC ، بر m است.
- ۴) تصاویر رأسهای مثلث ABC روی خط مفروضی هستند. نشان دهید عمودهایی که از
نقاط وسط پاره‌خطهای $A'B', B'C', C'A'$ بر اضلاع AB, BC و CA از مثلث رسم می‌شوند
همرس‌اند.
- ۵) نشان دهید که (الف) فاصله بین قطبی‌های ارتفاعی دو نیمساز یک زاویه مثلث، با قطر دایرة محیطی
مثلث برابر است؛ (ب) اگر وتر PQ از دایرة محیطی مثلث ABC بر BC عمود باشد، فاصله بین
قطبی‌های ارتفاعی خطوط AP و AQ با PQ برابر است.
- ۶) نشان دهید که قطب ارتفاعی یک خط نسبت به یک مثلث عبارت است از مرکز اصلی سه دایرة مماس
بر آن خط، که مرکزهایشان رأسهای مثلث پادمکمل مثلث مفروض هستند.

تمرینهای تکمیلی

- ۱) P و Q دو نقطه مزدوج همزاریه دلخواه نسبت به مثلث ABC هستند. اگر AQ دایرة محیطی را در O و
قطع BC را در R قطع کند، نشان دهید که APR با QR موازی است.
- ۲) اگر O و G مرکز دایرة محیطی و مرکز تقل مثلث ABC ، و O_1, O_2, O_3 و O_4 مرکزهای دایره‌های محیطی مثلثهای
 GAB, GCA و GBC باشند، نشان دهید که نقاط O و G به ترتیب مرکز تقل و نقطه لوموان مثلث
 $O_aO_bO_c$ هستند.
- ۳) اگر در مثلث ABC ، $B'C'$ با BC پادموازی باشد و از پای میانه متقابن رسم شده از A بگذرد، نشان
دهید که خط قطبی A نسبت به دایره‌ای که BC قطر آن است، از مرکز ارتفاعی مثلثهای ABC و
 $AB'C'$ می‌گذرد.
- ۴) مثلث ارتفاعی مثلث ABC ، X, Y و Z تصاویر نقطه لوموان K روی اضلاع CA, BC و AB ، و
متقارنهای X', Y' و Z' نسبت به K هستند، نشان دهید که X', Y', Z' نقاط
لوموان مثلثهای CDE, AEF و BFD هستند.

- (۵) دایرة محیطی و مرکز تقلیل یک مثلث متغیر ثابت هستند. نشان دهید که مکان هندسی نقطه لوموان مثلث یک دایرة است.
- (۶) دایرة محیطی و نقطه لوموان یک مثلث متغیر ثابت هستند. نشان دهید که مکان هندسی مرکز تقلیل مثلث یک دایرة است.
- (۷) P و P' دو نقطه مزدوج همزاویه، و Q و Q' نیز دو نقطه مزدوج همزاویه هستند. نشان دهید که نقاط $R = (PQ, P'Q')$ و $R' = (PQ', P'Q)$ نیز مزدوج همزاویه‌اند.
- (۸) نشان دهید که مزدوج همزاویه نقطه ناگل با مرکز دایرة محیطی و مرکز دایرة محاطی داخلی همخط است.
- (۹) نشان دهید که موربهای معکوس دو قطر عمود بر هم دایرة محیطی یک مثلث یکدیگر را روی خط قطبی مرکز دایرة محیطی نسبت به دایرة نه نقطه، قطع می‌کنند.
- (۱۰) نشان دهید که متقارن یک رأس مثلث همیانه متقارن مثلث ABC نسبت به ضلع متناظر مثلث $A'B'C'$ مزدوج همزاویه پای عمودی است که از مرکز دایرة محیطی بر میانه متقارن در نظر گرفته شده رسم می‌شود.
- (۱۱) از مثلثی محل نقاط برخورد میانه‌ها با دایرة محیطی مفروض آن. مثلث را رسم کنید.
- (۱۲) مثلثی را که محل مثلث دوم بروکار آن مفروض است، رسم کنید.
- (۱۳) متقارنهای نقاط برخورد میانه‌ها با دایرة محیطی نسبت به اضلاع متناظرشان رأسهای یک مثلث هستند. نشان دهید که این مثلث با مثلث دوم بروکار مثلث مفروض متسجانس است.
- (۱۴) نشان دهید خطوطی که رأسهای متناظر دو مثلث بروکار مثلث مفروضی را به هم وصل می‌کنند، یکدیگر را در مرکز تقلیل مثلث مفروض قطع می‌کنند.
- (۱۵) نقطه دلخواهی از صفحه مثلث ABC است. A' , B' , C' قطع می‌کنند، و MA , MB , MC دایرة محیطی را در A , B , C متناظر DEF متشابه مستقیم هستند و M در $A'B'C'$ باز مزدوج همزاویه M در $A'B'C'$ است. با استفاده از این مطلب نشان دهید که میانه‌ای همیانه متقارنی وجود دارد که اضلاع هرکدام با میانه‌های دیگر متناسب‌اند.
- (۱۶) نشان دهید که مرکز دایرة محیطی یک مثلث، مرکز تقلیل مثلث پادپادک نقطه لوموان مثلث مفروض است.
- (۱۷) نشان دهید که قطبی سه خطی نقطه‌ای روی دایرة محیطی مثلث از نقطه لوموان آن مثلث می‌گذرد.
- (۱۸) نشان دهید که (الف) خط واصل بین نقطه لوموان و مرکز ارتفاعی مثلث از نقطه لوموان مثلث ارتفاعی آن مثلث نیز می‌گذرد؛ (ب) در يك گروه مرکز ارتفاعی، چهار خطی که هر کدام از نقطه لوموان و مرکز ارتفاعی یک مثلث می‌گذرد، همسان‌اند.
- (۱۹) A' وسط ضلع BC از مثلث ABC ، نقطه وسط پاره خط MN ، که دو خط همزاویه AM و AN روی خطی که از A' می‌گذرد جدا می‌کنند، نیز هست. اگر خطوط CN و BN و AM را در E و F متناظر E و F قطع کنند، نشان دهید مماسهایی که در B و C بر دایره‌های ABE و ACF رسم می‌شوند یکدیگر را روی خط AN قطع می‌کنند.
- (۲۰) فرض کنید D و E تصویرهای رأس A از مثلث ABC روی ضلع BC و عمود منصف ضلع BC باشند. اگر A' نقطه وسط BC باشد، نشان دهید که خط DE از رأس A' مثلث دوم بروکار می‌گذرد و $EA' \cdot AA' = AB^2 + AC^2$.
- (۲۱) نقاط بروکار یک مثلث ثابت‌اند و اندازه زاویه بروکار نصف یک زاویه مثلث است. نشان دهید مکان هندسی رأسهای این مثلث سه خط راست است.
- (۲۲) با مفروض بودن محل هر سه تابی از بین نقطه زیر می‌توان یک مثلث متساوی الساقین را رسم کرد: یک

رأس، مرکز تقلل، نقطه لوموان، دو نقطه بروکار. این کار را برای همه حالتها انجام دهد.
 (۲۳) نقطه متغیر P روی دایره‌ای هم مرکز با مثلث متساوی‌الاضلاع ABC قرار دارد. نشان دهید که زاویه بروکار مثلث پادک P نسبت به ABC ثابت است.

(۲۴) نشان دهید که اگر مرکز ارتفاعی یک مثلث روی دایره بروکار باشد، مثلث متساوی‌الاضلاع است.

(۲۵) P, Q, R, P', Q', R' و $P'Q'R'$ تصاویر نقاط بروکار روی اضلاع مثلث ABC هستند. ثابت کنید که (الف) مثلث‌های PQR و $P'Q'R'$ دایره بروکار مشترکی دارند که مرکزش نقطه لوموان مثلث ABC است؛ (ب) دایرة اول لوموان این مثلثها نیز بر هم منطبق‌اند و این دایره با دایرة دوم لوموان ABC برابر است؛ (ج) محورهای اصلی دایره‌های محیطی این سه مثلث، قطرهای بروکار آنها هستند.

(۲۶) خطی که از نقطه لوموان K در مثلث ABC می‌گذرد، اضلاع BC و BA را نقاط D و E قطع می‌کند، به طوری که $DK = KE$ و نقطه دوم برخورد دایرة محیطی مثلث DBE با دایره‌ای است که AB قطر آن است. ثابت کنید که نقاط B, C, Q و یکی از نقاط بروکار ABC همدایره‌اند.

(۲۷) (الف) M و M' نقاط همزاویه زاویه $(AQR, AQ'R')$ هستند و $MR, MQ : M'Q' : M'R'$ عمودهایی هستند که از M و M' بر اضلاع این زاویه رسم شده‌اند. ثابت کنید که نقطه $(QR', Q'R)$ روی خط MM' قرار دارد.

(ب) نشان دهید که خط واصل بین نقاط (AM', QR) و (AM, QR') با خط MM' موازی است.

(۲۸) (الف) M و M' دو نقطه همزاویه مثلث (T) هستند؛ نشان دهید که اضلاع مثلث‌های پادک نقاط M و M' نسبت به (T) ، یعنی مثلث‌های PQR و $P'Q'R'$ ، خطوط قطبی نقاط M و M' نسبت به دایره‌های (A) ، (B) و (C) هستند؛ (آ) (B) و (C) دایره‌هایی هستند که رأسهای A, B, C از مثلث (T) مراکزشان هستند و بر دایرة پادک M و M' نسبت به (T) عمودند.

(ب) نشان دهید سه خطی که رأسهای A, B و C را به ترتیب به نقاط $(PQ, P'Q')$ و $(RQ, R'Q')$ وصل می‌کنند، موازی‌اند.

واژه‌نامه

orthocentric group of triangles	گروه مئنهای مرکز ارتقای	altitude	ارتفاع
directly similar	متشابه مستقیم	inversion	انعکاس
inversely similar	متشابه معکوس	counterclockwise	پاد ساعتگرد
symmetric	متقارن	anticenter	پادمرکز
parallelogram	متوازی‌الاضلاع	antihomologous	پادهمتا
pedal triangle	مثلث پادک	homothecy	تجانس
antipedal triangle	مثلث پاد پادک	analysis	تحلیل
anticomplementary triangle	مثلث پادمکمل	construction	ترسیم
complementary triangle	مثلث مکمل	similitude	تشابه
tangential triangle	مثلث مماسی	symmetry	تقارن
medial triangle	مثلث میانک	cyclic quadrilateral	چهارضلعی محاطی
perspective triangles	مئنهای منظری	circle of Apollonius	دایره آپولونیوس
homologous triangles	مئنهای همتا	Apollonian circle	دایره آپولونیوسی
cosymmedian triangles	مئنهای هم‌میانه متقارن	pedal circle	دایره پایی
radical axis	محور اصلی	polar circle	دایره قطبی
radical center	مرکز اصلی	incircle	دایره محاطی
centroid of a triangle	مرکز نقل مثلث	circumcircle	دایره محیطی
incenter	مرکز دایرة محاطی	adjoint circles	دایره‌های الحقافی
circumcenter	مرکز دایرة محیطی	orthogonal circles	دایره‌های متعامد
conjugate	مزدوج	coaxal circles	دایره‌های هم محور
data	معلومات	inaccessible	دور از دسترس
locus	مکان هندسی	trapezoid	ذوزنقه
bisector	نیمساز	clockwise	ساعتگرد
basic points	نقاط اساسی	tritangent	سه مماس
isodynamic points	نقاط همپویا	inradius	شعاع دایرة محاطی
concyclic points	نقاط همدایره	circumradius	شعاع دایرة محیطی
isotomic points	نقاط همنوا	mediator	عمودمنصف
homologous	همتا	pole	قطب
concurrent	همرس	orthopole	قطب ارتقای
harmonic	همساز	trilinear pole	قطب سه خطی
isotomic	همنوا	circumdiameter	قطر دایرة محیطی
congruent	همنهشت	power of a point	قوت نقطه

نمايه

- آبولونيوس ۲۰۶-۲۱۵
 دایره ~، ۱۸
- اعکاس، ۲۰۶-۲۱۵
 دایره ~، ۲۰۶
 شاعر ~، ۲۰۶
 قطب ~، ۲۰۶
 مرکز ~، ۲۰۶
- بردار شاعر نقطه، ۲۰۶
 بروکار
 دایره ~، ۲۴۵-۲۴۹
 زاویه ~، ۲۴۳
 قطر ~، ۲۳۲، ۲۲۵
 مثلث اول ~، ۲۴۵-۲۴۸
 مثلث دوم ~، ۲۴۵
 نقاط ~، ۲۴۱-۲۴۶
 برهماگوتا
 رابطه ~، ۱۲۳
 قضیه ~، ۱۲۵
- پادمرکز(چهارضلعی محاطی)، ۱۲۵، ۱۲۳، ۱۲۰، ۱۲۲، ۱۲۸
 پادموازیهای لوموان، ۲۲۹
 پادهمتا
 نقاط ~، ۱۷۹، ۱۶۹، ۱۶۸، ۱۶۸
 وترهای ~، ۱۶۸
 پاره خطهای جهتدار، ۱۳۷
- تجانس (تشابه را نیز بینید)، ۳۸-۴۳
 مرکز ~، ۴۷، ۳۹-۴۱
 مستقیم، ۴۱، ۴۰
 معکوس، ۶۷، ۶۱، ۴۰
 نسبت ~، ۳۹-۴۱
 تشابه
- مرکز ~، ۳۹
 نسبت ~ (تجانس را بینید)
 تقارن، ۴۰
- چهارضلعی، ۱۱۴-۱۲۶
 عمود قطر، ۱۳۰
 محاطی، ۱۱۷-۱۲۳
 محیطی، ۱۲۳
 مرکز ارتقای، ۱۰۰
- حجره پوسلیه، ۲۱۰
 خط اویلر، ۹۵
 خط سیمسون، ۱۲۷-۱۳۶
 خط قطبی، ۱۶۱-۱۶۷
 خط مرکزی دسته دایره، ۱۸۲
 خطوط مزدوج برای دایره، ۱۶۳
 خطوط مزدوج همزاویه، ۲۳۶
 خطوط همنا، ۶۵
 خطوط پادموازی، ۱۸۱، ۱۴۹، ۱۳۱، ۹۱
 خهای منعکس، ۲۰۶
- دایره اول لوموان، ۲۲۸
 دایره پایی، ۲۳۹
 دایره دوم لوموان، ۲۲۹
 دایرة قطبی، ۱۶۵
 دایرة کسینوس، ۲۲۹
 دایرة محاطی، ۷
 شاعر ~، ۷
- دایرة محاطی خارجی مثلث، ۷۰
 دایرة محیطی، ۷
 شاعر ~، ۷
- دایرة نهنجده، ۹۷-۱۰۳
 دایره های آبولونیوسی، ۲۳۰-۲۳۵
 دایره های الحقی

- گروه غیرمستقیم ~، ۲۴۱، ۲۴۲، ۲۴۳
 گروه مستقیم ~، ۲۴۳، ۲۴۱-۲۴۲
 دایره‌های پادمتشابه، ۱۹۲
 دایره‌های معتمد، ۱۶۱-۱۴۰
 دایره‌های منصف و نصفشده، ۱۷۴
 دایره‌های هم محور، ۱۹۴-۱۸۱
 دسته خط همساز، ۱۵۴
- سیولی، ۱۴۵
 سه مماس
 دایره‌های (های) ~، ۸۷-۶۷
- عمودمنصف، ۱۶
- قضیه استوارت، ۱۳۸
 قضیه اویلر، ۸۰
 قضیه بطلیوس، ۱۱۷، ۲۱۲
 قضیه ذراگ، ۱۴۷
 قضیه سیول، ۱۴۴-۱۴۷
 قضیه فوئر باخ، ۹۸
 قضیه کارنو، ۷۸
 قضیه کیسی، ۱۸۹
 قضیه ملانوس، ۱۳۹
 قطب (خط سیمیون)، ۱۲۸
 قطب (خط نسبت به دایره)، ۱۶۱-۱۶۷
 قطب ارتقاعی، ۲۵۲
 قطب سه خطی، ۲۱۸
 قطبی سه خطی، ۲۱۸
 قوت نقطه (نسبت به دایره)، ۱۷۲
- گروه میانک (میانک را بینید)، ۶۸، ۶۷، ۶۵، ۶۴
 میانک، ۶۷، ۶۵، ۶۴
 مثلث اویلر، ۹۷
 مثلث پادبایی، ۲۳۹
 مثلث پادک، ۹۱
 مثلث پایی، ۱۵۸
 مثلث سوابی، ۱۴۵
 مثلث قطبی، ۱۶۴
 میانهای همتا (منظري)، ۱۴۸
 میانهای هم میانه متقارن، ۲۲۴
 محور اصلی
 دسته دایره، ۱۸۱-۱۹۴
 دو دایره، ۱۷۶
 محور پاداصلی، ۱۷۸
 محور پادک، ۱۶۱
 محور لوموان، ۲۲۵
 مرربع، ۷، ۱۱، ۲۱، ۳۱، ۳۳، ۳۵، ۴۳، ۴۵
 مرکز ارتقاعی، ۸۹
 مرکز اصلی سه دایره ۱۹۵-۱۹۷، ۲۳۹، ۲۴۱، ۲۵۵
 مرکز ثقل
 چهارضلعی، ۱۱۵
 مثلث، ۶۷-۶۲
 مرکز خارجی مثلث، ۷۰
 مرکز دایرة نهفته، ۹۷
 مزدوج دسته دایرة هم محور، ۱۸۶
 مساحت مثلث، ۳۱، ۳۸، ۶۱، ۶۳
 مسئله پاپوس، ۶۰
 مسئله دولاهیر، ۱۳۰
 معلومات مثلث، ۵۴، ۵۷، ۵۹
 مکان هندسی، ۱۹-۱۴، ۴۱، ۴۷، ۴۸، ۵۰، ۵۰
 موازیهای لوموان، ۲۲۸
 میانهای مقارن خارجی مثلث، ۲۲۰
- نقاط (مزدوج) همساز، ۵۴-۵۲
 نقاط اساسی، ۱۸۲
 نقاط اویلر، ۹۷
- مشتابه
 چندضلعیهای ~ در محل، ۳۸
 میانهای ~ مستقیم، ۳۷
 میانهای ~ معکوس، ۳۷
 مثلث

نقطهٔ ژرگون،	۱۴۵	نقطهٔ مزدوج برای دایره،	۱۸۷
نقطهٔ فوئرباخ،	۹۹	نقطهٔ مزدوج همزاویه،	۲۳۸-۲۴۲
نقطهٔ لوموان،	۲۲۵	نقطهٔ وابسته همساز برای مثلث،	۲۱۸
نقطهٔ مکل،	۶۵	نقطهٔ وارون،	۱۵۷-۱۶۲
نقطهٔ میکل،	۱۳۳	نقطهٔ همپویای سه دایره،	۱۹۷
نقطهٔ ناگل،	۱۴۶	نقطهٔ همپویای مثلث،	۲۳۲
نوع تقاطع (دستهٔ دایرهٔ هم محور)،	۱۸۲	نقطهٔ همدایره،	۹۲
همساز		نقطهٔ همنوا	
تقسیم ~ (نقاط مزدوج همساز را بینید)		برای مثلث،	۱۳۹
پاره خط‌های ~	۵۲	سروی ضلع مثلث،	۶۷, ۶۵
نقاط مزدوج ~	۵۲-۵۴	نقطهٔ پادمکل،	۶۸
		نقطهٔ دور از دسترس،	۴۳, ۲۹