جفت مرتب

$$(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}$$

حاصلضرب دکارتی دو مجموعه

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A\ ,\ b\in B\}$$

قضیه.

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$

$$A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$$

تعریف (رابطه از A به B). هر زیرمجموعه از $A\times B$

تعریف. اگر $R\subseteq A\times B$ آنگاه

$$R \text{ وارون } = R^{-1}=\{(b,a)\mid (a,b)\in R\}$$

$$R \text{ (دامنه) حوزه } = Dom(R)=\{a\in A\mid \exists\, b\in B\quad (a,b)\in R\}$$

$$R \text{ (برد) نگاره } = Im(R)=\{b\in B\mid \exists\, a\in A\quad (a,b)\in R\}$$

نمادگذاری. aRb به معنی $(a,b)\in R$

تعریف. R رابطه‌ای در مجموعه X (یعنی $R\subseteq X\times X$

$$R \text{ انعکاسی } \equiv \forall x\in X\quad (x,x)\in R$$

$$R \text{ متقارن } \equiv \forall x,y\in X\ [(x,y)\in R\Rightarrow (y,x)\in R]$$

$$R \text{ متعدی } \equiv \forall x,y,z\in X\ [((x,y)\in R,(y,z)\in R)\Rightarrow (y,z)\in R]$$

R رابطه هم‌ارزی $\equiv$ R انعکاسی و متقارن و متعدی

افراز مجموعه ناتهی X: فرض کنید P یک مجموعه از زیرمجموعه‌های ناتهی X باشد، P را یک افراز X گوییم هرگاه

الف) هر دو عضو P، مجزا باشند و

ب) اجتماع اعضای P برابر با X باشد.

تعریف. E یک رابطهٔ هم‌ارزی روی X و $x \in X \neq \emptyset$

رده هم‌ارزی x = $x/_X = \{y\in X \mid (x,y)\in E\}$

$$X/_E = \{x/_E \mid x\in X\}$$

قضیه. $X/_E$ یک افراز X است.

تعریف. فرض کنید P یک افراز مجموعهٔ ناتهی X باشد. رابطهٔ $X/_P$ روی X به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$(x,y)\in X/_P \Leftrightarrow \exists A\in P: x,y\in A$$

قضیه. $X/_P$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی X است.

قضیه. $X/_{X/_P} = P$.

اثبات. الف) عضو دلخواه $x/_{X/_P} \in X/_{X/_P}$ را در نظر بگیرید.

چون P افراز X است، دقیقاً یک مجموعهٔ $A\in P$ موجود است که $x\in A$.

بنا به تعریف $x/_{X/_P} = A$. پس $x/_{X/_P}\in P$. پس $X/_{X/_P}\subseteq P$

ب) عضو دلخواه $A\in P$ را در نظر بگیرید. چون A ناتهی است پس $x\in A$ موجود است.

داریم $x/_{X/_P}=A$. پس $A\in X/_{X/_P}$

از الف و ب داریم: $X/_{X/_P}=P$

تمرین. $X/_{(X/_E)} = E$ (E یک رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ ناتهی X)

حل. به ازای هر $x,y\in X$ داریم

$$(x,y)\in X/_{X/_E} \Leftrightarrow \exists A\in X/_E: x,y\in A \Leftrightarrow xEy \Leftrightarrow (x,y)\in E$$