بسم الله الرحمن الرحیم

پاسخ تمرین های فصل دوم کتاب پژوهش عملیاتی دکتر مهرگان

(تمارین فصل روش ترسیمی)

نویسنده :

رضا محمدیان

امیرمزیکی

دانلود شده از

Rasad-ATU.ir

سایت انجمن علمی مدیریت صنعتی دانشگاه علامه طباطبایی

۱) مسئله زیر را به روش ترسیمی حل کنید.

$Max\ Z = ۶X_۱ + ۸X_۲$

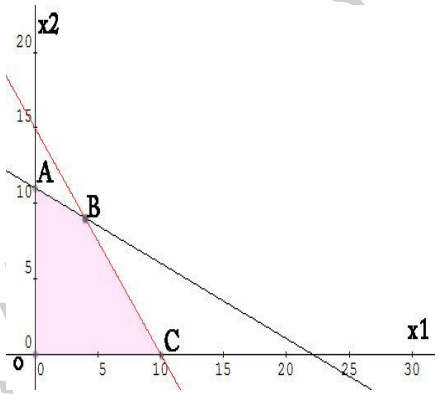
S.t. $[۱]\ ۳۰X_۱ + ۲۰\ X_۲ \le ۳۰۰ \rightarrow\ ۳۰X_۱ + ۲۰\ X_۲ = ۳۰۰ \rightarrow$

$x_۱$	۰	۱۰
$x_۲$	۱۵	۰

$[۲]۵X_۱ + ۱۰X_۲ \le ۱۱۰ \rightarrow\ ۵X_۱ + ۱۰X_۲ = ۱۱۰ \rightarrow$

$x_۱$	۰	۲۲
$x_۲$	۱۱	۰

$X_۱ , X_۲ \ge ۰$



$O(۰،۰) \rightarrow Z_O = ۰$

$A(۰،۱۱) \rightarrow Z_A = ۸۸$

$B(٤،۹) \rightarrow Z_B = ۹٦ \Rightarrow \begin{cases} ۳۰X_۱ + ۲۰\ X_۲ = ۳۰۰ \\ ۵X_۱ + ۱۰\ X_۲ = ۱۱۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳۰X_۱ + ۲۰\ X_۲ = ۳۰۰ \\ -۱۰X_۱ - ۲۰X_۲ = -۲۲۰ \end{cases}$

$۲۰X_۱ = ۸۰ \Rightarrow X_۱ = ٤ \Rightarrow X_۲ = ۹$

$C(۱۰،۰) \rightarrow Z_C = ٦۰$

پس مقدار بهینه برابر $z_B^* = ۹٦$ است

۲) این مسئله را به روش ترسیمی حل کنید.

$Max\ Z = ۲٤X_۱ + ۲۰X_۲$

S.t. $[۱]\ X_۱ + X_۲ \le ۱۲ \rightarrow\ X_۱ + X_۲ = ۱۲ \rightarrow$

$x_۱$	۰	۱۲
$x_۲$	۱۲	۰

$[۲]X_۱ + X_۲ \le ۲۰ \rightarrow\ X_۱ + X_۲ = ۲۰ \rightarrow$

$x_۱$	۰	۲۰
$x_۲$	۲۰	۰

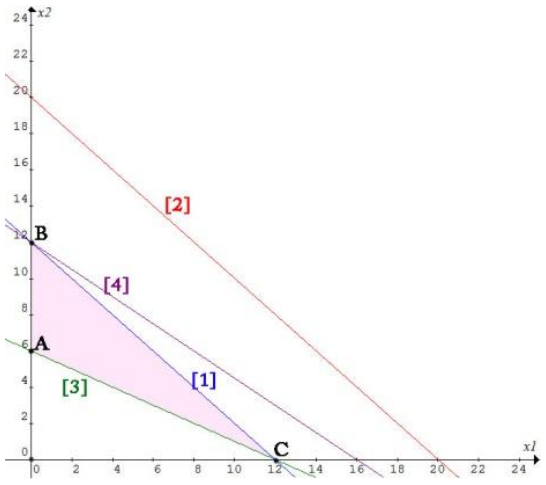
$[۳]۲X_۱ + ٤X_۲ \ge ۲٤ \rightarrow\ ۲X_۱ + ٤X_۲ = ۲٤ \rightarrow$

$x_۱$	۰	۱۲
$x_۲$	٦	۰

$[٤]۳X_۱ + ٤X_۲ \le\ ٤۸ \rightarrow\ ۳X_۱ + ٤X_۲ = \ ٤۸ \rightarrow$

$x_۱$	۰	۱٦
$x_۲$	۱۲	۰

$X_۱ , X_۲ \ge ۰$



محدودیت های زائد مسئله را در صورت وجود تعیین کنید . مسئله دارای چه حالت خاصی است؟

$A(۰،٦) \rightarrow Z_A=۱۲۰$ $B(۰،۱۲) \rightarrow Z_B=۲٤۰$ $C(۱۲،۰) \rightarrow Z_C=۲۸۸$

✓ پس مقدار بهینه برابر $z_C^*=۲۸۸$ است .محدودیت های ۲ و ٤ زائد می باشند. نقاط Bو C تبهگن ازدرجه ۱ می باشند و مسئله دارای منطقه موجه و یک جواب بهینه می باشد

۳) مسئله زیر را به روش ترسیمی حل کنید ، تعداد نقاط گوشه ای آن را با استفاده از فرمول به دست آورید و با نقاط گوشه ی روی شکل مقایسه کنید.

$\text{Max } Z = ۱۸X_۱ + ۱۰X_۲$

S.t. $[۱]\ ٤X_۱ + ٦X_۲ \geq ٤۸۰ \rightarrow ٤X_۱ + ٦X_۲ = ٤۸۰ \rightarrow$

$[۲]۱۲X_۱ + ۱۰X_۲ \geq ۱۲۰۰ \rightarrow ۱۲X_۱ + ۱۰X_۲ = ۱۲۰۰ \rightarrow$

$[۳]۱۰X_۱ + ۱۵X_۲ \leq ۱۵۰۰ \rightarrow ۱۰X_۱ + ۱۵X_۲ = ۱۵۰۰ \rightarrow$

$X_۱ , X_۲ \geq ۰$

$x_۱$	۰	۱۲۰
$x_۲$	۸۰	۰
$x_۱$	۰	۱۰۰
$x_۲$	۱۲۰	۰
$x_۱$	۰	۱۵۰
$x_۲$	۱۰۰	۰

$A(۳۷,۵ \ , \ ۷۵) \rightarrow Z_A=۱٤۲۵$

$$\begin{cases} ۱۲X_۱ + ۱۰X_۲ = ۱۲۰۰ \\ ۱۰X_۱ + ۱۵X_۲ = ۱۵۰۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱۲X_۱ + ۱۰X_۲ = ۱۲۰۰ \\ ۲X_۱ + ۳X_۲ = ۳۰۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱۲X_۱ + ۱۰X_۲ = ۱۲۰۰ \\ -۱۲X_۱ - ۱۸X_۲ = -۱۸۰۰ \end{cases}$$

$-۸X_۲ = -٦۰۰ \rightarrow \quad X_۲ = ۷۵ \rightarrow X_۱ = ۳۷,۵$

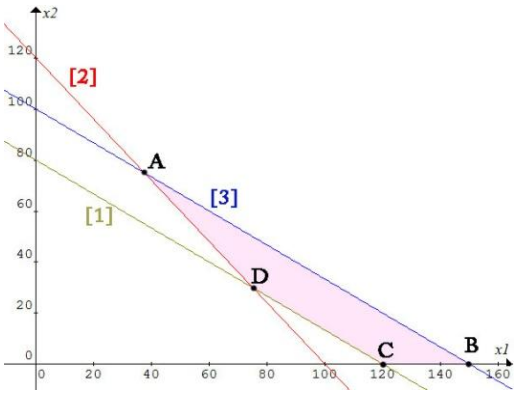
$B(۱۵۰ , ۰) \rightarrow Z_B=۲۷۰۰$

$C(۱۲۰ , ۰) \rightarrow Z_C=۲۱٦۰$

$D\ (۳۰ , ۷۵) \rightarrow Z_D=۱٦۵۰$

$$\begin{cases} ٤X_۱ + ٦X_۲ = ٤۸۰ \\ ۱۲X_۱ + ۱۰X_۲ = ۱۲۰۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۱۲X_۱ - ۱۸X_۲ = -۱٤٤۰ \\ ۱۲X_۱ + ۱۰X_۲ = ۱۲۰۰ \end{cases}$$

$-۸X_۲ = -۲٤۰ \rightarrow X_۲=۳۰ \rightarrow X_۱=۷۵$



٤) این مسئله را به روش ترسیمی حل کنید.

$\text{Max } Z = ٤X_۱ + ۲X_۲$

S.t. $[۱]۵X_۱ + ۲X_۲ \leq ۲۰ \rightarrow ۵X_۱ + ۲X_۲ = ۲۰ \rightarrow$

$[۲]۲X_۱ + ۳X_۲ \geq ۱۲ \rightarrow ۲X_۱ + ۳X_۲ = ۱۲ \rightarrow$

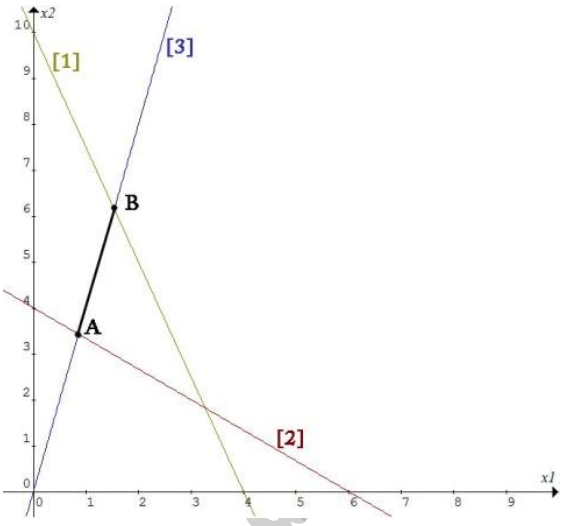
$[۳]٤X_۱ - X_۲ = ۰ \rightarrow ٤X_۱ - X_۲ = ۰ \rightarrow$

$X_۱ , X_۲ \geq ۰$

$x_۱$	۰	٤
$x_۲$	۱۰	۰
$x_۱$	۰	٦
$x_۲$	٤	۰

$x_۱$	۰	٤
$x_۲$	۰	۱٦

انجمن علمی مدیریت صنعتی دانشگاه علامه طباطبایی



$A\left(\frac{٦}{٧}, \frac{٢٤}{٧}\right)$ $\rightarrow Z_A = \frac{٧٢}{٧} = ١٠,٢٨$

$$\begin{cases} ٤X_١ - X_٢ = ٠ \\ ٢X_١ + ٣X_٢ = ١٢ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ١٢X_١ - ٣X_٢ = ٠ \\ ٢X_١ + ٣X_٢ = ١٢ \end{cases}$$

$$١٤X_١ = ١٢ \rightarrow \quad X_١ = \frac{٦}{٧} \rightarrow X_٢ = \frac{٢٤}{٧}$$

$B\left(\frac{٢٠}{١٣}, \frac{٨٠}{١٣}\right)$ $\rightarrow Z_B = \frac{٢٤٠}{١٣} = ١٨,٤٦$

$$\begin{cases} ٤X_١ - X_٢ = ٠ \\ ٥X_١ + ٢X_٢ = ٢٠ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ٨X_١ - ٢X_٢ = ٠ \\ ٥X_١ + ٢X_٢ = ٢٠ \end{cases}$$

$$١٣X_١ = ٢٠X_١ = \frac{٢٠}{١٣} \rightarrow X_٢ = \frac{٨٠}{١٣}$$

✓ پس مقدار بهینه برابر $z_B^* = ١٨,٤٦$ است.

۵) مسئله زیر را در نظر بگیرید.

$Max\ Z = ٣X_١ - ٦X_٢$

S.t. $[١]\ ٣X_١ + ٣X_٢ \geq ١٨ \rightarrow ٣X_١ + ٣X_٢ = ١٨ \rightarrow$

$x_١$	٠	٦
$x_٢$	٦	٠

$[٢] X_١ - ٢X_٢ \leq ٠ \rightarrow X_١ - ٢X_٢ = ٠ \rightarrow$

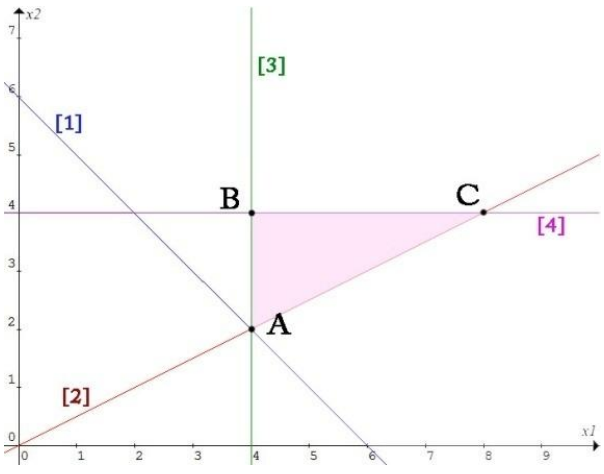
$x_١$	٠	٤
$x_٢$	٠	٢

$[٣] X_١ \geq ٤$

$[٤] X_٢ \leq ٤$

$X_١ , X_٢ \geq ٠$

الف)مسئله فوق را به روش ترسیمی حل کنید. ب) این مسئله بیانگر چه حالت خاصی است؟



$A(٤,٢) \rightarrow Z_A = ١٢ - ١٢ = ٠$

$B(٤,٤) \rightarrow Z_B = ١٢ - ٢٤ = -١٢$

$C(٨,٤) \rightarrow Z_C = ٢٤ - ٢٤ = ٠$

✓ نقطه A یک نقطه تبهگن از درجه یک می باشد.

دانشگاه علامه طباطبایی دانشکده مدیریت صنعتی

مسئله دارای جواب بهینه چند گانه است زیرا تابع هدف موازی با یکی از محدودیت های الزام آور فعال می باشد.یعنی تمام نقاط واقع بر پاره خط AC جواب مسئله می باشد.

۶)

$Max\ Z = X_1 - \frac{1}{2}X_2$

S.t. [۱] $3X_1 - X_2 \le 4 \rightarrow 3X_1 - X_2 = 4 \rightarrow$

x_1	۰	$\frac{4}{3}$
x_2	-۴	۰

[۲] $-X_1 + X_2 \le 1 \rightarrow -X_1 + X_2 = 1 \rightarrow$

x_1	۰	-۱
x_2	۱	۰

[۳] $X_1 \le 5$

$X_1 , X_2 \ge 0$

الف)مسئله فوق را به روش ترسیمی حل کنید. ب) این مسئله بیانگر چه حالت خاصی است؟

$O(0,0) \rightarrow Z_O=0$

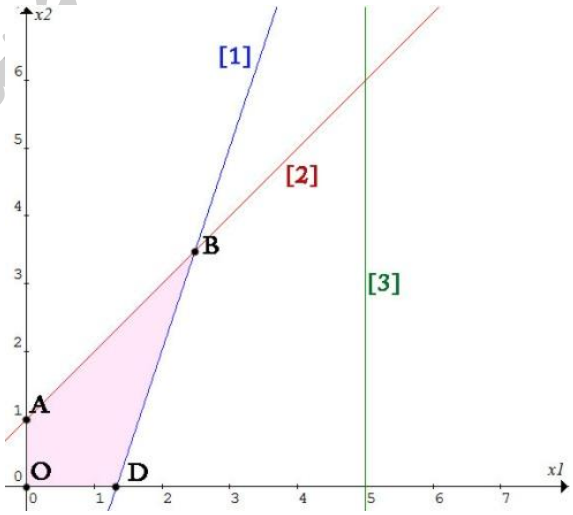
$A(0,1) \rightarrow Z_A=-\frac{1}{2}$

$B(2.5,3.5) \rightarrow Z_B=\frac{3}{4}$

$$\begin{cases} 3X_1 - X_2 = 4 \\ -X_1 + X_2 = 1 \end{cases}$$

$2X_1 = 5 \rightarrow X_1=2.5 \rightarrow X_2=3.5$

$D(\frac{4}{3} , 0) \rightarrow Z_D^*=\frac{4}{3}$



۷)

$Min\ Z = 4X_1 + 6X_2$

S.t. [۱] $X_1 + X_2 \ge 4 \rightarrow X_1 + X_2 = 4 \rightarrow$

x_1	۰	۴
x_2	۴	۰

[۲] $2X_1 + 3X_2 \le 6 \rightarrow 2X_1 + 3X_2 = 6 \rightarrow$

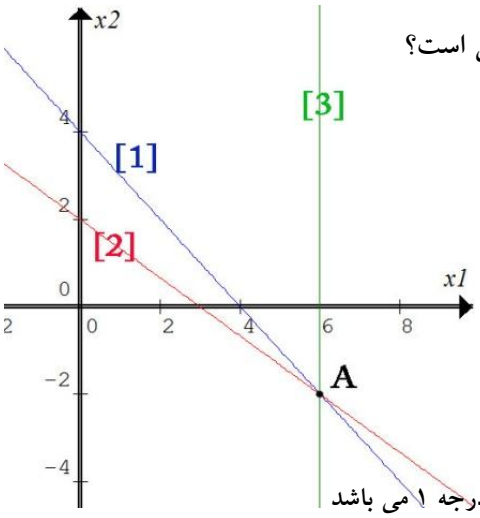
x_1	۰	۳
x_2	۲	۰

[۳] $X_1=6$

X_1 , X_2 آزاد در علامت

انجمن علمی مدیریت صنعتی دانشگاه علامه طباطبایی

الف)مسئله فوق را به روش ترسیمی حل کنید. ب) این مسئله بیانگر چه حالت خاصی است؟



نقطه تلاقی نمودار ۱و۳ → If X_1=٦ → X_2=-۲ → (٦,-۲)

نقطه تلاقی نمودار ۲و۳ → If X_1=٦ → X_2=-۲ → (٦,-۲)

Aمحل تلاقی نمودار ۱ و۲ و۳ می باشد

A(٦,-۲) → z_A^*=۱۲

.**منطقه موجه مسئله یک نقطه است .پس جواب بهینه نیز همان نقطه می باشدو نقطه A نیز تباهیده از درجه ۱ می باشد

۸) مسئله زیر را به روش ترسیمی حل کنید.

Min Z =Max (x-۱ , ۳x+۲)

-۳ ≤ x ≤ ۳

→

Min Z =Y

Y ≥ X - ۱ → Y = X-۱ →

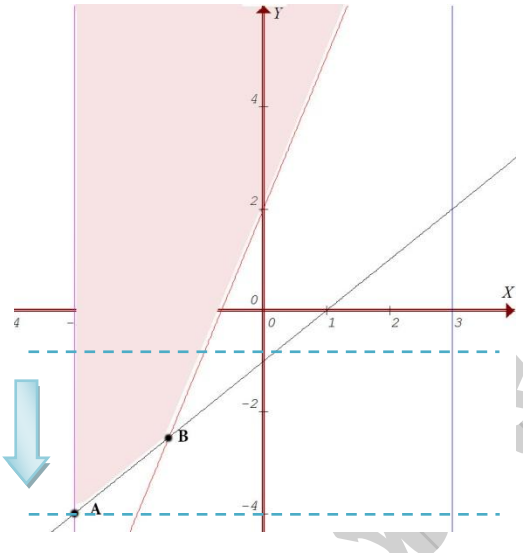
x_1	۰	۱
y	-۱	۰

Y ≥ ۳X + ۲ → Y = ۳X + ۲ →

x_1	۰	۱
y	۲	۵

X ≤ ۳ →

X ≥ - ۳



Min Z زمانی اتفاق می افتد که کمترین Y را دارا باشیم و کمترین Y نیز در نقطه A(۳,-٤)

اتفاق می افتد پس کمترین Y برابر است با -٤

۹) مسئله برنامه ریزی خطی را به روش ترسیمی حل کنید.

Max Z = ۵X_1 + ۳X_2

S.t. [۱] X_1 + X_2 ≤ ٦ → X_1 + X_2 = ٦ →

x_1	۰	٦
x_2	٦	۰

[۲]X_1≥۳

[۳]X_2 ≥ ۳

[٤]۲X_1 + ۳X_2 ≥ ۳ → ۲X_1 + ۳X_2 = ۳ →

x_1	۰	۱,۵
x_2	۱	۰

X_1 , X_2 ≥ ۰

انجمن علمی مدیریت صنعتی دانشگاه علامه طباطبایی

الف) در هر یک از حالات زیر معین کنید که آیا منطقه موجه از یک نقطه ، بی نهایت نقطه ، یا هیچ نقطه تشکیل شده است:

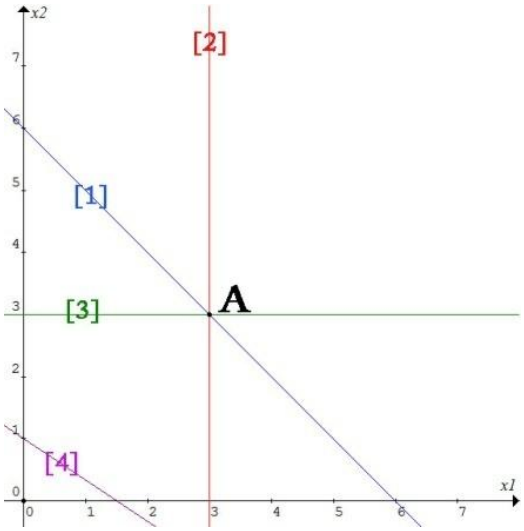
۱- محدودیت ها به صورت بالا باشند .

۲- محدودیت $X_1 + X_2 \leq ٦$ به $X_1 + X_2 \leq ٥$ تبدیل شود

۳- محدودیت $X_1 + X_2 \leq ٦$ به $X_1 + X_2 \leq ٧$ تبدیل شود

ب) برای هر حالت در بند الف ، تعداد نقاط گوشه ای موجه را در صورت وجود تعیین کنید .

ج) برای هر حالت در بند الف ، که در آن منطقه موجه وجود دارد ، مقدار حداکثر و حداقل تابع هدف را پیدا کنید.



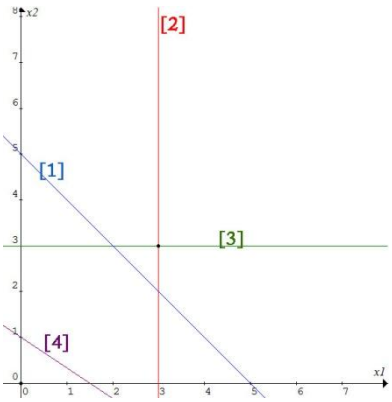
حالت ۱- منطقه موجه مسئله یک نقطه است و نقطه A یک نقطه تبهگن از درجه یک می باشد.

$A(٣, ٣) \rightarrow Z_A = ٢٤$

حالت۲-

$[١]\ X_١ + X_٢ \leq ٦ \rightarrow [١]\ X_١ + X_٢ \leq ٥ \rightarrow X_١ + X_٢ = ٥ \rightarrow$

$x_١$	۰	۵
$x_٢$	۵	۰



- فاقد محدوده موجه (جواب) می باشد.

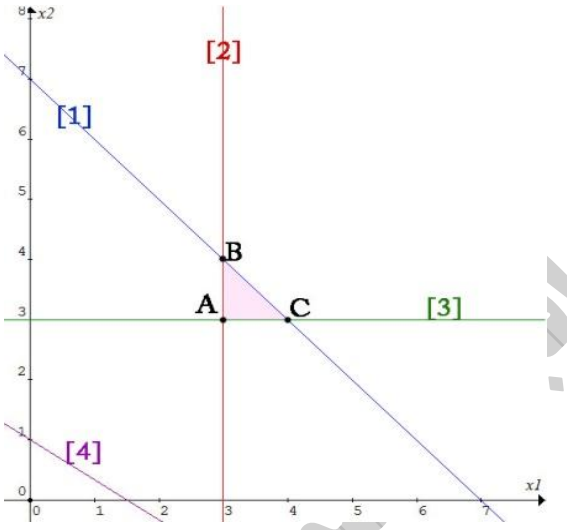
حالت۳-

$[١]\ X_١ + X_٢ \leq ٦ \rightarrow [١]\ X_١ + X_٢ \leq ٧ \rightarrow X_١ + X_٢ = ٧ \rightarrow$

$x_١$	۰	۷
$x_٢$	۷	۰

دارای منطقه موجه و سه نقطه گوشه ای می باشد.

انجمن علمی مدیریت صنعتی دانشگاه علامه طباطبایی



$A(۳،۳) \rightarrow Z_A=۲٤$

$B(۳،٤) \rightarrow Z_B=۲۷$

$C(٤،۳) \rightarrow Z_C=۲۹$

✓ بنابراین نقطه بهینه $C(٤،۳)$ با $z_C^*=۲۹$ است.

۱۰)مسئله زیر را در نظر بگیرید.

$Max\ Z = ٦X_۱ - ۲X_۲$

S.t. [۱] $X_۱ - X_۲ \leq ۱ \rightarrow X_۱ - X_۲ = ۱ \rightarrow$

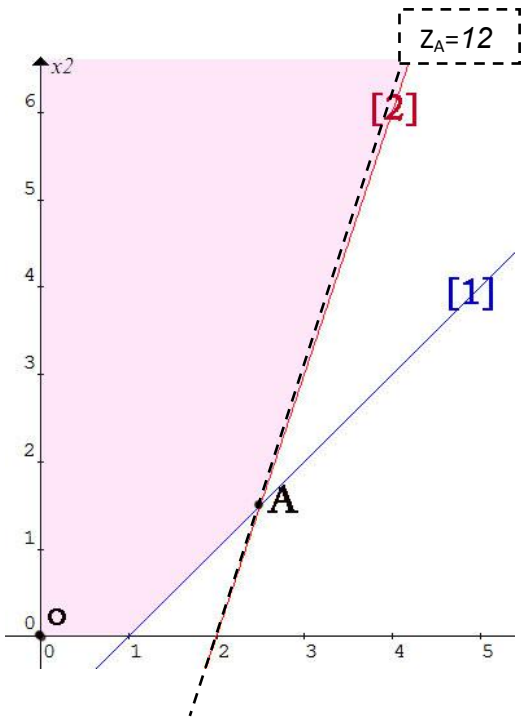
$x_۱$	۰	۱
$x_۲$	-۱	۰

[۲] $۳X_۱ - X_۲ \leq ٦ \rightarrow ۳X_۱ - X_۲ = ٦ \rightarrow$

$x_۱$	۰	۲
$x_۲$	-٦	۰

$X_۱ , X_۲ \geq ۰$

به طور ترسیمی نشان دهید که در جواب بهینه ، متغیر های $X_۱$ و $X_۲$ را می توان به طور نامحدودی افزایش داد در حالی که مقدار تابع هدف ثابت بماند.



$A(۲،٥،۱،٥) \rightarrow Z_A=۱۲$

$X_۱ - X_۲ = ۱ \Rightarrow -X_۱ + X_۲ = -۱$

$۳X_۱ - X_۲ = ٦ \quad ۳X_۱ - X_۲ = ٦$

$۲X_۱=٥ \rightarrow X_۱=۲،٥ \rightarrow X_۲=۱،٥$

✓ -محدوده موجه نامحدود و جواب بهینه محدود (معین) می باشد.

✓ -مسئله دارای جواب بهینه چندگانه است . یعنی با افزایش مقادیر $X_۱$و$X_۲$ مقدار تابع هدف تغییری نمی کند

دانشگاه علامه طباطبایی

۱۱) مسئله زیر را در نظر بگیرید

$Max\ Z = ۳X_۱ + ۲X_۲$

S.t. $[۱] ۲X_۱ + X_۲ \geq ۱۲ \rightarrow ۲X_۱ + X_۲ = ۱۲ \rightarrow$

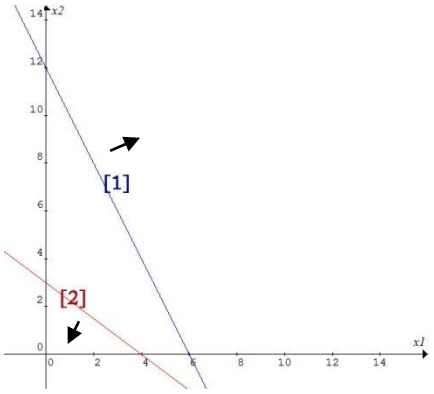
$[۲] ۳X_۱ + ٤X_۲ \leq ۱۲ \rightarrow ۳X_۱ + ٤X_۲ = ۱۲ \rightarrow$

$X_۱ , X_۲ \geq ۰$

$x_۱$	۰	٦
$x_۲$	۱۲	۰

$x_۱$	۰	٤
$x_۲$	۳	۰

از طریق ترسیمی نشان دهید که مسئله فوق دارای جواب بهینه نیست.



✓ مسئله دارای جواب بهینه نیست.

✓

۱۲) مسئله زیر را حل کنید .

$Max\ Z = ۳X_۱ + ٦X_۲$

S.t. $[۱]\ X_۱ + X_۲ \geq ۱ \rightarrow X_۱ + X_۲ = ۱ \rightarrow$

$[۲] ۲X_۱ + X_۲ \leq ۸ \rightarrow ۲X_۱ + X_۲ = ۸ \rightarrow$

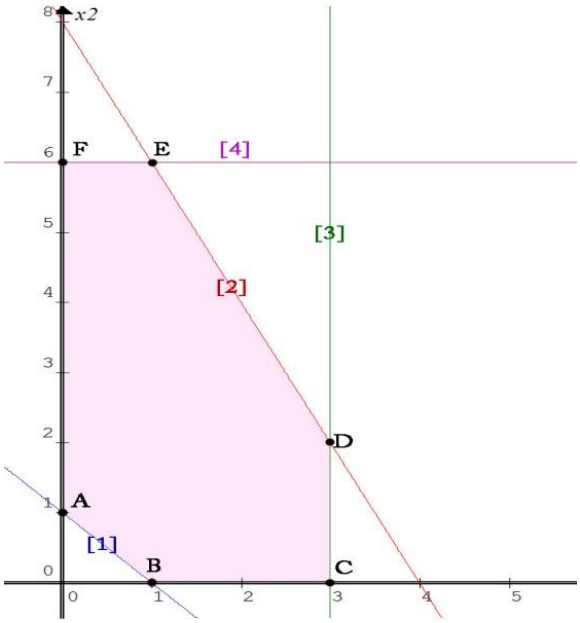
$[۳]\ X_۱ \leq ۳$

$[٤]\ X_۲ \leq ٦$

$X_۱ , X_۲ \geq ۰$

$x_۱$	۰	۱
$x_۲$	۱	۰

$x_۱$	۰	٤
$x_۲$	۸	۰



$A(۰,۱) \rightarrow Z_A=٦$ $B(۱,۰) \rightarrow Z_B=۳$

$C(۳,۰) \rightarrow Z_C=۹$ $D(۳,۲) \rightarrow Z_D=۲۱$

$E(۱,٦) \rightarrow Z_E=۳۹$ $F(۰,٦) \rightarrow Z_F=۳٦$

✓ بنابراین نقطه بهینه نقطه Eاست با: $z_E^* = ۳۹$

انجمن علمی مدیریت صنعتی دانشگاه علامه طباطبائی

۱۳) مسئله قبل را با توجه به تغییرات مستقل زیر مجددا حل کنید.

الف) تابع هدف به Min تبدیل شود

ب) تابع هدف به صورت $Max\ Z = X_1$ تغییر یابد

ج) تابع هدف به صورت $Max\ Z = -X_1 + 2X_2$ تغییر یابد

د) تابع هدف به صورت $Min\ Z = X_1 - 2X_2$ تغییر یابد

ه) محدودیت دوم به صورت تساوی برقرار شود

و) محدودیت دوم به «بزرگتر یا مساوی» تبدیل شود.

الف) با توجه به اطلاعات سوال قبل نقطه بهینه ، نقطه B است با $z_B^* = 3$

ب) با توجه به تغییر تابع هدف داریم :

$Z_A=0 \quad Z_B=1 \quad Z_C=3 \quad Z_D=3 \quad Z_E=1 \quad Z_F=0$

✓ بنابراین نقطه بهینه چندگانه است (پاره خط CD.)

ج)با توجه به تغییر تابع هدف داریم:

$Z_A=2 \quad Z_B=1 \quad Z_C=-3 \quad Z_D=1 \quad Z_E=11 \quad Z_F=12$

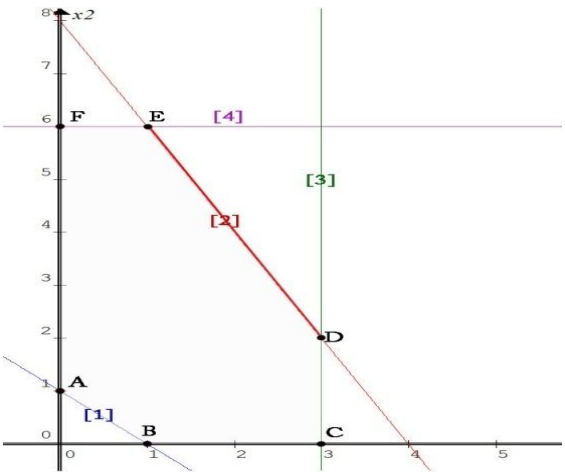
✓ بنابراین نقطه بهینه نقطه Fاست با: $z_F^* = 12$

د) با توجه به تغییر تابع هدف داریم:

$Z_A=-2 \quad Z_B=-1 \quad Z_C=3 \quad Z_D=-1 \quad Z_E=-11 \quad Z_F=-12$

✓ بنابراین نقطه بهینه نقطه Fاست با: $z_F^* = -12$

ه)



تغییر میکند
$2X_1 + X_2 \leq 8 \longrightarrow 2X_1 + X_2 = 8$

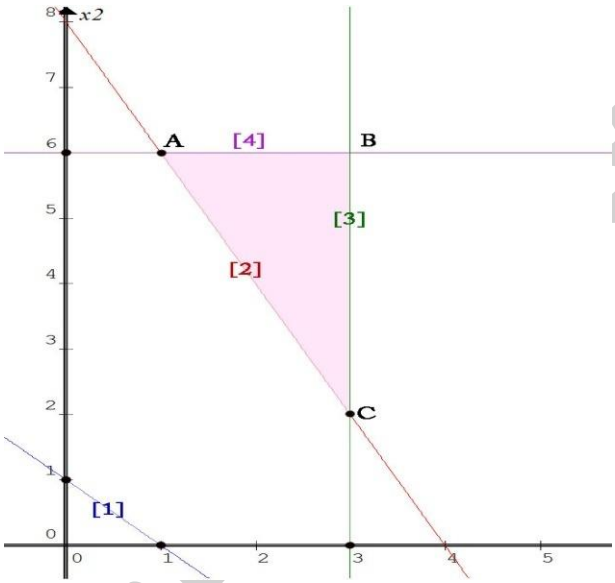
✓ منطقه بهینه پاره خط ED است.

$D(۳،۲) \rightarrow Z_D=۲۱$ $E(۱،٦) \rightarrow Z_E=۳۹$

✓ بنابراین نقطه بهینه نقطه Eاست با=۳۹: z_E^*

و)

$۲X_۱ + X_۲ \leq ۸ \xrightarrow{\text{تغییر میکند}} ۲X_۱ + X_۲ \geq ۸$



$A(۱,٦) \rightarrow Z_A=۳۹$

$B(۳,٦) \rightarrow Z_B=٤٥$

$C(۳,۲) \rightarrow Z_C=۲$

✓ بنابراین نقطه بهینه نقطه Bاست با: $z_B^*=٤٥$

در صورت وجود هر گونه اشتباه علمی یا تایپی لطفا آنها را به نویسندگان این حل المسائل اطلاع دهید تا در نسخه های بعدی اصلاح گردند.

باتشکر

رضا محمدیان (۰۹۳۶۶۳۹۶۳۵۹) (Reza.Mohammadianboy@Gmail.com)

امیر مزیکی (۰۹۱۹۰۸۶۶۰۰۴) (Amir.Mazyaki۱@yahoo.com)