

لگاریتر نیز چنین تغییر مقیاس می‌باشد:

$$L = \frac{(20)0.5}{50} = 200 \text{ mH}$$

در تغییر مقیاس منبع وابسته، تنها تغییر مقیاس اندازه می‌باشد لحاظ شود، زیرا تغییر مقیاس در فرکانس تأثیری بر منابع وابسته ندارد. چون این منبع جریان با ولتاژ کنترل شده است، ضرب ثابت ۰.۲ دارای واحد A/V یا S است. نظر به این که ضرب، واحد ادمیتانس دارد، آن را برابر K_m تقسیم می‌کنیم؛ پس جمله جدید $V_1 = 0.01$ خواهد شد. شبکه جدید در شکل ۱۶-۲۰ (ب) ملاحظه می‌شود. برای یافتن امپدانس شبکه جدید، لازم است منبع تست A را به پایانه‌های ورودی اعمال کنیم. در هر صورت می‌توان با هر یک از مدارها کار کرد. اجازه بددهید ابتدا با شکل ۱۶-۲۰ (الف) که تغییر مقیاس نیافته کار کنیم و سپس نتیجه را تغییر مقیاس دهیم. با توجه به شکل ۱۶-۲۰ (ج):

$$V_{in} = V_1 + 0.5s(1 - 0.2 V_1)$$

لذیز:

$$V_1 = \frac{20}{s} \quad (1)$$

اجرای جایگزینی‌های اشاره شده و به دنبال آن کمی دستکاری جبری داریم:

$$Z_{in} = \frac{V_{in}}{1} = \frac{s^2 - 4s + 40}{2s}$$

رای تغییر مقیاس این کمیت در مدار شکل ۱۶-۲۰ (ب)، آن را در $20 K_m$ ضرب و سپس ۵

رای $s/50 K_f$ جایگزین می‌کنیم. پس:

$$Z_{in} = \frac{0.2 s^2 - 40s + 20000}{s} \Omega$$

تمرین

- ۱۶-۹ جواب: $25\mu H$, 40Ω , 200 rad/s , $C = 0.01 \text{ F}$ با $\omega_0 = 20 \text{ rad/s}$, $B = 2.5 \text{ rad/s}$.
یک مدار تشید موزای با 20 mH و $32 \text{ k}\Omega$ است. مطلوب است مقادیر R و L را که شبکه با موارد زیر تغییر مقیاس یافته باشد. (الف) اندازه با ضرب ۸۰۰، (ب) فرکانس با ضرب 10^4 و (ج) اندازه با 800 و فرکانس با 10^4 .

۱۶-۶ نمودار بُود

بر این بخش روشی سریع را برای ترسیم تصویر تقریبی تغییر اندازه و فاز یک تابع تبدیل بر حسب ω خواهیم دید. البته می‌توان منحنی‌های دقیق تری را با ماشین حساب بر نامه‌پذیر یا کامپیوتر ترسیم کرد. می‌توان آن‌ها را روی صفحه کامپیوت مستقیماً دید. با این وجود، هدف ما تهیه تصویر بهتری از اسخ نسبت به نمودار قطب-صفر است، البته بدون آن که محاسباتی طولانی لازم باشد.

مقیاس دسی بل (dB)

س این منحنی تقریبی پاسخ که مقصود ساخت آن را داریم، منحنی مجازی یا نمودار بُود یا منحنی بُود کلمه بُود را به ضمّن "بُ" تلفظ نمایید) نام دارد و به نام ابداع کننده اش اچ دبل یو بُود (H.W.Bode) که پهندسی در رشته برق و ریاضی دانی در آزمایشگاه تلفن مل بود، خوانده شده است. محور فقی محور فرکانس و با مقیاس لگاریتمی است. دامنه هم بر حسب یک واحد لگاریتمی دیگر نام دسی بل (db) نشان داده می‌شود. اندازه $|H(j\omega)|$ بر حسب dB چنین تعریف می‌شود:

$$H_{dB} = 20 \log |H(j\omega)|$$

نه در آن از لگاریتم معمولی مبنای ۱۰ استفاده شده است. (گاهی هم از ضرب ۱۰ به جای ۲۰ رای تابع تبدیل توان استفاده می‌شود ولی ما با آن در این جا کاری نداریم). عمل عکس چنین است:

$$|H(j\omega)| = 10^{(H_{dB}/20)}$$

امپدانسی که بر حسب s داده شده باشد را هم می‌توان به لحاظ اندازه و فرکانس تغییر مقیاس داد و این کار بدن هرگونه آگاهی از نوع عناصر تشکیل دهنده مدار صورت می‌گیرد. برای تغییر مقیاس $Z(s)$ از لحاظ اندازه، تعریف تغییر مقیاس اندازه نشان می‌دهد که فقط کافی است (s) را در Z_m ضرب کنیم تا اندازه تغییر مقیاس یافته امپدانس حاصل گردد. بنابراین امپدانس مدار تشید موزای شکل ۱۶-۲۰ (الف) چنین است.

$$Z(s) = \frac{s}{2s^2 + 0.4s + 2}$$

$$Z(s) = \frac{0.5s}{(s + 0.1 + j0.995)(s + 0.1 - j0.995)}$$

امپدانس (s) شبکه اندازه تغییر مقیاس یافته برابر است

$$Z'(s) = K_m Z(s)$$

اگر دوباره ۲۰۰۰ K_m بگیریم، داریم:

$$Z'(s) = (1000) \frac{s}{(s + 0.1 + j0.995)(s + 0.1 - j0.995)}$$

حال اگر (s) را از لحاظ فرکانس با ضرب 10^6 تغییر مقیاس دهیم، آن‌گاه باید (s) در یک فرکانس s با مقدار (s) در فرکانس $s(5 \times 10^6)$ برابر باشد تا (s) و $Z''(s)$ و (s) امپدانس کار کلاً نوسط رابطه زیر انجام می‌شود.

$$Z''(s) = Z'(s) \frac{s}{K_f}$$

توجه کنید که (s) با جایگزینی هر s در $Z'(s)$ با s/K_f ، به دست می‌آید. پس عبارت تحلیلو امپدانس شبکه شکل ۱۶-۱۹ (الف) باید به صورت زیر باشد:

$$Z''(s) = (1000) \frac{s / (5 \times 10^6)}{[s / (5 \times 10^6) + 0.1 + j0.995][s / (5 \times 10^6) + 0.1 - j0.995]}$$

شکل ۱۶-۲۰ (الف) شبکه‌ای با اندازه تغییر مقیاس یافته با ضرب ۲۰ و ضرب تغییر مقیاس فرکانس ۵۰. (ب) شبکه تغییر مقیاس یافته، (ج) یک منبع نسبت ۱A به پایانه‌های ورودی اعمال شده تا امپدانس شبکه تغییر مقیاس نیافته در بخش (الف) به دست آید.

با

$$Z''(s) = (1000) \frac{(5 \times 10^6)s}{[s + 0.5 \times 10^6 + j4.975 \times 10^6][s + 0.5 \times 10^6 - j4.975 \times 10^6]}$$

گرچه تغییر مقیاس معمولاً به عناصر غیرفعال اعمال می‌شود، منابع وابسته نیز می‌توانند از لحاظ اندازه و فرکانس تغییر مقیاس بایند. فرض می‌کنیم که خروجی هر منبع به صورت \dot{V}_o با \dot{I}_o باید باشد، که بعد ادمیتانس را برای منبع جریان وابسته دارد و برای یک منبع ولتاژ وابسته بدون بعد است. در حالی که \dot{V}_o برای منبع ولتاژ وابسته بعد اهم و برای منبع جریان وابسته بیش است. اگر شبکه حاوی منبع وابسته، از لحاظ اندازه یا K_m تغییر مقیاس یافتد، آن‌گاه لازم است که K_f یا طوری رفتار کنیم که گوبی عناصر متناظر با یعدشان هستند. یعنی اگر بعد ادمیتانس داشتند، باید آن‌ها را در K_m ضرب کرد اگر ادمیتانس باشد، باید بر K_m تقسیم نمود و اگر بدوا بعد بود آن‌ها را تغییر نداد. تغییر مقیاس فرکانس بر منابع وابسته تأثیری ندارد.



شبکه شکل ۱۶-۲۰ را با ضرب $20 K_m$ و $K_f = 50$ تغییر مقیاس دهید و سپس (s) برای شبکه جدید پیدا کنید.

تغییر مقیاس خازن از تقسیم $F = 0.05$ بر ضرب $K_m = 20$ و تغییر مقیاس فرکانس از تقسیم $K_f = 50$ به دست می‌آید. با اجری همزمان دو عمل داریم:

$$C = \frac{0.05}{(20)(50)} = 50 \mu F$$

ده فاصله‌ای است که در آن فرکانس 10 برابر می‌شود، مثلاً 3Hz تا 30Hz یا 12.5 MHz تا 125 mHz اکتاو فاصله‌ای است که در آن فرکانس دو برابر می‌شود مثلاً 7 GHz تا 4.14 GHz.

بنابراین مجانب دارای شبیه 20 dB/dec است. چون H_{dB} با دوربریدن ω ، به اندازه 6 dB بالا می‌رود، پس می‌توان گفت که شبیه 6 است. مجانب فرکانس بالا هم در شکل ۱۶-۲۱ با خط پری برای $a > \omega$ در ω به صورت خط شکسته درآمده است. دقت کنید که دو مجانب در $a = \omega$ که فرکانس نقطه صفر است، یکدیگر را قطع می‌کنند. این فرکانس را فرکانس گوششکست نامیدند.

اصلاح منحنی‌های بود

اگر فرکانس $\omega = a$ باشد بینهم چقدر خط در پاسخ مجانبی نهفته است. در فرکانس گوشش $\omega = a$ خط نسبت به مقدار مجانب B برابر است با:

$$H_{dB} = 20 \log \sqrt{1 + \frac{a^2}{\omega^2}} = 3 \text{ dB}$$

در $\omega = 0.5a$ داریم:

$$H_{dB} = 20 \log \sqrt{1.25} \approx 1 \text{ dB}$$

بنابراین پاسخ واقعی یک منحنی بدون گوشش است که به فاصله 3 در بالای پاسخ‌ها مجانبی در $\omega = a$ واقع است و نیز در $\omega = 0.5a$ حدود 1 خط وجود دارد. (همچنین در $\omega = 2a$). این اطلاعات در موقع لزوم برای اصلاح گوشش‌ها به کار می‌روند.

چند جمله‌ای‌ها

بسیاری از توابع تبدیل، بیش از یک صفر ساده (یا قطب ساده) دارند. با این وجود به سادگی به وسیله روش بُود قابل بررسی هستند، زیرا ما در واقع بالگاریتم کار می‌کنیم. مثلاً تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$H(s) = K \left(1 + \frac{s}{s_1} \right) \left(1 + \frac{s}{s_2} \right)$$

که K مقداری ثابت، و s_1 - s_2 - دو صفر تابع $H(s)$ را تشکیل می‌دهند. برای این تابع به صورت زیر می‌تواند نوشه شود:

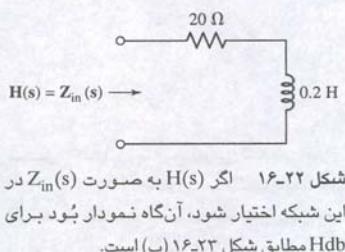
$$H_{dB} = 20 \log \left| K \left(1 + \frac{j\omega}{s_1} \right) \left(1 + \frac{j\omega}{s_2} \right) \right| = 20 \log \left[K \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{s_1} \right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{s_2} \right)^2} \right]$$

$$\text{یا } H_{dB} = 20 \log K + 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{s_1} \right)^2} + 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{s_2} \right)^2}$$

که در واقع مجموع جمله ثابت (مستقل از فرکانس) $K \log 20$ ، و دو جمله صفر ساده به فرم ملاحظه شده قابلی است. به بیان دیگر، ما می‌توانیم نموداری از برای H_{dB} به روش گرافیکی و با جمع نمودارهای مربوط به جملات جدا از هم ترسیم کنیم. این مطلب را در مثال زیر می‌شکافیم.

نمودار بُود امپدانس وردودی شبکه شکل ۱۶-۲۲ را ترسیم کنید.

مثال ۱۶-۷



شکل ۱۶-۲۲ اگر $H(s)$ به صورت $Z_{in}(s)$ در این شبکه اختیار شود، آن‌گاه نمودار بُود برای H_{dB} مطابق شکل ۱۶-۲۳ (ب) است.

قبل از شروع بحثی مفصل در مورد تکنیک به کار رفته برای ترسیم نمودارهای بُود بهتر است با واحد دسی بل آشنا شویم، چند مقدار مهم آن را بشناسیم و بعضی از خصوصیات لگاریتمی را مرور کنیم. چون $0 = \log 1 = 10 \log 2 = 0.30103$ است، روابط زیر را داریم:

$$|H(j\omega)| = 1 \Leftrightarrow H_{dB} = 0$$

$$|H(j\omega)| = 2 \Leftrightarrow H_{dB} = 6 \text{ dB}$$

$$|H(j\omega)| = 10 \Leftrightarrow H_{dB} = 20 \text{ dB}$$

هر افزایش $|H(j\omega)|$ با ضریب 10 برابر معادل افزایش H_{dB} به میزان 20 است. به علاوه $\log 10^n = n$ است، پس n میزان 1000 متناظر با 60 است. در حالی که متناظر 40 است. با استفاده از مقادیر قبلی می‌توان نشان داد:

$$20 \log 5 = 20 \log \frac{10}{2} = 20 \log 10 - 20 \log 2 = 20 - 6 = 14 \text{ dB}$$

پس $\log \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log x$ است. همچنین $x = \sqrt{2}$ $\Leftrightarrow \log \sqrt{2} = -3 \text{ dB}$. تابع تبدیل خود را بحسب s می‌نویسیم و هر وقت بخواهیم اندازه یا فاز را بدینکنیم، $s = j\omega$ قرار می‌دهیم. در صورت تغییل اندازه در آن نقطه بر حسب ω نوشته می‌شود.

تمرین

۱۶-۱۰ $R = 146 \text{ rad/s}$ و $H_{dB} = 146$ به اورید به شرطی که $H(s) = R/s$ باشد (الف) $H_{dB} = |H(j\omega)|$ را حساب کنید اگر برای باشد، (د) -0.318 dB ، (ب) -15.6 dB ، (ج) 29.2 dB و (و) 0.964 dB . جواب: 28.8، 69.3 dB، 71.0 dB و -18.94 dB.

تعیین مجانب‌ها

گام بعدی تجزیه $H(s)$ به عوامل اول و به دست آوردن قطب‌ها و صفرها است. ابتدا صفری را در $s = -a$ در نظر می‌گیریم و آن را به صورت استاندارد زیر می‌نویسیم.

$$H(s) = 1 + \frac{s}{a} \quad (26)$$

نمودار بُود برای این تابع از دو مجانب تشکیل شده که به ازای ω ‌های خیلی بزرگ و خیلی کوچک به H_{dB} می‌کند. پس با تعریف زیر شروع می‌کنیم.

$$|H(j\omega)| = \left| 1 + \frac{j\omega}{a} \right| = \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{a^2}}$$

و بنابراین

$$H_{dB} = 20 \log \left| 1 + \frac{j\omega}{a} \right| = 20 \log \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{a^2}}$$

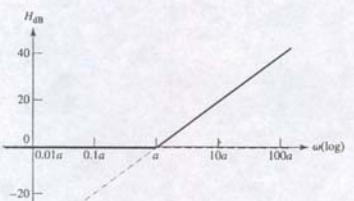
وقتی که $a \ll \omega$ باشد،

$$H_{dB} \approx 20 \log 1 = 0 \quad (\omega \ll a)$$

این مجانب ساده در شکل ۱۶-۲۱ مشاهده می‌شود، که به صورت خط پررنگ برای $a < \omega$ و خط شکسته برای $a > \omega$ ترسیم شده است.

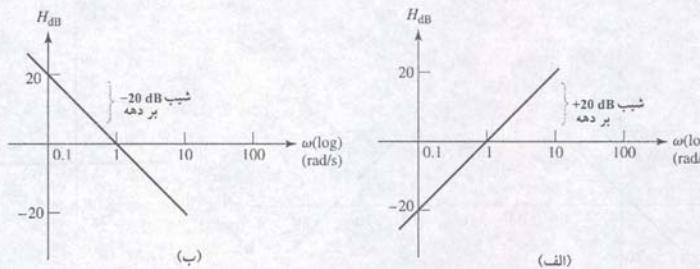
وقتی $a >> \omega$ باشد،

$$H_{dB} \approx 20 \log \frac{\omega}{a} \quad (\omega >> a)$$



شکل ۱۶-۲۱ نمودار اندازه بُود برای $H(s) = 1 + \frac{s}{a}$ متشکل از مجانب‌های فرکانس با پایین به صورت خط پر. محل بخورد دو خط مجانب را گوشش می‌کویند. منحنی بُود پاسخ را بر حسب دو مجانب به دست می‌دهد. هر دو خط راست به سادگی کشیده می‌شوند.

شکل ۱۶-۲۵ نمودارهای مجانبی برای (الف) $H(s) = s$ و (ب) $H(s) = \frac{1}{s}$, هر دو نمودار خطوط طویلی هستند که در ω از $0 \text{ db} = 1$ تا $20 \text{ db} = 20 \text{ dB/dec}$ می‌گذرند و شیب



تمرین

۱۶-۱۲ منحنی فاز بود را برای تابع تبدیل مثال ۱۶-۷ رسم کنید.
جواب: در $0^\circ < \omega < 10^\circ$, $\omega < 10 \text{ rad/s}$, $\omega \geq 1000 \text{ rad/s}$, $\omega \geq 100 \text{ rad/s}$, $\omega \geq 10 \text{ rad/s}$, $\omega > 1000 \text{ rad/s}$, $\omega > 100 \text{ rad/s}$, $\omega > 10 \text{ rad/s}$, $\omega > 1000 \text{ rad/s}$

مطالibi چند در ترسیم منحنی‌های بُود

اکنون نقطه ساده زیر را بررسی می‌کنیم:

$$H(s) = \frac{1}{1 + s/a} \quad (27)$$

چون این تابع، معکوسن صفر است، منحنی بُود تابع فوق منفی آنچه که قبله دیدیم می‌باشد.
دامنه در $a = \omega$ ۰ dB برابر است و سپس شیب -20 dB/dec در $\omega > a$ می‌باشد. در $\omega < a$ می‌باشد. در $\omega < 0.1a$ را 0° را در $\omega > 10a$ -90° را در $\omega > 10a$ -45° در $\omega < 10a$ -45° در $\omega < 0.1a$ برقرار است. به خواننده توصیه می‌شود، نمودار بود را با کار مستقیم روی معادله (۲۷) ترسیم نماید.

جمله ساده دیگری که می‌تواند در $H(s)$ ظاهر شود وجود s در صورت یا مخرج است. اگر $H(s) = s$ باشد، آن‌گاه:

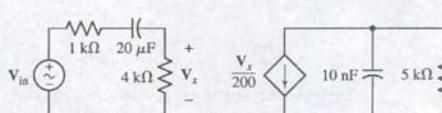
$$H_{dB} = 20 \log |\omega|$$

بنابراین خط مستقیم نامحدودی داریم که در $\omega = 1$ 0 db از $\omega = 1$ 0 db می‌گذرد و دارای شیب 20 dB/dec است. این خط در شکل ۱۶-۲۵(الف) ملاحظه می‌شود. اگر در مخرج باشد، خط مستقیم نامحدود با شیب -20 dB/dec داریم که در $\omega = 1$ 0 db از $\omega = 1$ 0 db می‌گذرد شکل ۱۶-۲۵(ب).

جمله ساده دیگر در $H(s)$, ثابت K می‌باشد. این جمله خط مستقیمی است افقی که به نداره K 20 db بالای محور افقی قرار دارد. اگر $1 < |K|$ باشد، این خط زیر محور افقی با خواهد بود.

مثال ۱۶-۸

شکل ۱۶-۲۶ اگر $H(s) = V_{out}/V_{in}$ باشد این تقویت‌کننده منحنی اندازه بُود شکل ۱۶-۲۷(ب) را دارد و زاویه فاز آن نیز در شکل ۱۶-۲۸ است.



منحنی بُود را برای بهره مدار شکل ۱۶-۲۶ بیایید.

ما از سمعت چپ مدار به سمت راست کار می‌کنیم و عبارت بهره و لذت را می‌نویسیم.

$$H(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{4000}{5000 + 10^6/20s} \left(-\frac{1}{200} \right) \frac{5000(10^8/s)}{5000 + 10^8/s}$$

که به صورت زیر ساده می‌شود:

$$H(s) = \frac{-2s}{(1 + s/10)(1 + s/20.000)} \quad (28)$$

| $H(j\omega)$ | کار می‌کنیم آن‌گاه هر دو نمودار مربوط به هر جمله را با هم جمع می‌کنیم. نمودار اندازه مطابق شکل ۱۶-۲۳(ب) است. هیچ تلاشی برای صاف کردن منحنی با اصلاح $+3 \text{ dB}$ در $\omega = 100 \text{ rad/s}$ صورت نگرفته است و به عنوان تمرین به خواننده اگذار می‌گردد.

تمرین

$$16-11 \text{ منحنی اندازه بُود را برای } H(s) = 50 + s \text{ در } \omega > 50 \text{ rad/s} + 20 \text{ db/dec.}$$

جواب: $34 \text{ در } \omega > 50 \text{ rad/s}$, شیب برابر $+20 \text{ db/dec}$ در $\omega > 50 \text{ rad/s}$ است.

پاسخ فاز

با بازگشت به تابع تبدیل معادله (۲۶) می‌خواهیم پاسخ فاز یک صفر ساده را به دست آوریم.

$$\text{ang } H(j\omega) = \text{ang} (1 + \frac{j\omega}{a}) = \tan^{-1} \frac{\omega}{a}$$

این عبارت را نیز می‌توان با مجانب‌های اندیشه داد ولی این بار سه خط لازم است. برای $a < 0.1a$ داریم $0^\circ \approx \text{ang } H(j\omega)$ و ما آن را به عنوان مجانب هنگام $a < 0.1a$ به کار خواهیم برد.

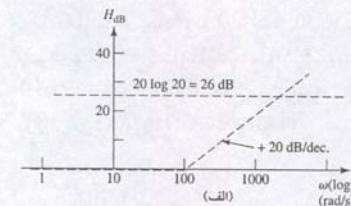
$$\text{ang } H(j\omega) = 0^\circ \quad (\omega < 0.1a)$$

در $a < \omega < 10a$ داریم, $90^\circ \approx \text{ang } H(j\omega)$ و آن را در بیش از $a = 10a$ به کار می‌بریم.

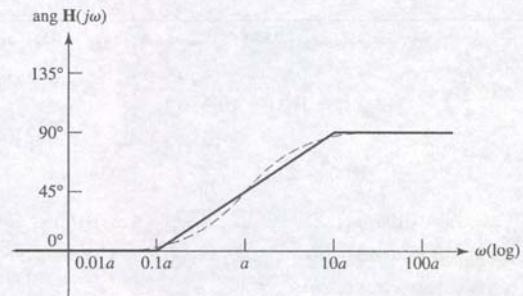
$$\text{ang } H(j\omega) = 90^\circ \quad (\omega > 10a)$$

چون در $a = \omega$ زاویه فاز 45° است، اکنون خطوط مستقیم مجانب را از 0° در $\omega = 45^\circ$ در $a = 10a$ به 90° در $\omega = 10a$ می‌باشد. این خط مستقیم شیب 45° را دارد که در شکل ۱۶-۲۴ با خطی سکته نشان داده شده است. جدا کثیر اختلاف بین مجانب و پاسخ واقعی $\pm 5.71^\circ$ در $a = 0.1a$ و $\omega = 0.159$ در $a = 0.254$ خطا صفر است. همچنین خطای صفر در $a = 0.31a$ نیز اتفاق می‌افتد. منحنی زاویه فاز به صورت تقریب خط راست باقی گذاشته می‌شود. ولی می‌توان منحنی اصلاح شده را هم مانند آنچه در شکل ۱۶-۲۴ دیده می‌شود، رسم کرد.

بد نیست در اینجا برای بررسی منحنی فاز مکثی بکنیم. برای یک صفر ساده در $a = s$, می‌بینیم که در فرکانس‌های خیلی کمتر از فرکانس گوش، فاز تابع پاسخ را برابر 0° است. اما در فرکانس‌های بالا ($\omega > a$), فاز 90° می‌باشد. در نزدیکی فرکانس گوش، فاز تابع تبدیل تا حدی سریعاً تغییر می‌نماید. بنابراین زاویه فاز برای پاسخ را می‌توان در سرتاسر طراحی با انتخاب a مشخص کرد.



شکل ۱۶-۲۳ (الف) منحنی‌های بُود برای $H(s) = 20(1 + s/100)$. (ب) ترکیب منحنی‌های بُود به صورت مجموع منحنی‌های بخش (الف).



شکل ۱۶-۲۴ پاسخ زاویه مجانبی برای $H(s) = 1 + \frac{s}{a}$ به صورت سه خط راست نشان داده شده است. دو انتهای خط شیب در $0.1a$ در $\omega = 10a$ در 90° فاز است.

مثال ۱۶-۹

چون در محل تقاطع، $0 = H_{dB} = 400,000/\omega$ است، پس $\omega = 1 = 400,000 \text{ rad/s}$ می‌باشد.

در بسیاری از موارد رسم دقیق منحنی بُود روی کاغذ نیمه لگاریتمی لازم نیست. در عرض روى کاغذ خطدار معمولی یک محور لگاریتمی رسم می‌کنیم. برای انجام این کار باید فاصله‌ای، مثل L را به عنوان یک دهه (decode) انتخاب کنیم، پس فاصله بین $\omega_1 = \omega$ و $\omega_2 = 10\omega_1$ است (ω_1 معمولاً ضربی از 10 است) ω در سمت راست ω_1 فرض می‌شود و فاصله آن را تا ω_2 برابر x تصور می‌کنیم، یعنی $\omega_2 = \log(\omega_2/\omega_1)$. اطلاع از مقادیر زیر در این راستا مفید است. به ازای $\omega = 2\omega_1$: $x = 0.3$ ؛ $\omega = 4\omega_1$: $x = 0.6$ ؛ $\omega = 6\omega_1$: $x = 0.7$ ؛ $\omega = 8\omega_1$: $x = 0.7$ داریم $L = 0.7$.

منحنی فاز $[H(s)] = -2s/(s + 20,000)(s + 10)$ را رسم کنید.

با بررسی $H(j\omega)$ شروع می‌کنیم:

$$H(j\omega) = \frac{-j2\omega}{(1 + j\omega/10)(1 + j\omega/20,000)} \quad (۲۹)$$

زاویه صورت مقدار ثابت 90° است.

بقیه عامل‌ها به صورت جمع زوایای قطب‌های $10 = \omega$ و $20000 = \omega$ در نمودار تأثیر می‌گذارند. در شکل ۱۶-۲۸ سه جمله فوق به صورت مجانب‌های خط‌چین رسم شده‌اند و حاصل جمع به صورت منحنی توپر نشان داده است. اگر منحنی را به اندازه 360° به بالا ببریم، یک نمودار هم‌ارز به دست می‌آید.

پاسخ فاز راهم می‌توان با مقادیر دقیق به دست آورد. مثلاً در $\omega = 10^4 \text{ rad/s}$ ، هر زاویه در شکل ۱۶-۲۸ از صورت و مخرج معادله (۲۹) به دست می‌آید. زاویه صورت -90° است. زاویه قطب در $\omega = 10$ هم برابر -90° است. زیرا ω از 10 برابر فرکانس گوش بزرگتر است. بین 0.1 تا 10 برابر فرکانس گوش، برای یک قطب تنها، شبیه -45° در هر دهه است. در نقطه شکست $\omega = 20000 \text{ rad/s}$ زاویه چنین محاسبه می‌شود: $\log(-0.1/a) = -45^\circ$ و $\log(0.1/a) = -31.5^\circ$.

جمع جبری این سه فاز برابر است با $a = -211.5^\circ = -31.5^\circ - 90^\circ - 90^\circ$. این مقدار به منحنی مجانبی شکل ۱۶-۲۸ خیلی نزدیک است.

منحنی فاز بُود رایی $H(s)$ ، (الف) $(s + 10)/(s + 100)$ ، (ب) $50/(s + 100)$ و (ج) $(s + 10)/s$ را رسم کنید.

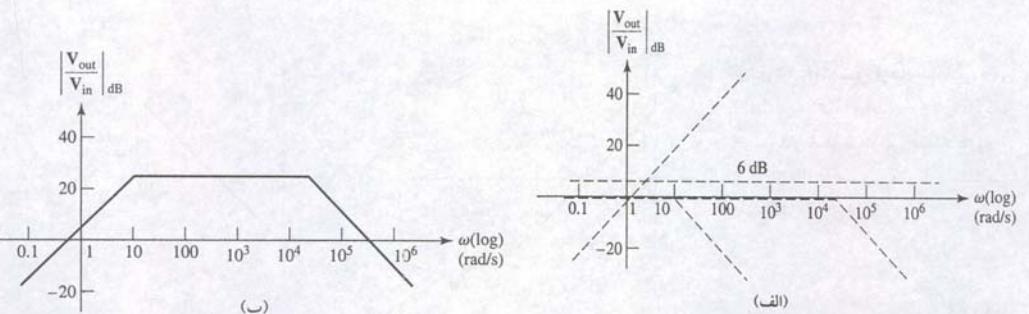
جواب (الف): در $10 < \omega < 1000$ برابر 0° ، در $1000 < \omega < 10000$ برابر -45° و در $\omega > 10000$ برابر -90° .

(ب): در $1 < \omega < 10$ برابر 0° ، در $10 < \omega < 100$ برابر $+45^\circ$ و در $100 < \omega < 1000$ برابر -45° ، در $1000 < \omega < 10000$ برابر 0° و در $\omega > 10000$ برابر -90° .

(ج): در $1 < \omega < 10$ برابر -90° ، در $10 < \omega < 100$ برابر $+45^\circ$ و در $100 < \omega < 1000$ برابر -90° و در $\omega > 1000$ برابر 0° .

جملات مرتبه بالاتر

صفرها و قطب‌هایی که بررسی کردیم همگی از جملات مرتبه اول مثل $s^{\pm 1}$ و غیره تشکیل شده بودند. می‌توان تحلیل را به قطب‌ها و صفرهای مرتبه بالاتر هم برآختی گسترش داد. جمله $s^{\pm n}$ اندازه پاسخی را مشخص می‌کند که از $\omega = 1$ شبیه $\pm 20n \text{ dB/dec}$ عبور می‌کند. پاسخ فاز، یک زاویه ثابت $\pm 90n^\circ$ می‌باشد. همچنین صفرهای چندگانه $(1 + s/a)^n$ ، باید از جم n منحنی اندازه پاسخ با n منحنی پاسخ فاز یک صفر



شکل ۱۶-۲۷ (الف) منحنی‌های اندازه بُود $\omega = 10 \text{ rad/s}$ ، نقاط شکست در $\omega = 100 \text{ rad/s}$ و $\omega = 20000 \text{ rad/s}$ به آن اضافه شده تا منحنی اندازه بُود شکل ۱۶-۲۷ (ب) به دست آید.

تمرین

۱۶-۱۳ منحنی اندازه بُود رایی $H(s)$ برابر با (الف) $(s + 100)/50$ ، (ب) $(s + 100)$ و (ج) $(s + 10)/s$ بیاید.

جواب: (الف) در $100 < \omega < 1000$ برابر -20 dB/dec ، در $\omega > 1000$ برابر -6 dB ، (ب) در $10 < \omega < 100$ برابر -20 dB ، در $100 < \omega < 1000$ برابر $+20 \text{ dB/dec}$ ، در $\omega > 1000$ برابر -20 dB/dec ، (ج) در $10 < \omega < 100$ برابر 0 dB ، در $\omega > 100$ برابر -20 dB/dec .

قبل از ساخت منحنی فاز برای تقویت کننده شکل ۱۶-۲۶، بیاید چند لحظه‌ای را صرف بررسی جزئیات رسم نمودار بُود ندازه کنیم.

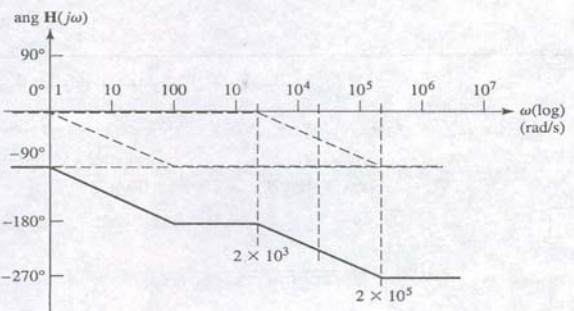
اول این‌که بر جمع ترسیمی نمودارهای اندازه زیاد تکیه نکنیم. مقدار دقیق اندازه کل رادر بعضی نقاط با در نظر گرفتن مقادیر مجانب در آن نقاط به سادگی می‌توان یافت. مثلاً در بخش

هموار بین $\omega = 10$ و $\omega = 20000$ در شکل ۱۶-۲۷ (الف) زیر فرکانس گوش $\omega = 2000$ را مساوی $1 + s/20000$ و می‌توانیم $a = 10$ را مساوی 1 بگیریم. همچنین اگر بالای 10 باشیم، می‌توانیم $a = 10$ را با $1 + s/10$ نشان دهیم. پس

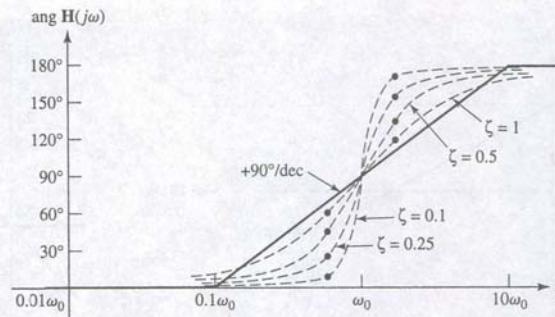
$$H_{dB} = 20 \log \left| \frac{-2\omega}{(\omega/10)(1)} \right| = 20 \log 20 = 26 \text{ dB} \quad (10 < \omega < 20,000)$$

همچنین ممکن است به محل تقاطع مجانب با محور افقی در انتهای بالای علاقمند باشیم. دو عامل مخرج در این فرکانس‌ها با 10 و $20,000/\omega$ و تقریب شده‌اند. پس:

$$H_{dB} = 20 \log \left| \frac{-2\omega}{(\omega/10)(\omega/20,000)} \right| = 20 \log \left| \frac{400,000}{\omega} \right|$$



شکل ۱۶-۲۸ منحنی خط پر پاسخ فاز مجانبی تقویت کننده شکل ۱۶-۲۶ را نشان می‌دهد.



شکل ۱۶-۳ تقریب خط مستقیم مشخصه فاز برای $H(j\omega) = 1 + j2\zeta(\omega/\omega_0)^2$. صورت منحنی خط پر نشان داده است. پاسخ فاز واقعی برای $\zeta = 1, 0.5, 0.25, 0.1$ به صورت خطچین نشان داده شده‌اند.

نقطه اوج منفی مقدار حداقل را دقیقاً نشان نمی‌دهند. این مطلب را برابر 0.5 می‌توان دید.

نقشه مبنیم همیشه در فرکانسی کمتر قرار دارد.

اگر $\zeta = 0$ باشد، آن‌گاه $H(j\omega_0) = \infty$ است. منحنی‌های بُود معمولًا برای این وضعیت ترسیم نمی‌شوند.

آخرین کار ترسیم پاسخ فاز مبنی برای $H(j\omega) = 1 + j2\zeta(\omega/\omega_0)^2$ است. در کمتر از $0.1\omega_0$ زاویه را 0° می‌گیریم. در بیش از $10\omega_0$ داریم

$$H(j\omega) = \text{ang}[-(\omega/\omega_0)^2] = 180^\circ$$

در فرکانس گوششده $\text{ang}H(j\omega) = \text{ang}(j2\zeta) = 90^\circ$ است. در فاصله $0 < \omega < 10\omega_0$ با خط راستی چون منحنی توپر در شکل ۱۶-۳۰ آغاز می‌کنیم. این خط از $(0^\circ, 0.1\omega_0)$ شروع شده از $(90^\circ, 10\omega_0)$ می‌گذرد و در $(0^\circ, 20\omega_0)$ پایان می‌یابد. شیب هم $90^\circ/\text{dec}$ است.

حال مقدار تصحیح را روی این منحنی اولیه برای مقادیر مختلف ζ انجام می‌دهیم. از معادله (۳۰) داریم:

$$\text{ang } H(j\omega) = \tan^{-1} \frac{2\zeta(\omega/\omega_0)}{1 - (\omega/\omega_0)^2}$$

برای بدست آوردن شکل تقریبی یک نقطه بالا و یک نقطه پایین ω_0 کفایت می‌کند. اگر $\omega_0 = 0.5\omega$ را انتخاب کنیم، داریم $\text{ang } H(j0.5\omega_0) = \tan^{-1}(4\zeta/3)$. زاویه در 0° برابر $2\omega_0$ است. منحنی‌های فاز به صورت خطوط شکسته در شکل ۱۶-۳۰ به ازای $0.1, 0.25, 0.5$ و 1 نشان داده شده‌اند. نقاط توپر متعلق به $\omega_0 = 0.5\omega$ است.

اگر جملات مریع در مخرج ظاهر شوند، هر دو منحنی‌های اندازه و فاز منفی آن‌ها بستند که در بالا بحث شد. موضوع را با مثالی خاتمه می‌دهیم.

منحنی بُود را برایتابع تبدیل $H(s) = 100,000s / [(s + 1)(10,000 + 20s + s^2)]$ رسم کنید.

بگذارید ابتدا جمله درجه دو را بررسی کنیم و آن را طوری مرتب نماییم که در آن مقدار ζ دیده شود. کار را با تقسیم جمله مرتبه ۲ بر عدد ثابت ش، ۱0000 شروع می‌کنیم.

$$H(s) = \frac{10s}{(1 + s)(1 + 0.002s + 0.0001s^2)}$$

مثال ۱۶-۱

ساده بدست آید. بنابراین منحنی مجانبی اندازه در $a < \omega$ برابر 0 است و شیب برابر $\omega = 2a$ و $0.5a$ و در $-3n$ dB/dec برابر $\omega = a$ است. منحنی فاز برای $\omega < 0.1a$ برابر 90° است. منحنی خط راستی است با شیب $0.1a < \omega < 10a$ برابر $45^\circ/\text{dec}$ و خطاهایش در دو فرکانس $\pm 5.71n^\circ$ می‌باشد.

به این ترتیب منحنی‌های اندازه و فاز مربوط به عبارتی چون $(s/20) + 1$ را می‌توان به سرعت ترسیم کرد ولی باید به خاطر داشت که با توانان‌های بالاتر خطاهای بزرگتر را داریم.



جفت‌های مزدوج مختلط

آخرین عاملی که در نظر می‌گیریم یک جفت صفر یا یک جفت قطب مزدوج است. شکل استاندارد این عامل را به صورت زیر می‌توان تصور کرد:

$$H(s) = 1 + 2\zeta \left(\frac{s}{\omega_0} \right) + \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2$$

کمیت ζ همان ضریب میرایی بخش ۱۶-۱ است و بزویدی خواهیم دید که ω_0 هم فرکانس گوششده پاسخ مجانبی است.

اگر $\zeta = 0$ باشد، آن‌گاه $H(j\omega_0) = 1 + (s/\omega_0)^2 = (1 + s/\omega_0)^2$ خواهد بود که صفری مرتبه دو و مانند آن‌چه در بالا دیدیم می‌باشد. اگر $\zeta > 1$ باشد، آن‌گاه $H(s) = 1 + 2.5(s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2 = (1 + s/2\omega_0)(1 + s/0.5\omega_0)$ صفر ساده تشکیل شده است. اگر $\zeta = 1$ باشد، در این صورت شده و باز هم وضعیت آشنایی است.

وقتی $1 \leq \zeta \leq 0$ باشد وضع جدیدی پیش می‌آید. لزومی ندارد جفت ریشه‌های مزدوج مختلط را پیدا کنیم. در عرض مقادیر فرکانس‌های بالا و پایین مجانبی را برای اندازه هر فاز به دست می‌آوریم و بسته به مقدار ζ اصلاحی را روی مقدار گام‌آجر می‌دهیم. برای پاسخ اندازه داریم:

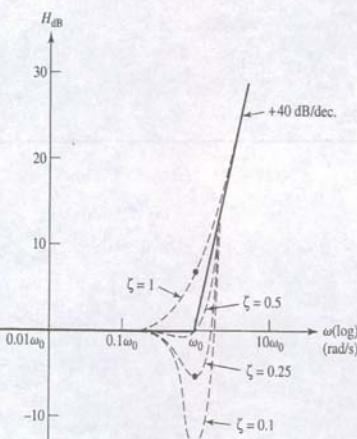
$$H_{dB} = 20 \log |H(j\omega)| = 20 \log \left| 1 + j2\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right| \quad (30)$$

وقتی $\omega_0 < \omega$ باشد، این مجانب فرکانس پایین است. پس اگر $\omega > \omega_0$ باشد، تنها جمله مرتبه دوم اهمیت دارد و در این حالت $H_{dB} = 20 \log | -(\omega/\omega_0)^2 | = 40 \log(\omega/\omega_0)$ می‌باشد. این مجانب فرکانس بالاست و دو مجانب در $\omega_0 = 0$ dB و $\omega = 2\omega_0$ dB با هم برخورده‌اند. منحنی خط پر در شکل ۱۶-۲۹ این نمایش پاسخ اندازه مجانبی را نشان می‌دهد. با این وجود، باید اصلاحی بر فرکانس گوششده اعمال گردد. اجازه دهد تا در معادله (۳۰)، $\omega_0 = \omega$ باشد. در این صورت:

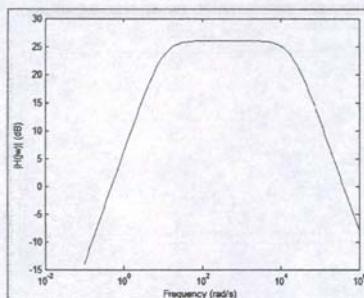
$$H_{dB} = 20 \log |j2\zeta(\omega/\omega_0)| = 20 \log (2\zeta) \quad (31)$$

اگر $\zeta = 1$ باشد که یک حالت حد است، اصلاحی لازم نیست و اگر $\zeta = 0.1$ باشد، اصلاحی -14 dB خواهد بود. با این اصلاحات، کافی است تا پاسخ اندازه مجانبی ترسیم گردد. شکل ۱۶-۲۹ منحنی‌های دقیقی را از معادله (۳۰) در ازای $0.5, 0.25, 0.1$ و 0.05 می‌دانیم. مثلاً اگر $\zeta = 0.25$ باشد، آن‌گاه مقدار دقیقی H_{dB} در ازای $\omega = 0.5\omega_0$ برابر است با

$$H_{dB} = 20 \log |1 + j0.25 - 0.25| = 20 \log \sqrt{0.75^2 + 0.25^2} = -2.0 \text{ dB}$$



شکل ۱۶-۲۹ منحنی بُود اندازه برای $H(s) = 1 + 2\zeta(s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2$ به ازای چند مقدار از ضریب میرایی مشاهده می‌شود.

شکل ۱۶-۳۲ نمودار H_{dB} .

برای تولید پاسخ فرکانس است. برای تحقیق این کار، باید ابتداتابع تبدیل صحیح مدار به دست آید. با این وجود تجزیه و یا ساده‌سازی عبارت لزومی ندارد. مدار شکل ۱۶-۲۶ را در نظر بگیرید. قیلاً گفتم که تابع تبدیل برای این مدار به صورت زیر بیان می‌شود،

$$H(s) = \frac{-s}{(1 + s/10)(1 + s/20,000)}$$

مایلیم نمودار دقیقی را برای این تابع در فاصله فرکانس ۱ mrad/s تا 100 Mrad/s رسم کنیم. چون منحنی نهایی در مقیاس لگاریتمی ترسیم می‌شود، نیازی به ایجاد فواصل مساوی برای فرکانس‌ها نیست. در عرض از تابع (\logspace) در متلب برای تولید یک بردار فرکانس استفاده می‌شود که به ترتیب دو آرگومان برای نهایی فرکانس‌های آغاز و پایان به صورت توان ۱۰ (در این مثال ۱ و ۶)، و سومین آرگومان تعداد نقاط مورد نظر را مشخص می‌کند. بنابراین برنامه متلب به صورت زیر است:

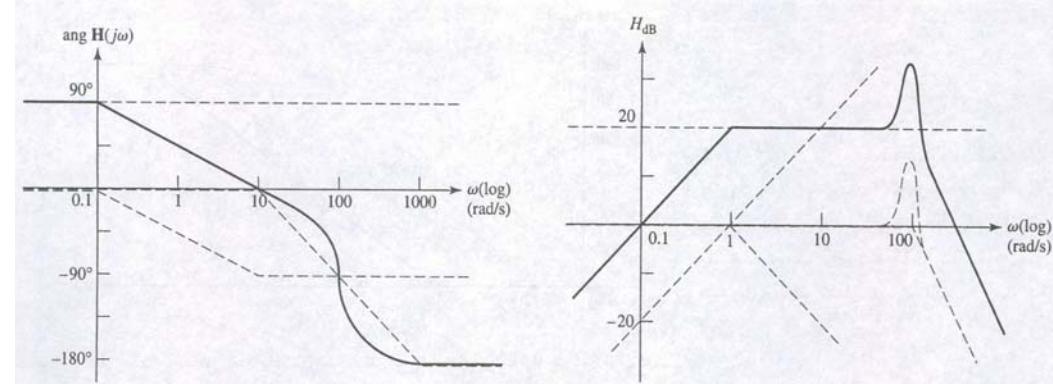
```
EDU >> W = logspace (-1, 6, 100);
EDU >> denom = (1 + j * W / 10). * (1 + j * W / 20000);
EDU >> H = -2 * j * W / denom;
EDU >> Hdb = 20 * log (abs(H));
EDU >> semilogx(w, H db)
EDU >> xlabel ('frequency (rad/s)')
EDU >> ylabel ('|H(jw)| (dB)')
```

که منحنی شکل ۱۶-۳۳ را به دست می‌دهد.

چند توضیح درباره برنامه متلب توجیه دارد. اول این‌که $j\omega = s$ را در عبارت $H(s)$ جایگزین کرده‌ایم. همچنین متلب w را یک بردار یا یک ماتریس بی‌بعد می‌پنداشد. هنگامی که متلب سعی در اعمال جبر ماتریسی به مخرج هر عبارت جبری بنماید، این متغیر مشکلاتی را به وجود می‌آورد. بنابراین مخرج در خط جداگانه محاسبه شده است و از عملگر $*$: برای ضرب به جای $**$: استفاده شده است. این عملگر جدید معادل با برنامه متلب زیر است.

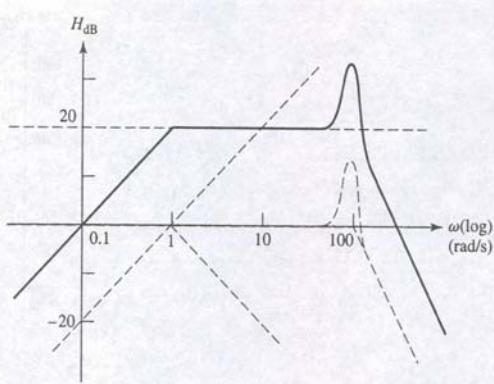
```
EDU >> for k = 1:100
denom = (1 + j * W (k) / 10) * (1 + j * W(k) / 20000);
end
```

به همین ترتیب عملگر $./$: در خط بعدی برنامه به کار رفته است. چون نتایج به dB موردنظر است، لذا تابع $(10 \log \text{اضحیار} \text{شده})$ است. (\log) لگاریتم طبیعی را در متلب نشان می‌دهد. بالاخره، فرمان جدید ترسیم (\logspace) برای رسم نمودار و انتخاب واحد نیمه‌لگاریتمی برای محور X به کار می‌رود. در اینجا به خواننده توصیه می‌شود که به مثال قبل بازگردد و با استفاده از این تکنیک منحنی‌های دقیقی را برای مقایسه منحنی‌های بود تولید کند. PSpice هم برای تولید منحنی‌های پاسخ فرکانسی ابزار مناسبی است. شکل ۱۶-۳۴ (الف) مدار شکل ۱۶-۲۶ را نشان می‌دهد که با ابزار ورودی شماییک دوباره ترسیم شده است. از شبه دستور bubble برای تولید برچسب‌های ولتاژ V_x و V_{out} استفاده شده است به طوری که در برنامه probe بهتر قابل شناسایی باشند. منبع VAC با یک دامنه $1V$ به خاطر سادگی به کار رفته است، گرچه هر مقدار دیگری هم می‌توان به کار برد. شبیه‌سازی یک موج جاروب ac نیز موردنیاز است تا پاسخ فرکانسی معین گردد. شکل ۱۶-۳۴ (ب) با ۱۰ نقطه در هر ده تولید شده است (نوع جاروب AC، Decade) انتخاب شده است که از ۱ MHz تا ۱00 mHz تا ۱ MHz را می‌پوشاند. توجه کنید که این شبیه‌سازی به Hz انجام شده است و نه به rad/s.



شکل ۱۶-۳۲ منحنی فاز بُود تابع تبدیل

$$H(s) = \frac{100000s}{(s + 1)(10000 + 20s + s^2)}$$



شکل ۱۶-۳۱ منحنی اندازه بُود تابع تبدیل

$$H(s) = \frac{100000s}{(s + 1)(10000 + 20s + s^2)}$$

بررسی جمله s^2 نشان می‌دهد که $100 = \sqrt{1/0.0001} = \omega_0$ است. جمله خطی آن را طوری می‌نویسیم تا ضرب $2/\omega_0$ با ضرب $2/\omega_0$ و بالآخره ضرب $2/\omega_0$ نمایش دهد.

$$H(s) = \frac{10s}{(1 + s)[(1 + 2)(0.1)(s/100) + (s/100)^2]}$$

و می‌بینیم $0.1 = \omega_0$ است.

مجاہات های منحنی پاسخ اندازه به طور خطچین در شکل ۱۶-۳۱ کشیده شده‌اند: ۲۰ dB

برای ضرب ۱۰، یک خط مستقیم بینهایت از $1 = \omega$ به $10000s$ و $+20$ dB/dec + ۲۰ dB برای جمله s

گوشی‌ای در $1 = \omega$ برای قطب ساده و یک گوشی در $100 = \omega$ با شیب -40 dB/dec - ۴۰ dB برای

عبارت مرتبه دو در مخرج است. با جمع این چهار منحنی و اعمال اصلاح $+14$ dB + ۱۴ dB برای

جمله مرتبه دو منحنی خط پر شکل ۱۶-۳۱ را نتیجه می‌دهد.

پاسخ فاز شامل مؤلفه‌های زیر است. 0° برای عامل s , 90° برای عامل s^2 , -90° برای

-45° برای قطب ساده و 0° برای $10 < \omega < 1000$, 180° برای $\omega > 1000$ و -90° برای

در هر دهه برای جمله توان دوم. جمع این چهار مجاهات به علاوه کمی اصلاحات برای

$0.1 = \omega_0$ به صورت منحنی توپر در شکل ۱۶-۳۲ ملاحظه می‌شود.

تمرین

۱۶-۱۵ $H(s) = 1000s^2 / (s^2 + 5s + 100)$ باشد، منحنی اندازه بُود را رسم کنید و برای

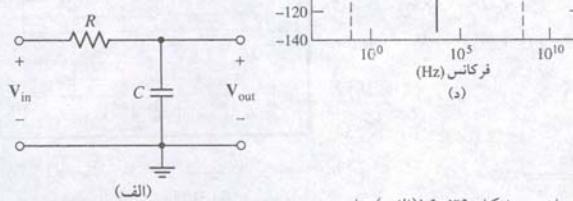
مقداری زیر آن را محاسبه نمایید. (الف) ω وقتی $0 = H_{dB}$ است، (ب) ω در $1 = H_{dB}$ وقتی ∞ است، (ج)

جواب: 0.316 rad/s و 20 dB

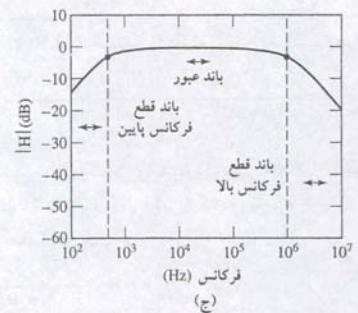
رسم منحنی‌های بُود روش بالرژشی است. در بسیاری از موارد یک نمودار تقریبی سریع لازم است (مانند آزمایش‌ها یا وقتی یک تپولوژی مدار خاصی برای کاربردی خاص موردنیاز است). و فقط داشتن شکل پاسخ کفاایت می‌کند. علاوه بر آن تعیین ضرایب و فاکتورها در منحنی‌های بُود به هنگام طراحی فیلترها بسیار ارزشمند است. در شبیه‌سازی‌هایی که منحنی‌های پاسخ دقیق لازمند (مانند هنگامی که طراحی نهایی مدار صورت می‌گیرد)، از چند برنامه کامپیوترا می‌توان استفاده کرد. اولین برنامه استفاده از متلب

تحلیل کامپیوترا

شکل ۱۶-۳۵ منحنی پاسخ فرکانس برای (ج) فیلتر میانگذر و (د) فیلتر میانگذر.



(الف)



فیلترهای غیرفعال

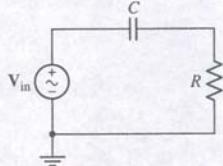
می‌توان یک فیلتر را با استفاده از یک خازن و یک مقاومت ساخت، شکل ۱۶-۳۶(الف). تابع تبدیل برای این مدار فیلتر پایین‌گذر عبارت است از:

$$H(s) \equiv \frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = \frac{1}{1 + RCs} \quad (32)$$

دارای یک فرکانس گوشه است که در $\omega_c = 1/RC$ رخ می‌دهد و یک صفر که در بینهایت واضح و موجب رفتاری پایین‌گذر می‌شود. در فرکانس‌های پایین ($s \rightarrow 0$)، $|H(s)| \rightarrow \infty$ در نزدیکی حد اکثر مقدارش یعنی واحد یا ۰ dB خواهد بود و فرکانس‌های بالا ($s \rightarrow \infty$)، $|H(s)| \rightarrow 0$ را نتیجه می‌دهد. این رفتار با ملاحظه امیدانس یک خازن بهتر درک می‌شود. با افزایش فرکانس سیگنال ac خازن رفتاری شبیه به انتقال کوتاه پیدا می‌کند، که منجر به کاهش ولتاژ خروجی می‌شود. یک منحنی پاسخ نمونه برای این فیلتر با $R = 500 \Omega$ و $C = 2nF$ در شکل ۱۶-۳۶(ب) دیده می‌شود. فرکانس گوشه ۱59 kHz (۱ Mrad/s) می‌باشد. تبیزی منحنی پاسخ در حوالی فرکانس قطع را با افزودن عناصر راکبیوی مثل خازن و مقاومت می‌توان مشاهده کرد. تبیزی منحنی پاسخ در حوالی فرکانس قطع را با تعویض خازن و مقاومت در شکل ۱۶-۳۶(الف) می‌توان یک فیلتر بالاگذر ساخت. این فیلتر در مثال زیر ملاحظه می‌شود.

شکل ۱۶-۳۶ (الف) یک فیلتر پایین‌گذر که از ترکیب یک مقاومت و یک خازن ساخته شده است. (ب) پاسخ فرکانس مدار با PSpice تولید شده است.

مثال ۱۶-۱۱



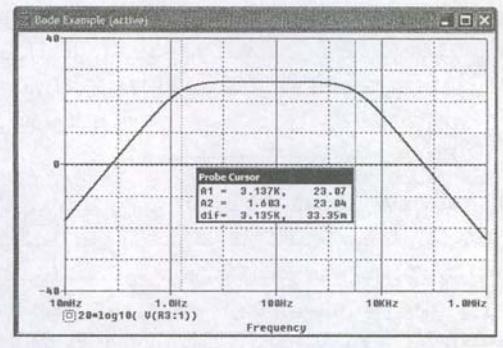
حل را با انتخاب توبولوژی مدار آغاز می‌کنیم. چون هیچ اشاره‌ای به تبیزی پاسخ داده نشده است، لذا مدار ساده شکل ۱۶-۳۷ را بررسی می‌کنیم.

$$\text{تایع تبدیل این مدار به سادگی به صورت زیر به دست می‌آید:}$$

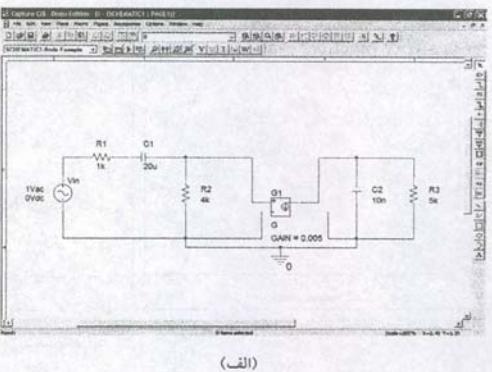
$$H(s) \equiv \frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = \frac{RCs}{1 + RCs}$$

که دارای صفری در $s = 0$ و قطبی در $s = -\frac{1}{RC}$ می‌باشد و بنابراین رفتار آن به شکل فیلتر بالاگذر است.

فرکانس گوشه یا قطع مدار فیلتر $f_L = 1/RC$ است و مایلیم که این فرکانس برابر باز C انتخاب کنیم وی چون اطلاعات زیادی در این جا داده نشده است در انتخاب آزادیم. بنابراین مقاومت استاندارد $4.7k\Omega$ را برای R انتخاب می‌کنیم و به این ترتیب $C = 11.29 nF$ خواهد شد. تنها گام باقی مانده تأثیر طرح با کمک شبیه‌سازی PSpice است. منحنی پاسخ فرکانس در شکل ۱۶-۳۸ ملاحظه می‌گردد.



(ب)



شکل ۱۶-۳۶ (الف) مدار شکل ۱۶-۲۶ با ترسیم تصویر PSpice رسم شده است.

مجدداً بخواننده توصیه می‌شود مدارهای به کار رفته در مثال‌های را شبیه‌سازی کند و نتایج را با منحنی‌های بُعد مقایسه نماید.

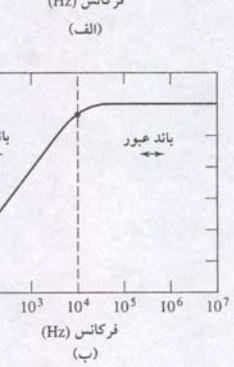
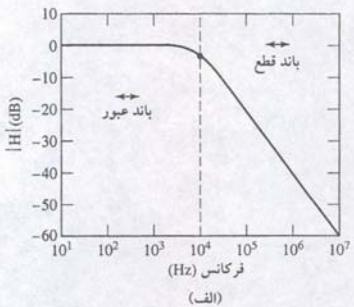
۱۶-۷ فیلترها

طراحی فیلتر یا صافی موضوعی کاربردی و جالب است و می‌توان به طور جداگانه برای آن کتابی نوشته. در این بخش بعضی از مفاهیم فیلتر کدن را معرفی می‌کنیم و هر دو نوع مدار فیلتر غیرفعال و فعال را توضیح خواهیم داد. این مدارها ممکن است خیلی ساده و متشکل از یک خازن یا القاگر باشند ولی اضافه شدن آن به یک شبکه مفروض موجب اصلاح رفتار آن می‌شود. این مدارها می‌توانند با ترکیبی از مقاومات‌ها، خازن‌ها، القاگرها و opamp‌ها تولید منحنی پاسخ دقیقی از یک کاربرد مفروض، بسیار پیشرفت‌های باشند. فیلتر مدار الکترونیک مدرن برای ایجاد ولتاژ dc و سیمه منابع تغذیه، حذف پارازیت‌ها در کانال‌های مخابراتی، تفکیک کانال‌های رادیو و تلویزیون از سیگنال مخلوط شده که به وسیله آنها تولید می‌گردد و تقویت سیگنال صوتی به درستی اتومبیل به کار می‌رودند.

مفهوم اصلی یک فیلتر این است که فرکانس‌های مجاز به عبور از یک مدار را انتخاب می‌نماید. بسته به کاربرد، انواع متعددی از فیلترها موجودند. یک فیلتر پایین‌گذر (بند پایین) که پاسخ آن در شکل ۱۶-۳۵(الف) مشاهده می‌شود، فرکانس‌های زیر فرکانس قطع را زیر خود عبور می‌دهد، ضمن این‌که فرکانس‌های بالاتر در آن به شدت میرا می‌گردند. از طرف دیگر یک فیلتر بالاگذر عکس این کار را انجام می‌دهد و پاسخی مثلاً شکل ۱۶-۳۵(ب) دارد. معیار اصلی کیفیت فیلتر تبیزی در نقطه قطع یا شیب منحنی در حوالی فرکانس گوشه است. به طور کلی منحنی‌های پاسخ با شیب بیشتر به مدارهای مختلط پیچیده‌تری نیاز دارد.

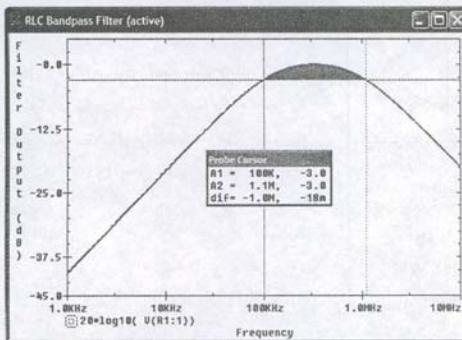
از ترکیب فیلتر بالاگذر و پایین‌گذر مداری به نام فیلتر میان‌گذر ساخته می‌شود، شکل ۱۶-۳۵(ج). در این نوع فیلتر ناحیه بین دو فرکانس گوشه باند عبور خوانده می‌شود. ناحیه خارج باند فوق فیلتر، باند قطع نام دارد. این نام به فیلترهای بالا یا پایین‌گذر می‌اندازند. فیلتر میان‌گذر شکل ۱۶-۳۵(الف) و (ب) با تعویض فرکانس قطع می‌توان فیلتر میان‌گذر ساخت که فرکانس‌های بالاتر یا پایین تر را بین فرکانس‌های بین این دو را حذف می‌کند (شکل ۱۶-۳۵(د)).

فیلتر حذف نوع خاصی از فیلتر میان‌گذر است که دارای پاسخ باریکی است و یک مؤلفه فرکانس از یک سیگنال را حذف می‌کند. فیلترهای چند باندی میان‌گذر می‌باشند. این مدارها حاوی چند باند میان‌گذر می‌باشند. طراحی این فیلترها ساده است ولی از محدوده بحث در این کتاب خارج می‌باشد.



شکل ۱۶-۳۵ منحنی پاسخ فرکانس برای (الف) فیلتر پایین‌گذر، (ب) فیلتر بالاگذر.

مثال ۱۶-۱۲



یک فیلتر میان‌گذر با عرض باند MHz ۱ و فرکانس قطع بالا در MHz ۱.۱ طراحی کنید.

نوبولوژی مدار شکل ۱۶-۳۷ را انتخاب می‌کنیم و فرکانس گوش را به دست سی‌او‌ریم، عرض باند را برابر f_L - f_H داده می‌شود، پس:

$$f_L = 1.1 \times 10^6 - 1 \times 10^6 = 100 \text{ kHz}$$

$$\omega_L = 2\pi f_L = 628.3 \text{ krad/s}$$

س فرکانس قطع بالا (ω_H) در Mrad/s ۶.۹۱۲ خواهد بود.

برای پیش روی در طراحی مدار با این مشخصات، لازم است عبارتی رای هر فرکانس بر حسب R , L و C به دست آوریم.

$$\mathcal{B} = 2\pi (f_H - f_L) = 6.283 \times 10^6 \quad (۳۷)$$

$$\frac{1}{2} \mathcal{B} + \left[\frac{1}{4} \mathcal{B}^2 + \frac{1}{LC} \right]^{1/2} = 2\pi(1.1 \times 10^6)$$

يعني $1/LC = 4.343 \times 10^{12}$ با انتخاب L = ۱۰۰ mH و C = ۲۳۰.۳ nF می‌بزرگ است، خواهیم داشت $R = 6.283 \text{ M } \Omega$ و $C = 230.3 \text{ pF}$. باید متذکر شد که برای این مسئله حل نحصربفردی وجود ندارد، زیرا هر یک از سه کمیت R , L و C می‌توانند نقطه شروع باشند. تصدیق صحت PSpice مدار شکل ۱۶-۴۰ نشان داده شده است.

۱۶-۱۳ یک فیلتر میان‌گذر با فرکانس قطع پایین rad/s ۱۰۰ و فرکانس قطع بالای rad/s ۱۰ krad/s طراحی کنید.

جواب: یکی از جواب‌های ممکن عبارت است از: $C = 10 \mu\text{F}$ و $R = 990 \Omega$ و $L = 100 \text{ mH}$.

فیلتری را که بررسی کردیم، فیلتر غیرفعال می‌خواند زیرا در ساخت آنها از عنصرهای غیرفعال استفاده شده است. (در آن ترانزیستور، op-amp و نظایر آن به کار نرفته است). هر چند فیلترهای غیرفعال خیلی محدود ولی مناسب هر کاربردی نمی‌باشد. تنظیم بهره یک فیلتر غیرفعال که به صورت نسبت خروجی به ورودی تعریف می‌شود، خیلی مشکل است. سمن این که تقویت در مدارهای فیلتر نیز مورد توجه می‌باشد.

فیلترهای فعال

ستفاده از یک عنصر فعال مثل op-amp در طراحی فیلتر می‌تواند بسیاری از کمبودهای فیلتر غیرفعال را جبران کند. همان‌طور که در فصل ۶ دیدیم، مدارهای op-amp به سادگی برای تهیه هر می‌توانند طراحی شوند. این مدارها می‌توانند رفتاری شبیه به القاگر را در مجاورت حاضرها از خود به نمایش بگذارند.

مدار داخل یک op-amp خواهی خازن خیلی کوچکی است (در حدود ۱۰۰ PF) و این وجہ می‌شود تا حداکثر فرکانس کاری op-amp محدود گردد. بنابراین هر مدار ۲۰ MHz op-amp همچون مدار پایین‌گذر عمل کرده و فرکانس قطع آن برای قطعات مدنظر باشد.

۱۶-۱۶ یک فیلتر بالاگذر با فرکانس قطع ۱۳.۵۶ kHz که فرکانس یک منبع تغذیه rf است، بسازید. با PSpice صحت آن را تأیید کنید.

فیلترهای میان‌گذر

قبل از چند مدار را در این فصل مشاهده کردیم که هر یک می‌توانست یک فیلتر میان‌گذر باشد (مثل شکل‌های ۱۶-۱ و ۱۶-۸). مدار ساده ۱۶-۳۹ را در نظر بگیرید که در آن خروجی از دو سر مقاومات اخذ می‌شود. تابع تبدیل این مدار برابر است با:

$$A_V = \frac{sRC}{LCs^2 + RCs + 1} \quad (۳۳)$$

اندازه این تابع برابر زیر است:

$$|A_V| = \frac{\omega RC}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (۳۴)$$

که در حد $0 \rightarrow \omega$ تبدیل به رابطه زیر می‌شود:

$$|A_V| \approx \omega RC \rightarrow 0$$

و در حد $\infty \rightarrow \omega$ برابر است با:

$$|A_V| \approx \frac{R}{\omega L} \rightarrow 0$$

ما با توجه به تجربه خود از نمودار بود می‌دانیم که معادله (۳۳) سه فرکانس بحرانی را به نمایش گذاشته است: یکی از آن‌ها صفر تابع و دو تابع دیگر قطب هستند. برای داشتن یک پاسخ فیلتر میان‌گذر که مقدار پیک آن واحد باشد (dB ۰)، هر دو فرکانس قطب‌ها باید بزرگتر از rad/s ۱ باشد، که فرکانس crossover جمله صفر است. این دو فرکانس بحرانی با تبدیل معادله (۳۳) به فرم حاصل ضرب یا تعیین مقادیر ω که در آن معادله (۳۴) برابر $\sqrt{LC}/1/\sqrt{2}$ شود به دست می‌آید، آن‌گاه فرکانس مرکزی این فیلتر در $\omega = 1/\sqrt{LC}$ خواهد بود. بنابراین با کمی دستکاری جبری، پس از برآورده کردن معادله (۳۴) با $1/\sqrt{2}$ داریم:

$$(1 - LC\omega_c^2)^2 = \omega_c^2 R^2 C^2 \quad (۳۵)$$

باگرفتن جذر از دو طرف داریم:

$$LC\omega_c^2 + RC\omega_c - 1 = 0$$

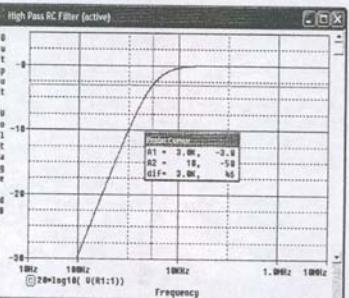
و از آنجا خواهیم داشت:

$$\omega_c = -\frac{R}{L} \pm \frac{\sqrt{R^2 C^2 + 4LC}}{2LC} \quad (۳۶)$$

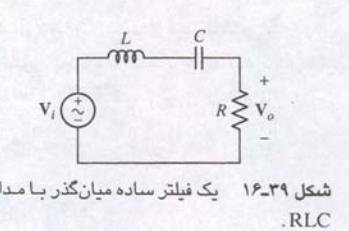
در این حل، فرکانس منفی حل غیر فیزیکی معادله است و لذا مجبوریم فقط از ریشه مثبت معادله (۳۶) استفاده کنیم. به این ترتیب به نظر می‌رسد که مدار تنها یک فرکانس بحرانی دارد با این وجود کمی زود قضاوت کردیم و در واقع ریشه منفی معادله (۳۵) هم معتبر است زیرا از طرفین جذر گرفته‌ایم، یعنی:

$$\omega_c = \frac{R}{L} \pm \frac{\sqrt{R^2 C^2 + 4LC}}{2LC} \quad (۳۷)$$

که از آن می‌توان نشان داد که فقط ریشه‌های مثبت از نظر فیزیکی معنی دارند. بنابراین ما ω_H را از معادله (۳۶) و ω_L را از معادله (۳۷) انتخاب می‌کنیم. چون $B = \omega_H - \omega_L$ ، کمی جبر نشان می‌دهد که $B = R/L$ می‌باشد.



۱۶-۳۸ پاسخ فرکانس شبیه‌سازی شده مطرح نهایی با فرکانس قطع ۳kHz (3dB) مورد انتظار.



مثال ۱۶-۱۳

واضح است که طرح ما فرکانس قطع ۱۰ kHz را شامل نمی‌شود. چه اشتباہی کرده‌ایم؟ بررسی دقیق محسابات جبری خطابی را نشان نمی‌دهد، پس فرض غلطی در جایی موردن استفاده قرار گرفته است. شبیه‌سازی با $\mu A741$ op-amp نتایج متفاوتی را این خلاف فرایندهای دیافتگی مدار موردنظر است. به نظر می‌رسد که این انتخاب عامل خطای است. همان مدار با $\mu A741$ op-amp که به جای $\mu A741$ به کار رفته است، فرکانس قطع ۱۰ kHz را مطابق می‌لیم به دست می‌دهد. نتیجه شبیه‌سازی شده در شکل ۱۶-۴۲ (ب) آمده است.

متاسفانه $\mu A741$ op-amp با بهره ۴۰ dB و فرکانس گوششای نزدیک به ۱۰ kHz است که در اینجا قابل چشم‌پوشی نیست. با این وجود $\mu A741$ با بهره ۷۵ dB و فرکانس گوششای نمی‌رسد. این نقطه به قدر کافی از ۱۰ kHz دور است و طراحی را تحت تأثیر قرار نمی‌دهد.

تمرین

۱۶-۱۸ یک مدار فیلتر پایین‌گذر با بهره dB ۳۰ و فرکانس قطع ۱ kHz طراحی کنید.

جواب: یک جواب ممکن با مقادیر زیر حاصل می‌شود:
 $C = 2 \mu F$, $R_1 = 100 k\Omega$, $R_f = 3.062 M\Omega$.

کاربرد عملی

تنظیم‌های صدای بم، زیر و میانی

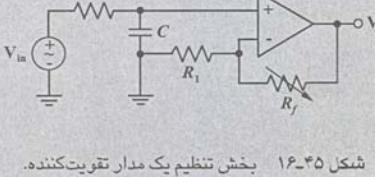
توانایی تنظیم جداگانه صدای زیر، بم و میانی در یک سیستم صوتی حتی در تجهیزات ارزان قیمت بسیار مورد توجه است. محدوده فرکانس صوتی (حداقل برای گوش انسان) در حد ۲۰ kHz تا ۲۰ Hz ۲۰ پذیرفته شده است که در آن ناحیه کوچکتر از ۵ kHz مربوط به اصوات بم و بیشتر از ۵۰۰ Hz مربوط به صدای زیر می‌باشد.

طراحی یک اکولایزر (متعدد ساز) گرافیکی به کوشش چندانی نیاز ندارد گرچه داشتن سیستمی مانند شکل ۱۶-۴۳ تلاش بیشتری می‌خواهد. سیگنال اصلی که ممکن است توسط یک گیرنده رادیویی یا شاید پخش CD تولید شود، مشتمل از طیف وسیعی از فرکانس‌ها است که عرض باندی حدود ۲۰ kHz دارد.



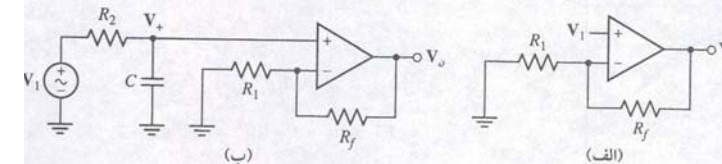
شکل ۱۶-۴۳ نمونه‌ای از اکولایزر گرافیکی.

این سیگنال باید به سه مدار op-amp مختلف ارسال شود که هر یک فیلتری متفاوت در رودی خود دارد. مدار تنظیم صوت بهمراه یک فیلتر پایین‌گذر نیازمند است و مدار تنظیم فرکانس‌های زیر فیلتر بالاگذر نیاز دارد و بالاچرخ در مدار تنظیم فرکانس میانی یک فیلتر میان‌گذر نصب می‌شود. آن‌گاه خروجی هر مدار op-amp به یک مدار تقویت‌کننده مجموع اعمال می‌شود. نمودار بلوکی مدار کامل در شکل ۱۶-۴۴ ملاحظه می‌شود.



شکل ۱۶-۴۵ بخش تنظیم یک مدار تقویت‌کننده.

یک فیلتر پایین‌گذر فعال با فرکانس قطع ۱۰ kHz و بهره ولتاژ ۴۰ dB طراحی کنید.



برای فرکانس‌های خیلی کمتر از ۱۰ kHz است مدار تقویت‌کننده بتواند بهره ۴۰ dB یا $V/V = 100$ را فراهم نماید. این کار به راحتی با یک تقویت‌کننده غیرمعکوس گر مثل شکل ۱۶-۴۱ (الف) امکان‌پذیر است.

$$\frac{R_f}{R_1} + 1 = 100$$

برای داشتن فرکانس -بالای گوشش در ۱۰ kHz به یک فیلتر پایین‌گذر نیاز داریم (مثل شکل ۱۶-۴۱ (ب)). برای بدست آوردن تابع تبدیل، از ورودی معکوس نکننده شروع می‌کنیم:

$$V_+ = V_i \frac{1/sC}{R_2 + 1/sC} = V_i \frac{1}{1 + sR_2C}$$

$$\text{در ورودی وارونگر داریم: } \frac{V_o - V_+}{R_f} = \frac{V_+}{R_1}$$

از ترکیب این معادله و حل آن برای V_o در می‌یابیم که

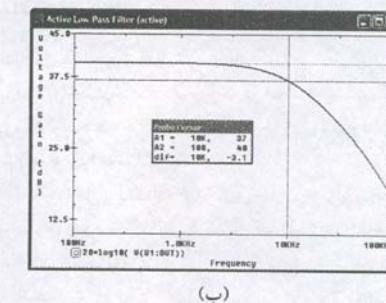
$$V_o = V_i \left(\frac{1}{1 + sR_2C} \right) \left(1 + \frac{R_f}{R_1} \right)$$

حداکثر مقدار بهره $V_o/V_i = 1 + R_f/R_1$ برابر است با $A_V = 1 + R_f/R_1$. پس این کمیت را با ۱۰۰ مساوی قرار می‌دهیم، چون هیچ یک از مقاومت‌ها در فرکانس گوششای $(R_2C)^{-1}$ وجود ندارد. هر یک از آن‌ها را می‌توان ابتدا انتخاب کرد. ما $R_1 = 1 k\Omega$ انتخاب می‌کنیم و لذا $R_f = 99 k\Omega$ خواهد شد.

شکل ۱۶-۴۲ (الف) پاسخ فرکانسی فیلتر با

op-amp $\mu A741$ که نشان می‌دهد فیلتر گوششای ۶.4 kHz است. (ب) پاسخ فرکانسی همین فرکانس با op-amp LF111 از این مدار داشته است.

شکل ۱۶-۴۲ (الف) نشان داده شده است.



(الف)

(ب)

- مقادیر غیرعملی قطعات اغلب کار طراحی را ساده می‌کند. تابع تبدیل یک شبکه را می‌توان از لحاظ اندازه و فاز تغییر مقیاس داد و قطعات را بدینوسیله با مقادیر مناسب جایگزین نمود.
- نمودارهای بود موج می‌شود که یک تابع تبدیل به سرعت ترسیم گردد.
- چهار نوع فیلتر اصلی عبارتنداز: فیلتر پایین‌گذر، فیلتر بالاگذر، فیلتر میان‌گذر، فیلتر میان‌نگذر.
- فیلترهای غیرفعال فقط از مقاومتها، خازنها و القاگرها استفاده می‌کنند. فیلترهای فعل بر op-amp یا دیگر عنصرهای فعل مبتنی می‌باشند.

۱۶-۹ خواندنی‌های کمکی

A good discussion of a large variety of filters can be found in:

J.T. Taylor and Q. Huang, eds., *CRC Handbook of Electrical Filters*. Boca Raton, Fla: CRC Press, 1997.

A comprehensive compilation of various active filter circuits and design procedures is given in:

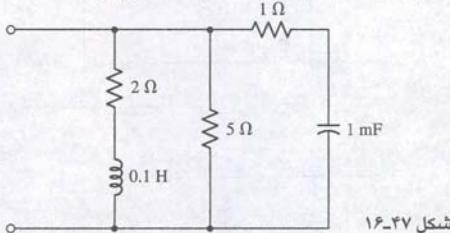
D. Lancaster, *Lancaster's Active Filter Cookbook*, 2nd ed. Burlington, Mass.: Newnes, 1996.

مسائل

۱۶-۱ تشدید موافق

۵. یک مدار تشدید موافق دارای پارامترهای $\omega = 80 \text{ rad/s}$ و $\alpha = 2\alpha \omega_d = 1200 \text{ rad/s}$ است. اگر امدادانس در $s = -j\omega_0 + j\omega_d$ برابر باشد، مقادیر R , L , C و α را محاسبه نماید.

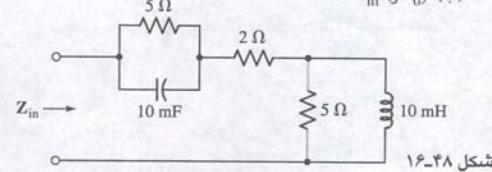
۶. فرکانس تشدید شبکه دو برابر شکل ۱۶-۴۷ را باید.



۷. اگر $I = 10 \angle 0^\circ \mu\text{A}$, $C = 1 \mu\text{F}$, $L = 1 \text{ H}$, $R = 1 \text{ M}\Omega$ باشد، (الف) ω_0 را برابر دست آورید.

(ب) منحنی $|V|$ را برابر عنوان تابعی از ω با $\omega_0 < \omega < 1005 \text{ rad/s}$ رسم نمایید.

۸. برای شبکه شکل ۱۶-۴۸، مطلوب است (الف) فرکانس تشدید ω_0 و (ب) $Z_{in}(\omega_0)$ باشد.



حال که طراحی طبقات فیلتر پایان یافته است، آمدهایم تا طبقه مجموع را طراحی نماییم. به منظر سادگی این طبقه را هم مشابه طبقات دیگر تغذیه می‌کنیم که این خود موجب محدودیت حداقل و نتایج خروجی به کمتر از ۹۷ می‌گردد. در اینجا با تقویت کننده معکوس گر آغاز می‌کنیم و خروجی هر فیلتر op-amp مستقیماً به مقاومت $1 \text{ k}\Omega$ خودش وصل می‌شود. دیگر پایانه $1 \text{ k}\Omega$, آنگاه به ورودی طبقه تقویت کننده مجموع انتخاب می‌گردد. پتانسیومتر مناسی برای تقویت کننده مجموع انتخابی شود تا از اشعاع جلوگیری شود. بنابراین باید از محدوده ولتاژ پیش‌بینی شده و مدار کامل و نتایج خروجی فیلترهای بهم و زیر را با همه مقاومت‌های پسخورده $9 \text{ k}\Omega$ نشان می‌دهد.

$$\frac{1}{R_{2t}C_t} = 2\pi(5 \times 10^3) = 3.142 \times 10^4$$

با انتخاب $C_t = 1 \mu\text{F}$ مقادیر $R_{2t} = 31.83 \Omega$ را داریم. با

انتخاب قطعه 500 Hz خواهد بود. ما طراحی فیلتر میان‌گذر را به

خواندن و اگزار می‌کنیم.

بخش دیگر طراحی انتخاب مقادیر مناسب R_{1t} و R_{1b}

مقاومت‌های پسخورده متعاقب است. بدون هرگونه اصرار، شاید

سداده‌ترین راه انتخاب طبقات یکسان باشد. بنابراین هر دو

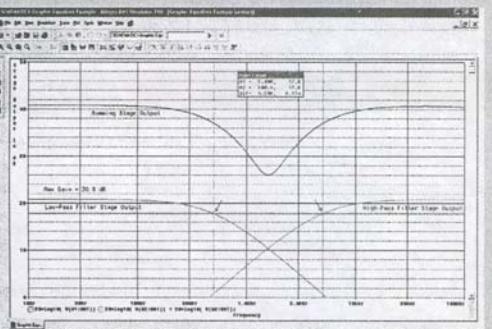
مقادیر R_{1b} و R_{1t} برابر $1 \text{ k}\Omega$ با R_{fb} و R_{1b} با پتانسیومترهای

$10 \text{ k}\Omega$ انتخاب می‌شوند (بنابراین از $0 \text{ to } 10 \text{ k}\Omega$ در اختیار است). این انتخاب اجزه می‌دهد تا بلندی یک سیگنال تا ۱۱ برابر

دیگری باشد. در مواردی که بخواهیم طراحی قابل جایه جایی

(برتابل) باشد ولتاژهای تغذیه را $9 \pm 1 \text{ V}$ انتخاب می‌کنیم که در

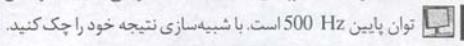
این صورت هنگام لزوم به سادگی تعویض می‌شود.



۱۶-۸ خلاصه فصل و مرور

- تشدید وضعیتی است که در آن یک تابع تحریک سینوسی با دامنه ثابت، پاسخی با حداقل دامنه تولید می‌کند.
- یک شبکه الکتریکی هنگامی در حالت تشدید است که ولتاژ و جریان در پایانه‌های ورودی شبکه همفاز باشند.
- ضربی کیفیت مناسب با حداقل نرخی در شبکه، تقسیم بر انرژی کل تلف شده در هر پریود است.
- یک فرکانس نصف توان به صورت فرکانسی که در آن اندازه تابع پاسخ $1/\sqrt{2}$ برابر مقدار حداقل شاشد، تعریف می‌شود.
- پهنا برای عرض باند یک مدار تشدید به صورت تفاضل بین فرکانس‌های بالا و پایین نصف توان تعریف می‌شود.
- یک مدار با Q بالا، مدار تشدیدی است که در آن، ضربی کیفیت بزرگتر از ۵ است.
- در یک مدار Q بالا هر فرکانس نصف توان تقریباً در نصف عرض باند از فرکانس تشدید واقع است.
- یک مدار تشدید سری با امدادانس پایین در حالت تشدید مشخص می‌گردد، در صورتی که مدار تشدید موازی در تشدید، امدادانس بالا دارد.
- مدار تشدید سری هنگامی با یک مدار تشدید موازی معادل است که $R_p = R_s(1 + Q^2)$ و $X_p = X_s(1 + Q^2)$ باشد.

۲۹. یک مدار RLC با پهنهای باند ۵.۵ kHz طراحی نمایید. فرکانس نصف توان پابین ۵۰۰ Hz است. با شبیه‌سازی نتیجه خود را چک کنید.



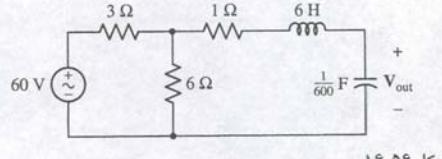
۱۶-۳ تشدید سری

۳۰. یک مدار سری از دو مقاومت Ω ۵، چهار الگاگر μH و یک خازن $3.3 \mu\text{F}$ ساخته شده است. (الف) فرکانس تشدید مدار را حساب کنید.
 (ب) ضریب کیفیت مدار و قتی در فرکانس تشدید کار می‌کند، چقدر است؟
 (ج) امیدانس رورودی در فرکانس تشدید قدرت ۰.۱ فرکانس تشدید یا ۱۰ برابر فرکانس تشدید.

۳۱. اگر یک مدار سری دارای پهنهای باند MHz ۳ و فرکانس نصف توان $f_1 = 17 \text{ kHz}$ باشد، مطلوبست (الف) فرکانس نصف توان بالا، (ب) فرکانس تشدید (مردمار)، (ج) ضریب کیفیت مدار و قتی که در فرکانس تشدید کار کند.

۳۲. (الف) امیدانس مدار RLC با $C = 2 \text{ mF}$ ، $L = 1 \text{ mH}$ ، $R = 1 \Omega$ است. (الف) در فرکانس تشدید کار کند به دست آورید. حل خود را با شبیه‌سازی تأیید کنید (توجه: یک مقاومت خیلی بزرگ موادی با خازن مانع از ایجاد خطای اتصال به زمین می‌گردد).

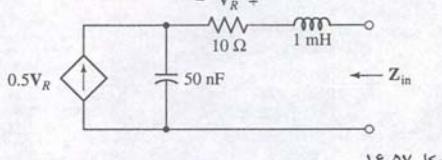
۳۳. (الف) امیدانس مدار RLC با $L = 1 \mu\text{H}$ ، $R = 1 \text{ k}\Omega$ است. (الف) $C = 2 \mu\text{F}$ و قتی که در فرکانس تشدید کار کند، به دست آورید. (ب) حل خود را با PSpice شبیه‌سازی کنید (توجه: یک مقاومت خیلی بزرگ موادی با خازن مانع از ایجاد خطای اتصال به زمین می‌گردد).
 ۳۴. (الف) با روش‌های تقریبی، V_{out} را بر حسب ω برای شکل ۱۶-۵۶ می‌کنید. (ب) مقدار دقیق V_{out} را در $\omega = 9 \text{ rad/s}$ رسم کنید.



شکل ۱۶-۵۶

۳۵. یک شبکه تشدید سری متشکل از مقاومت 50Ω ، یک الگاگر 4 mH و یک خازن $0.1 \mu\text{F}$ موجود است. مطلوب است (الف) ω_0 ، (ب) f_0 ، (ج) Q_0 ، (د) ω_1 ، (ه) ω_2 ، (و) ω_3 ، (ز) ω_4 و (ب) نسبت اندازه‌های امیدانس خازن به امیدانس مقاومت در 45 rad/s .

۳۶. پس از یافتن Z_{in} در شکل ۱۶-۵۷ (الف) ω_0 را بایابید.



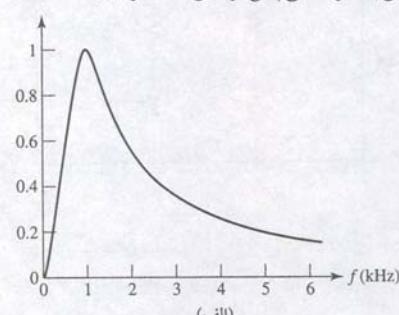
شکل ۱۶-۵۷

۳۷. مدار شکل ۱۶-۵۸ به اندازه ولتاژ منبع توجه کنید. بعد بگویید آیا مایلید دستهای خود را در دو سر خازن بگذارید. منحنی $|V|$ را بر حسب ω

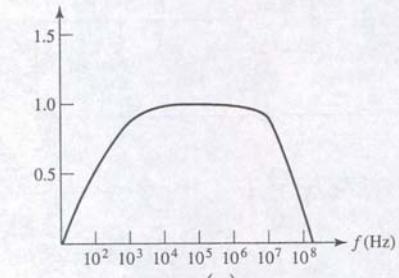
۲۳. یک مدار تشدید موازی با $f_0 = 1000 \text{ Hz}$ ، $Q_0 = 40$ و $|Z_{in}(j\omega_0)|$ مشخص شده است. با روابط تقریبی مقادیر زیر را بایابید.

- (الف) Z_{in} در 1010 Hz و (ب) محدوده‌ای از فرکانس که در آن تقریبها منطقی اند را به دست آورید.

۲۴. عرض باند هر منحنی پاسخ در شکل ۱۶-۵۵ را بایابید.



(الف)



شکل ۱۶-۵۵

۲۵. یک مدار تشدید موازی دارای پهنهای باند MHz ۱ است، فرکانس نصف توان پابین آن $f_1 = 5.5 \text{ kHz}$ است. (الف) فرکانس نصف توان بالا چند است؟ (ب) فرکانس تشدید ω_0 آن چند است. (ج) ضریب کیفیت مدار و قتی در فرکانس تشدید کار کند چند است؟

۲۶. یک مدار تشدید موازی دارای پهنهای باند GHz ۱ است، و فرکانس نصف توان پابین آن $f_1 = 75.3 \text{ MHz}$ است. (الف) فرکانس نصف توان بالا چند است؟ (ب) فرکانس تشدید ω_0 آن چند است. (ج) ضریب کیفیت مدار و قتی در فرکانس تشدید کار کند چند است؟

۲۷. (الف) منحنی پاسخ ولتاژ را برای یک مدار با فرکانس نصف توان 1000 rad/s رسم کنید. (ب) فرکانس تشدید مدار چیست؟ (ج) پهنهای باند مدار چیست؟ (د) ضریب کیفیت مدار و قتی در فرکانس تشدید باشد چقدر است؟

۲۸. (الف) اگر خازن $1 \mu\text{F}$ با خازن 330 pF جایگزین شود، مطلوبست فرکانس تشدید مدار جدید. (ب) پاسخ خود را با PSpice تحقیق کنید (توجه: از منبع VAC استفاده نمایید و در طول چند دهه شبیه‌سازی کنید).

۱۵. (الف) برای مدار شکل ۱۶-۵۲ $L = 1 \text{ mH}$ ، $R = 1 \text{ m}\Omega$ است. را چنان انتخاب کنید که $\omega_d = 50\text{s}^{-1}$ باشد و C طوری باشد که $Z_{in}(j\omega_0)$ را در آن به دست آورید. (ب) صحبت کنید، و یک مقاومت کوچک سری با الگاگر برای جلوگیری از اتصال کوتاه در حین تعیین تغذیه DC به آن اضافه کنید.

۱۶-۲ عرض باند و مدارهای Q بالا

۱۶. یک مدار تشدید موازی دارای $\omega_0 = 100 \text{ rad/s}$ و $Q_0 = 80$ است. (الف) R و C را به دست آورید. (ب) روش‌های تقریبی رسم $|Z|$ را بر حسب ω به کار ببرید.

۱۷. از روابط دقیق برای پافن، R ، L و C در یک مدار تشدید موازی استفاده کنید. در این مدار $\omega_2 = 118 \text{ rad/s}$ ، $\omega_1 = 103 \text{ rad/s}$ و $|Z(j105)| = 10 \Omega$ است.

۱۸. اگر در یک مدار تشدید موازی $R = 600 \Omega$ باشد. (الف) عرض باند را به دست آورید. (ب) R را در $\omega = 28 \text{ krad/s}$ باز محاسبه کنید. (ج) از روش تقریبی در تعیین $|Z_{in}(j28000)|$ استفاده کنید. (د) مقدار واقعی (ز) $|Z_{in}(j28000)|$ را به دست آورید. (ه) در صد خطای ناشی از به کار گیری روابط تقریبی را در محاسبه $|Z_{in}|$ باز محاسبه کنید.

۱۹. یک مدار تشدید موازی در 400 Hz با 2 mA به مدار اعمال شود. با روش‌های تقریبی فرکانس جریان را در شرایط زیر به دست آورید. (الف) ولتاژ دو سر مدار اندازه ۰.۵ mA است. (ب) جریان در مقاومت دارای اندازه ۰.۵ mA است.

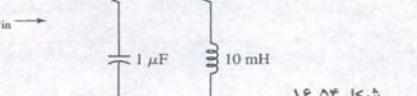
۲۰. مدار تشدید موازی دارای $Q_0 = 10$ و $\omega_0 = 1 \text{ Mrad/s}$ است. اگر

- $R = 5 \text{ k}\Omega$ باشد، مطلوب است (الف) L ، (ب) فرکانس بالای ω_0 که در آن $|Z_{in}| = 2 \text{k}\Omega$ باشد. (ج) فرکانس که در آن -30° ang می‌باشد.

۲۱. از تقریب در یافتن کمیت‌ها در شکل ۱۶-۵۳ استفاده کنید. (الف) ω_1 در V_1 را در فرکانس تشدید به دست آورید. (ج) محاسبه V_1 در فرکانس به اندازه ۱۵ krad/s از تشدید.

۲۲. (الف) برای مدار شکل ۱۶-۵۴ $C = 1 \text{ mF}$ و $L = 1 \text{ mH}$ است. را چنان تنظیم کنید که $\alpha = 100\text{s}^{-1}$ باشد. فرکانش تشدید و امیدانس Z_{in} را در فرکانس تشدید بیدا کنید. (ب) پاسخ خود را شبیه‌سازی PSpice تحقیق کنید (توجه: از منبع VAC و یک مقاومت کوچک سری برای معانع از اتصال کوتاه به هنگام تغذیه خودکار اضافه کنید).

۲۳. (الف) برای مدار شکل ۱۶-۵۲ $R = 1 \text{ k}\Omega$ ، $C = 25 \mu\text{F}$ و $v = 10u(-t) \text{ V}$ است. (الف) از تعریف تشدید برای یافتن ω_0 در شبکه شکل ۱۶-۵۴ استفاده کنید. (ب) $Z_{in}(j\omega_0)$ را به دست آورید.

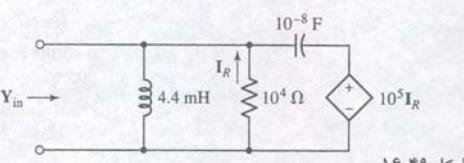


شکل ۱۶-۵۴

۹. یک مدار تشدید موازی دارای قطب‌های امیدانس $s = -50 \pm 1000 \text{ s}^{-1}$ و صفری در مبدأست. اگر $C = 1 \mu\text{F}$ باشد، (الف) L و R را بایابید. (ب) Z را در 1000 rad/s محاسبه کنید.

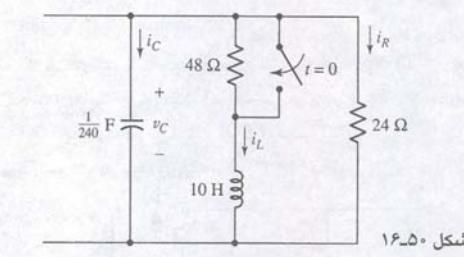
۱۰. یک مدار تشدید موازی برای یک رادیو AM طوری بسازید که یک القاگر متغیر بتواند فرکانس تشدید را در باند AM از ۵۳۵ تا ۱۶۰۵ کیلوهرتز تنظیم کنند. در یک انتهای باند $Q_0 = 45$ است. (الف) R ، C ، L_{max} و L_{min} را به دست آورید.

۱۱. (الف) برای شبکه شکل ۱۶-۴۹ $Z_{in}(j\omega_0)$ را در شبکه پیدا کنید.



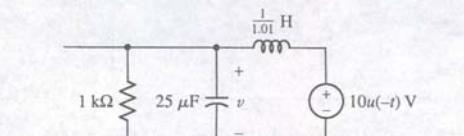
شکل ۱۶-۴۹

۱۲. فرکانس تشدید شبکه شکل ۱۶-۵۰ را در $t > 0$ معین کنید.



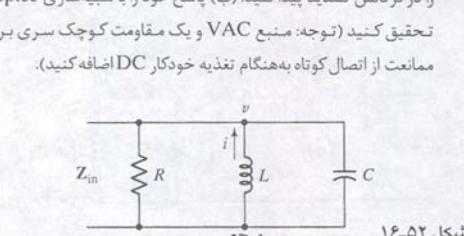
شکل ۱۶-۵۰

۱۳. فرکانس تشدید شبکه شکل ۱۶-۵۱ را در $t > 0$ معین کنید.



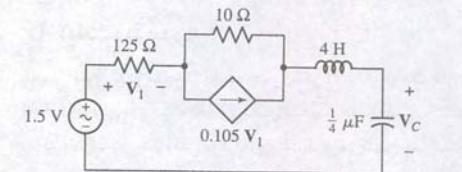
شکل ۱۶-۵۱

۱۴. (الف) برای مدار شکل ۱۶-۵۲ $C = 1 \text{ mF}$ و $L = 1 \text{ mH}$ است. را چنان تنظیم کنید که $\alpha = 100\text{s}^{-1}$ باشد. فرکانش تشدید و امیدانس Z_{in} را در فرکانس تشدید بیدا کنید. (ب) پاسخ خود را شبیه‌سازی PSpice تحقیق کنید (توجه: از منبع VAC و یک مقاومت کوچک سری برای معانع از اتصال کوتاه به هنگام تغذیه خودکار اضافه کنید).



شکل ۱۶-۵۲

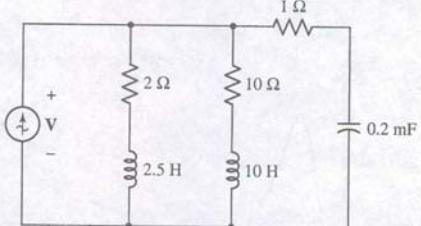
رسم کنید تا پاسخ خود را ارزیابی نمایید.



شکل ۱۶-۵۸

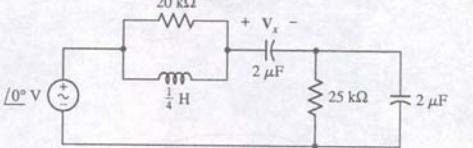
۳.۸. یک مدار تشذید سری دارای $Z_{in} = 10 \Omega$ و $Q_0 = 10$, $f_0 = 500 \text{ Hz}$ در حالت تشذید است. (الف) V_x را در $\omega = 500 \text{ rad/s}$ برابر باشد. (ب) V_x را در $\omega = 550 \text{ rad/s}$ برابر باشد. (الف) $V_x = 1 \angle 0^\circ \text{ V}$ به طور سری به مدار وصل شود، مقادیر دقیق $|V_x|$ را در فرکانس‌های 500 , $f = 450$, 500 , $\omega = 500 \text{ rad/s}$ برابر باشد. (ب) V_x را در $\omega = 500 \text{ rad/s}$ برابر باشد.

شکل ۱۶-۶۱



شکل ۱۶-۶۱

۴. (الف) پا روش‌های تقریبی، (ب) $|V_x|$ را در $\omega = 2000 \text{ rad/s}$ برابر باشد. (الف) $V_x(j2000)$ را برابر باشد. (ب) $V_x(j2000)$ را برابر باشد.



شکل ۱۶-۶۲

۴.۵. ترکیب موازی مقاومت از یک مقاومت $5 \text{ k}\Omega$ و خازن $1 \mu\text{F}$ ساخته شد است. تعیین کنید یک معادل سری اگر فرکانس (الف) $\omega = 10^3 \text{ rad/s}$, (ب) $\omega = 10^4 \text{ rad/s}$ و (ج) $\omega = 10^5 \text{ rad/s}$ باشد.

۴.۶. ترکیب سری مقاومت $5 \text{ k}\Omega$ و خازن $1 \mu\text{F}$ ساخته شده است. مطلوبست معادل سری در فرکانس‌های (الف) $\omega = 10^3 \text{ rad/s}$, (ب) $\omega = 10^4 \text{ rad/s}$ و (ج) $\omega = 10^5 \text{ rad/s}$ باشد.

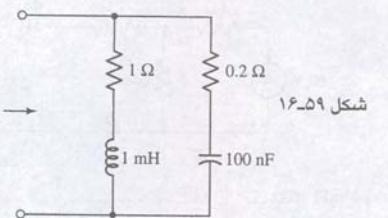
۴.۷. یک ترکیب سری از مقاومت 2Ω و لقاگر $3.3 \mu\text{H}$ ساخته شده است مطلوبست معادل سری اگر فرکانس کار برابر باشد (الف) $\omega = 10^3 \text{ rad/s}$, (ب) $\omega = 10^4 \text{ rad/s}$ و (ج) $\omega = 10^5 \text{ rad/s}$ باشد.

۴.۸. ترکیب موازی مقاومت 470Ω و لقاگر $3.3 \mu\text{H}$ ساخته شده است مطلوبست معادل موازی اگر فرکانس کار برابر باشد (الف) $\omega = 10^3 \text{ rad/s}$, (ب) $\omega = 10^4 \text{ rad/s}$ و (ج) $\omega = 10^5 \text{ rad/s}$ باشد.

۴.۹. (الف) برای مدار شکل ۱۶-۶۳ روش‌های تقریبی برای محاسبه $|V_x|$ را برابر باشد. (ب) مقدار دقیق $|V_x(j10 \times 10^6)$ را برابر باشد. (الف) $V_x(j10 \times 10^6)$ را برابر باشد. (ب) $V_x(j10 \times 10^6)$ را برابر باشد. (الف) $V_x(j10 \times 10^6)$ را برابر باشد. (ب) $V_x(j10 \times 10^6)$ را برابر باشد.

۱۶-۴ دیگر فرم‌های تشذید

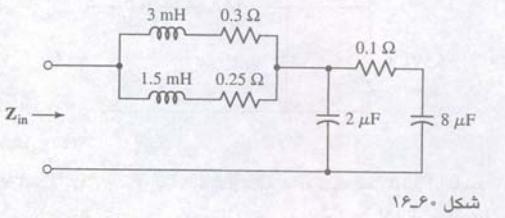
۴.۰. در شبکه سه عنصری دارای یک امپدانس ورودی $Z(s)$ است که قطب‌های را در $s = 0$ و بینهایت دارا است و نیز یک جفت صفر در $s = \pm 20000 \text{ s}^{-1}$ باشد. اگر $j80000 \text{ s}^{-1}$ باشد، مقادیر سه عنصر را به دست آوردید.



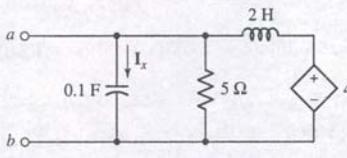
شکل ۱۶-۵۹

۴.۱. چه مقاومتی باید به دو سر ورودی شبکه شکل ۱۶-۵۹ وصل شود تا $Q_0 = 50$ گردد؟

۴.۲. به شبکه شکل ۱۶-۶۰ مراجعه نمایید و از تکنیک‌های تقریبی در تعیین حداقل اندازه Z_{in} و فرکانس مناظر آن استفاده نمایید.



شکل ۱۶-۶۳

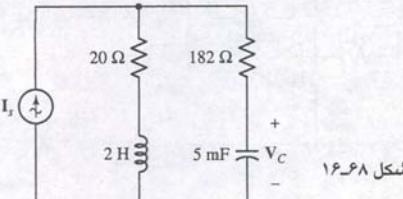


شکل ۱۶-۶۷

۵.۴. شبکه‌ای مشتمل از R , L , C و I_s دارد و یک جفت پایانه ورودی است که به آن همان معنی جربان سینوسی I_s دارد. و نیز یک جفت پایانه خروجی V_{out} در آن تعريف شده است. اگر $V_{out} = 30 \angle 25^\circ \text{ V}$ باشد، آنگاه $V_{out} = 30 \angle 0^\circ \text{ V}$ است. تحت شرایط زیر را مشخص نمایید. اگر تعیین مقادیر V_{out} ناممکن است، تقریب آن را بین کنید. (الف) $I_s = 2 \angle 40^\circ \text{ A}$, $\omega = 50 \text{ rad/s}$, $I_s = 2 \angle 0^\circ \text{ A}$, (ب) $\omega = 50 \text{ rad/s}$, $I_s = 2 \angle 40^\circ \text{ A}$, (ج) $\omega = 50 \text{ rad/s}$, $I_s = 2 \angle 0^\circ \text{ A}$, (د) $\omega = 200 \text{ rad/s}$, $I_s = 2 \angle 40^\circ \text{ A}$, (e) $\omega = 200 \text{ rad/s}$, $I_s = 2 \angle 0^\circ \text{ A}$, $K_f = 4$, $K_m = 30$ باشد. (f) $\omega = 200 \text{ rad/s}$, $I_s = 2 \angle 40^\circ \text{ A}$, $K_f = 4$, $K_m = 30$ باشد.

۱۶-۶ نمودارهای بود

۵.۵. را به دست آورید اگر $H(s) = 10 \text{ rad/s}$ برابر باشد با (الف) 0.2 , (ب) 50 , (c) 500 , (d) 5000 , (e) 50000 . (f) $H(s) = 10 \text{ rad/s}$ برابر باشد با (الف) 0.2 , (ب) 50 , (c) 500 , (d) 5000 , (e) 50000 , (f) 500000 . (g) $H(s) = 10 \text{ rad/s}$ برابر باشد با (الف) 0.2 , (ب) 50 , (c) 500 , (d) 5000 , (e) 50000 , (f) 500000 , (g) 5000000 . (h) $H(s) = 10 \text{ rad/s}$ برابر باشد با (الف) 0.2 , (ب) 50 , (c) 500 , (d) 5000 , (e) 50000 , (f) 500000 , (g) 5000000 , (h) 50000000 .



شکل ۱۶-۶۸

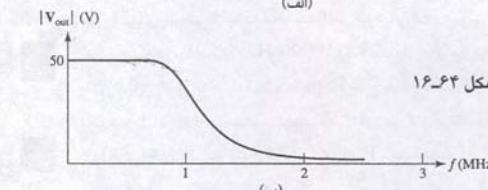
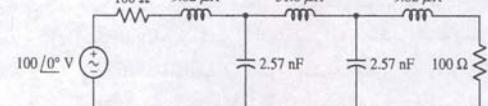
۵.۸. (الف) با به کارگیری مبدأ در 1 rad/s , $H_{dB} = 0$, $\omega = 1 \text{ rad/s}$, منحنی دامنه بود را برای تابع زیر به دست آورید:

$$H(s) = 5 \times 10^8 \text{ s}(s + 100)/[(s + 20)(s + 1000)^3]$$

(ب) مختصات همه گوشها و نقاط تقاطع را روی نمودار بود مشخص کنید. (ج) مقدار دقیق $|\log|H(j\omega)|$ را برای هر فرکانس گوشش در بخش (ب) مشخص نمایید.

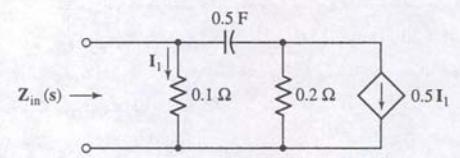
۱۶-۵ تغییر مقیاس

۵. فیلتر شکل ۱۶-۶۴ (الف) دارای منحنی پاسخ شکل ۱۶-۶۴ (ب) است. (الف) فیلتر را طوری تغییر مقیاس دهید که بین یک منبع 50Ω و یک بار ۵۰ کار کند و فرکانس قطع آن Hz ۲۰ باشد. (ب) منحنی پاسخ جدید را ترسیم کنید.



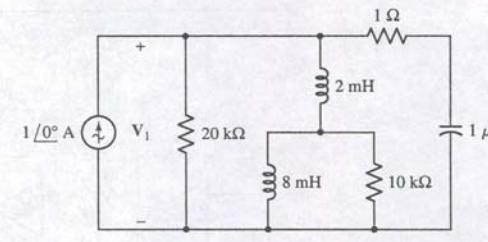
شکل ۱۶-۶۴

۵.۱. (الف) برای شبکه شکل ۱۶-۶۵، $Z_{in}(s)$ را برابر بازدید. (ب) عبارتی برای $Z_{in}(s)$ پس از تغییر مقیاس با 2 , $K_f = 5$, $K_m = 2$ دست آورید. (ج) عنصر مدار را با 2 , $K_f = 5$, $K_m = 2$ تغییر مقیاس داده و شبکه جدید را درس نمایید.



شکل ۱۶-۶۵

۵.۲. (الف) از تقریب‌های مناسب برای یافتن Q_0 در شکل ۱۶-۶۶ استفاده نمایید. (ب) شبکه سمت راست منبع را طوری تغییر مقیاس دهید که تشذید در 1 Mrad/s رخ دهد. (ج) برای مدار جدید ω_0 و β مشخص نمایید.



شکل ۱۶-۶۶

۵.۳. (الف) آرایش جدید شکل ۱۶-۶۷ را پس از تغییر مقیاس با 250 , $K_m = 2$, $K_f = 400$ رسم کنید. (ب) معادل تونن شبکه جدید را در $\omega = 1 \text{ krad/s}$ به دست آورید.

فیلتر حوب حذفی، یعنی فیلتری که فرکانس خاصی را حذف می‌کند. در مدار شکل ۱۶-۳۹ داده شده است. ولی این بار فرکانس به جای دو سر مقاومت از دو سر القاگر - خازن گرفته می‌شود. سیگنال آنتن را به صورت یک منبع سینوسی 17 V و مقاومت سری صفر می‌توان مدل سازی کرد.

یک قطمه حساس دستگاه ردیابی به وسیله یک پارازیت القایی دریافتی از سیگنال وارده تحت تأثیر قرار گرفته است. طبیعت سیگنال‌ها مانع از به کارگیری هرگونه فیلتر پایین‌گذر، میان‌گذر یا بالاگذر می‌گردد. یک فیلتر حذفی که هر سیگنال 60 Hz را زورودی دستگاه حذف کند، طراحی نمایید. ممکن است فرض کنیم که در اصل دارای مقاومت معادل تونن بینهایت است. توپولوژی یک فیلتر حذف یا تله خوب در شکل ۱۶-۳۹ داده شده است، ولی خروجی این بار از ترکیب دو سر القاگر - خازن به جای مقاومت گرفته شده است.

۷۱



طراحی موردی بحث را در بخش کاربردهای عملی کامل کنید. (الف) با طراحی یک طبقه میانی طرح را کامل نمایید. (ب) پاسخ فرکانس مدار خود را با تغییر مقاومت پسخورد بین مقاومت‌های حداقل شبیه‌سازی نمایید.

علی‌رغم این‌که پاسخ صوتی انسان در حدود 20 Hz تا 20 kHz پذیرفته شده است، ولی عرض باند پسیاری از سیستم‌های تلفنی به 3 kHz محدود است. مدار فیلتری طراحی کنید که عرض باند مکالمه 20 kHz را به 3 kHz بینی عرض باند مکالمه تلفنی تبدیل کند. ورودی میکروفونی است با حداقل و لتاژ 150 mV و اساساً مقاومت سری صفر است. خروجی نیز یک بلندگوی 8 \Omega می‌باشد. مکالمه باید حداقل با ضریب 10 تقویت شود. طرح را شبیه‌سازی PSpice تست نمایید.

۷۰. مداری طراحی کنید تا مؤلفه‌های 50 nHz را از یک سیگنال آنتن حذف نماید که در آن n عددی صحیح بین 1 و 4 است. توپولوژی یک

فرکانس صوتی یک دلفین از حدود 250 Hz تا 150 kHz می‌باشد. در ارتباطات اجتماعی آن‌ها فرکانس‌های 50 Hz تا 50 kHz به کار می‌بندند و تقههای با فرکانس‌های بالای 40 kHz در شناخت موقعیت براساس برگشت صدا به کار می‌روند. مدار تقویت کننده‌ای صراحی کنید که مکالمه جمعی از دلفین‌ها را تقویت کند. می‌توان یک میکروفون را با یک منبع ولتاژ سینوسی با حداقل دامنه کمتر از 15 mV که با مقاومت Ω 1 سری است مدل سازی کرد، ولتاژ انتقالی به گوشی باید در حدود 7 V حداقل باشد.

مدار فیلتری طراحی کنید که محدوده کامل فرکانس‌های صوتی به گوش انسان را حذف کند 20 Hz تا 20 kHz (۲۰)، ولی سیگنال‌هی بالاتر و پایین‌تر از آن عبور کند. با PSpice طرح خود را تست کنید. یک مدار فیلتر طراحی نمایید تا هر سیگنالی بزرگ‌تر یا برابر با 1 kHz را حذف نماید. طرح خود را با PSpice تست کنید.

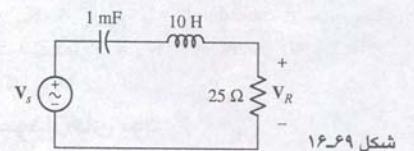
یک میکروفون که به فرکانس‌های بالا خیلی حساس است، برای انواع خرابی‌های موتور جت به کار رفته است ولی متأسفانه بعضی از پارازیت‌های فرکانس پایین‌تر از سیستم‌های هیدرولیک پرهای و شهپر نیز دریافت می‌نماید و درنتجه اعلام خطرهای غلط را موجب می‌شود. مدار فیلتری برای حذف سیگنال‌های پارازیت طراحی کنید ضمن این‌که فرکانس‌های بالا را با ضریب 100 تقویت می‌کند سیگنال فرکانس پایین، حداقل انرژی را در حدود 20 Hz دارد و در 1 kHz به کمتر از 1% افت می‌کند. سیگنال‌های خرابی موتور در حدود 25 kHz است.

۶۴

فرکانس صوتی یک مشخص کنید. (ج) مقادیر دقیق $H(j\omega)$ را برای هر فرکانس در بخش (ب) به دست آورید.

۶۵. (الف) منحنی اندازه بود را برای تابع تبدیل $H(s) = 1 + 20/s + 400/s^2$ مقدار دقیق ω را برای $H(j\omega)$ به دست آورید. (ب) منحنی بود را متناسب نمایید. (ج) با متلب صحت منحنی بود را تحقیق کنید.

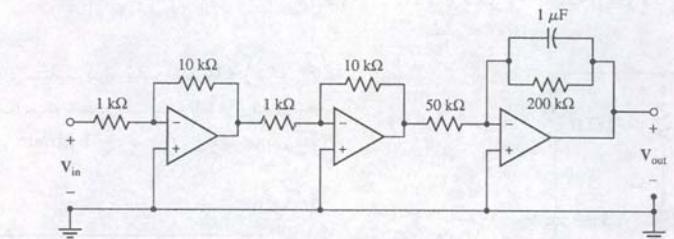
۶۶. (الف) V_S / V_R را برای مدار شکل ۱۶-۶۹ پیدا کنید. (ب) منحنی اندازه و فاز را برای $H(s)$ رسم نمایید. (ج) مقادیر دقیق H_{dB} و $H(j\omega)$ را در rad/s به دست آورید.



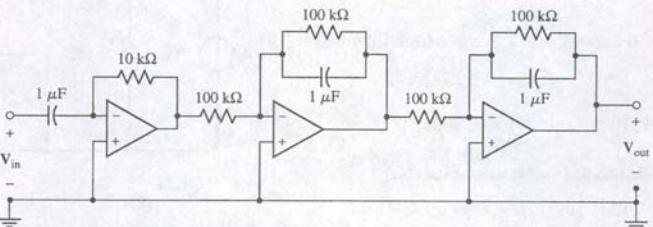
شکل ۱۶-۶۹

۶۷. منحنی اندازه بود را برای تابع تبدیل $H(s) = V_{out} / V_{in}$ در شبکه شکل ۱۶-۷۱ رسم کنید. (ب) برای شکله شکل ۱۶-۷۱، (الف) $H(s)$ را بسازید. (ب)

منحنی اندازه بود را برای H_{dB} رسم کنید. (ج) منحنی فاز بود $H(j\omega)$ را ترسیم نمایید.



شکل ۱۶-۷۰



شکل ۱۶-۷۱

فصل هفدهم

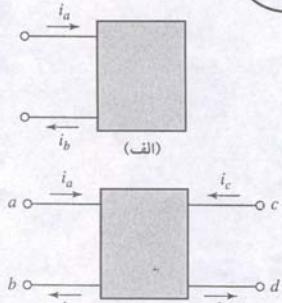
شبکه‌های دو درگاهی

مفاهیم کلیدی

مفاهیم کلیدی	داری با دو زوج پایانه مثلاً یک جفت پایانه ورودی و یک جفت پایانه خروجی، بلوک ساختاری مهمی در سیستم‌های الکترونیکی، مخابراتی، کنترل خودکار، سیستم‌های انتقال و وزیر است. در این سیستم‌ها یک سیگنال یا نرخ الکتریکی وارد پایانه‌ای ورودی می‌شود، شبکه بر روی آن کاری انجام می‌دهد و از پایانه‌های خروجی خارج می‌گردد. جفت پایانه خروجی به خوبی می‌تواند به جفت پایانه ورودی شبکه دیگر وصل شود. وقتی که مفهوم شبکه‌های معادل تونن و نورتن را در فصل ۵ مطالعه کردیم، گفته شد، همیشه لازم نیست که رای کار با مدار جزئیات همه بخش‌های آن را بدانیم، در اینجا این مفهوم را تعمیم داده ی‌گوییم که حتی دانستن کار درونی مدار لزومی ندارد. با تنها آگاهی از خطی بودن مدار و وابسی در اندازه‌گیری و لذت‌ها و جریان، به زودی خواهیم دید که می‌توان چنین شبکه‌ای را با جموعه‌ای از پارامترها مشخص کرد و این مشخصات اجازه می‌دهند واکنش شبکه به دیگر شبکه‌ها پیش‌بینی گردد.
پارامترهای ادمیتانس (y)	
پارامترهای امپدانس (z)	
پارامترهای هیبرید (h)	
پارامترهای انتقال (t)	
روش‌های تبدیل پارامترهای z, y, h و t	
روش‌های تحلیل مدار با استفاده از شبکه‌ها	

مقدمه

که جفت پایانه که از آن سیگنال ممکن است وارد شبکه و یا از آن خارج شود را درگاه ۱ می‌نامند و شبکه‌ای که تنها یک جفت پایانه از این نوع دارد را شبکه یک درگاهی می‌خوانند. به بیچ یک از گره‌های داخلی یک درگاهی نمی‌توان چیزی وصل کرد. پس واضح است که در شبکه یک درگاه، i_a و i_b اند (شکل ۱۷-۱(الف) با یکدیگر برابرند. وقتی تعداد پایانه‌هایی از یک جفت بیشتر باشد، آن را شبکه چند درگاه می‌گویند. شبکه دو درگاهی که این فصل به آن اختصاص یافته در شکل ۱۷-۱(ب) ملاحظه می‌گردد. جریان‌های دو پایانه تشکیل دهنده هر درگاه با یکدیگر برابرند پس $i_a = i_c$ و $i_b = i_d$ اخواهد بود که در شکل ۱۷-۱(ب) نشان داده شده است. به شرطی می‌توان روش‌های این فصل را به کاربرد که منابع و بارها مستقیماً به دو سر هر پایانه وصل شوند. به عبارت دیگر هر درگاه می‌تواند به یک شبکه یک درگاه و یا به یک رگه از شبکه چند درگاه وصل شود. مثلاً هیچ وسیله‌ای را نمی‌توان به پایانه‌های a و c از شبکه و درگاه در شکل ۱۷-۱(ب) وصل کرد. اگر چنین کاری انجام دهیم باید برای تحلیل معادلات شن یا گرهی را بتویسیم.



شکل ۱۷-۱ (الف) یک شبکه یک درگاه. (ب) شبکه دو درگاه.

مثال ۱۷-۱

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{V \Delta Z}{\Delta_{11}} \quad (3)$$

امپدانس ورودی شبکه مقاومتی تک درگاه در شکل ۱۷-۳ را محاسبه کنید.
ابتدا چهار جریان مش را تخصیص داده و معادله مناظر مشها را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} V_1 &= 10I_1 - 10I_2 \\ 0 &= -10I_1 + 17I_2 - 2I_3 - 5I_4 \\ 0 &= -2I_2 + 7I_3 - I_4 \\ 0 &= -5I_2 - I_3 + 26I_4 \end{aligned}$$

آنگاه دترمینان مدار چنین است:

$$\Delta_Z = \begin{vmatrix} 10 & -10 & 0 & 0 \\ -10 & 17 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & 7 & -1 \\ 0 & -5 & -1 & 26 \end{vmatrix}$$

که برابر 9680Ω خواهد بود. با حذف اولین سطر و اولین ستون داریم:

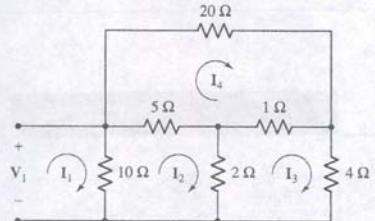
$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 17 & -2 & -5 \\ -2 & 7 & -1 \\ -5 & -1 & 26 \end{vmatrix} = 2778 \Omega^3$$

بنابراین معادله (۳) امپدانس ورودی زیر را تولید خواهد کرد:

$$Z_{in} = \frac{9680}{2778} = 3.485\Omega$$

امپدانس ورودی شبکه شکل ۱۷-۴ را پیدا کنید به شرطی که با جدا کردن پایانهای به یک شبکه تک درگاه تبدیل شود. (الف) در a و a' , (ب) در b و b' و (ج) در c و c' .
جواب: 9.47Ω , 9.47Ω , 10.63Ω , 7.58Ω .

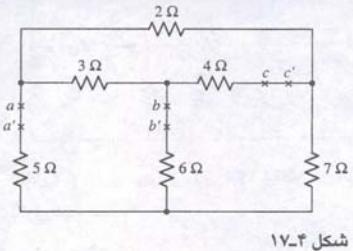
برای مرور خلاصه‌ای بر قانون کرامر در حل سیستم معادلات همزمان به پیوست (۲) مراجعه کنید.



شکل ۱۷-۳ مثالی از یک شبکه یک درگاهی با عناصر فقط مقاومتی.

تمرین

مثال ۱۷-۲



شکل ۱۷-۴

امپدانس ورودی شبکه شکل ۱۷-۴ را بایابید.

چهار معادله بر حسب جریان مش نوشته شده‌اند:

$$\begin{aligned} 10I_1 - 10I_2 &= V_1 \\ -10I_1 + 17I_2 - 2I_3 - 5I_4 &= 0 \\ -2I_2 + 7I_3 - I_4 &= 0 \\ I_4 = -0.5I_a &= -0.5(I_4 - I_3) \end{aligned}$$

یا

$$-0.5I_3 + 1.5I_4 = 0$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \Delta_Z &= \begin{vmatrix} 10 & -10 & 0 & 0 \\ -10 & 17 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1.5 \end{vmatrix} = 590 \Omega^3 \\ \Delta_{11} &= \begin{vmatrix} 17 & -2 & -5 \\ -2 & 7 & -1 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{vmatrix} = 159 \Omega^2 \end{aligned}$$

در حالی‌که

شکل ۱۷-۵ مثالی از یک شبکه یک درگاهی با منبع وابسته.

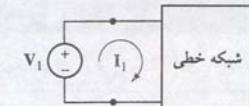
در روش‌های خاصی از تحلیل که برای شبکه‌های دورگاه معرفی شده است تأکید اصلی بر روابط جریان و ولتاژ پایانه‌های شبکه است و به طبیعت جریان‌ها و ولتاژ‌های داخل شبکه توجهی نمی‌شود. هدف از بررسی مقدماتی آشنایی با تعادل از پارامترهای مهم و کاربرد آن‌ها در ساده‌سازی ساماندهی تحلیل شبکه دورگاه خطی است.

بعضی از مطالعات اولیه شبکه‌های یک بازو درگاهی و علامت اختصاری دترمینانها که در پیوست ۲ آورده شده است مطالعه شبکه‌های یک و دورگاه را ساده‌تر می‌کند. بنابراین اگر مجموعه معادلات حلقه را برای شبکه غیرفعال بنویسیم، داریم:

$$\begin{aligned} Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + Z_{13}I_3 + \dots + Z_{1N}I_N &= V_1 \\ Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + Z_{23}I_3 + \dots + Z_{2N}I_N &= V_2 \\ Z_{31}I_1 + Z_{32}I_2 + Z_{33}I_3 + \dots + Z_{3N}I_N &= V_3 \\ \dots & \\ Z_{N1}I_1 + Z_{N2}I_2 + Z_{N3}I_3 + \dots + Z_{NN}I_N &= V_N \end{aligned} \quad (1)$$

در این صورت ضربی هر جریان، امپدانس (Z_{ij}) خواهد بود و دترمینان مدار یا دترمینان ضرایب چنین است:

$$\Delta_Z = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & \dots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & \dots & Z_{2N} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & \dots & Z_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & Z_{N3} & \dots & Z_{NN} \end{vmatrix} \quad (2)$$



شکل ۱۷-۲ یک منبع ولتاژ ایده‌آل V_1 به یک درگاه شبکه یک درگاهی که منابع مستقل ندارد وصل است: $Z_{in} = \Delta_Z / \Delta_{11}$

که در آن N حلقه فرض شده است و جریان‌ها به ترتیب در اندیس‌ها ظاهر شده‌اند و ترتیب معادلات نیز همان ترتیب جریان‌هاست. همچنین فرض می‌شود KVL طوری اعمال شود که علامت هر جمله (Z_{ij}) مثبت باشد. علامت هر Z_{ij} ($i \neq j$) با جملات متقابل بسته به جهات جریان I_i و I_j ممکن است مثبت یا منفی باشد. اگر منبع وابسته‌ای وجود داشته باشد، ممکن است بعضی از ضرایب در معادلات حلقه مقاومت یا امپدانس نباشند. با این وجود باز هم دترمینان مدار را Δ_Z می‌خواهیم.

با استفاده از نماد معرفی شده (در پیوست ۲) می‌توان امپدانس نقطه وروودی یا تحریک را در پایانه‌های شبکه تک درگاهی به صورت جمع و جوری نوشت. اگر یکی از درگاه‌های شبکه دو درگاهی به یک امپدانس ختم شود، بازم این روش قابل استفاده است. امپدانس می‌تواند مدار اتصال کوتاه یا مدار باز باشد.

اکنون فرض کنید که شبکه تک درگاه در شکل ۱۷-۲ کلایه عنصر غیرفعال و منابع وابسته تشکیل شده باشد. خطی بودن نیز از مفروضات است. یک منبع ولتاژ V_1 به درگاه وصل است و جریان منبع نیز در حلقه ۱ تصریح شده است. با روش کرامر، داریم:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & Z_{12} & Z_{13} & \dots & Z_{1N} \\ 0 & Z_{22} & Z_{23} & \dots & Z_{2N} \\ 0 & Z_{32} & Z_{33} & \dots & Z_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & Z_{N2} & Z_{N3} & \dots & Z_{NN} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & \dots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & \dots & Z_{2N} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & \dots & Z_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & Z_{N3} & \dots & Z_{NN} \end{vmatrix}}$$

با به صورت جمع و جور تر:

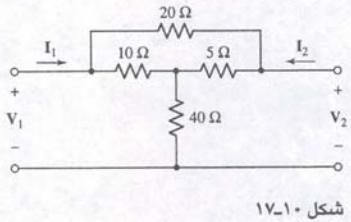
$$I_1 = \frac{V_1 \Delta_{11}}{\Delta_Z}$$

ین معادلات با معادلات (۱۴) و (۱۵) یکی بوده و می‌توان چهار پارامتر y را از آنها مستقیماً خواند.

تمرین

۱۷-۳ با عامل مناسب منابع ۱۷V و مدارهای اتصال کوتاه به مدار شکل ۱۷-۱۰ مطلوب است (الف)، y_{11} ، y_{21} ، y_{12} و y_{22} (د).

$$\text{جواب: } S = 0.1192 - 0.1115 V_1 + 0.1269 V_2$$



شکل ۱۷-۱۰

طورکلی وقتی که فقط یک پارامتر موردنظر باشد، استفاده از معادلات (۱۰)، (۱۱)، (۱۲) و (۱۳) ساده‌تر است. ولی اگر همه آن‌ها را خواسته بشیم، بهتر است V_1 و V_2 را به گره‌های ورودی و خروجی نسبت دهیم تا دیگر ولتاژهای گره - مرجع در هر گره داخلی تعریف شود. سپس به یافتن آن‌ها ادامه دهیم.

برای این‌که بینیم با این سیستم معادلات چه می‌توان کرد، باید هر درگاه را به یک شبکه یک درگاهی بینیم. مثال ۱۷-۴ در شکل ۱۷-۱۱ یک منبع جریان عملی متصل به درگاه ورودی یک را بر مقاومتی را به درگاه خروجی نشان می‌دهد. اکنون باید رابطه‌ای بین V_1 و I_1 و I_2 و مسئله ز شبکه دو درگاه وجود داشته باشد. این رابطه باید بتواند به تهیی از این مدار بپرسنی تعیین شود. اگر در ورودی KCL را اعمال کنیم داریم:

$$I_1 = 15 - 0.1V_1$$

نانون اهم در خروجی را می‌نویسیم:

$$I_2 = -0.25V_2$$

ز جایگزینی این عبارات برای I_1 و I_2 در معادلات (۱۴) و (۱۵) داریم:

$$15 = 0.4V_1 - 0.1V_2$$

$$0 = -0.1V_1 + 0.4V_2$$

از آن‌ها نتیجه می‌شود:

$$V_1 = 40 \text{ V} \quad V_2 = 10 \text{ V}$$

جریان‌های ورودی و خروجی هم به آسانی بدست می‌آیند:

$$I_1 = 11 \text{ A} \quad I_2 = -2.5 \text{ A}$$

به این ترتیب مشخصات کامل پایانه‌ها در این مدار دو درگاهی مقاومتی معلوم شد. مزایای تحلیل دو درگاه در این مثال ساده به خوبی نمایان نیست. ولی اگر پارامترهای y را شبکه دو درگاه پیچیده‌تری اعمال شود، رفتار دو درگاه برای شرایط متفاوت به راحتی شخص می‌گردد. برای این کار کافی است که رابطه V_1 و I_1 در ورودی و رابطه V_2 و I_2 را در خروجی مشخص کنیم.

در مثال فوق دیدیم که y_{12} و y_{21} بـ ۰.۱S بودند. می‌توان نشان داد که در شبکه ۱۷-۱۱ میدانس‌های Z_A ، Z_B و Z_C را قرار دهیم باز هم این برابری برقرار است. برای این‌که تحت سرایط خاصی $y_{21} = y_{12}$ شود تاحدی مشکل است ولی استفاده از نمادهای دترمینان کار را کمی ساده می‌کند. بگذارید بینیم آیا روابط مربوط به معادلات (۱۰) تا (۱۲) را می‌توان رحسب دترمینان امیدانس و کهاد آن‌ها نشان داد.

$$y_{12} = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{V_1=0} \quad (11)$$

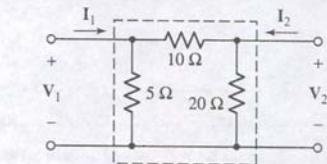
$$y_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{V_1=0} \quad (13)$$

$$y_{11} = \frac{I_1}{V_1} \Big|_{V_2=0} \quad (10)$$

$$y_{21} = \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2=0} \quad (12)$$

چون هر پارامتر ادمیتانسی است که از اتصال کوتاه‌شدن مدار درگاه ورودی یا خروجی بدست می‌آید، پارامترهای لرا پارامترهای ادمیتانس اتصال کوتاه می‌خوانند. نام اختصاصی y_{11} ادمیتانس ورودی اتصال کوتاه، y_{22} ادمیتانس خروجی اتصال کوتاه و y_{12} و y_{21} ادمیتانس‌های انتقالی اتصال کوتاه گویند.

مثال ۱۷-۴



شکل ۱۷-۹ شبکه دو درگاه مقاومتی.

چهار پارامتر ادمیتانس اتصال کوتاه را برای مدار دو درگاه مقاومتی شکل ۱۷-۹ پیدا کنید. مقدار پارامترها به سادگی با اعمال معادلات (۱۰) تا (۱۳) به دست می‌آیند که ما مستقیماً با تعریف معادلات (۵) و (۶) به دست آورده‌یم. برای تعیین y_{11} ، خروجی را اتصال کوتاه و نسبت I_1 به V_1 برآورده‌یم. این کار با $V_1 = 1V$ و سپس $I_1 = I$ برابر $y_{11} = 0.3A$ به دست می‌آید. با بررسی شکل ۱۷-۶ (الف) واضح است که اعمال $V_1 = 1V$ به ورودی و اتصال کوتاه خروجی موجب تولید جریان $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} = 0.3A$ باشد. پس این ترتیب

$$y_{11} = 0.3 \text{ S}$$

برای یافتن y_{12} ، این بار پایانه‌های ورودی را اتصال کوتاه می‌کنیم و به پایانه‌های خروجی V_1 اعمال می‌نماییم. جریان ورودی در مدار اتصال کوتاه جاری می‌شود و برابر $A = -\frac{1}{10} \text{ A}$ می‌باشد. پس:

$$y_{12} = -0.1 \text{ S}$$

باروشه مشابه:

$$y_{12} = -0.1 \text{ S} \quad y_{22} = 0.15 \text{ S}$$

پس معادلات توصیف مدار در درگاه بر حسب پارامترهای ادمیتانس چنین است:

$$I_1 = 0.3V_1 - 0.1V_2 \quad (14)$$

$$I_2 = -0.1V_1 + 0.15V_2 \quad (15)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.1 \\ -0.1 & 0.15 \end{bmatrix} \quad \text{همه بر حسب (S)}$$

البته لازم نیست این پارامترها را یک‌به‌یک با معادلات (۱۰) تا (۱۳) بدست آوریم. می‌توان آن‌ها را همزمان بدست آورد.

مثال ۱۷-۵

ولتاژهای گرهی V_1 و V_2 را در مدار دو درگاه شکل ۱۷-۹ تخصیص داده و عباراتی برای I_2 و I_1 بر حسب آن‌ها بنویسید.

داریم:

$$I_1 = \frac{V_1}{5} + \frac{V_1 - V_2}{10} = 0.3V_1 - 0.1V_2$$

و

$$I_2 = \frac{V_2 - V_1}{10} + \frac{V_2}{20} = -0.1V_1 + 0.15V_2$$

برای نشان دادن تساوی این دو کهاد، ابتدا سطرها و ستون‌های یکی از آن‌ها مثلاً Δ_{21} را عوض می‌کنیم. صحت این عمل در تمام کتب جبر دانشگاهی اثبات شده است. سپس هر امپدانس مقابله Z_{jj} را با Z_{ji} عوض می‌کنیم. پس فارم دهیم $Z_{21} = Z_{23} = Z_{32} = Z_{12}$ و غیره.

برای سه عنصر غیرفعال مقاومت، خازن و القاگر و نیز القا مقابله، سرابری z_{ij} و z_{ji} کاملاً واضح است. این مطلب برای هر آنچه که بتواند در شبکه دو درگاه قرار گیرد صحت ندارد. خصوصاً برای منبع ولتاژ و نیز ژیتراتور که مدل مفیدی برای عنصر اثر مال است و برای قطعات هدایت‌گری که در آن‌ها فرآیند وجود دارد، این صحبت درست نیست. ژیتراتور در یک محدوده باریکی از فرکانس، برای سینکالی که از خروجی به ورودی می‌رود نسبت به حالتی که از ورودی به خروجی برود، 180° اختلاف فاز بیشتر تولید می‌نماید و بنابراین $y_{21} = -y_{12}$. نوع متداول عنصر غیرفعال که به نابرابری Z_{jj} و Z_{ji} منجر می‌گردد، یک عنصر غیرخطی رامی توان نام برد. هر وسیله‌ای که در آن $Z_{jj} = Z_{ji}$ باشد، عنصر دوطرفه یادوسویه خوانده می‌شود و مداری که تنها از این عناصر تشکیل شود مدار دوطرفه نام دارد. بنابراین نشان دادیم که از خصوصیات مهم مدار دو درگاه دو طرفه این است که:

$$y_{12} = y_{21}$$

برای قدرشناصی از این خاصیت آن را با عنوان قضیه مقابله زیر بیان می‌کنیم:

در هر شبکه دوطرفه خطی غیرفعال، اگر یک منبع ولتاژ V_x در شاخه x ، پاسخ جریان I_y را در شاخه y ایجاد کند آنگاه حذف منبع ولتاژ از شاخه x و نسبت آن در شاخه x به جریان I_y را در شاخه x به وجود ممی‌آورد.

اگر با دترمینان ادمیتانس مدار کار می‌کنیم و ثابت می‌نماییم که $\Delta_{21} = \Delta_{12}$ از دترمینان ادمیتانس Δ_2 باهم برابرند، آنگاه دوگان قضیه مقابله به صورت زیر بیان می‌گردد:

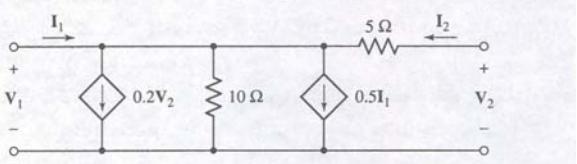
در هر شبکه دوطرفه خطی غیرفعال، اگر یک منبع جریان I_x بین دو گره x و x' ، پاسخ ولتاژ V_y را بین دو گره y و y' تولید کند، آنگاه حذف منبع جریان از گره‌های x و x' و نسبت آن بین گره‌های y و y' پاسخ ولتاژ V_y را بین گره‌های x و x' به وجود ممی‌آورد.

در بخش بعد بر مدارهای دو درگاه حاوی منابع ولسته تأکید خواهد شد.

۱۷-۴ در مدار شکل ۱۷.۱۰ $\Delta_{21} = V_1 - V_2$ منابع جریان ایده‌آل هستند. ولتاژهای گره V_1 را در ورودی، V_2 را در خروجی و V_x را از گره وسط به گره مرجع نسبت دهید. سه معادله گرهی بتوانید V_x حذف نمایید تا دو معادله باقی بماند و سپس این معادلات را به شکل معادلات (۵) و (۶) مرتب کنید تا هر چهار پارامتر Δ_{21} را روی معادلات قابل قرائت باشند.

برای مدار دو درگاهی شکل ۱۷.۱۲، $y_{12} = y_{21}$ برابر است.

$$\text{جواب ۱۷-۴:} \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ -0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \quad \text{جواب ۱۷-۵:} \begin{bmatrix} 0.1192 & -0.1115 \\ -0.1115 & 0.1269 \end{bmatrix} \quad (\text{همگی به } S \text{ به})$$



چون با خود مدار دو درگاه و نه با شبکه‌های متصل به آن‌ها کار داریم، V_1 و V_2 را دو منبع ولتاژ ایده‌آل درنظر می‌گیریم. معادله (۱۰) را با $V_2 = 0$ (اتصال کوتاه کردن خروجی) و یافتن ادمیتانس ورودی اعمال می‌کنیم. دراین صورت شبکه به یک شبکه تک‌درگاهی بدل شده است و امپدانس ورودی آن هم در بخش ۱۷-۱ پیدا شد. حلقة ۱ را جریان آن حلقة می‌نامیم. پس Δ_{21} را هم جریان حلقة ۲ درنظر می‌گیریم و بقیه جریان‌های حلقة‌ای را هم به هر نحو مناسب انتخاب می‌کنیم. پس

$$Z_{in} \Big|_{V_2=0} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{11}}$$

و بنابراین:

$$y_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_Z}$$

به طور مشابه

$$y_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_Z}$$

برای یافتن y_{12} ، بگذارید $V_1 = 0$ باشد و سپس I_1 را به صورت تابعی از V_2 بباید. خواهیم دید که I_1 با نسبت زیر داده می‌شود:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & Z_{12} & \dots & Z_{1N} \\ -V_2 & Z_{22} & \dots & Z_{2N} \\ 0 & Z_{32} & \dots & Z_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & Z_{N2} & \dots & Z_{NN} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2N} \\ Z_{31} & Z_{32} & \dots & Z_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \dots & Z_{NN} \end{vmatrix}}$$

پس:

$$I_1 = -\frac{(-V_2)\Delta_{21}}{\Delta_Z}$$

$$y_{12} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_Z}$$

به طریقی مشابه می‌توان نشان داد که:

$$y_{21} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_Z}$$

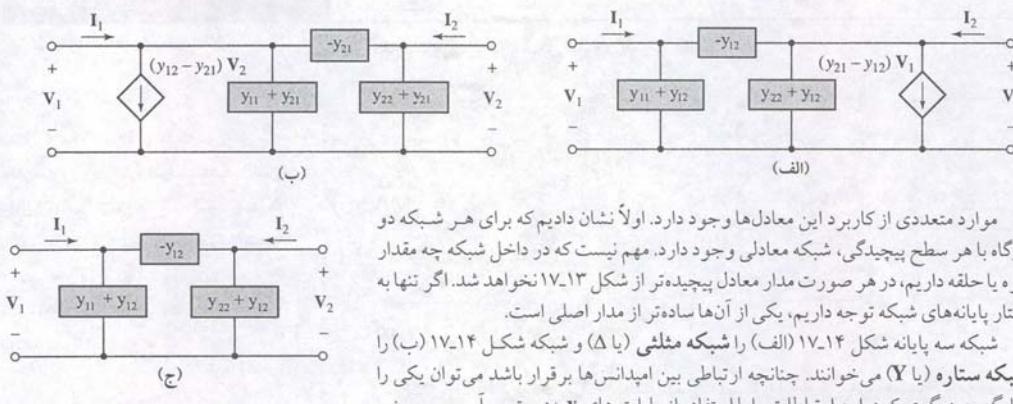
بنابراین برای y_{12} و y_{21} متوسط به برابری دو کهاد Δ_Z یعنی $y_{12} = \Delta_{21}$ و $y_{21} = \Delta_{12}$ است. این دو کهاد برابرند با:

$$\Delta_{21} = \begin{vmatrix} Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} & \dots & Z_{1N} \\ Z_{22} & Z_{33} & Z_{34} & \dots & Z_{3N} \\ Z_{42} & Z_{43} & Z_{44} & \dots & Z_{4N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{N2} & Z_{N3} & Z_{N4} & \dots & Z_{NN} \end{vmatrix}$$

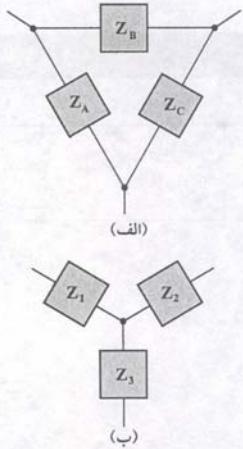
و

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} Z_{21} & Z_{23} & Z_{24} & \dots & Z_{2N} \\ Z_{31} & Z_{33} & Z_{34} & \dots & Z_{3N} \\ Z_{41} & Z_{43} & Z_{44} & \dots & Z_{4N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{N1} & Z_{N3} & Z_{N4} & \dots & Z_{NN} \end{vmatrix}$$

و



شکل ۱۷-۱۳ (الف) و (ب) دو درگاهی که با یک دودرگاهی خطی کلی معادلند. منبع وابسته در بخش (الف) به V_1 وابسته است و در بخش (ب) به V_2 بستگی دارد. (ج) مدار معادل برای شبکه دوسویه.



شکل ۱۷-۱۴ شبکه سه‌پایانه Δ (الف) و سه پایانه γ (ب) معادلند به شرطی که شش امپدانس شرایط تبدیل Δ - γ یا γ - Δ (T - π) معادلات (۲۰) را برآورده سازند.

خواستنده ممکن است این روابط را از فصل ۵ به خاطر بیاورد که در آن جا بدون توضیح ارائه گردید.

$$\begin{aligned} y_{11} &= \frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B} = \frac{1}{Z_1 + Z_2 Z_3 / (Z_2 Z_3)} + \\ y_{12} &= y_{21} = -\frac{1}{Z_B} = \frac{-Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 Z_3 Z_1} + \\ y_{22} &= \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_B} = \frac{1}{Z_2 + Z_1 Z_3 / (Z_1 Z_3)} + \end{aligned}$$

این معادلات برای Z_A , Z_2 , Z_1 و Z_C , Z_B , Z_3 بر حسب قابل حلند:

$$Z_A = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2} \quad (۲۰)$$

$$Z_B = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_3} \quad (۲۱)$$

$$Z_C = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_1} \quad (۲۲)$$

و یاروایت معکوس عبارتند از:

$$Z_1 = \frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad (۲۳)$$

$$Z_2 = \frac{Z_B Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad (۲۴)$$

$$Z_3 = \frac{Z_C Z_A}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad (۲۵)$$

این معادلات تبدیل بین شبکه‌های γ و Δ (با π - T) را به راحتی می‌سازند. در تبدیل از Δ به γ یعنی معادلات (۲۰) تا (۲۲)، ابتدا صورت مشترک آنها، که حاصل ضرب دو به دو امپدانس‌ها در Δ است را بدست می‌آوریم. آن‌گاه هر امپدانسی از تقسیم صورت بر عنصری از ستاره که با این امپدانس مثلث گره مشترک ندارند بدست می‌آید. بر عکس برای تبدیل Δ به γ ابتدا سه امپدانس‌حول مثلث را باهم جمع می‌کنیم. سپس حاصل ضرب دو امپدانسی که با عنصر موردنظر شبکه ستاره گره مشترک ندارند را بر این جمع تقسیم می‌نماییم. این تبدیلات غالباً در ساده کردن شبکه‌های غیرفعال به خصوص مقاومتی بسیار کاربرد دارد. به این ترتیب تحلیل گرهی یامش لزومی نخواهد داشت.

۱۷-۳ چند شبکه معادل

هنگام تحلیل مدارهای الکترونیک، معمولاً باید وسیله فعلی (و احتمالاً بعضی مدارهای غیرفعال همراه آن) را با یک مدار دو درگاه حاوی سه یا چهار امپدانس تعویض نمود. اعتبار مدار معادل ممکن است به سیگنال‌های کوچک، فرکانس خاص یا یک گستره خاص فرکانس محدود باشد. مدار معادل می‌تواند تقریب خطی یک مدار غیرخطی باشد. با این وجود اگر با مداری موافق شویم که حاوی تعدادی مقاومت، خازن، القاگر و مثلاً یک ترانزیستور 2N3823 باشد دیگر نمی‌توانیم مدار را با هر یک از تکنیک‌هایی که تابه‌حال دیده‌ایم، تحلیل کنیم. ابتدا باید ترانزیستور را درست مثل آن‌چه برای op amp در قابل op در قابل op عدیدیم با یک مدل خطی جایگزین نماییم. پارامترهای لا یک چنین مدلی را برای مدار دو درگاه که در فرکانس‌های بالا به کارمی‌رود، ارائه می‌نماید. مدل دیگری برای ترانزیستور در بخش ۱۷-۵ آمده است. دو معادله‌ای که پارامترهای ادمیتانس اتصال کوتاه را معین می‌کنند، یعنی:

$$I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \quad (۱۶)$$

$$I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2 \quad (۱۷)$$

که به یک جفت معادله گرهی برای مداری که حاوی دو گره غیرمرجعند شبیه است. اگر y_{12} و y_{21} به طور کلی نابرابر باشند تعیین مدار معادلی که منجر به معادلات (۱۶) و (۱۷) شوند کاری بس مشکل است. بهتر است به حقه کوچکی متولی شویم و کاری کنیم که دو معادله دارای ضرایب متقابل مساوی باشند. بگذارید تا جمله $y_{12}V_1$ (یعنی جمله‌ای که دوست داریم آن را در سمت راست بینیم) را به معادله (۱۷) اضافه و از آن کم کنیم:

$$I_2 = y_{12}V_1 + y_{22}V_2 + (y_{21} - y_{12})V_1 \quad (۱۸)$$

$$I_2 - (y_{21} - y_{12})V_1 = y_{12}V_1 + y_{22}V_2 \quad (۱۹)$$

اکنون سمت راست معادلات (۱۶) و (۱۹) تقارن مناسب مدارهای دوسویه را دارد. سمت چپ معادله (۱۹) را ممکن است به صورت جمع جبری دو منبع جریان تفسیر کرد که یکی منبع مستقل I_2 است که به گره 2 وارد می‌شود و دیگری منبع وابسته $(V_1 - y_{12}V_2)$ است که گره 2 را ترک می‌کند.

حال باید شبکه معادل را از معادلات (۱۶) و (۱۹) بسازیم. ابتدا گره مرتعنی تعریف می‌کنیم و سپس دو گره V_1 و V_2 را بر می‌گزینیم. از معادله (۱۶)، جریان گره 1 جاری می‌کنیم. بین گره 1 و 2 ادمیتانس متقابل (y_{12}) وجود دارد پس ادمیتانس (y_{12}) بین گره 1 و مرتعنی است با $V_2 = 0$ نسبت به V_1 ، برابر y_{11} است که باید هم چنین باشد. حال معادله (۱۹) را در نظر نگیریم. کاری می‌کنیم که جریان I_2 به گره دوم جاری شود و نیز جریان $V_1 - y_{12}V_2$ از گره خارج گردد. ملاحظه می‌شود که یک ادمیتانس (y_{12}) بین گره‌ها وجود دارد. پس باگذاشتن $(y_{12} + y_{22})$ بین گره 2 و مرتعنی دارای تکمیل می‌کنیم. مدار کامل در شکل ۱۷-۱۳ (الف) مشاهده می‌شود.

فرم دیگری از شبکه معادل با جمع و تغیریق y_{12} از معادله (۱۶) به دست می‌آید. این مدار معادل در شکل ۱۷-۱۳ (ب) مشاهده می‌شود. اگر مدار دو درگاه دو سویه باشد، آن‌گاه $y_{12} = 0$ بوده و هر یک از معادلهای مدار ساده y_{11} تبدیل می‌شوند. منبع وابسته حذف می‌شود، این مدار معادل جدید در شکل ۱۷-۱۳ (ج) مشاهده می‌شود.

مثال ۱۷-۶

متناظر با ادمیتانس مقاومت $10k\Omega$ است. به این ترتیب می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} y_{12} &= -\frac{1}{2000} & y_{11} &= \frac{1}{500} - y_{12} \\ y_{21} &= 0.0395 + y_{12} & y_{22} &= \frac{1}{10,000} - y_{12} \end{aligned}$$

آیا اطلاعات دیگری لازم است؟

با معادلاتی که نوشته شده‌اند می‌بینیم که پس از محاسبه y_{12} ، دیگر پارامترها هم ممکن است بدست آیند.

اقدام به حل.

با اعمال مقادیر به یک ماشین حساب، داریم:

$$y_{12} = -\frac{1}{2000} = -0.5 \text{ mS}$$

$$y_{11} = \frac{1}{500} - \left(-\frac{1}{2000}\right) = 2.5 \text{ mS}$$

$$y_{22} = \frac{1}{10,000} - \left(-\frac{1}{2000}\right) = 0.6 \text{ mS}$$

و

$$y_{21} = 0.0395 + \left(-\frac{1}{2000}\right) = 39 \text{ mS}$$

آن‌گاه معادلات زیر بدست می‌آیند:

$$I_1 = 2.5V_1 - 0.5V_2 \quad (26)$$

$$I_2 = 39V_1 + 0.6V_2 \quad (27)$$

که در آن‌ها واحدهای mA ، mV و $\text{k}\Omega$ با mS به کاررفته است.

صحت حل را تحقیق کنید. آیا پاسخ منطقی است؟

با نوشتمن مستقیم دو معادله گرفته از مدار داریم:

$$I_1 = \frac{V_1 - V_2}{2} + \frac{V_1}{0.5} \quad \text{یا} \quad I_1 = 2.5V_1 - 0.5V_2$$

و

$$-39.5V_1 + I_2 = \frac{V_2 - V_1}{2} + \frac{V_2}{10} \quad \text{یا} \quad I_2 = 39V_1 + 0.6V_2$$

که با معادلات (26) و (27) حاصل از پارامترهای y یکی است.

اکنون اجازه بدید تا معادلات (26) و (27) را تحت شرایط کاری مختلف شکل ۱۷-۱۶ پردازیم. شکل ۱۷-۱۶ یک شبکه دو درگاه است که در روی آن V_1 ، I_1 ، V_2 و I_2 مشخص شده است. در مدار هر قطعه نیز داده شده است.

$$I_1 = 1 \quad (\text{به ازای } V_1) \quad I_2 = -2V_2$$

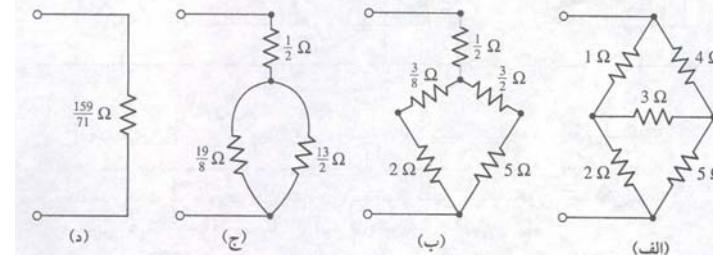
کنون چهار معادله و چهار مجهول V_1 ، V_2 ، I_1 و I_2 داریم. با جایگزینی روابط دو درگاه در معادلات (26) و (27) دو معادله‌ای که V_1 و V_2 مربوط می‌سازند بدست می‌آیند:

$$1 = 2.5V_1 - 0.5V_2 \quad 0 = 39V_1 + 2.6V_2$$

احل آن‌ها خواهیم داشت:

$$V_1 = 0.1V \quad V_2 = -1.5V \quad I_1 = 1 \text{ mA} \quad I_2 = 3 \text{ mA}$$

مقاومت ورودی مدار شکل ۱۷-۱۵ (الف) را باید.



شکل ۱۷-۱۵ (الف) شبکه مقاومتی که مقاومت ورودی اش خواسته شده. این مثال از فصل ۵ آورده شده است. (ب) Δ جایگزین شده بالایی با یک معادل Y است. (ج) و (د) ترکیبات سری و موازی مقاومت ورودی معادل Ω را $\frac{159}{71}$ به دست می‌دهد.

ابتدا در ۱۷-۱۵ (الف) تبدیل Δ به Y را ناجام می‌دهیم. مجموع سه مقاومت تشکیل دهنده Δ برابر است با $8\Omega = 1 + 4 + 3$. حاصل ضرب دو مقاومت متصل به گره بالایی $4 = 4\Omega^2 / 4 = 4\Omega$ است. بنابراین مقاومت فوکانی Y برابر $\frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Omega$ است. با تکرار این روند برای دو مقاومت دیگر، شبکه شکل ۱۷-۱۵ (ب) حاصل می‌شود.

آن‌گاه در گام بعدی ترکیبات سری-موازی را ناجام می‌دهیم تا به ترتیب شکل‌های ۱۷-۱۵ (ج) و (د) بدست آیند. بنابراین مقاومت ورودی مدار در شکل ۱۷-۱۵ (الف) برابر $\frac{159}{71} = 2.24\Omega$ حاصل می‌شود.

حال بگذرارید مسئله را همچون شکل ۱۷-۱۶ کمی مشکل‌تر کنیم. توجه دارید که مدار شامل یک منبع وابسته است و تبدیل Y - Δ امکان‌پذیر نیست.

مثال ۱۷-۷

مدار شکل ۱۷-۱۶ را می‌توان یک معادل خطی تقریبی از یک تقویت‌کننده ترانزیستوری دانست که در آن پایانه امپیتر گره پایینی، پایانه بیس گره ورودی بالایی و پایانه کلکتور نیز گره خروجی بالایی می‌باشد. یک مقاومت 2000Ω بین کلکتور و بیس به منظور کاربردی خاص بسته شده و این خود بر پیچیدگی تحلیل می‌افزاید. پارامترهای z را برای این مدار به دست آورید.

هدف مسئله را شناسایی کنید.

مالحظه می‌شود که ما با یک شبکه دو درگاه طرفیم و پارامترهای لاخواسته شده‌اند.

اطلاعات معلوم را جمع آوری نمایید.

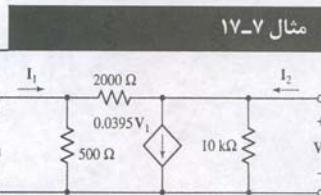
شکل ۱۷-۱۶ یک شبکه دو درگاه است که در روی آن V_1 ، I_1 ، V_2 و I_2 مشخص شده است و مدار هر قطعه نیز داده شده است.

ارائه طرح.

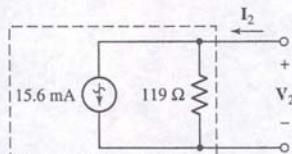
در مورد این مدار چندین روش وجود دارد. اگر آن را به صورت مدار معادل شکل ۱۷-۱۳ (الف) تصور کنیم، بلاfacسله ممکن است به فکر تهیه پارامترهای z بینیم. اگر فوراً معادل فوق به ذهن نیامد آن‌گاه پارامترهای z برای مدار دوگانه با اعمال روابط (۱۰) تا (۱۳) بدست می‌آیند. حتی ممکن است روش دو درگاه را فراموش کرده و مدار را مستقیماً تحلیل کنیم.

معادلات مناسب را بنویسید.

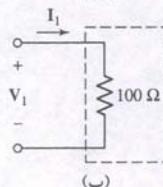
با کمی بررسی خواهیم دید که $y_{21} = -2k\Omega$ است، $y_{12} + y_{11} = 2k\Omega$ است، $y_{21} - y_{22} = 500\Omega$ می‌باشد، بهره منع جریان وابسته، متناظر با $y_{12} - y_{21}$ و بالاخره



شکل ۱۷-۱۶



(الف)



(ب)

شکل ۱۷-۱۷ (الف) معادل نورتن شبکه شکل ۱۷-۱۶ در سمت چپ پایانه‌های خروجی،
شبکه که در سمت راست پایانه‌های ورودی قرار دارد به شرطی که $I_2 = -2V_2$ باشد.

راه دیگر این است که ولتاژ مدار باز خروجی و جریان اتصال کوتاه خروجی را بیابیم. یعنی امپدانس توانن همان خروجی است:

$$Z_{out} = Z_{th} = -\frac{V_{2oc}}{I_{2sc}}$$

برای اجرای این روش ابتدا منبع مستقل رازنده می‌کنیم به نحوی که $I_1 = 1mA$ باشد و سپس برار راقطع می‌نماییم تا $0 = 2.5V_1 - 0.5V_2$ باشد. داریم:

$$0 = 2.5V_1 - 0.5V_2 \quad 0 = 39V_1 + 0.6V_2$$

و بنابراین:

$$V_{2oc} = -1.857 V$$

سپس در خروجی با اتصال کوتاه $0 = V_2$ را بایجاد می‌کنیم، تا $I_1 = 1mA$ باشد. آن‌گاه داریم:

$$I_1 = 1 = 2.5V_1 - 0 \quad I_2 = 39V_1 + 0$$

ولذا

$$I_{2sc} = 15.6 mA$$

با توجه به جهت V_2 و I_2 امپدانس خروجی توان را بدست می‌آوریم:

$$Z_{out} = -\frac{V_{2oc}}{I_{2sc}} = -\frac{-1.857}{15.6} = 0.1190 k\Omega$$

که همان نتیجه قبل است.

اکنون اطلاعات لازم، برای رسم معادل توانن یا نورتن در درگاه شکل ۱۷-۱۶

شکل ۱۷-۱۸ اتصال موازی دو شبکه دو درگاه. هنگامی که یک منبع جریان تحریک $I_1 = 100mA$ و بار 500Ω به آن وصل است، در اختیار داریم. بنابراین معادل نورتن تحریکی به بار باید حاوی منبع جریانی برابر با جریان اتصال کوتاه I_{2sc} و موازی با امپدانس خروجی باشد. این مدار معادل در شکل ۱۷-۱۷ (الف) مشاهده می‌شود.

همچنین معادل توانی که منبع ورودی $I_1 = 100mA$ می‌بینید همان امپدانس ورودی است که در شکل ۱۷-۱۷ (ب) ملاحظه می‌گردد.

قبل از اتمام بحث پارامترهای آن، باید سودمندی آن‌ها در توصیف اتصال موازی مدارهای دو درگاه، طبق شکل ۱۷-۱۸ را توضیح دهیم. هنگامی که برای اولین بار درگاه را در بخش ۱۷-۱ معرفی کردیم، گفتیم که جریان وارد به یک پایانه درگاه باید با جریان خارج شده از پایانه دیگر آن برابر باشد و نباید بین درگاه‌ها اتصال بیرونی وجود داشته باشد. آشکار است که اتصال

خروجی چنین تعریف می‌شود:

$$Z_{out} = V_2 |_{I_{2sc}=0} \quad R_L$$

بنابراین مقاومت بار را حذف می‌نماییم، در پایانه‌های خروجی $0 = 2.5V_1 - 0.5V_2$ را اعمال می‌کنیم (چون $V_1 = 7V$ و $V_2 = 5V$) و $R_L = 100\Omega$ را بدست می‌آوریم. با قراردادن این شرایط در معادلات (۲۶) و (۲۷) داریم:

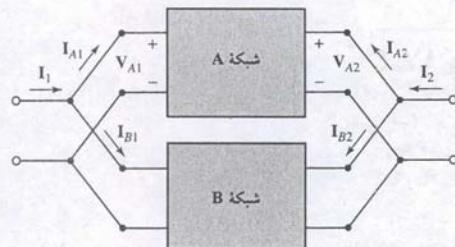
$$0 = 2.5V_1 - 0.5V_2 \quad 1 = 39V_1 + 0.6V_2$$

و از حل آن:

$$V_2 = 0.1190 V$$

و به این ترتیب:

$$Z_{out} = 0.1190 k\Omega$$



$$y = y_A + y_B$$

مقدار منبع ولتاژ وابسته $V_1 = 0.0395 V$ نمی‌تواند صفر باشد. به یاد می‌آوریم که هنگام

به دست آوردن امپدانس معادل توانن مداری که حاوی یک منبع وابسته همراه یک یا چند منبع مستقل است، باید منبع مستقل را با اتصال باز یا اتصال کوتاه عوض می‌کردیم ولی منابع وابسته را نمی‌کشیم. البته اگر جریان یا ولتاژ وابسته صفر باشد آن‌گاه خود منبع غیرفعال است.

اگر با چنین وضعیتی رویدرو شدیم، می‌توانیم آن را هم صفر کنیم. علاوه بر V_1 ، G_V ، G_I ، Z_{in} ، G_P ، G_V ، G_I ، Z_{in} ، G_P ، G_V ، G_I ، Z_{in} ، G_P ، G_V ، G_I ، Z_{in} است که برای یک آرایش مداری متفاوت تعیین خواهد شد.

امپدانس خروجی نام دیگری برای امپدانس توانن مدار معادل توانن از دید بار متصل به شبکه است. در این مدار که فرض کردیم با منبع جریان $I_1 = 100mA$ تحریک شده است، به جای این منبع مستقل یک اتصال باز هم قرار می‌دهیم، منبع وابسته را راه‌هایی کنیم و امپدانس ورودی دیده شده به سمت چپ خروجی را پس از حذف بار به دست می‌آوریم. بنابراین امپدانس

$$G_V = \frac{V_2}{V_1}$$

با جایگزینی مقادیر عددی خواهیم داشت:

$$G_V = -15$$

بهره جریان G_I به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$G_I = \frac{I_2}{I_1}$$

پس $3 = G_I$.

اکنون باید بهره G_P توان را با فرض منبع سینوسی تعریف و محاسبه کنیم. داریم:

$$G_P = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{\text{Re}[-\frac{1}{2}V_2 I_2^*]}{\text{Re}[\frac{1}{2}V_1 I_1^*]} = 45$$

این شبکه را می‌توان تقویت کننده جریان، ولتاژ یا توان نامید که در همه آن‌ها بهره بزرگ‌تر از واحد است. اگر مقاومت $2k\Omega$ حذف شود، بهره توان به ۳۵۴ افزایش می‌باید. برای این‌که انتقال توان داده شده به درگاه ورودی و دریافتی از درگاه خروجی را به حداقل برسانیم باید امپدانس ورودی و خروجی تقویت کننده را بدانیم. امپدانس ورودی Z_{in} را به صورت نسبت Z_{in}/V_1 تعریف می‌کنیم، یعنی:

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = 0.1 k\Omega$$

این امپدانس است که در برای منبع قرار داشته و بار اعمال شده متصل به خروجی هم 500Ω است (اگر خروجی اتصال کوتاه‌گردد، امپدانس ورودی لزوماً باید در $\frac{1}{y_{11}} = 400\Omega$ باشد). باید توجه داشت که نمی‌توان امپدانس ورودی را باکشتن هر منبع و مقاومت داخلی اش تعیین کرد

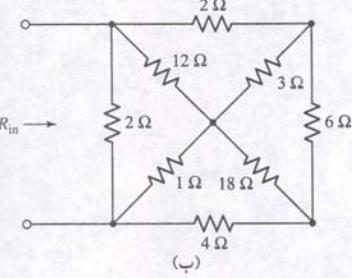
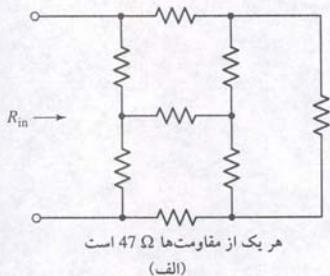
و سپس مقاومت‌ها یا هدایت‌ها را با هم ترکیب نمود. در مدار مورد بحث چنین کاری ممکن است که 416Ω می‌گردد. البته خطای این جانشی می‌شود که با آن مثل منبع مستقل، رفتار شده است. اگر تصور کنیم که امپدانس ورودی از لحاظ عددی به علت اعمال یک جریان ورودی I_1 با ولتاژ ورودی برابر است، با اعمال این جریان یک ولتاژ ورودی V_1 حاصل می‌شود

مقدار منبع ولتاژ وابسته $V_1 = 0.0395 V$ نمی‌تواند صفر باشد. به یاد می‌آوریم که هنگام به دست آوردن امپدانس معادل توانن مداری که حاوی یک منبع وابسته همراه یک یا چند منبع

مستقل است، باید منبع مستقل را با اتصال باز یا اتصال کوتاه عوض می‌کردیم ولی منابع وابسته را نمی‌کشیم. البته اگر جریان یا ولتاژ وابسته صفر باشد آن‌گاه خود منبع غیرفعال است.

اگر با چنین وضعیتی رویدرو شدیم، می‌توانیم آن را هم صفر کنیم. علاوه بر V_1 ، G_V ، G_I ، Z_{in} ، G_P ، G_V ، G_I ، Z_{in} ، G_P ، G_V ، G_I ، Z_{in} ، G_P ، G_V ، G_I ، Z_{in} است که برای یک آرایش مداری متفاوت تعیین خواهد شد.

امپدانس خروجی نام دیگری برای امپدانس توانن مدار معادل توانن از دید بار متصل به شبکه است. در این مدار که فرض کردیم با منبع جریان $I_1 = 100mA$ تحریک شده است، به جای این منبع مستقل یک اتصال باز هم قرار می‌دهیم، منبع وابسته را راه‌هایی کنیم و امپدانس ورودی دیده شده به سمت چپ خروجی را پس از حذف بار به دست می‌آوریم. بنابراین امپدانس



البته در استفاده از این معادلات لزومی ندارد که I_1 و I_2 منابع جریان و یا V_1 و V_2 منابع ولتاژ باشند. به طور کلی می‌توان هر شبکه‌ای را به ورودی و خروجی این شبکه دو درگاه وصل کرد. پس از تویشن معادلات معمولأً چنین تصور می‌شود که V_1 و V_2 کمیت مفروض یا متغیرهای مستقل و I_1 و I_2 مجهولات یا متغیرهای وابسته‌اند.

این چهار کمیت را به شش طریق می‌توان به هم ربط داد که هر کدام یک دسته پارامتر را مشخص می‌کند. مانچهار روش از این شش سیستم پارامتر را مطالعه می‌کنیم. آموختن زدن ترین توصیف پارامترهای Z که به وسیله معادلات (۲۹) و (۳۰) تعریف شده‌اند، با صفرکردن هر یک از جریان‌ها به دست می‌آید. پس:

$$\begin{aligned} z_{12} &= \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} & z_{11} &= \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} \\ z_{22} &= \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} & z_{21} &= \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} \end{aligned}$$

چون صفرشدن جریان از قطع پایانه حاصل می‌گردد، پارامترهای Z را به نام پارامترهای امپدانس مدار باز می‌شناسند. با حل معادلات (۲۹) و (۳۰) برای I_1 و I_2 می‌توان این پارامترها را با پارامترهای ادمیتانس اتصال کوتاه مرتبط کرد:

$$I_1 = \begin{vmatrix} V_1 & z_{12} \\ V_2 & z_{22} \\ \hline z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{vmatrix}$$

با

$$I_1 = \left(\frac{z_{22}}{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}} \right) V_1 - \left(\frac{z_{12}}{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}} \right) V_2$$

با استفاده از نماد تر مینان و توجه به این که زیرنویس Z کوچک باشد، فرض می‌کنیم $0 \neq \Delta_Z$ روابط زیر را به دست می‌آوریم:

$$y_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_Z} = \frac{z_{22}}{\Delta_Z} \quad y_{12} = -\frac{\Delta_{21}}{\Delta_Z} = -\frac{z_{12}}{\Delta_Z}$$

راز حل برای I_2 داریم:

$$y_{21} = -\frac{\Delta_{12}}{\Delta_Z} = \frac{z_{21}}{\Delta_Z} \quad y_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_Z} = \frac{z_{11}}{\Delta_Z}$$

به روشنی مشاهده، پارامترهای Z را می‌توان بر حسب پارامترهای ادمیتانس y نوشت. تبدیل‌هایی ز این نوع بین سیستم پارامترهای مختلف امکان‌پذیر است و فرمول‌های مفیدی هم در این اساستا حاصل می‌گردد. تبدیلات بین پارامترهای y و z و h و t که در بخش‌های بعد آمده در جدول ۱۷-۱ به عنوان مرجع ارائه شده است. اگر شبکه دو درگاه، دوسویه هم باشد، قضیه تقابل تعییر است و به آسانی می‌توان نشان داد که $z_{12} = z_{21}$.

دوباره مدارهای معادل را از معادلات (۲۹) و (۳۰) می‌توان به دست آورد. ایجاد آن‌ها با جمع و تفریق $z_{12}I_1$ در معادله (۲۹) یا $z_{21}I_2$ در معادله (۳۰) امکان‌پذیر است. هر یک از این مدارهای معادل دارای یک منبع ولتاژ وابسته است.

و برای
 $V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2$
یا

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = ZI = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

موازی شکل ۱۷-۱۸ این قانون را نقض می‌نماید. با این وجود اگر در هر یک از مدارهای دو درگاه گره مرجع بین درگاه ورودی و خروجی مشترک باشد و اگر دو درگاهی ها موازی باشند به نحوی که گره مشترکی هم داشته باشند، پس از اتصال هم درگاه باقی می‌مانند. پس در شبکه داریم:

$$I_A = y_A V_A \quad (ک)$$

$$I_A = \begin{bmatrix} I_{A1} \\ I_{A2} \end{bmatrix} \quad و \quad V_A = \begin{bmatrix} V_{A1} \\ V_{A2} \end{bmatrix}$$

$$I_B = y_B V_B \quad (اما)$$

$$V_A = V_B = V \quad و \quad I = I_A + I_B \quad (پس)$$

$$I = (y_A + y_B) V$$

می‌بینیم که هر پارامتر y از شبکه موازی به صورت جمع پارامترهای نکنکشیکه‌ها خواهد بود:

$$y = y_A + y_B \quad (۲۸)$$

واضح است که نتیجه فوق قابل تعمیم به هر تعداد شبکه دو درگاه موازی است.

تمرین

۱۷-۶ برای مدار دو درگاهی شکل ۱۷-۱۹ و Z_{out} را به دست آورید.

۱۷-۷ با استفاده از تبدیل Y - Δ - Δ - Y را برای شبکه (الف) شکل ۱۷-۲۰ (الف) و (ب) شکل

(ب) به دست آورید.

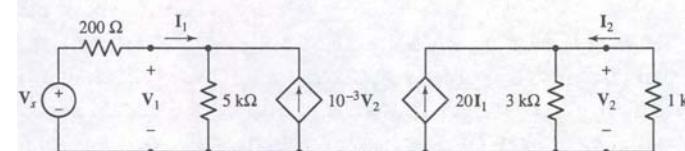
$$\text{جواب ۱۷-۶: } 1.311\Omega, 53.71\Omega : 17-7, \left[\begin{array}{cc} 2 \times 10^{-4} & -10^{-3} \\ -4 \times 10^{-3} & 20.3 \times 10^{-3} \end{array} \right] (\text{S})$$

۱۷-۴ پارامترهای امپدانس

مفهوم پارامترهای دو درگاه بر حسب پارامترهای ادمیتانس اتصال کوتاه معرفی شد. مجموعه پارامترهای دیگری هم وجود دارد و هر یک از این مجموعه‌ها مربوط به کلاس خاصی از شبکه‌ها است و تحلیل آن‌ها را ساده‌تر می‌کند. ما در اینجا سه دسته پارامتر دیگر با عنوانین پارامترهای امپدانس مدار باز، که موضوع بحث این بخش است و پارامترهای هیبرید و انتقالی را در بخش‌های بعدی ملاحظه خواهیم کرد.

دوباره یک مدار کلی دو درگاه فاقد منابع مستقل را درنظر می‌گیریم. ولتاژها و جریان‌ها مثل قبل تخصیص یافته‌اند (شکل ۱۷-۱۸)، اکنون باید فرض کنیم که ولتاژ V_1 و V_2 به عنوان پاسخ به وسیله دو منبع جریان I_1 و I_2 تولید شوند. بنابراین برای V_1 داریم:

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \quad (۲۹)$$



معادلات توصیف‌گر دو درگاه عبارتند از:

$$V_1 = 10^3 I_1 + 10I_2 \quad (۳۶)$$

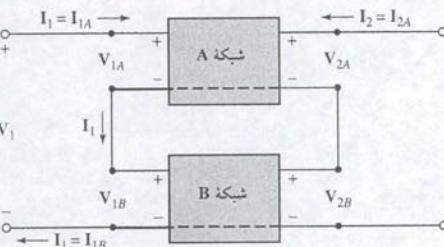
$$V_2 = -10^6 I_1 + 10^4 I_2 \quad (۳۷)$$

معادلاتی که شبکه‌های ورودی و خروجی را مشخص می‌کنند عبارتند از:

$$V_s = 500I_1 + V_1 \quad (۳۸)$$

$$V_2 = -10^4 I_2 \quad (۳۹)$$

از این چهار معادله اخیر، به سادگی عبارات مربوط به V_s , I_1 , V_1 , V_2 و I_2 بر حسب V_s بردست می‌آیند:



شکل ۱۷-۲۲ اتصال سری دو شبکه دو درگاه که از اتصال چهار گره مرجع مشترک به یکدیگر را بدست آمده است در این صورت ماتریس ز

$$z = z_A + z_B$$

$$V_1 = 0.75V_s \quad I_1 = \frac{V_s}{2000}$$

$$V_2 = -250V_s \quad I_2 = \frac{V_s}{40}$$

با این اطلاعات بهره ولتاز به دست می‌آید:

$$G_V = \frac{V_2}{V_1} = -333$$

و بهره جریان

$$G_I = \frac{I_2}{I_1} = 50$$

و بهره توان

$$G_P = \frac{\text{Re}[-\frac{1}{2}V_2 I_2^*]}{\text{Re}[\frac{1}{2}V_1 I_1^*]} = 16,670$$

اما راجع به شکل ۱۷-۲۱ می‌توان امپدانس خروجی را بدست آورد:

$$Z_{out} = z_{22} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{11} + Z_g} = 16.67 \text{ k}\Omega$$

طبق پیش‌بینی‌های مربوط به قضیه انتقال توان ماکریم، بهره توان هنگامی به حد اکثر مقدار خود مرسد که $Z_L = Z_{out} = 16.67 \text{ k}\Omega$ برسد و مقدار آن ۱۷۰۴۵ است.

اما رامترهای y هنگام اتصال موازی دو درگاهی‌ها مغاینه و با توجه به اصل دوگانگی، ارامترهای Z مسئله اتصال سری شبکه را طبق شکل ۱۷-۲۲ حل می‌کنند. توجه داشته باشید که نصال سری با اتصال بین دریبی یا متواالی که بعداً در هنگام ملاحظه پارامترهای انتقال راجع به نهایت خواهیم کرد، تفاوت دارد. اگر هر شبکه دو درگاه یک گره مشترک برای ورودی و خروجی داشته باشند و اگر طبق شکل ۱۷-۲۲ مراجع به هم وصل شوند، آن‌گاه از درگاه‌های خروجی دو شبکه سری جاری می‌گرد. عبارت مشابهی برای I_2 صحیح است. سپس درگاه‌ها را از این اتصال درونی درگاه باقی خواهند ماند و از آن نتیجه می‌شود $I_1 = I_A$ و $I = I_A$

$$V = V_A + V_B = z_A I_A + z_B I_B = (z_A + z_B)I = zI$$

$$z = z_A + z_B$$

س از این اتصال درونی درگاه باقی خواهد ماند و از آن نتیجه می‌شود $I_1 = I_A$ و $I = I_A$

جدول ۱۷-۱ تبدیل بین پارامترهای y , z , h , t و t .

	y	z	h	t
y	y_{11}	$\frac{z_{22}}{\Delta_z}$	$\frac{1}{h_{11}}$	$\frac{t_{22}}{t_{12}} - \frac{\Delta_t}{t_{12}}$
	y_{21}	$\frac{-z_{21}}{\Delta_z}$	$\frac{h_{21}}{h_{11}}$	$\frac{-1}{t_{12}} + \frac{t_{11}}{t_{12}}$
z	$\frac{y_{22}}{\Delta_y}$	z_{11}	$\frac{\Delta_h}{h_{12}}$	$\frac{t_{11}}{t_{21}} + \frac{\Delta_t}{t_{21}}$
	$\frac{-y_{21}}{\Delta_y}$	z_{21}	$\frac{-h_{21}}{h_{22}}$	$\frac{1}{t_{21}} + \frac{t_{22}}{t_{21}}$
h	$\frac{1}{y_{11}}$	$\frac{-y_{12}}{y_{11}}$	h_{11}	$\frac{t_{12}}{t_{22}} + \frac{\Delta_t}{t_{22}}$
	$\frac{y_{21}}{y_{11}}$	$\frac{\Delta_y}{y_{11}}$	h_{21}	$\frac{-1}{t_{22}} + \frac{t_{21}}{t_{22}}$
t	$\frac{-y_{22}}{y_{21}}$	$\frac{1}{z_{21}}$	$\frac{-\Delta_h}{h_{11}}$	$t_{11} + t_{12}$
	$\frac{-\Delta_y}{y_{21}}$	$\frac{1}{z_{21}}$	$\frac{-h_{22}}{h_{21}}$	$t_{21} + t_{22}$

$$\Delta_p = p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21} - p_{21}p_{12}$$

بگذراید یافتن چنین معادلی را به وقت مناسب تری موكول کنیم و فعلاً به مثال کلی تری پردازیم. آیا می‌توان مدار معادل تونن از دید خروجی یک دو درگاه را در حالت کلی به دست آورد؟ ابتدا باید یک آرایش مدار ورودی خاص رافرض کنیم و لذا یک منبع ولتاژ مستقل V_g (مثبت در بالا) را که با امپدانس Z_g سری است انتخاب می‌نماییم. پس

$$V_s = V_1 + I_1 Z_g$$

از ترکیب این رابطه با معادلات (۲۹) و (۳۰)، V_1 , I_1 , V_s را حذف می‌کنیم تا رابطه زیر به دست آید:

$$V_2 = \frac{z_{21}}{z_{11} + Z_g} V_s + (z_{22} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{11} + Z_g}) I_2$$

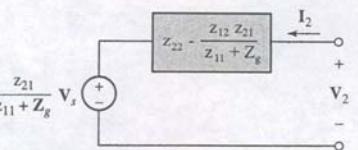
مدار معادل تونن را مستقیماً از این رابطه می‌توان ترسیم کرد. این مدار در شکل ۱۷-۲۱ نشان داده شده است. امپدانس خروجی که بر حسب پارامترهای Z بیان شده چنین است:

$$Z_{out} = z_{22} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{11} + Z_g}$$

اگر امپدانس مولد صفر باشد، عبارت ساده‌تر می‌شود:

$$Z_{out} = \frac{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}}{z_{11}} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{22}} = \frac{1}{y_{22}} \quad (Z_g = 0)$$

برای این حالت خاص، امپدانس خروجی همان z_{22} خواهد بود. معادله (۳) نیز همین رابطه می‌باشد



مثال ۱۷-۸

با فرض مجموعه پارامترهای امپدانس زیر:

$$z = \begin{bmatrix} 10^3 & 10 \\ -10^6 & 10^4 \end{bmatrix} \quad (\Omega)$$

که بیان گر کار ترانزیستوری در آرایش امپت مشترک است، بهره‌های ولتاژ، جریان و توان امپدانس‌های ورودی و خروجی را معین کنید. فرض شود مدار دو درگاه به سیله یک منبع ولتاژ ایده‌آل V_s سری با مقاومت 500Ω تحریک شده و به یک مقاومت باز $10k\Omega$ وصل است

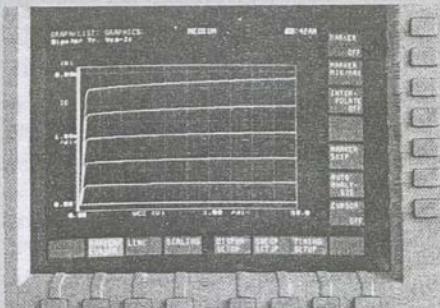
دقت کید که علامت به کر رئنه برای پارامترهای فوق توسط مهندسین به شکل (a) h_{je} یا غیره است، اندازه گیری‌ها در انجام شده $f = 1.0 \text{ kHz}$, $I_C = 10 \text{ mA}$ است. به عنوان سرگرمی بخواه از شناسنای تصمیم گرفت این پارامترها را خود المازه بگیرد. لذا یکی از آن‌ها را برداشت و با وسیله سکل ۱۷-۲۶ مقدور زیر را بدست آورد:

$$h_{or} = 3.3 \mu\text{mhos} \quad h_{je} = 1.9$$

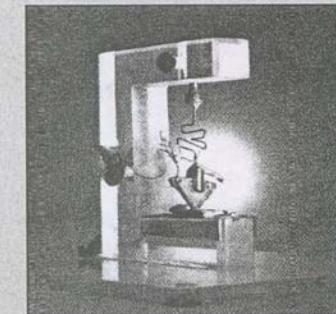
$$h_{ie} = 3.02 \text{ k}\Omega \quad h_{re} = 4 \times 10^{-3}$$

سه مقدار اول به خوبی در گستره مقادیر داده شده به وسیله سازنده بوده و کمی نیز به مقادیر حداقل نزدیکتر است با این وجود مقدار h_{je} بزرگ‌تر از آنچه که در پرگه اطلاعات آمده می‌باشد. این نتیجه موجب شرمندگی است ویرافکر می‌کردیم که تابه این جا حوب کار نموده‌ایم.

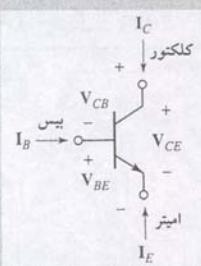
مذکوم که سرگرم قریب منحنی‌های در بالا و بین $I_C = 1 \text{ mA}$ هستیم، قطعه‌گرم می‌شود. متأسفانه به دلیل واپسگی شدید به حرارت، مشخصات ترانزیستور تغییر می‌باشد. مقادیر داده شده به وسیله سازنده در 25°C است. با کاعش مایع قطعه می‌توان مقدار h_{re} را 2.0×10^{-4} تقلیل داد. مدارهای خطی برای کار ساده‌اند. ولی مدارهای غیر خطی حین کار جالبند.



شکل ۱۷-۲۶ نمایش نمود رهای حاصل از تحلیل پارامتر نمی‌هادی HP 4155A برای اندازه‌گیری h -ترانزیستور 2N3904 دوقطبی.



شکل ۱۷-۲۴ عکسی از اولین ترانزیستور دوقطبی (bjt).



شکل ۱۷-۲۵ شماتیک bjt که جریان‌ها و ولتاژها را بر حسب قرارداد IEEE نشان می‌دهد.

بنابراین عملاً باید پارامتر h را برای مقادیر خاصی از جریان کلکتور I_C و ولتاژ کلکتور-امیتر بیان نمود. نتیجه حاصل دیگر از خاصیت غیر خطی ترانزیستور این است که مقدار h_{re} با V_{CE} از V_{CB} لحاظ مدار کامل‌آمده با یکدیگر متفاوتند.

وسایل انداز، گیری متعددی برای بدست آوردن پارامترهای یک ترانزیستور حاصل در دسترس است. مثالی از این وسایل تحلیل گر پارامتر نیمه هادی، طبق شکل ۱۷-۲۶ است. این وسیله جریان را (محور عمودی) در برابر ولتاژ خاصی (محور افقی) رسم می‌نماید. دستهای از منحنی‌ها با تغییر جریان در گام‌های گسته ترسیم شده‌اند.

به عنوان مثال سازنده یک ترانزیستور سیلیکان 2N3904 NPN پارامترهای h را طبق جدول ۱۷-۲ بیان می‌کند.

جدول ۱۷-۲ خلاصه‌ای از پارامترهای 2N3904 ac.

واحد	مشخصات	نام	پارامتر
$\text{k}\Omega$	1.0-10	امپدانس رزودی	$h_{re}(h_{11})$
-	$0.5-8.0 \times 10^4$	نسبت پسخورد ولتاژ	$h_{re}(h_{12})$
-	100-400	بهره جریان سیگنال کوچک	$h_{fe}(h_{21})$
μmhos	1.0-40	امپدانس خروجی	$h_{oe}(h_{22})$

۱۷-۸ ز را برای مدار دورگاه (الف) (شکل ۱۷-۲۳ (الف) و (ب) به دست آورید.

۱۷-۹ ز را برای شبکه دورگاه شکل ۱۷-۲۳ (ج) بیاید.

$$\boxed{\begin{array}{c} 70 \\ 50 \end{array}} : \boxed{\begin{array}{c} 100 \\ 150 \end{array}} (\Omega) \quad \boxed{\begin{array}{c} 21.2 \\ 11.76 \end{array}} : \boxed{\begin{array}{c} 11.76 \\ 67.6 \end{array}} (\Omega) \quad \boxed{\begin{array}{c} 45 \\ 25 \end{array}} : \boxed{\begin{array}{c} 25 \\ 75 \end{array}} (\Omega)$$

جواب: ۱۷-۹ $V_1 = 20 \Omega$, $V_2 = 50 \Omega$, $I_1 = 20 \Omega$, $I_2 = 50 \Omega$, $V_1 = 40 \Omega$, $V_2 = 25 \Omega$

۱۷-۵ پارامترهای هیبرید

مشکل اندازه گیری کمیات چون باز امترهای مدار باز هنگامی ظاهر می‌شود که پارامتری مثل Z_{21} باید اندازه گیری شود. یک معنی سینوسی را به سادگی می‌توان به پایانه‌های ورودی اعمال کرد ولی به علت امپدانس بسیار بزرگ خروجی در مدار ترانزیستوری، بازگذاشتن پایانه‌های خروجی و در عین حال اعمال ولتاژ تغذیه مشکل است. اندازه گیری جریان مدار اتصال کوتاه در پایانه‌های خروجی خیلی ساده صورت می‌گیرد.

پارامترهای هیبرید با یک جفت معادله که V_1 , I_1 , V_2 , I_2 را مرتبط می‌سازند تعریف می‌شوند و در این میان V_1 , I_2 و I_1 متغیرهای مستقلند:

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \quad (40)$$

$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \quad (41)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} V_1 \\ I_2 \end{array}} = h \boxed{\begin{array}{c} I_1 \\ V_2 \end{array}} \quad (42)$$

ماهیت پارامترها را می‌توان با تنظیم $0 = V_2$ مشخص کرد. پس

$$\text{امپدانس ورودی اتصال کوتاه} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{V_2=0}$$

$$\text{بهره جریان مستقیم اتصال کوتاه} = \frac{I_2}{I_1} \Big|_{V_2=0}$$

با $0 = I_1$ هم داریم:

$$h_{12} = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_1=0}$$

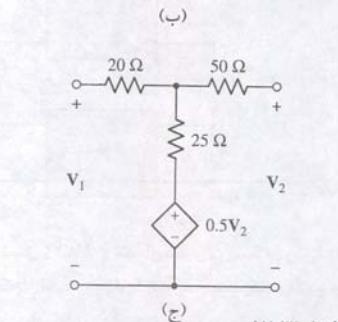
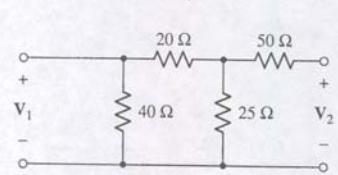
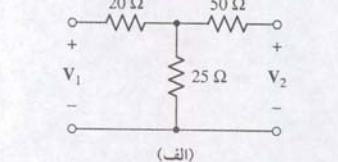
$$\text{امپیتانس خروجی مدار باز} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{I_1=0}$$

چون این پارامترها بینکر امپدانس، امپیتانس، بهره ولتاژ و بهره جریان، به آن‌ها پارامترهای هیبرید می‌گوییم. هنگامی که این پارامترها برای ترانزیستور به کاربروند، زیرنویس‌ها ساد می‌شوند. پس h_{11} , h_{12} , h_{21} , h_{22} به ترتیب تبدیل به h_{re} , h_{fe} , h_{oe} و h_{oe} می‌گردند که در آن‌ها زیرنویس‌ها به معنی ورودی، معکوس، مستقیم و خروجی می‌باشند.

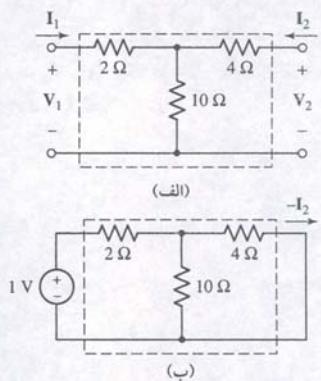
کاربرد عملی

مشخصه‌های ترانزیستور

مقادیر پارامترهای ترانزیستورهای پیوندی دوقطبی بر حسب پارامترهای h بیان می‌شوند. ترانزیستور به وسیله محققین آزمایشگاه بدل در اوخر دهه ۱۹۴۰ اختراج شد (شکل ۱۷-۲۴) که یک بیس به عنوان ورودی و کلکتور خروجی است. همان طور که قبلاً ذکر شد، در هر صورت ترانزیستور یک وسیله غیر خطی است و مباراین توکیت‌کنده و دیجیتال منطقی را می‌سازد. سه پایانه یک ترانزیستور پارامترهای h را نمی‌توان برای همه ولتاژها و جریان‌ها تعریف کرد طبق شکل ۱۷-۲۵، بیس (b) کلکتور (c) و امیتر (e) نام‌گذاری و این



شکل ۱۷-۲۳



شکل ۱۷.۳۰ (الف) یک شبکه مقاومتی دو درگاه که پارامترهای t برای آن باید به دست آیند. (ب) برای یافتن $I_{12} = 1/(I_1)$ و $t_{12} = 1/(I_1)$ است.

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (45)$$

که V_1, V_2, I_1, I_2 طبق معمول تعریف می‌شوند (شکل ۱۷.۸). علامت‌های منفی در معادلات (۴۳) و (۴۴) مربوط به جریان خروجی است. چون داریم (I_2)، بنابراین هر دو جریان I_1 و $-I_2$ به سمت راست جهت یافته‌اند، که همان جهت انحرافی انتقال است. فرم دیگر نمایش این مجموعه پارامترها برای زیر است:

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (46)$$

نوجه کنید که هیچ علامت منفی در ماتریس t وجود ندارد.

با نگاه مجدد به معادلات (۴۳) تا (۴۵) می‌بینیم، کمیت‌های سمت چپ که اغلب مفروض با متغیرهای مستقلی هستند، ولتاژ و جریان V_1 و I_1 می‌باشند، کمیت‌های وابسته V_2 و I_2 و t عمولاً کمیت‌های خروجی‌اند. بنابراین پارامترهای انتقال رابطه مستقیمی بین ورودی و خروجی را فراهم می‌سازند. کاربرد عدمه آن‌ها در تحلیل خط انتقال و در شبکه‌های متوازی است. باید اکنون پارامترهای t را برای مدار مقاومتی دو طرفه دو درگاهی شکل ۱۷.۳۰ (الف) بدست آوریم. برای بررسی یک روش ممکن دریافتی یک پارامتر چنین عمل می‌کنیم:

$$t_{12} = \frac{V_1}{I_2} \mid_{V_2=0}$$

بنابراین خروجی را اتصال کوتاه می‌کنیم ($V_2 = 0$) و $t_{12} = 1/V_1$ است. این فرآیند دهیم (شکل ۱۷.۳۰ (ب)). نوجه کنید که نمی‌توان مخرج را با استقرار منبع ۱A در خروجی، برابر واحد کرد. ماقبلًا منبع اتصال کوتاه کرده‌ایم، مقاومت معادله که منبع ۱V می‌بیند، $\Omega_{eq} = 2 + (4/10)\Omega = 2.4\Omega$ است و سپس با تقسیم جریان داریم:

$$-I_2 = \frac{1}{2 + (4/10)} \times \frac{10}{10 + 4} = \frac{5}{34} \text{ A}$$

دین ترتیب

$$t_{12} = \frac{1}{-I_2} = \frac{34}{5} = 6.8 \Omega$$

گر بخواهیم هر چهار پارامتر را پیدا کنیم، می‌توانیم یک جفت معادله مناسب بر حسب کمیات مربوط به پایانه‌ها، یعنی V_1, V_2, I_1, I_2 بتویسیم. از شکل ۱۷.۳۰ (الف) دو معادله حلقه‌ای داریم:

$$V_1 = 12I_1 + 10I_2 \quad (47)$$

$$V_2 = 10I_1 + 14I_2 \quad (48)$$

حل معادله (۴۸) برای I_1 داریم:

$$I_1 = 0.1V_2 - 1.4I_2$$

س $t_{21} = 0.1S$ و $t_{22} = 1.4$ می‌باشد. با جایگزینی I_1 در معادله (۴۷) داریم:

$$V_1 = 12(0.1V_2 - 1.4I_2) + 10I_2 = 1.2V_2 - 6.8I_2$$

دوباره $I_1 = 1.2$ و $I_2 = 6.8\Omega$ بودست می‌آید.

برای شبکه‌های دوسویه، دترمینان ماتریس t برابر واحد است:

$$\Delta_t = t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21} = 1$$

ر. مثال مقاومتی شکل ۱۷.۳۰، داریم:

$$\Delta_t = 1.2 \times 1.4 - 6.8 \times 0.1 = 1$$

برای مدار مقاومتی دو طرفه شکل ۱۷.۲۷ h را پیدا کنید.

با اتصال کوتاه خروجی ($V_2 = 0$)، و اعمال یک منبع ۱A در ورودی ($I_1 = 1A$) (یک ولتاژ ورودی $3.4V$ (۳.۴V) نولید می‌کند. پس $t_{11} = 3.4\Omega$. $t_{21} = -0.4$ A، $I_2 = -0.4$ A، پس $t_{22} = 0.4$ A. بگذارید ولتاژ $1V$ را به پایانه‌های خروجی اعمال کنیم ($V_2 = 1V$). پاسخ در پایانه‌های ورودی $0.4V$ است ($V_1 = 0.4V$). $t_{12} = 0.1A$ و $I_2 = 0.1A$ است. پس خواهیم داشت:

$$h = \begin{bmatrix} 3.4\Omega & 0.4 \\ -0.4 & 0.1S \end{bmatrix}$$

این نتیجه قضیه تقابل است که در یک شبکه دوسویه $-h_{12} = h_{21}$ است.

۱۷-۱۰ را برای مدار دو درگاه، (الف) شکل ۱۷.۲۸ (الف)، (ب) شکل ۱۷.۲۸ (ب) پیدا کنید.

۱۷-۱۱ اگر h با رابطه زیر داده شود، مطلوبست (الف) و (ب).

$$h = \begin{bmatrix} 5\Omega & 2 \\ -0.5 & 0.1S \end{bmatrix}$$

$$\text{جواب ۱۷-۱۰: } \begin{bmatrix} 8\Omega & 0.8 \\ -0.8 & 20mS \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20\Omega & 1 \\ -1 & 25mS \end{bmatrix}$$

$$\text{جواب ۱۷-۱۱: } \begin{bmatrix} 15 & 20 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} (\Omega), \begin{bmatrix} 0.2 & -0.4 \\ -0.1 & 0.3 \end{bmatrix} (S)$$

مدار شکل ۱۷.۲۹ نتیجه تبدیل مستقیم دو معادله (۴۰) و (۴۱) است. اولی KVL را حول

حلقه ورودی نشان می‌دهد، در حالی که دومی از KCL در گره خروجی بالا نتیجه شده است این مدار، مدار معادل ترانزیستور نیز است. بگذارید چند مقدار را برای آرایش امیتر مشترک در نظر بگیریم: $h_{22} = 50 \times 10^{-6} S$ ، $h_{21} = 50$ ، $h_{12} = 2 \times 10^{-4}$ ، $h_{11} = 1200\Omega$ و $h_{12} = 5k\Omega$ وصل است. در ورودی منبع ولتاژ $1V$ که با یک مقاومت 800Ω سری بوده و به بار $5k\Omega$ وصل است. در خروجی

$$10^{-3} = (1200 + 800)I_1 + 2 \times 10^{-4}V_2$$

و در خروجی

$$I_2 = -2 \times 10^{-4}V_2 = 50I_1 + 50 \times 10^{-6}V_2$$

و از حل آن‌ها داریم:

$$I_1 = 0.510\mu A \quad V_1 = 0.592mV$$

$$I_2 = 20.4\mu A \quad V_2 = -102mV$$

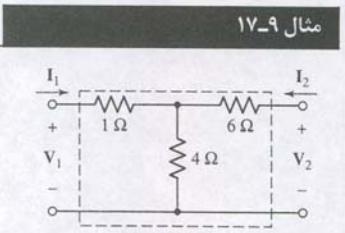
در ترانزیستور مورد نظر برهه جریان ۴۰، برهه ولتاژ ۱۷۲ و برهه توان 6880 را داریم. امپدانس ورودی ترانزیستور 1160Ω و با چند محاسبه مختصر امپدانس خروجی بالا $22.2k\Omega$ به دست می‌آید وقتی که دومار در درگاه بطور سری در ورودی و موزایی در خروجی بهم وصل شوند پارامترهای هیبرید باهم جمع می‌گردند. این نوع ارتباط را اتصال سری-موزایی می‌نامند و خوبی استفاده نمی‌شود.

۱۷-۶ پارامترهای انتقال

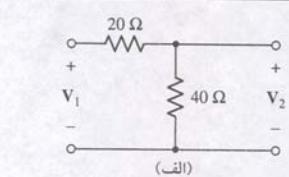
آخرین پارامتر مربوط به مدار دو درگاهی که بررسی خواهیم کرد پارامترهای t ، پارامترهای ABCD یا ساده‌تر بگوییم پارامترهای انتقال است. این پارامترها چنین تعریف می‌شوند:

$$V_1 = t_{11}V_2 - t_{12}I_2 \quad (43)$$

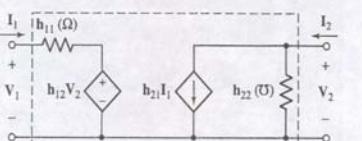
$$I_1 = t_{21}V_2 - t_{22}I_2 \quad (44)$$



شکل ۱۷.۲۷ شبکه دوسویه‌ای که پارامترهای آن به دست آمده است: $h_{12} = -h_{21} = h$.



شکل ۱۷.۲۸



شکل ۱۷.۲۹ چهار پارامتر حاکم بر مدار دو درگاه. معادلات حاکم بر مدار عبارتند از: $I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2$ و $V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2$

تحلیل کامپیوتوری

وصف شبکه‌های دو درگاه با پارامترهای t فرضی را برای تحلیل ساده مدارهای دو درگاه فراهم می‌سازد. مثلاً همان طور که در این بخش ملاحظه شد:

$$t_A = \begin{bmatrix} 1.2 & 6.8 \Omega \\ 0.1 S & 1.4 \end{bmatrix}$$

$$t_B = \begin{bmatrix} 1.2 & 13.6 \Omega \\ 0.05 S & 1.4 \end{bmatrix}$$

دیدیم که پارامترهای t توصیف‌گر شبکه متواالی را می‌توان با ضرب t_B و t_A به دست آورد:

$$t = t_A \cdot t_B$$

چنین اعمال ماتریسی را با یک ماشین حساب یا یک بسته نرم‌افزاری مثل متلب می‌توان به راحتی انجام داد. مثلاً برنامه متلب چنین است:

$$\text{EDU} \gg tA = [1.2 \ 6.8; 0.1 \ 1.4];$$

$$\text{EDU} \gg tB = [1.2 \ 13.6; 0.05 \ 1.4];$$

$$\text{EDU} \gg t = tA * tB$$

$$t =$$

$$\begin{bmatrix} 1.7800 & 25.8400 \\ 0.1900 & 3.3200 \end{bmatrix}$$

که در مثال ۱۷-۱۰ هم مشاهده کردیم.

هنگام کار با ماتریس‌ها در متلب، هر نام تغیر حساس به نوع حروف می‌باشد (در اینجا t و t_B ، t_A عناصر ماتریس‌ها به صورت سطری و با شروع سطر بالا آغاز می‌شوند. سطرها با علامت نقل قول از یکدیگر جدا می‌شوند. خواننده هنگام اجرای اجرای ماتریسی باید متوجه باشد که همیشه ترتیب عملیات مهم است. مثلاً $t_A \cdot t_B$ ماتریسی کاملاً متفاوت با آنچه دیدیم تولید می‌کند):

$$t_B \cdot t_A = \begin{bmatrix} 2.8 & 27.2 \\ 0.2 & 2.3 \end{bmatrix}$$

برای ماتریس‌های ساده‌ای که در این مثال دیدیم یک ماشین حساب عملی کنایت می‌نماید. با این وجود شبکه‌های متواالی بزرگ‌تر با کامپیوتر بهتر بررسی می‌شوند و نیز می‌توان همه آرایه‌ها را به طور همزمان روی صفحه نمایش ملاحظه کرد.

۱۷-۷ خلاصه فصل و مرور

- برای به کارگیری روش‌های تحلیل توصیف شده در این فصل، لازم است به خاطر پی‌سپاریم که هر درگاه فقط می‌تواند به یک شبکه یک پورت یا به یک درگاه از شبکه چند درگاهی وصل شود.
- معادلات معرفی شده برای تحلیل یک شبکه دو درگاه بر حسب پارامترهای ادمیتانس y عبارتنداز:

$$I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \quad I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2$$

که

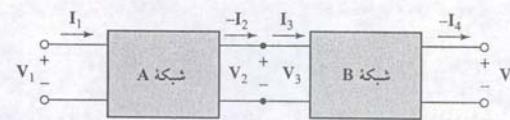
$$y_{11} = \frac{I_1}{V_1} \Big|_{V_2=0}$$

$$y_{12} = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{V_1=0}$$

و

$$y_{21} = \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2=0}$$

$$y_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{V_1=0}$$



شکل ۱۷-۳۱ وقتی شبکه‌های دو درگاه A و B به طور پی‌درپی یا متواالی بسته شوند، ماتریس پارامتر t برای شبکه حاصل با ضرب ماتریسی معین می‌شود.

بحث خود را در مورد مدارهای دو درگاه، با اتصال متواالی در مدار دو درگاهی طبق شکل ۱۷-۳۱ پایان می‌دهیم. ولتاژ و جریان پایانه‌ها برای هر یک با دیگری یکسان تصور شده است. پارامترهای t متناظر برای شبکه A عبارتنداز:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = t_A \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = t_A \begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

و برای شبکه B برابر است با:

$$\begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix} = t_B \begin{bmatrix} V_4 \\ -I_4 \end{bmatrix}$$

با ترکیب این نتایج داریم:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = t_A t_B \begin{bmatrix} V_4 \\ -I_4 \end{bmatrix}$$

بنابراین پارامترهای t برای شبکه‌های موزایی از ضرب ماتریسی زیر به دست می‌آیند:

$$t = t_A t_B$$

این حاصل ضرب از ضرب کردن عناصر دو ماتریس حاصل نمی‌شود. در صورت لزوم به پیوست ۲ مراجعه کنید.



مثال ۱۷-۱۰

پارامترهای t را برای شبکه‌های شکل ۱۷-۳۲ پیدا کنید.

شبکه A همان شبکه دو درگاه شکل ۱۷-۳۱ است و بنابراین:

$$t_A = \begin{bmatrix} 1.2 & 6.8 \Omega \\ 0.1 S & 1.4 \end{bmatrix}$$

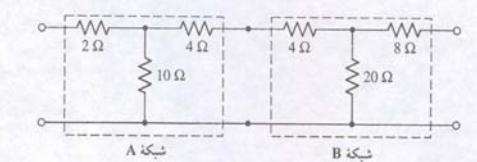
در حالی که شبکه B دارای مقادیر مقاومت دو برابر است:

$$t_B = \begin{bmatrix} 1.2 & 13.6 \Omega \\ 0.05 S & 1.4 \end{bmatrix}$$

برای شبکه ترکیب شده داریم:

$$t = t_A t_B = \begin{bmatrix} 1.2 & 6.8 \\ 0.1 & 1.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.2 & 13.6 \\ 0.05 & 1.4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.2 \times 1.2 + 6.8 \times 0.05 & 1.2 \times 13.6 + 6.8 \times 1.4 \\ 0.1 \times 1.2 + 1.4 \times 0.05 & 0.1 \times 13.6 + 1.4 \times 1.4 \end{bmatrix}$$



$$t = \begin{bmatrix} 1.78 & 25.84 \Omega \\ 0.19 S & 3.32 \end{bmatrix}$$

تمرین

۱۷-۱۲ با فرض رابطه زیر، (الف) Z را باید، (ب) t را برای دو شبکه یکسان متواالی به دست آورید.

$$t = \begin{bmatrix} 3.2 & 8 \Omega \\ 0.2 S & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8.22 & 87.1 \\ 0.694 & 12.22 \end{bmatrix} (\Omega) \quad \begin{bmatrix} 11.84 & 57.6 \Omega \\ 1.44 S & 17.6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 16 & 56 \\ 5 & 20 \end{bmatrix} (\Omega)$$

جواب:

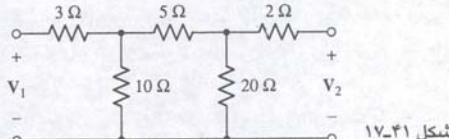
۱۷-۲ پارامترهای ادمیتانس

۱۰. برای شبکه خطی شکل ۱۷-۸، مطلوب است:

$$\cdot V = \begin{bmatrix} 9 \\ -3.5 \end{bmatrix} (V) \quad \text{و } Y = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.3 \\ 0.3 & -0.02 \end{bmatrix} \quad \text{اگر } I_1, I_2 \text{ باشند.}$$

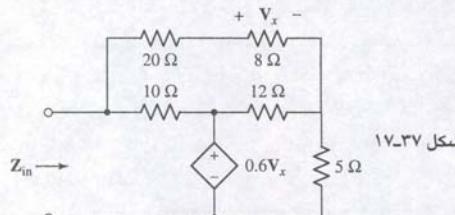
$$\cdot I = \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0.02 \end{bmatrix} (A) \quad \text{و } Y = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.15 \\ 0.15 & 0.8 \end{bmatrix} \quad \text{اگر } V_1, V_2 \text{ باشند.}$$

۱۱. برای شبکه دو درگاه شکل ۱۷-۴۱، y_{12}, y_{21} را بایابید.



۶. برای مدار تک درگاه شکل ۱۷-۳۷ امپدانس Z_{in} را با (الف) یافتن Δ_Z (ب)

یافتن Y_{in} و Δ_Y بایابید.

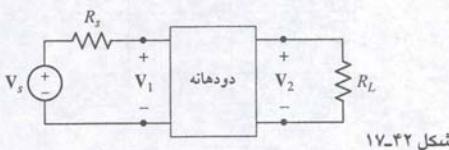


شکل ۱۷-۳۷

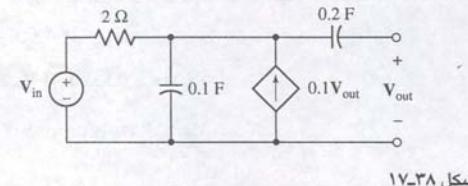
۱۲. اگر مدار دو درگاه در شکل ۱۷-۴۲ ۱۰ دارای مقادیر پارامتر $y_{11} = 10$

$y_{22} = 20$ و $y_{21} = 50$ و $y_{12} = -5$

باشد. مطلوب است $V_1, V_2, R_L = 100\Omega$ و $R_s = 25\Omega$ و $V_s = 100V$



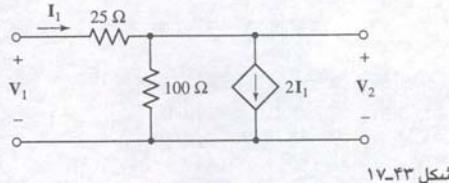
۷. امپدانس خروجی را برای شبکه شکل ۱۷-۳۸ به صورت تابعی از s پیدا کنید.



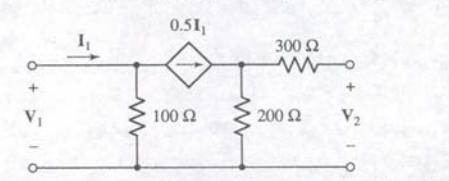
شکل ۱۷-۳۸

۸. اگر $R_o = 0$ و $R_i = \infty$ باشند فرض شود (الف) $R_{in}(A = \infty)$

۹. چهار پارامتر شبکه شکل ۱۷-۴۳ را بدست آورید.



۱۰. در مدار دو درگاه شکل ۱۷-۴۴، $|y|$ را بدست آورید.



۱۱. در مدار دو درگاه شکل ۱۷-۴۵، فرض کنید

$$[y] = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.0025 \\ -8 & 0.05 \end{bmatrix} (S)$$

باشد. (الف) مقادیر نسبتی I_1/V_1 و I_2/V_2 را بدست آورید.

(ب) مقاومت 5Ω را حذف کنید. منبع $1V$ را بایر سفر نمایید و V_2/I_2 را

بایابید.

■ معادلات تعریف شده برای تحلیل یک شبکه دو درگاه بر حسب پارامترهای امپدانس Z عبارتند از:

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \quad \text{و } V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2$$

■ معادلات تعریف شده برای تحلیل یک شبکه دو درگاه بر حسب پارامترهای h عبارتند از:

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \quad \text{و } I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2$$

■ معادلات تعریف شده برای تحلیل یک شبکه دو درگاه بر حسب پارامترهای t عبارتند از:

$$V_1 = t_{11}V_2 - t_{12}I_2 \quad \text{و } I_1 = t_{21}V_2 - t_{22}I_2$$

■ تبدیل پارامترهای h ، z ، t و y به یکدیگر بسیار ساده است و به نیازهای تحلیل مدار وابسته می‌باشد.

تبدیلات در جدول ۱۷-۱ آورده شده است.

۱۷-۸ خواندنی‌های کمکی

Further details of matrix methods for circuit analysis can be found in:

R. A. DeCarlo and P. M. Lin, *Linear Circuit Analysis*, 2nd ed. New York: Oxford University Press, 2001.

Analysis of transistor circuits using network parameters is described in:

W. H. Hayt, Jr. and G. W. Neudeck, *Electronic Circuit Analysis and Design*, 2nd ed. New York: Wiley, 1995.

مسائل ۱۷-۱ شبکه یک درگاهی

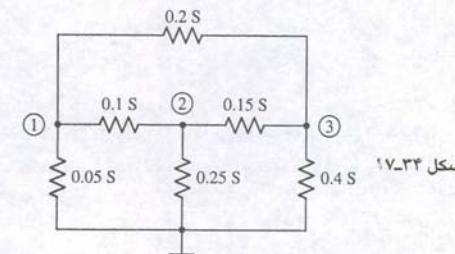
۱. مجموعه معادلات زیر را درنظر بگیرید:

$$4I_1 - 8I_2 + 9I_3 = 12$$

$$5I_1 - 7I_3 = 4$$

$$7I_1 + 3I_2 + I_3 = 0$$

(الف) فرم ماتریسی این مجموعه معادلات را بنویسید. (ب) Δ_Z را محاسبه کنید. (ج) Δ_{11} را محاسبه کنید. (د) I_1 را محاسبه کنید. (و) I_3 را محاسبه کنید.



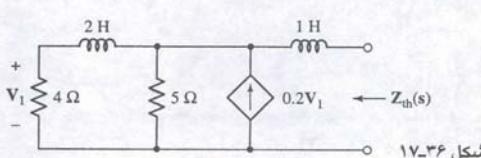
شکل ۱۷-۳۴

۴. ماتریس مقاومت یک شبکه تک درگاه در شکل ۱۷-۳۵ داده شده است. R_{in} را از دید متبوعی که در حلقه ۱ است بدست آورید.

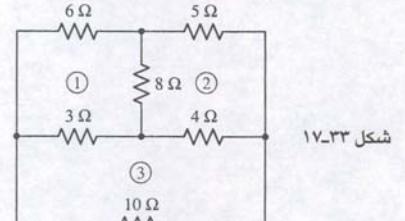
$$[R] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \end{bmatrix} (\Omega)$$

شکل ۱۷-۳۵

۵. امپدانس معادل تونن Z_{in} را برای مدار تک درگاه شکل ۱۷-۳۶ بدست آورید.



شکل ۱۷-۳۶



شکل ۱۷-۳۳

۳. برای شبکه شکل ۱۷-۳۴، Δ_Z را پیدا کنید و سپس از آن در یافتن توان تولیدی به وسیله یک منبع $10A$ DC بین گره مرجع و گره (الف)، (ب) و (ج) را به دست آورید.

۲۷. یک مدار معادل شبیه مدار شکل ۱۷.۱۳ (ب) رسم کنید که برای آن

$$[y] = \begin{bmatrix} 1.5 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ (mS)}$$

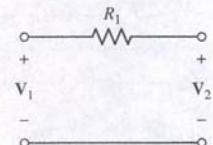
باشد. (ب) اگر دو عدد از این مدارهای دو درگاه به طور موازی وصل شوند،

مدار معادل جدید را رسم کرده و نشان دهید که: $[y]_{\text{new}} = 2[y]$

۲۸. (الف) $[y]$ را برای مدار دو درگاه شکل ۱۷.۵۵ (الف) پیدا کنید. (ب) $[y]_b$ را برای شکل ۱۷.۵۵ (ب) پیدا کنید. (ج) شبکه را رسم کنید که از اتصال

موازی این مدارهای دو درگاه حاصل شده است و نشان دهید که $[y]$ برای

این شبکه برابر $[y]_a + [y]_b$ است.

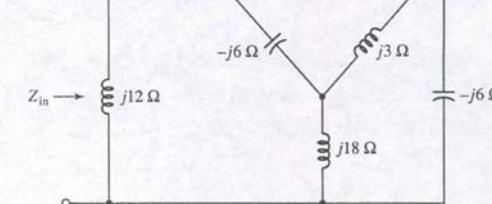


شکل ۱۷.۵۵

(الف)

(ب)

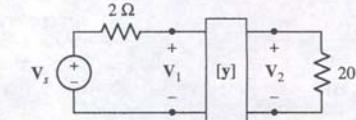
۱۷.۵۵

در شبکه شکل ۱۷.۵۲، Z_{in} را باید.

شکل ۱۷.۵۲

۲۹. اجزای بدھید در مدار دو درگاه شکل ۱۷.۸

$$[y] = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.002 \\ -0.5 & 0.04 \end{bmatrix} \text{ (S)}$$

باشد مطلوبست (الف)، Z_{out} و Z_{in} (د)، G_P (ج)، G_I (ب)، G_V (د).

شکل ۱۷.۵۳

۳۰. اجزای بدھید در مدار دو درگاه شکل ۱۷.۸، مطلوبست:

$$[y] = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.05 \\ -0.5 & 0.2 \end{bmatrix} \text{ (S)}$$

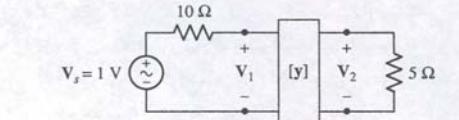
باشد. مطلوبست (الف)، Z_{out} و Z_{in} (د)، G_P (ج)، G_I (ب)، G_V (د) و (ه).

$$[y] = \begin{bmatrix} 10^{-3} & j0.01 \\ j0.01 & -j0.005 \end{bmatrix} \text{ (S)}$$

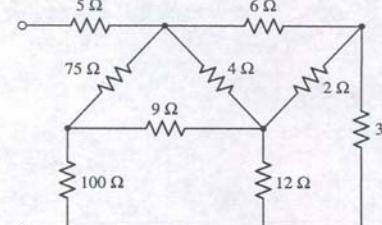
(و) اگر بهره ولتاژ معکوس $G_{V,rev}$ به صورت $G_{V,rev}$ را محاسبه کنید.(ز) اگر بهره توان تزریقی G_{ins} را در مدار تک درگاه شکل ۱۷.۵ با تبدیلات مناسبی از Δ - Δ - Δ - Δ به دست آورد.(آ) اگر R_L به صورت نسبت P_{5Q2} در هنگام وجود دو درگاه به P_{5Q2} بود، هنگام نبودن دو

درگاه و اتصال مستقیم پایانهای خروجی به پایانهای ورودی تعريف شود.

شکل ۱۷.۵۴ را باید.



شکل ۱۷.۵۴

۳۱. (الف) برای مدار دو درگاه شکل ۱۷.۵۷، $[z]$ را باید.(ب) اگر $I_1 = I_2 = 1A$ باشد، بهره ولتاژ G_V را به دست آورد.(ج) $I_g = y_{is}V_{gs} + y_{rs}V_{ds}$ و $I_d = y_{fs}V_{gs} + y_{os}V_{ds}$ 

شکل ۱۷.۵۱

به کار رفته در شکل ۱۷.۴۷ برای نمایش رفتار MOSFET آمده است.

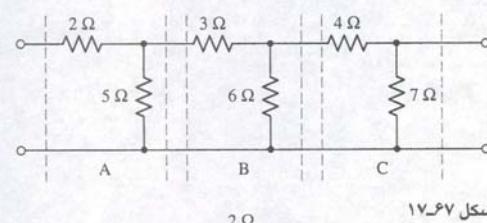
(الف) برای شکل مذکور کدام پایه به عنوان ورودی به کار رفته است و کدام

یک خروجی است؟ (ب) عبارتی برای پارامترهای y_{os} ، y_{fs} ، y_{rs} ، y_{is} ، y_{ds} و y_{gd} را مطرح کنید.

تعزیز شده در معادلات (۴۹) و (۵۰) به دست آورید که بر حسب

پارامترهای مدل C_{ds} ، C_{gs} ، C_{gd} ، C_{os} و r_d محاسبه کنید اگر $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ج) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(د) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ه) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ج) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(د) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ه) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ج) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(د) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ه) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ج) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(د) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ه) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ج) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(د) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ه) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ج) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(د) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ه) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ج) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(د) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ه) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ج) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(د) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ه) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ج) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(د) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ه) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ج) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(د) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ه) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ج) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(د) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ه) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ج) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(د) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ه) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ج) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(د) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ه) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ج) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(د) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ه) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ج) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(د) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ه) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ج) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(د) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ه) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ج) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(د) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ه) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ج) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(د) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ه) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ج) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(د) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ه) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ج) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(د) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ه) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ج) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(د) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ه) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ج) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(د) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ه) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ج) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(د) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ه) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ج) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(د) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ه) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ج) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(د) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ه) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ج) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(د) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3.4$ pF و $y_{is} = 1.4$ pF باشد.(ه) $y_{os} = 4.7$ mS، $y_{fs} = 0.4$ pF، $y_{rs} = 3$

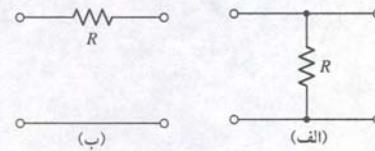
اتصال متوازی مدارهای دو درگاه استفاده کرده و $[t]_{\text{new}}$ را باید به شرطی که مقاومت 20Ω در دو سر ورودی وصل باشد.



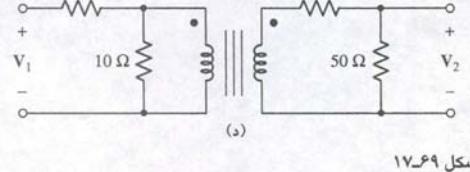
شکل ۱۷-۶۷



شکل ۱۷-۶۸

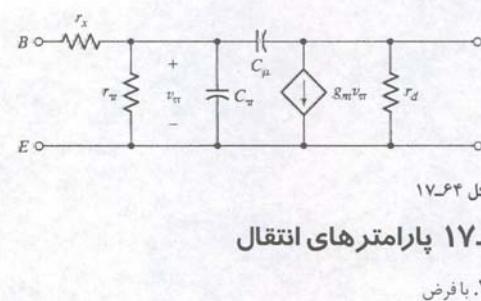


شکل ۱۷-۶۹



شکل ۱۷-۷۰

اتصال متوازی مدارهای دو درگاه استفاده کرده و $[t]_{\text{new}}$ را باید به شرطی که مقاومت 20Ω در دو سر ورودی وصل باشد.



شکل ۱۷-۶۴

۱۷-۶ پارامترهای انتقال

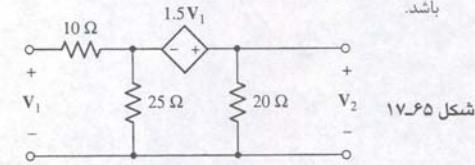
۴۴

$$[y] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad [b] = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$[c] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad [d] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

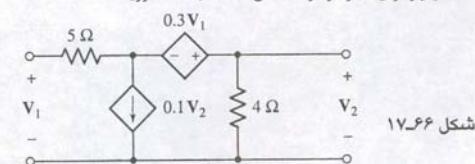
مطلوبیست (الف) $[c][d]$ (ب) $[b][c]$ (ج) $[b][y]$ (د) $[y][b]$ (ه) $[y][b][c][d]$

۴۵. (الف) را برای مدار دو درگاه شکل ۱۷-۶۵ به دست آورید. (ب) را برای این مدار محاسبه کنید به شرط این که مقاومت منبع $R_s = 15\Omega$ باشد.



شکل ۱۷-۶۵

را برای مدار دو درگاه شکل ۱۷-۶۶ به دست آورید.



شکل ۱۷-۶۶

۴۷. (الف) $[t]_A$, (ب) $[t]_B$, (ج) $[t]_C$ را برای مدار دو درگاه متوازی شکل ۱۷-۶۷ پیدا کنید. (ب) را برای مدار دو درگاه شش مقاومتی باید.

۴۸. (الف) $[t]_A$ را برای مقاومت 2Ω شکل ۱۷-۶۸ به دست آورید. (ب) نشان دهد که $[t]_A$ یک مقاومت 10Ω با رابطه زیر به دست می‌آید:

۴۹. (الف) مطلوبیست $[t]_a$ و (ب) را برای شبکه شکل ۱۷-۶۹ (الف)، (ب) و (ج) (ب) با استفاده از قوانین اتصال درونی متوازی مدارهای دو درگاه، $[t]$ را برای شبکه شکل ۱۷-۶۹ (د) به دست آورید.

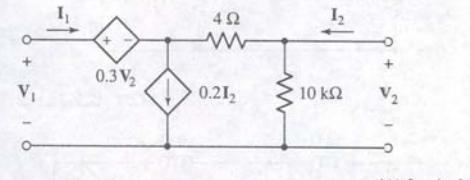
۵۰. (الف) $[t]$ را برای مدار دو درگاه شکل ۱۷-۷۰ پیدا کنید. از تکنیک‌های

۵۱. $R_s = 100\Omega$ را برای مدار دو درگاهی که به منبعی با $V_s = 100\Omega$ وصل است، به دست آورید. به شرطی که

$$[h] = \begin{bmatrix} 100\Omega & 0.01 \\ 20 & 1\text{mS} \end{bmatrix}$$

۵۲. مراجعه به مدار دو درگاه شکل ۱۷-۶۶، مطلوبیست (الف) $[h]_{12}$ و (ب) $[h]_{12}$

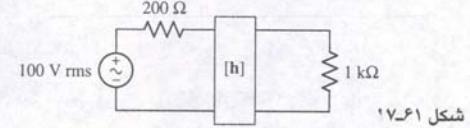
و (ج)



شکل ۱۷-۶۱

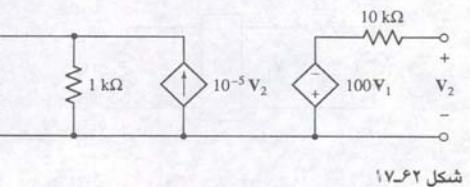
۵۳. برای مدار دو درگاه شکل ۱۷-۶۱ فرض کنید، $h_{11} = 1\text{k}\Omega$ و $h_{22} = 500\mu\text{S}$ $h_{21} = 4$. $h_{12} = -1$

حمل شده به (الف) $R_L = 1\text{k}\Omega$ ، (ب) $R_s = 200\Omega$ و (ج) تمام مدار دو درگاه را به دست آورید.



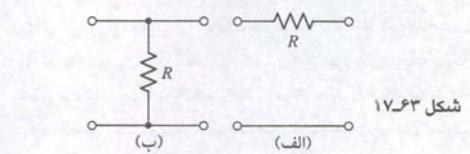
شکل ۱۷-۶۱

۵۴. (الف) مطلوبیست $[h]$ برای مدار دو درگاه شکل ۱۷-۶۲ (ب) را برای Z_{out} پیدا کنید. به شرطی که ورودی شامل V_s سری یا $R_s = 200\Omega$ باشد.



شکل ۱۷-۶۲

۵۵. برای هر دو مدار دو درگاه شکل ۱۷-۶۳، (الف)، (ب)، (ج) و (ه) را باید. اگر پارامتری بی‌نهایت است از مجموعه آن پارامتر بگذرد.



شکل ۱۷-۶۳

۵۶. شکل ۱۷-۶۴ یک مدل ترانزیستور دو قطبی (bjt) را نشان می‌دهد که برای سیگنال‌های کوچک معتبر است. اگر پایانه امپیتر (E) برای ورودی و خروجی مشترک باشد و بیس (B) به عنوان ورودی فرض شود عبارتی

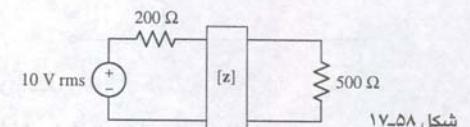
h_{ie} , h_{re} , C_{pi} , r_{pi} , r_{oe} برای (الف) (b) و (ج) (d) به دست آورید.

۵۷. یک مدار دو درگاه خاص با $[z] = \begin{bmatrix} 4 & 1.5 \\ 10 & 3 \end{bmatrix} (\Omega)$

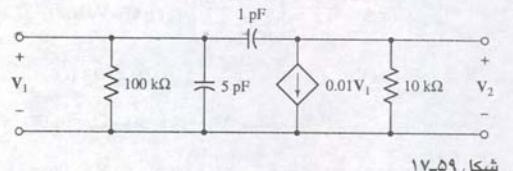
توصیف شده است. ورودی مشکل از یک V_s سری با 5Ω است، ضمن این که $R_L = 2\Omega$ باشد. مطلوبیست متوسط توان حمل شده به (الف)

. Z_{out} (د) G_p (ج) G_V (ب) (ج) فرض کنید.

۵۸. رادر مدار دو درگاه شکل ۱۷-۵۸ داشته باشیم. توان متوسط حمل شده به (الف) مقاومت 200Ω و (ب) مقاومت 500Ω و (ج) دو درگاه را به دست آورید.



۵۹. پارامترهای Z را در $10^8 \text{ rad/s} = 10^8 \text{ rad/s}$ به دست آورید. فرکانس بالا در شکل ۱۷-۵۹ به دست آورید.



۶۰. یک مدار دو درگاه که در آن $[z] = \begin{bmatrix} 20 & 2 \\ 40 & 10 \end{bmatrix}$ است به وسیله منبع $V_s = 100/\sqrt{2}$ سری با مقاومت 5Ω و متصل به یک مقاومت 25Ω را اندازی شده است. مدار معادل تونن از دید مقاومت 25Ω چقدر است؟

۱۷-۵ پارامترهای هیبرید

۶۱. پارامترهای h یک مدار دو درگاهی عبارتند از:

$$[h] = \begin{bmatrix} 9\Omega & -2 \\ 20 & 0.2\text{S} \end{bmatrix}$$

اگر یک مقاومت 1Ω با (الف) ورودی، (ب) خروجی سری شود پارامترهای جدید h پیدا کنید.

فصل هجدهم

تحلیل فوریه مدار

مقدمه

مفاهیم کلیدی

نمایش تابع پریودیک به صورت مجموع سینوس ها و کسینوس ها
فرکانس های هارمونیک
تقارن زوج و فرد
تقارن نیم موج
فرم مختلط سری فوریه
طیف خطوط منقطع
تبديل فوریه
استفاده از سری فوریه و تبدیل فوریه در تحلیل مدار
پاسخ سیستم و کانولوشن در حوزه فرکانس



۱۸-۱ فرم مثلثاتی سری فوریه

دائم که پاسخ کامل یک مدار خطی به یک تابع تحریک اختیاری مشکل از مجموع پاسخ اداشه و پاسخ طبیعی است. پاسخ طبیعی قبل از فصل های ۷ تا ۹ ملاحظه شد، ولی با چند استثناء فقط مدارهای ساده سری یا موازی RL، RC و RLC بررسی شدند. پس از آن در صل های ۱۴ و ۱۵ مفهوم فرکانس مختلط روشی کلی را در یافتن پاسخ طبیعی پیش رو گذاشت. دیدیم که پس از استقرار قطب های یک تابع تبدیل شبکه، می توان فرم پاسخ طبیعی را رشت و به این ترتیب روشی قری و کلی را برای تعیین پاسخ طبیعی ملاحظه کردیم.

هارمونیک ها

عنتیار نمایش تابع پریودیک حاصل از مجموع بینهایت تابع سینوسی یا کسینوسی را با مثالی ماده می توان حس کرد. اجازه دهد ابتدا یک تابع کسینوسی با فرکانس زاویه ای ω_0 را ملاحظه کیم:

$$v_1(t) = 2 \cos \omega_0 t$$

له در آن

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

پریود T برابر است با:

$$T = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \dots \\ &\quad + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \dots \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \end{aligned} \quad (1)$$

که فرکانس اصلی با رابطه زیر به پریود T مرتبط است:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

که a_0 و b_n ثابت‌های وابسته به n و $f(t)$ می‌باشند. معادله (1) فرم مثلثاتی سری فوریه است و روند تعیین مقادیر ثابت a_0 و b_n را تحلیل فوریه می‌نامند. هدف ما اثبات این قضیه نیست بلکه ایجاد روش‌های تحلیل فوریه و ایجاد قضیه‌ای معقول است.

چند انتگرال مثلثاتی مفید

قبل از محاسبه ثابت‌های سری فوریه ایجاده دهد چند انتگرال مفید را سرجمع کنیم. بگذارید t و n از عناصر از مجموعه اعداد صحیح باشند. در انتگرال‌های زیر، حدود انتگرال 0 و T فرض شده‌اند و فواصل پریود همواره یکسان‌است. متوسط یک موج سینوسی در یک پریود صفر است.

$$\int_0^T \sin n\omega_0 t dt = 0 \quad (2)$$

$$\int_0^T \cos n\omega_0 t dt = 0 \quad (3)$$

همچنین به سادگی می‌توان نشان داد که انتگرال‌های زیر صفرند.

$$\int_0^T \sin k\omega_0 t \cos n\omega_0 t dt = 0 \quad (4)$$

$$\int_0^T \sin k\omega_0 t \sin n\omega_0 t dt = 0 \quad (k \neq n) \quad (5)$$

$$\int_0^T \cos k\omega_0 t \cos n\omega_0 t dt = 0 \quad (k \neq n) \quad (6)$$

حالاتی که از معادلات (5) و (6) انتظار داریم، هم به سادگی محاسبه می‌شوند، داریم:

$$\int_0^T \sin^2 n\omega_0 t dt = \frac{T}{2} \quad (7)$$

$$\int_0^T \cos^2 n\omega_0 t dt = \frac{T}{2} \quad (8)$$

محاسبه ضرایب سری فوریه

کنون محاسبه ثابت‌های مجهول در سری فوریه به سادگی انجام می‌شود. ابتدا a_0 را به دست آوریم. اگر از هر دو طرف معادله (1) در یک دوره تناوب انتگرال بگیریم، داریم:

$$\int_0^T f(t) dt = \int_0^T a_0 dt + \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) dt$$

لی. هر جمله در جمع فوق به صورت معادلات (2) و (3) است. پس:

$$\int_0^T f(t) dt = a_0 T \quad (1)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (9)$$

گرچه T معمولاً زیرنویس صفر ندارد، ولی پریود فرکانس اصلی است. هارمونیک‌های این تابع سینوسی فرکانس‌های $n\omega_0$ دارند که در آن $n\omega_0$ فرکانس اصلی و ...، $n = 1, 2, 3, \dots$ است. فرکانس اولین هارمونیک، همان فرکانس اصلی می‌باشد. اکنون باید ولتاژ هارمونیک سوم را بایابیم:

$$v_{3a}(t) = \cos 3\omega_0 t$$

تابع اصلی $v_1(t)$ و سومین هارمونیک $v_{3a}(t)$ و مجموع این دو موج به صورت توابع زمانی در شکل ۱۸-۱(الف) نشان داده است. باید توجه داشت که حاصل جمع نیز تناوبی است و پریود آن $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ می‌باشد.

با تغییر دامنه و فاز هارمونیک سوم، تابع پریودیک حاصل تغییر می‌نماید. بنابراین شکل ۱۸-۱(ب) اثر ترکیب $v_1(t)$ و $v_{3b}(t)$ را با هارمونیک سومی که در آن دامنه حاصل کمی بزرگتر است، نشان می‌دهد:

$$v_{3b}(t) = 1.5 \cos 3\omega_0 t$$

با جایه‌جایی فاز هارمونیک سوم به صورت زیر:

$$v_{3c}(t) = \sin 3\omega_0 t$$

مجموع که در شکل ۱۸-۱(ج) دیده می‌شود، شکل متفاوتی دارد. در همه حالات، تناوب یا پریود موج برابر با پریود موج اصلی است. ماهیت موج به دامنه و فاز هارمونیک وابسته است و خواهیم دید که می‌توان امواجی را تولید کرد که مشخصه کاملاً غیرسینوسی را با ترکیب توابع سینوسی دارا هستند.

پس از آشنازی با کلیرد مجموع بینهایت تابع سینوسی و کسینوسی در نمایش پریودیک امواج اکنون به نمایش حوزه فرکانس یک موج نامتناوب کلی به روشن متابه تبدیل لاپلاس می‌پردازیم.

تمرین

۱۸-۱ اجزا زده هارمونیک سوم ولتاژی به هارمونیک اصلی به صورت $v = 2\cos \omega_0 t + V_{m3} \sin 3\omega_0 t$ اضافه شود. موج حاصل در شکل ۱۸-۱(ج) به ازای $V_{m3} = 1$ نشان داده شده است. (الف) مقدار V_{m3} را طوری به دست آورید که $v(t)$ را در $\omega_0 t = 2\pi/3$ دارای شبیه صفر باشد. (ب) $v(t)$ را در $\omega_0 t = 2\pi/3$ به دست آورد. جواب: ۰.۵۷۷ و -۱.۰۰۰.

سری فوریه

ابتدا تابع پریودیک $f(t)$ را که در بخش ۱۱-۲ ملاحظه کردیم با رابطه زیر در نظر می‌گیریم.

$$f(t) = f(t + T)$$

که در آن T دوره تناوب پریود است. به علاوه فرض می‌کنیم که $f(t)$ شرایط زیر را برآورده می‌کند.

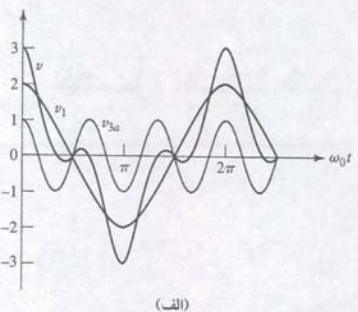
۱. $f(t)$ در هر جایی تک مقداری است، یعنی تعریف ریاضی یک تابع را برآورده می‌کند.

۲. انتگرال $\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)| dt$ در ازای هر t_0 وجود دارد (یعنی بینهایت نیست).

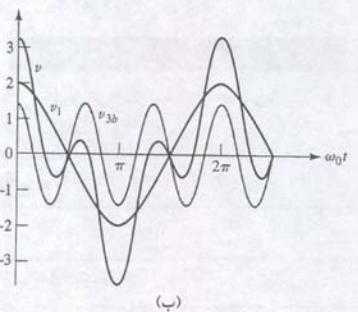
۳. تعداد گستگی‌های $f(t)$ در یک دوره تناوب معین است.

۴. $f(t)$ در ازای تعداد معینی ماکریم و مینیم در یک پریود است.

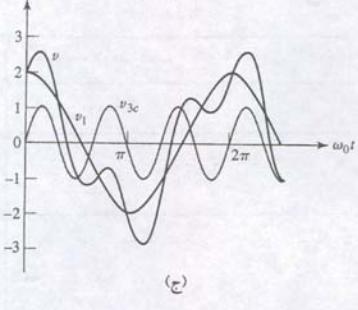
با فرض داشتن تابع پریودیک $f(t)$ ، قضیه فوریه بیان می‌کند که می‌توان $f(t)$ را با یک سری نامحدود نشان داد:



(الف)

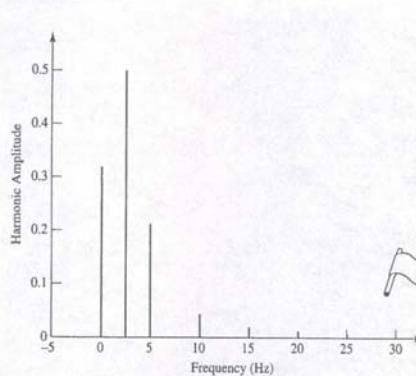


(ب)



(ج)

شکل ۱۸-۱ چند شکل موج مختلف از بینهایت موجود که می‌توان از ترکیب یک موج اصلی و هارمونیک سوم بدست آورد. موج اصلی $v = 2\cos \omega_0 t$ است و هارمونیک سوم برابر با $v_1 = 2\cos \omega_0 t$ است. (الف) $v_{3a}(t) = \cos 3\omega_0 t$ و (ب) $v_{3b}(t) = 1.5 \cos 3\omega_0 t$ و (ج) $v_{3c}(t) = \sin 3\omega_0 t$. شرایط زیر فرض می‌کنیم: هر ولتاژ یا جریان یا ولتاژ فرض می‌کنیم. هر تصدیق می‌کند. البته می‌توان توابع ریاضی نوشته که شرایط را تایید نکنند، ولی فرض بر این است که این چهار شرط همیشه برقرار باشد.



شکل ۱۸.۵

چنین نموداری که گاهی طیف گسته خوانده می‌شود، با یک نگاه سریع اطلاعات زیادی را در اختیار می‌گذارد. خصوصاً می‌توان دید که چند جمله از سری برای داشتن تقریبی منطقی از موج اصلی لازم است. در طیف خطی شکل ۱۸.۵ هارمونیک‌های هشتم و دهم تنها اصلاح کوچکی را فراهم می‌کنند (به ترتیب فرکانس‌های ۲۰ و ۲۵ هرتز). با حذف هارمونیک‌های بعد از ششم تقریب مناسب دارد. خوانده می‌تواند با مشاهده شکل ۱۸.۳ در این امر فضایت کند.

به یک نکته باید توجه کرد. در مثالی که ملاحظه کردیم، جملات سینوسی وجود نداشته و لذا دامنه هارمونیک a_m برابر a_n بود. اگر n برابر صفر نباشد، آن‌گاه دامنه مؤلفه در فرکانس $n\omega_0$ باید $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ باشد. این یک کمیت کلی است که باید در طیف خطی آن را نشان دهیم. هنگامی که راجع به فرم مختلط سری فوریه صحبت می‌کنیم، خواهیم دید که این دامنه خیلی سریاست تر به دست می‌آید.

علاوه بر طیف دامنه، طیف فاز گسته را نیز ایجاد می‌نماییم. در هر فرکانس $n\omega_0$ ، جملات سینوس و کسینوس را بایکدیگر ترکیب می‌کنیم تا زاویه فاز ϕ_n به دست آید.

$$a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos \left(n\omega_0 t + \tan^{-1} \frac{-b_n}{a_n} \right) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$$

یا

$$\phi_n = \tan^{-1} \frac{-b_n}{a_n}$$

در معادله (۱۶) در ازای هر n , $\phi = 0$ یا 180° است.

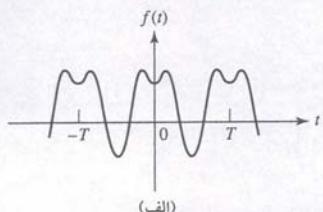
سری فوریه حاصل برای این مثال، جملات سینوسی هارمونیک‌های فرد را در میان جملات کسینوسی به جز هارمونیک اصلی نداشت. غایب بعضی جملات را می‌توان در سری فوریه انتظار داشت. این موضوع با بررسی تقارن تابع زمانی موجود قبل از انگرال‌گیری قابل پیش‌بینی است. ماستفاده از تقارن را در بخش زیر دنبال می‌کنیم.

۱۸-۲ استفاده از تقارن

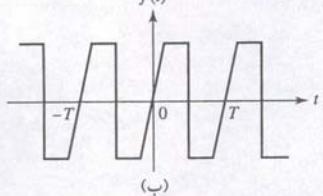
تقارن زوج و فرد

دو نوع تقارن که مابه راحتی می‌توانیم آن‌ها را تشخیص دهیم، تقارن تابع زوج و تقارن تابع فرد و یا ساده‌تر بگوییم، تقارن زوج و تقارن فرد است. گوییم تابع $f(t)$ دارای خاصیت تقارن زوج است اگر

$$f(t) = f(-t) \quad (17)$$



(الف)



(ب)

شکل ۱۸.۶ (الف) موجی با تقارن زوج. (ب) موجی با تقارن فرد.

تابعی چون t^2 , $\ln(\cos 3t)$, $\cos 3t$, $\sin^2 7t$ و ثابت C همگی خاصیت تقارن زوج دارند. جایگزینی t با $-t$ (مقدار هیچ یک از این توابع را عوض نمی‌کند). این تقارن را می‌توان به صورت گرافیکی نیز تشخیص داد. اگر $f(-t) = f(t)$ باشد، آن‌گاه تقارن تصویری حول محور $f(t)$ وجود دارد. تابع شکل ۱۸-۶(الف) تقارن زوج دارد. اگر شکل حول محور $f(t)$ تا شود، آن‌گاه بخش‌های مثبت و منفی تابع دقیقاً روی هم منطبق می‌شوند.

تابع فرد را چنین تعریف می‌کنیم که اگر در تابع $f(t)$ تقارن فرد وجود داشته باشد، آن‌گاه

$$f(t) = -f(-t) \quad (18)$$

به بیان دیگر اگر t با $-t$ (جایگزین شود، آن‌گاه منفی تابع حاصل می‌گردد. مثلاً t , $\sin t$, $t \cos 70t$, $t \sqrt{1+t^2}$ و تابع ترسیم شده در شکل ۱۸-۶(ب) همگی تقارن فرد دارند).

$$a_1 = 5V_m \int_{-0.1}^{0.1} \cos^2 5\pi t dt = \frac{V_m}{2} \quad (13)$$

در صورتی که اگر n برابر واحد نباشد، داریم:

$$a_n = 5V_m \int_{-0.1}^{0.1} \cos 5\pi t \cos 5\pi nt dt$$

اقدام به حل.

پس از حل داریم:

$$a_0 = \frac{V_m}{\pi} \quad (14)$$

$$a_n = 5V_m \int_{-0.1}^{0.1} \frac{1}{2} [\cos 5\pi(1+n)t + \cos 5\pi(1-n)t] dt \quad (n \neq 1)$$

یا

$$a_n = \frac{2V_m}{\pi} \frac{\cos(\pi n/2)}{1-n^2} \quad (n \neq 1) \quad (15)$$

انگرال‌گیری مشابهی نشان می‌دهد که برای هر مقدار n $a_n = 0$ است و به این ترتیب سری فوریه فاقد جملات سینوسی می‌باشد. پس سری فوریه حاصل از معادلات (۱)، (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) برابر است با:

$$v(t) = \frac{V_m}{\pi} + \frac{V_m}{2} \cos 5\pi t + \frac{2V_m}{3\pi} \cos 10\pi t - \frac{2V_m}{15\pi} \cos 20\pi t + \frac{2V_m}{35\pi} \cos 30\pi t - \dots \quad (16)$$

صحت حل را تصدیق کنید. آن‌ماضی است.

حل را می‌توان با اعمال مقدار در معادله (۱۶) و تکرار آن به دفعات، چک کرد. با این وجود روش دیگر ترسیم آن برای $n = 1, 2, 4, 6$ بطوری که در شکل ۱۸-۲ نزدیکتر است. جملات در تابع بیشتر باشد، می‌خواهیم به شکل ۱۸-۲ نزدیکتر باشیم.

تمرین

$$18-2 \quad \text{موج تناوب } f(t) \text{ به صورت زیر تعریف شده است: } -4 < t < 0.3, f(t) = 6; 0.3 < t < 0.5, f(t) = 0; 0.5 < t < 0.7, f(t) = 0.4; 0.7 < t < 0.9, f(t) = 0.3. \text{ مطلوب است (الف) } .$$

$$(b), (c), (d)$$

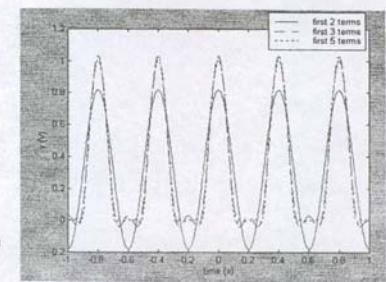
$$18-3 \quad \text{سری فوریه را برای سه موج ولتاژ شکل ۱۸-۴ بنویسید.}$$

$$18-2: 4.44, 1.383, -1.200$$

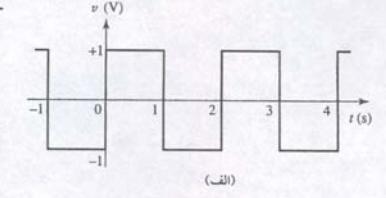
$$(4/\pi)(\sin \pi t + \frac{1}{3} \sin 3\pi t + \frac{1}{5} \sin 5\pi t + \dots) V$$

$$(4/\pi)(\cos \pi t - \frac{1}{3} \cos 3\pi t + \frac{1}{5} \cos 5\pi t - \dots) V$$

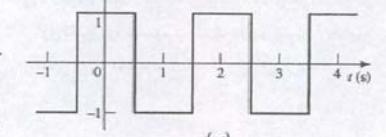
$$(8/\pi^2)(\sin \pi t - \frac{1}{9} \sin 3\pi t + \frac{1}{25} \sin 5\pi t - \dots) V$$



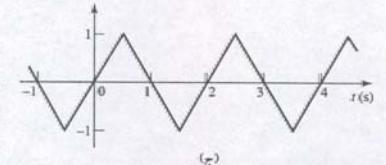
شکل ۱۸.۳ معادله (۱۶) با درنظرگرفتن $n = 1$ چهلة اول. برای سادگی فرض $V_m = 1$ کرد. این $n = 2$ چهلة اول. برای سادگی فرض $V_m = 2$ چهلة اول. برای سادگی فرض $V_m = 6$ چهلة اول.



(الف)



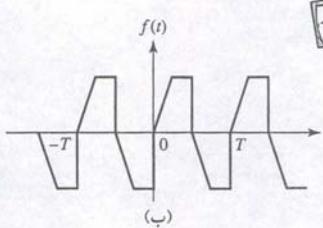
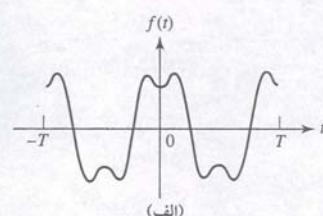
(ب)



(ج)

شکل ۱۸.۴

در شکل ۱۸-۲، (۱۷) از مثال ۱۸.۱ را به صورت گرافیکی و به فرم تابعی از زمان نشان داده شد. در معادله (۱۲)، (۱۷) به شکل تابعی تحلیلی از زمان بیان گشت که هر یک از نمایش‌های می‌توان در حوزه زمان تصور کرد. معادله (۱۶) (یعنی نمایش سری فوریه $f(t)$)، v ، t ، نیز در حوزه زمان بیان شده است، ولی به راحتی می‌تواند در حوزه فرکانس هم نمایش داده شود. مثلاً شکل ۱۸.۵ دامنه هر موجه $f(t)$ را که به آن طیف خطی می‌گویند، نشان می‌دهد. در این جا اندازه هر مؤلفه فرکانس (a_0 ، a_1 ، a_2) با طول خطی عمودی در فرکانس M مربوط (f_0) و غیره مشخص می‌شود. به خاطر سادگی $M = 1$ فرض می‌شود. اگر مقداری متغیرت برای M موجود باشد، تنها تغییر محور لایا مقدار جدید لازم است.



شکل ۱۸۷ (الف) موجی که تاحدودی شبیه شکل ۱۸۶ (الف) است، ولی تقارن نیم موج دارد.
(ب) موجی که شبیه شکل ۱۸۶ (ب) است و لی تقارن نیم موج دارد.

دقت کنید تا هارمونونیک زوج را با تابع زوج و هارمونونیک فرد را با تابع فرد اشتباہ نکنیم. مثلاً a_{10} ضریب یک هارمونونیک زوج است. ولی اگر $f(t)$ یک تابع زوج باشد، مقدار آن صفر است.

اکنون در اولین انگرال $\int_{-T/2}^0 f(-\tau) \cos(-n\omega_0\tau) (-d\tau) + \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt$ قرار دهد:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^0 f(-\tau) \cos(-n\omega_0\tau) (-d\tau) + \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} f(-\tau) \cos n\omega_0\tau d\tau + \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \right] \end{aligned}$$

ولی $f(\tau) = -f(-\tau)$ است ولذا

$$a_n = 0 \quad (\text{تقارن فرد}) \quad (21)$$

استدلالی مشابه ولی ساده‌تر نشان می‌دهد که

$$a_0 = 0 \quad (\text{تقارن فرد})$$

بنابراین با تقارن فرد $a_0 = 0$ و $a_n = 0$ است. بر عکس اگر $a_0 = 0$ و $a_n = 0$ باشد، تابع تقارن فرد دارد.
می‌توان b_n را دوباره با انگرال‌گیری در نصف محدوده به دست آورد.

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (22)$$

مثال‌هایی از تقارن فرد و زوج در تمرین ۱۸-۳، قبل از این بخش ارائه شد. در بخش‌های (الف) و (ب) دو موج مربعی با دامنه‌ها و پریود مساوی توابع مفروض بودند. با این وجود با انتخاب مبدأ زمان، تقارن فرد در بخش (الف) و تقارن زوج در بخش (ب) ایجاد شده است و سری‌های حاصل به ترتیب شامل جملات فقط سینوسی و فقط کسینوسی‌اند. لازم به نذکر است که فقط $a_0 = 0$ را می‌توان طوری اختیار کرد که هیچ تقارن زوج یا فرد به وجود نیاید. در این صورت تعیین ضرایب جملات در سری فوریه حداقل دو برابر طولانی تر خواهد شد.

تقارن نیم موج

سری فوریه هر دو موج مربعی فوق یک مشخصه جالب دیگر نیز دارد: هیچ یک از آن‌ها هارمونونیک‌های^{*} زوج ندارند. یعنی فقط مؤلفه‌هایی از فرکانس در سری وجود دارند که فرکانس‌های آن‌ها مضارب فردی از فرکانس اصلی است. برای مقادیر زوج n و a_n ،
 b_n صفر نند. این نتیجه حاصل نیز دیگری از تقارن به نام تقارن نیم موج است. در این حالت گوییم $f(t)$ خاصیت تقارن نیم موج دارد. اگر

$$f(t) = -f(t - \frac{1}{2} T)$$

به عبارتی دیگر

$$f(t) = -f(t + \frac{1}{2} T)$$

به جز در تغییر علامت، هر نیم سیکل مثل نیم سیکل دیگر است. تقارن نیم موج، برخلاف تقارن زوج و فرد تابعی از انتخاب نقطه $t = 0$ نیست. بنابراین می‌توان گفت که موج مربعی (شکل ۱۸-۴ (الف) یا (ب)) تقارن نیم موج دارد. هیچ یک از امواج شکل ۱۸-۶ دارای تقارن نیم موج نیستند ولی شکل موج‌های شکل ۱۸-۷ که تاحدودی تقارن دارند.

می‌توان نشان داد که سری فوریه هر تابعی که تقارن نیم موج دارد، شامل هارمونونیک‌های فرد است. اجازه بدهید ضرایب a_n را بررسی کنیم. داریم:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^0 f(t) \cos n\omega_0 t dt + \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \right]$$

مشخصات گرافیکی تابع فرد آشکار است. اگر بخشی از $f(t)$ را برابر 0 حول محور مثبت x بچرخد، دو نمودار بر هم منطبق خواهد شد و در واقع یکی بر روی دیگری قرار می‌گیرد. به بیان دیگر تقارن را نسبت به مبدأ داریم و نه همچون تابع زوج حول محور t .

با تعریف تقارن زوج و فرد، باید توجه کرد که ضرب دو تابع با تقارن زوج یا دو تابع با تقارن فرد، به یک تابع زوج منجر می‌گردد. به علاوه، ضرب یک تابع زوج در یک تابع فرد، یک تقارن فرد را به دنبال دارد.



تقارن و جملات سری فوریه

اکنون باید تأثیر تقارن را در یک سری فوریه تحقیق کنیم. اگر عبارتی را در نظر بگیریم که یک تابع زوج $f(t)$ و مجموع بینهایت جمله سینوسی و کسینوسی را برابر قرار دهد، آنگاه واضح است که مجموع نیز باید تابع زوجی باشد. در مر صورت سینوس یک تابع فرد است و هیچ جمعی از سینوس‌ها نمی‌تواند یک تابع زوجی به جز صفر تولید نماید (صفر هم زوج و هم فرد است). بنابراین چنین باید انتظار داشت که سری فوریه هر تابع زوج فقط از یک ثابت و توابع کسینوسی تشکیل می‌گردد. باید اکنون به دقت نشان دهیم که $b_n = 0$ است. داریم:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \\ &= \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^0 f(t) \sin n\omega_0 t dt + \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \right] \end{aligned}$$

حال بگذارید متغیر t را در اولین انگرال به $-t$ یا $-t = \tau$ تبدیل کنیم و از $f(t) = f(-t) = f(\tau)$ استفاده نماییم:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^0 f(-\tau) \sin(-n\omega_0\tau) (-d\tau) + \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \left[- \int_0^{T/2} f(\tau) \sin n\omega_0\tau d\tau + \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \right] \end{aligned}$$

اما تغییر نماد برای شناسایی متغیر انگرال نمی‌تواند مقدار انگرال را تغییر دهد.

$$\int_0^{T/2} f(\tau) \sin n\omega_0\tau d\tau = \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt$$

$$b_n = 0 \quad (\text{تقارن زوج}) \quad (19)$$

و دیده می‌شود که هیچ جمله سینوسی وجود ندارد. بنابراین اگر $f(t)$ تقارن زوجی را به نمایش بگذارد، آنگاه $b_n = 0$ است. بر عکس، اگر $b_0 \neq 0$ باشد، آنگاه $f(t)$ باید تقارن زوج داشته باشد.

بررسی مشابهی روی عبارت a_n منجر به اینکه $a_n = 0$ است. این یعنی $\frac{1}{2} T$ تا $t = \frac{1}{2} T$ می‌گردد:

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (20)$$

می‌بینیم که a_n را برابر یک تابع زوج می‌توان با در برداشتن از $\int_{-T/2}^0 f(t) \cos n\omega_0 t dt$ دست آورد. یک تابع فرد فاقد جمله ثابت یا جملات کسینوسی در بسط فوریه‌اش می‌باشد.

بگذارید بخش دوم عبارت فوق را ثابت کنیم:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \\ &= \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^0 f(t) \cos n\omega_0 t dt + \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \right] \end{aligned}$$

$$v=0, 1 < t < 3, v=8t, -1 < t < 1 \quad v = -10, 7 < t < 9$$

و به همین ترتیب

سری فوریه را برای تمرین ۱۸-۴ (الف) و (ب) معین نمایید.

جواب ۱۸-۴: خیر، خیر، بله، ۸؛ خیر، خیر، خیر، ۸؛ خیر، بله، خیر، ۴؛

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1(\text{odd})}^{\infty} \frac{10}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi t}{4} + \sin \frac{n\pi t}{4} \right) \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n\pi} \left[\left(\sin \frac{3n\pi}{4} - 3\sin \frac{n\pi}{4} \right) \cos \frac{n\pi t}{4} + \left(\cos \frac{n\pi}{4} - \cos \frac{3n\pi}{4} \right) \sin \frac{n\pi t}{4} \right] \end{aligned}$$

جدول ۱۸-۱ خلاصه‌ای از ساده‌سازی‌های مبتنی بر سری فوریه.

نوع متقارن	مشخصه	ساده‌سازی
زوج	$f(t) = -f(t)$	$b_n = 0$
فرد	$f(t) = -f(-t)$	$a_n = 0$
نیم موج	$f(t) = -f\left(t - \frac{T}{2}\right)$ یا $f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$	$a_n = \begin{cases} \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt & n \text{ فرد} \\ 0 & n \text{ زوج} \end{cases}$ $b_n = \begin{cases} \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt & n \text{ فرد} \\ 0 & n \text{ زوج} \end{cases}$
نیم موج و زوج	$f(t) = -f\left(t - \frac{T}{2}\right)$ $f(t) = -f(t)$ یا $f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$ $f(t) = -f(t)$	$a_n = \begin{cases} \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \cos n\omega_0 t dt & n \text{ فرد} \\ 0 & n \text{ زوج} \end{cases}$ $b_n = 0$
نیم موج و فرد	$f(t) = -f\left(t - \frac{T}{2}\right)$ $f(t) = -f(-t)$ یا $f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$ $f(t) = -f(-t)$	$a_n = 0$ $b_n = \begin{cases} \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \sin n\omega_0 t dt & n \text{ فرد} \\ 0 & n \text{ زوج} \end{cases}$

۱۸-۳ پاسخ کامل به توابع تحریک متناوب

کنون با استفاده از سری فوریه می‌توان یکتابع تحریک متناوب دلخواه را با مجموع بینهایت نایاب تحریک سینوسی نشان داد. پاسخ واداشته به هر یک از این توابع را می‌توان با تحلیل حالت ماندگار معین می‌کرد و پاسخ طبیعی هم از قطب‌های یک تابع تبدیل مناسب شbekه به دست می‌آید. مقادیر اویله موجود در تمام شبکه از جمله مقدار اویله پاسخ واداشته، اجازه می‌دهد تا دامنه پاسخ طبیعی انتخاب گردد. آن‌گاه پاسخ‌های واداشته و طبیعی حاصل می‌شود.

مثال ۱۸-۲

پاسخ متناوب موج مرتعی شکل ۱۸-۸ (الف)، همراه با مؤلفه dc آن، وقتی که به مدار RL سری شکل ۱۸-۸ (ب) اعمال شود را بیابید. تابع تحریک در $v = 0$ اعمال می‌شود و جریان پاسخ موردنظر است. مقدار اویله آن صفر می‌باشد.

تابع تبدیل، یک فرکانس اصلی $\omega_0 = 2 \text{ rad/s}$ دارد و سری فوریه آن با مقایسه سری نوریه موج شکل ۱۸-۴ (الف) در تمرین ۱۸-۳ نوشتہ می‌شود:

$$v_s(t) = 5 + \frac{20}{\pi} \sum_{n=1(\text{odd})}^{\infty} \frac{\sin 2nt}{n}$$

که می‌تواند به صورت زیر نمایش داده شود:

$$a_n = \frac{2}{T} (I_1 + I_2)$$

اکنون تغییر متغیر $t + \frac{1}{2}T$ را در انتگرال I_1 می‌دهیم:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{T/2} f\left(t - \frac{1}{2}T\right) \cos n\omega_0 \left(t - \frac{1}{2}T\right) dt \\ &= \int_0^{T/2} -f(\tau) \left(\cos n\omega_0 \tau \cos \frac{n\omega_0 T}{2} + \sin n\omega_0 \tau \sin \frac{n\omega_0 T}{2} \right) d\tau \end{aligned}$$

از طرفی ω_0 برابر 2π است و بنابراین

$$\sin \frac{n\omega_0 T}{2} = \sin n\pi = 0$$

پس

$$I_1 = -\cos n\pi \int_0^{T/2} f(\tau) \cos n\omega_0 \tau d\tau$$

پس از توجه به فرم I_2 می‌توان نوشت:

$$a_n = \frac{2}{T} (1 - \cos n\pi) \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt$$

ضریب $(1 - \cos n\pi)$ چنین مشخص می‌کند که اگر n زوج باشد، $a_n = 0$ است. پس:

$$a_n = \begin{cases} \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt & n \text{ فرد} \\ 0 & n \text{ زوج} \end{cases} \quad (۱۳)$$

تحقیقی مشابه نشان می‌دهد که در ازای همه های زوج $b_n = 0$ است و بنابراین:

$$b_n = \begin{cases} \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt & n \text{ فرد} \\ 0 & n \text{ زوج} \end{cases} \quad (۱۴)$$

منذک می‌شویم که تقارن نیم موج ممکن است در امواجی با تقارن زوج یا تقارن فرد ظاهر گردد. مثلاً موج ترسیم شده در شکل ۱۸-۷ (الف) در دو تقارن زوج و نیم موج را دارد.

هنگامی که موجی تقارن نیم موج و یکی از دو تقارن زوج و فرد را دارد، می‌توان آن را در فاصله یک چهارم پریود، پا زاخت. a_n هم با انتگرال‌گیری در هر یک از یک چهارم پریود، می‌توان به دست آورد. پس:

$$\left. \begin{array}{l} a_n = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \cos n\omega_0 t dt \\ a_n = 0 \\ b_n = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (\text{تقارن نیم موج و زوج}) \\ n \\ (\text{تقارن نیم موج و فرد}) \end{array} \quad (۱۵)$$

$$\left. \begin{array}{l} a_n = 0 \\ b_n = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \sin n\omega_0 t dt \\ b_n = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (\text{زوج و فرد}) \\ n \\ (\text{تقارن نیم موج و فرد}) \end{array} \quad (۱۶)$$

جدول ۱۸-۱ خلاصه‌ای از ساده‌سازی‌های آرازه کرده است.

۱۸-۴ هر یک از توابع توصیف شده را درست کنید. بگویید تقارن آن‌ها زوج است یا فرد، آیا تقارن نیم موج وجود دارد؟ پریود آن را مشخص نمایید:

$$(الف) \quad v = -5, 4 < t < 6, v = 5, 0 < t < 2, 2 < t < 4, v = 0, -2 < t < 0$$

به همین ترتیب، (ب) می‌شود:

بهتر است همیشه چند لحظه‌ای را صرف بررسی تقارن تابع کنید و بعد به یافتن سری فوریه آن بپردازید.

تمرین

تمرین

جواب: 2.396 A و 0.1034 A

ظاهرش نشان می‌دهد، ارزش معنید نیست. این تابع تصویر روشی از طبیعت پاسخ ارائه نمی‌دهد. آنچه که مالازم داریم ترسیمی از (t) بر حسب زمان است. این منحنی با محاسبات خسته کننده‌ای در لحظات متعددی از زمان رسم می‌گردد، یک کامپیوتر یا ماسین حساب برنامه‌پذیر هم می‌تواند کمک مؤثری در این کار بنماید. منحنی را می‌توان به صورت تقریب با جمع گرافیکی پاسخ طبیعی، جمله dc و چند هارمونیک اول به دست آورد. این کار هم عملی بی‌ارزش است.

وقتی که همه کارها گفته و انجام شد، آموزنده‌ترین حل برای این مسئله شاید با تکرار تحلیل گذرا باشد. یعنی فرم پاسخ مطمئناً در فاصله $t = 0$ تا $t = \pi/2$ s باشد. یک تابع نمایی است. این کار محاسبه است. این کار اولیه‌ای برای دوره دوم است که به سمت A رو به افزایش است. پس از تعیین اول دوره، مقادار اولیه‌ای برای دوره دوم بعدی $2 < t < \pi$ است. این کار تا حصول به حالتی پریودیک تکرار می‌گردد. روش خصوصاً برای این مثال که تغییر ناچیزی در موج جریان در پریودهای متوالی $\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2} < t < \frac{5\pi}{2}$ وجود دارد، مناسب است. پاسخ جریان کامل در شکل ۱۸-۹ ترسیم شده است.

۱۸-۶ روش‌های فصل ۸ را برای تعیین مقدار جریان شکل ۱۸-۹ در آهای زیر به کار ببرید: (الف)، (ب) و (ج).

۱۸-۴ فرم مختلط سری فوریه

منگام یافتن طیف فرکانس، دیدیم که دامنه هر مؤلفه فرکانس به هر دو مقدار a_n و b_n وابسته است. یعنی هر دو جمله سینوسی و کسینوسی در دامنه نقش دارند. عبارت دقیق برای این دامنه، $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ بود. همچنین می‌توان دامنه را مستقیماً با استفاده از فرم سری فوریه که هر جمله آن یک تابع سینوسی با زاویه فاز است، به دست آورد. دامنه و زاویه فاز تابعی از $f(t)$ و n هستند. حتی راحت‌تر از سری فوریه این است که جملات سینوسی و کسینوسی به صورت توابع مابایی با ثابت‌های مختلط بیان شوند.

بنتا بگذارید فرم مثلثاتی سری فوریه را در نظر بگیریم:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

و سپس جملات سینوسی و کسینوسی را بانمایی جایگزین نماییم. در این صورت داریم:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{jn\omega_0 t} a_n - j b_n + e^{-jn\omega_0 t} a_n + j b_n \right)$$

کنون یک ثابت مختلط c_n تعریف می‌کنیم.

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - j b_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (27)$$

قادیر c_n همگی به n و $f(t)$ وابسته‌اند. اکنون فرض کنید n را با $(-n)$ جایگزین کنیم.

قادیر ثابت چگونه تغییر می‌کنند؟ ضرب این a_n و b_n با معادلات (۱۰) و (۱۱) تعریف شدند و اوضح است که

$$a_{-n} = a_n$$

ما

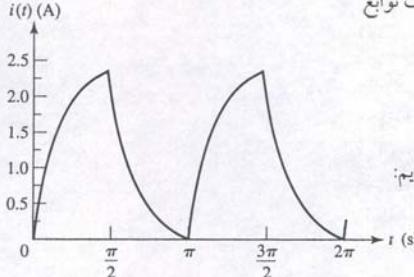
$$b_{-n} = -b_n$$

س از معادله (۲۷) داریم:

$$c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + j b_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (28)$$

نابراین

$$c_n = c_{-n}^*$$



شکل ۱۸-۹ بخش اولیه پاسخ کامل مدار

شکل ۱۸-۸ (ب) به تابع تحریک شکل ۱۸-۸ (الف).

قادیر a_n و b_n همگی به n و $f(t)$ وابسته‌اند. اکنون فرض کنید n را با $(-n)$ جایگزین کنیم.

قادیر ثابت چگونه تغییر می‌کنند؟ ضرب این a_n و b_n با معادلات (۱۰) و (۱۱) تعریف شدند و اوضح است که

$$a_{-n} = a_n$$

ما

$$b_{-n} = -b_n$$

س از معادله (۲۷) داریم:

$$c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + j b_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (28)$$

نابراین

$$c_n = c_{-n}^*$$

در به دست آوردن این حل، مجبور شدیم، چندین مفهوم اصلی معرفی شده در این فصل و

و

در به دست آوردن این حل، مجبور شدیم، چندین مفهوم اصلی معرفی شده در این فصل و

$$v_{sn}(t) = \frac{20}{n\pi} \sin 2nt$$

و

$$v_{sn} = \frac{20}{n\pi} (-j)$$

امپدانس ایجاد شده به وسیله مدار RL در این فرکانس چنین است:

$$Z_n = 4 + j(2n)2 = 4 + j4n$$

و لذا مؤلفه پاسخ واداشته در این فرکانس برابر است با:

$$I_{fn} = \frac{V_{sn}}{Z_n} = \frac{-j5}{n\pi(1 + jn)}$$

با تبدیل به حوزه زمان داریم:

$$\begin{aligned} i_{fn} &= \frac{5}{nn} \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \cos(2nt - 90^\circ - \tan^{-1} n) \\ &= \frac{5}{\pi(1+n^2)} \left(\frac{\sin 2nt}{n} - \cos 2nt \right) \end{aligned}$$

چون پاسخ به مؤلفه dc در واقع $V/4\Omega = 1.25 \text{ A}$ است، می‌توان پاسخ واداشته را به صورت

جمع زیر نشان داد:

$$i_f(t) = 1.25 + \frac{5}{\pi} \sum_{n=1(\text{odd})}^{\infty} \left[\frac{\sin 2nt}{n(1+n^2)} - \frac{\cos 2nt}{1+n^2} \right]$$

پاسخ طبیعی آشنای این مدار ساده یک جمله نمایی است (این جمله قطبی به فرم $i_f(t) = A_f V_s / (R + Ls)$ دارد).

$$i_n(t) = Ae^{-2t}$$

پس پاسخ کامل برابر است با

$$i(t) = i_f(t) + i_n(t)$$

و چون $0 = (0)$ است باید A به صورت زیر انتخاب گردد:

$$A = -i_f(0)$$

با $t = 0$ ، و فرض $i(0) = 0$ داریم:

$$A = -1.25 + \frac{5}{\pi} \sum_{n=1(\text{odd})}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

هر چند صحیح، ولی بهتر است از مقدار عددی این مجموع استفاده شود. مجموع پنج جمله

اول $\sum_{n=1}^5 \frac{1}{(1+n^2)} = 0.671$ می‌باشد و مجموع بیست

جمله اول 0.720 می‌گردد. پس:

$$A = -1.25 + \frac{5}{\pi} (0.720) = -0.104$$

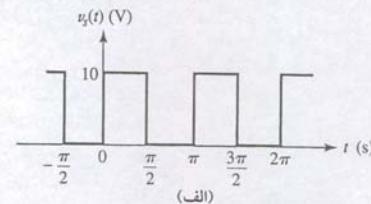
در به دست آوردن این حل، مجبور شدیم، چندین مفهوم اصلی معرفی شده در این فصل و

در به دست آوردن این حل، مجبور شدیم، چندین مفهوم اصلی معرفی شده در این فصل و

خواص بسیار ساده بود ولی نقش آنها در تحلیل کلی مشخص شد. در واقع، ماهیت حل این مسئله

به عنوان یافته مهمی در تحلیل مدار ساده نگاه خواهیم کرد. با این وجود، علی‌رغم این احساس

بالنده باید ذکر کرد که پاسخ کامل، مثل آنچه در مثال ۱۸-۲ به فرم تحلیلی دیدیم، آنقدر ک



شکل ۱۸-۸ (الف) تابع تحریک ولتاژ موج مربعی. (ب) تابع تبدیل بخش (الف) به این مدار و چون $0 = (0)$ است باید A به صورت زیر انتخاب گردد: $A = -i_f(0)$. اعمال شده است. پاسخ کامل $i(t)$ موردنظر است.

فارن‌ها در $f(t)$ قرار می‌گیرد. بنابراین عبارات مناسب برای c_n برایند با:

$$c_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (\text{زوج متقارن}) \quad (3)$$

$$c_n = \frac{-j2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t \, dt \quad (\text{فرد متقان}) \quad (32)$$

$$c_n = \begin{cases} \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) e^{-j n \omega_0 t} dt & \text{(نیم موج متران, } n \text{ فرد)} \\ 0 & \text{(نیم موج متران, } n \text{ زوج)} \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} \frac{4}{T} \int_0^{T/4} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt & \text{(نیم موج و زوج متناظر، } n \text{ فرد)} \\ 0 & \text{(نیم موج و زوج متناظر، } n \text{ زوج)} \end{cases}$$

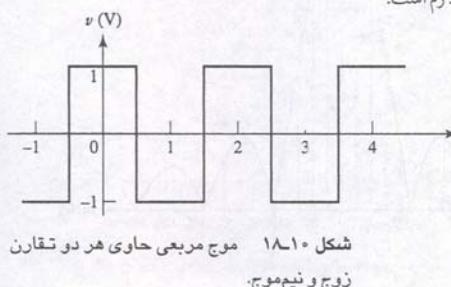
$$c_n = \begin{cases} -\frac{j4}{T} \int_0^{T/4} f(t) \sin n\omega_0 t dt & \text{(نیم موج و فرد متناظر، n فرد)} \\ 0 & \text{(نیم موج و فرد متناظر، n زوج)} \end{cases}$$

۱۸-۱۰ معین کنید.

من موج مربعی هر دو نوع تقارن زوج و نیم موج را دارد. اگر از این تقارن چشم بپوشیم و معادله کلی (30°) را به کار ببریم، با $T = \pi$ ، $\omega_0 = \frac{2\pi}{2}$ داریم:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\pi n t} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{-1}^{-0.5} -e^{-j\pi n t} dt + \int_{-0.5}^{0.5} e^{-j\pi n t} dt - \int_{0.5}^1 e^{-j\pi n t} dt \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{-j\pi n} (e^{-j\pi n t})_{-0.5}^{-0.5} + \frac{1}{-j\pi n} (e^{-j\pi n t})_{-0.5}^{0.5} + \frac{-1}{-j\pi n} (e^{-j\pi n t})_0^{1.0} \right] \\ &= \frac{1}{j2n\pi} (e^{jn\pi/2} - e^{jn\pi} - e^{-jn\pi/2} + e^{jn\pi/2} + e^{-jn\pi} - e^{-jn\pi/2}) \\ &= \frac{1}{j2n\pi} (2e^{jn\pi/2} - 2e^{-jn\pi/2}) = \frac{2}{\pi n} \sin \frac{n\pi}{2} \end{aligned}$$

با براین ملاحظه می شود که $c_0 = 0$, $c_1 = \frac{2}{\pi}$, $c_2 = 0$, $c_3 = \frac{2}{3\pi}$, $c_4 = 0$, $c_5 = \frac{2}{5\pi}$ و ... است. بنابراین مقداری با سری فوریه مثلثاتی حاصل در تعریف $\alpha - \beta$ برای موج شکل $a_{n_1} - a_{n_2}$ طبق دارد. بدین داشته باشید که هرگاه $a_{n_1} = a_{n_2}$ باشد، آنگاه $b_{n_1} = b_{n_2} = 0$ است.



مکل ۱۸۱۰ موج مربعی حاوی هر دو تقارن
ویج و نیم موج.

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_n &= \frac{4}{T} \int_0^{T/4} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt \\ &= \frac{4}{2} \int_0^{0.5} \cos n\pi t \, dt = \frac{2}{n\pi} (\sin n\pi t) \Big|_0^0 \\ &= \begin{cases} \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} & (n \neq 0) \\ 0 & (n = 0) \end{cases} \end{aligned}$$

سایج همان‌هایی هستند که در آن تقارن امواج لحاظ گردید.

و نیز اجازه دهد تا $a_0 = c_0$ باشد بنابراین $(t)f$ به صورت زیر بیان می شود.

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-jn\omega_0 t}$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-jn\omega_0 t}$$

بالآخره به جای جمع سری دوم روی مقادیر مثبت صحیح از ۱ تا ۱۰۰، روی مقادیر صحیح منفی از -۱ تا -۱۰۰- عمل جمع را تجام می دهیم:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (49)$$

بنابرآ توافق، مجموع از ۰۰ - تا ۰۰ + شامل جمله ۰ = n نیز می‌گردد.

معادله (۲۹) فرم مختلط سری فوریه برای $f(t)$ است. جمع و جوری آن یکی از دلایل مهم کاربرد آن است. برای تهیه عبارتی که به وسیله آن یک ضریب مختلط $e^{j\omega t}$ قابل محاسبه باشد، معادلات (۱۰) و (۱۱) را در معادله (۲۷) قرار می‌دهیم.

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt - j \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t \, dt$$

و سپس معادله نمایی سینوس و کسینوس را به کار برد و ساده می کنیم.

$$\mathbf{c}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (\text{Eq. 1})$$

بنابراین یک معادله خلاصه شده جای دو معادله مثلثاتی سری فوریه را می‌گیرد. به جای محاسبه دو انتگرال برای یافتن ضرایب سری فوریه فقط یک انتگرال‌گیری لازم است. علاوه بر آن معمولاً^۱ این انتگرال ساده‌تر هم هست. باید دقت کرد که معادله (۳۰) حاوی ضریب $\frac{1}{T}$ است، در صورتی که انتگرال‌های a_0 و b_0 هر دو ضریب $2/T$ دارند. با جمع و جور کردن دو رابطه اصلی برای فرم نهایی سری فوریه داریم:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (79)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{T/2} f(t) e^{-j\pi n\omega t} dt \quad (\text{Eq. 1})$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{L} \approx 1.57$$

دانهه مولّه سری فوریه نهایی در $c_0 = n\omega_0$ که ...
 $c_n = 0$, ± 1 , ± 2 , ... برابر است.
 می باشد. می توانیم منحنی طیف فرکانس گستته c_n را در برابر $n\omega_0$ یا $n\omega_0$ رسم کنیم که محور افقی هر دو مقدار مثبت و منفی را نشان دهد و پس از انجام آن، گراف حول مبدأ، تقارن خواهد داشت. زیرا معادلات (۲۷) و (۲۸) نشان می دهند که

از معادلات (۲۹) و (۳۰) ملاحظه می شود که دامنه مؤلفه سینوسی در $\omega = n\omega_0$ برابر $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2|c_n| = |c_n| + |c_{-n}|$ است. (n = 1, 2, 3, ...)

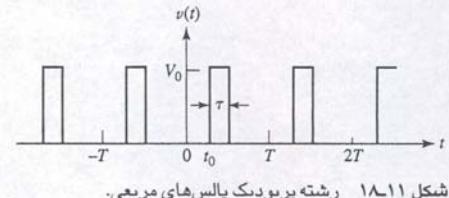
مثال ۱۸-۴

اکنون اجازه بدید مثالی مشکل تر و جالب تری را ملاحظه کنیم.

یکتابع $f(t)$ معین رشتہ ای از پالس های مربعی با دامنه V_0 و دوره تنابو τ است که هر T ثانیه یک بار رخ می دهدند، شکل ۱۸-۱۱. فرم نمایی سری فوریه را بروای $f(t)$ به دست آورید.

فرکانس اصلی $\frac{1}{T} = f_0$ است. تقارنی هم وجود ندارد و مقدار ضرب مختلط کلی هم از معادله (۳۶) به دست می آید.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{V_0}{T} \int_{t_0}^{t_0+\tau} e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{V_0}{-jn\omega_0 T} (e^{-jn\omega_0(t_0+\tau)} - e^{-jn\omega_0 t_0}) \\ &= \frac{2V_0}{n\omega_0 T} e^{-jn\omega_0(t_0+\tau/2)} \sin\left(\frac{1}{2}n\omega_0\tau\right) \\ &= \frac{V_0\tau}{T} \frac{\sin\left(\frac{1}{2}n\omega_0\tau\right)}{\frac{1}{2}n\omega_0\tau} e^{-jn\omega_0(t_0+\tau/2)} \end{aligned}$$



شکل ۱۸-۱۱ رشتہ پریودیک پالس های مربعی.

بنابراین مقدار c_n برابر است با

$$|c_n| = \frac{V_0\tau}{T} \left| \frac{\sin\left(\frac{1}{2}n\omega_0\tau\right)}{\frac{1}{2}n\omega_0\tau} \right| \quad (36)$$

و زاویه c_n برابر است با

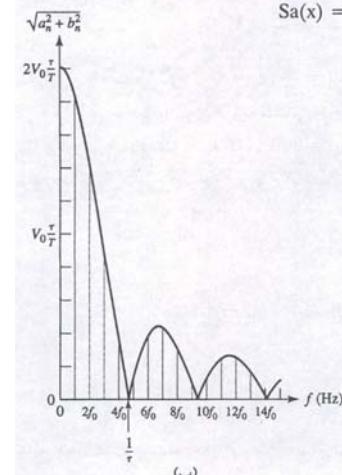
$$\text{ang } c_n = -n\omega_0 (t_0 + \frac{\tau}{2}) \quad (180^\circ) \quad (37)$$

معادلات (۳۶) و (۳۷) حل را برای سری فوریه نمایی نمایش می دهند.

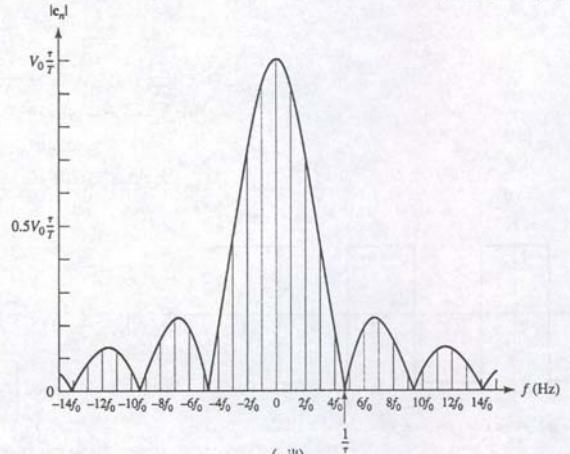
تابع نمونه برداری

عبارت مثلثاتی معادله (۳۶) که رارا در تئوری جدید مخابرات دیده می شود، و با آن تابع نمونه برداری می گویند. کلمه "نمونه برداری" به تابعی زمانی (شکل ۱۸-۱۱) اطلاق می شود که عمل نمونه برداری از آن حاصل می گردد. تولید این رشتہ از پالس ها و هر تابع $f(t)$ دیگر بیانگر نمونه های $f(t)$ در هر T ثانیه است. به شرط این که $f(t)$ کوچک و $f(0) = 0$ باشد، رابطه زیر را تعریف می کنیم:

$$Sa(x) = \frac{\sin x}{x}$$



(a)



(b)

شکل ۱۸-۱۲ (الف) طیف خطی متناظر برای $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ که $f = nf_0$ باشد. در برابر $f_0 = nf_0$ است.

تمرین

جواب: برای شکل های (الف) ۱۸-۴ (الف) : (ب) ۱۸-۴ (ج). ضریب کلی c_n را برای سری فوریه مختلط معین کنید.

۱۸-۵ تعریف تبدیل فوریه

اکنون که با مفاهیم نمایش سری فوریه توابع پریودیک آشنا شدید، اجازه دهید تبدیل فوریه را با بررسی طیف پالس های مربعی بخش قبل تعریف کنیم. این همان طیف گسته ای است که

سمت راست این عبارت تابعی از ω است (ونه^(۱)) و ما آن را با $F(j\omega)$ تکرار می‌نماییم:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (۴۴)$$

اگر $f(t)$ محدود باشد، مثلاً $|f(t)| \leq M$ باشد، آن‌ها را با ضرب و تقسیم مجموع با T آغاز خواهیم کرد.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n T e^{jn\omega_0 t} \frac{1}{T} \quad (۴۵)$$

به جای $T c_n$ کمیت جدید $F(j\omega)$ را می‌گذاریم و سپس از عبارات (۴۲) و (۴۳) کمک می‌گیریم. در حد، مجموع تبدیل به انتگرال می‌گردد و

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (۴۶)$$

معادلات (۴۴) و (۴۵) را مجموعاً چفت تبدیل فوریه گویند. $F(j\omega)$ تبدیل فوریه (t) و $f(t)$ عکس تبدیل فوریه (jω) است.

این چفت رابطه تبدیل، بسیار مفید است. باید آن‌ها را به خاطر داشته باشیم و همیشه در ضمیر خود نگهداشیم. برای تأکید بر اهمیت دو رابطه، آن‌ها را در داخل مستطیلی قرار می‌دهیم.

خواننده ممکن است متوجه چند شتابه بین تبدیل فوریه و تبدیل لاپلاس شده باشد. اختلاف کلیدی بین قرار است که انرژی ذخیره شده در حالت تحلیل تبدیل لاپلاس نقص بازی نمی‌کند، در صورتی که در تبدیل فوریه این طور نیست. همچنین در تبدیل لاپلاس چندین تابع زمانی وجود دارد (مثل نمایی افزایشی) که تبدیل فوریه برای آن‌ها موجود نیست. با این وجود اگر اطلاعات طیفی برخلاف پاسخ گذرا است، تبدیل فوریه در این جا خوب است سوالی را مطرح کنیم. آیا می‌توان برای تبدیل فوریه معادلات (۴۶)، تبدیل فوریه هر (t) دلخواه را به دست آورد؟ به نظر می‌رسد که برای تقریباً هر ولتاژ و جریان قابل تولید، جواب آری باشد. شرط کافی برای وجود $F(j\omega)$ این است که

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f(t) dt \quad (۴۷)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} F(j\omega) d\omega \quad (۴۸)$$

جملات نمایی در این دو معادله دارای علامات مخالف در نما هستند. برای حفظ آن‌ها چنین تجسم کنید که نمای مثبت متعلق به (t) است و این درست مثل سری فوریه مختلط در معادله (۴۹) است.

در اینجا خوب است سوالی را مطرح کنیم. آیا می‌توان برای تبدیل فوریه معادلات (۴۶)، تبدیل فوریه هر (t) دلخواه را به دست آورد؟ به نظر می‌رسد که برای تقریباً هر ولتاژ و جریان قابل تولید، جواب آری باشد. شرط کافی برای وجود $F(j\omega)$ این است که

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

و بنابراین از معادله (۴۱)، $F(j\omega)$ باید به سمت صفر میل کند. این مقدار کوچک را در حد با یک دیفرانسیل نشان می‌دهیم.

همان‌طور که قبلًاً گشود شد، رابطه چفت تبدیل فوریه یک به یک است. در ازای هر (t)

که $F(j\omega)$ و برای هر $F(j\omega)$ یک $f(t)$ خاص موجود می‌باشد.

مثال ۱۸-۵

روای به دست آوردن طیف پیوسته یک تک پالس مریعی شکل ۱۸-۱۳ (الف) از تبدیل فوریه استفاده کنید.

پالس با رابطه زیر تعریف می‌گردد.

$$f(t) = \begin{cases} V_0 & t_0 < t < t_0 + \tau \\ 0 & t < t_0 \text{ and } t > t_0 + \tau \end{cases}$$

تبدیل فوریه (t) از معادله (۴۶) (الف) به دست می‌آید:

$$F(j\omega) = \int_{t_0}^{t_0 + \tau} V_0 e^{-j\omega t} dt$$

همیشه باید برای توابع زمانی پریودیک آن را به دست آوریم. طیف بین لحاظ گسته است که فرم آن تابعی صاف و پیوسته از فرکانس نمی‌باشد. در عوض فقط دارای مقادیر غیر صفر در فرکانس‌های خاصی است.

با این وجود توابع تحریک مهمنم دارند که توابع پریود یکی از زمان نیستند، مثل یک تک پالس مریعی، تابع پله، تابع شب و یک پالس عجیب دیگر به نام تابع ضربه‌ای که در فصل ۱۴ دیدیم. می‌توان طیف فرکانس را برای چنین توابع نامتناوب به دست آورد ولی به لحاظ این که علی‌رغم کوچکی، در هر فاصله فرکانس غیر صفری مقداری انرژی وجود دارد، می‌توان طیف پیوسته را برای آن‌ها تصور کرد.

این مفهوم را با انتخاب یک تابع متناوب و افزایش پریود آن به بینهایت گسترش می‌دهیم. تجربه می‌باشد که دامنه پوش بدن تغییر شکل کاوش می‌باشد و مؤلفه‌های فرکانس بیشتری در هر فاصله فرکانس یافت می‌شود. مثلاً تعداد مؤلفه‌های فرکانس بین ۰ و ۱۰۰ Hz بینهایت می‌شود ولی دامنه هر یک به سمت صفر میل می‌نماید. در بدو امر وجود طیفی با دامنه صفر مفهومی کمی کننده دارد. می‌دانیم که طیف خطی هر تابع تحریک متناوب، دامنه هر مؤلفه فرکانس را نشان می‌دهد. اما طیف پیوسته با دامنه صفر تابع تحریک غیرپریودیک چه چیزی را بیان می‌کند؟ این سوال در بخش زیر پاسخ داده شده است. در اینجا در عبارات فوق حدگیری را دنبال می‌نماییم.

با فرم نمایی سری فوریه آغاز می‌کنیم.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (۴۹)$$

که

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (۴۰)$$

و

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (۴۱)$$

اجازه دهد

$$T \rightarrow \infty$$

و بنابراین از معادله (۴۱)، c_n باید به سمت صفر میل کند. این مقدار کوچک را در حد با یک دیفرانسیل نشان می‌دهیم.

$$c_n \rightarrow dc_n$$

پس

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} \rightarrow \frac{d\omega}{2\pi} \quad (۴۲)$$

سرانجام فرکانس هر هارمونیک $n\omega_0$ به متغیر فرکانس پیوسته‌ای که طیف بر حسب آن بیان می‌شود، تبدیل می‌گردد. به بیان دیگر، با میل ω_0 به صفر، n باید بینهایت گردد، به نحوی که حاصل ضرب مقدار معینی باقی بماند.

$$n\omega_0 \rightarrow \omega \quad (۴۳)$$

با گذاشتن این چهار حد در معادله (۴۰) در میان c_n که همان‌طور که قبلًاً پیش‌بینی شد، به سمت صفر میل خواهد کرد. اگر هر سمت معادله (۴۰) را در پریود T ضرب کنیم و حد بگیریم به نتیجه‌ای قابل توجه می‌رسیم.

$$c_n T \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$|\mathbf{F}(j\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} \quad (51)$$

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \frac{B(\omega)}{A(\omega)} \quad (52)$$

جایگزینی ω با $-\omega$ -نشان می‌دهد که $|F(j\omega)|$ هر دو توابعی زوج از ω می‌باشند.
در حالی که $f(t)$, $B(\omega)$ تابع زوجی از t باشد، پس عبارت زیر انتگرال معادله (۵۰) تابعی فرد از t

اکنون اگر $f(t)$ تابع زوجی از t باشد، پس عبارت زیر انتگرال معادله (۵۰) تابعی فرد از t است و به دلیل وجود حدود متقاضان، $B(\omega)$ به صفر واداشته می‌شود. بنابراین $f(t)$ اگر زوج باشد، تبدیل فوریه $F(j\omega)$ مربوط به آن هم تابعی حقیقی، زوج نسبت به ω و برای همه ω ها، و تابع فاز $\phi(\omega)$ صفر باشد. اگر $f(t)$ تابعی فرد از t باشد، آن‌گاه $A(\omega) = 0$ و $B(\omega) = F(j\omega)$ هم فرد و هم تابعی موهوم از ω است. $\phi(\omega) = \pm \frac{\pi}{2}$ می‌باشد. با این وجود به طور کلی $F(j\omega)$ تابعی مختلط از ω است.

بالاخره دقت کنید که جایگزینی ω با $-\omega$ -در معادله (۴۷) فرم مزدوج $F(j\omega)$ را تولید می‌نماید. پس

$$F(-j\omega) = A(\omega) - jB(\omega) = F^*(j\omega) \quad (53)$$

$$F(j\omega) F(-j\omega) = F(j\omega) F^*(j\omega) = A^2(\omega) + B^2(\omega) = |F(j\omega)|^2$$

همیت فیزیکی تبدیل فوریه

این خواص اساسی ریاضی تبدیل فوریه در ذهن، اکنون آن‌دادهایم اهمیت فیزیکی آن را ملاحظه نماییم. بگذارید فرض کنیم که $f(t)$ یا ولتاژ دو سر مقاومت Ω یا جریان درون آن اشده. بدین ترتیب $f(t)^2$ توان لحظه‌ای تلف شده در مقاومت Ω به وسیله $f(t)$ خواهد بود. با انتگرال این توان در تمام زمان‌ها انرژی کل تحويلی (t) به مقاومت Ω به دست خواهد آمد.

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt \quad (53)$$

کنون به حقه‌ای روی می‌آوریم. عبارت زیر انتگرال در معادله (۵۳) برابر حاصل ضرب $f(t)$ رخودش است. مایه جای یکی از آن‌ها معادله (۴۶) را می‌گذاریم:

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} F(j\omega) d\omega \right] dt$$

بنون $f(t)$ تابعی از متغیر انتگرال‌گیری ω نیست، آن را به داخل کروشه برده و ترتیب انتگرال‌گیری را تعویض می‌کنیم.

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} f(t) dt \right] d\omega$$

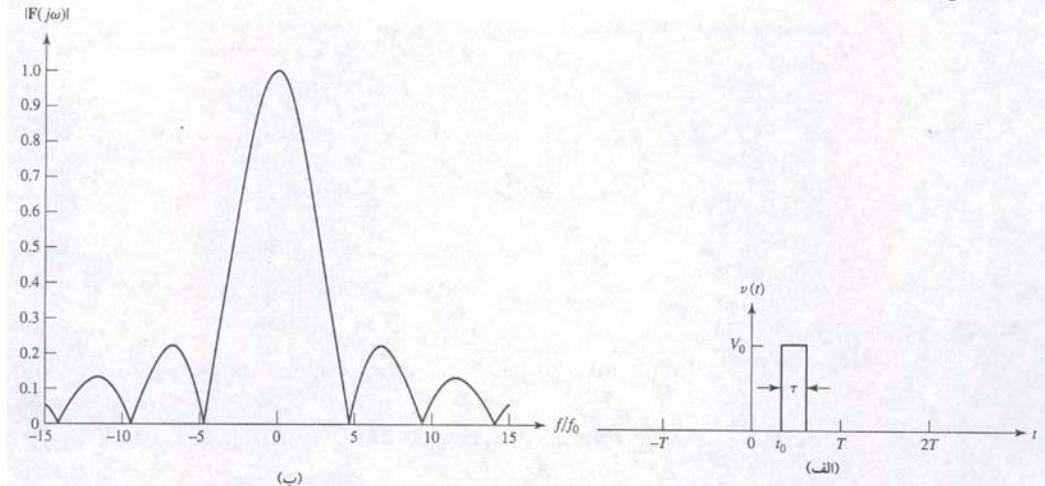
پس $F(j\omega)$ را از داخل انتگرال بیرون می‌کشیم و در این صورت این انتگرال با $|F(j\omega)|^2$ برابر شود:

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) F(-j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega$$

جمع‌بندی این نتایج داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega \quad (54)$$

معادله (۵۴) عبارت مفیدی است و قصیده پرسوال نامیده می‌شود. این معادله به همراه نادله (۵۳) چنین می‌گوید که انرژی مربوط به $f(t)$ را می‌توان با انتگرال‌گیری حول تمام زمان



شکل ۱۸-۱۲ (الف) یک پاس مربی متشابه با شکل ۱۸-۱۱. (ب) نمودار $|F(j\omega)|$ متعلق به پاس، با $V_0 = 1$, $V_0 = 1$, $\tau = 1$, $t_0 = 0$ و $\omega_0 = 1/1.5\pi$ فرکانس به مقدار ω_0 اندازه شده است که متعلق به شکل ۱۸-۱۲ (الف) است تا منحنی $|F(j\omega)|$ به عنوان تابعی از ω اندازه و ولتاژ در هر فرکانس را نشان نمی‌دهد. پس چه چیز را نشان می‌دهد؟ بررسی معادله (۴۵) (نشان می‌دهد که اگر $f(t)$ یک موج ولتاژ است، بُعد نیز "ولت بر واحد فرکانس" است. مفهومی که در بخش ۱۵-۱ معرفی گردید.

تمرین

- ۱۸-۸ اگر $f(t) = 0$ و $0 < t < 0.2$ s با $f(t) = 10$ V, $-0.2 < t < -0.1$ s با $f(t) = -10$ V, $-0.1 < t < 0$ با $f(t) = 0$, $0 < t < 0.1$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 0.2$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 0.3$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 0.4$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 0.5$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 0.6$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 0.7$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 0.8$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 0.9$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 1$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 1.1$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 1.2$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 1.3$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 1.4$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 1.5$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 1.6$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 1.7$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 1.8$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 1.9$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 2$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 2.1$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 2.2$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 2.3$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 2.4$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 2.5$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 2.6$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 2.7$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 2.8$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 2.9$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 3$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 3.1$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 3.2$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 3.3$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 3.4$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 3.5$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 3.6$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 3.7$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 3.8$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 3.9$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 4$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 4.1$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 4.2$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 4.3$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 4.4$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 4.5$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 4.6$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 4.7$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 4.8$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 4.9$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 5$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 5.1$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 5.2$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 5.3$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 5.4$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 5.5$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 5.6$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 5.7$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 5.8$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 5.9$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 6$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 6.1$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 6.2$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 6.3$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 6.4$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 6.5$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 6.6$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 6.7$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 6.8$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 6.9$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 7$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 7.1$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 7.2$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 7.3$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 7.4$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 7.5$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 7.6$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 7.7$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 7.8$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 7.9$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 8$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 8.1$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 8.2$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 8.3$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 8.4$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 8.5$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 8.6$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 8.7$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 8.8$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 8.9$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 9$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 9.1$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 9.2$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 9.3$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 9.4$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 9.5$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 9.6$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 9.7$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 9.8$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 9.9$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 10$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 10.1$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 10.2$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 10.3$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 10.4$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 10.5$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 10.6$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 10.7$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 10.8$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 10.9$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 11$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 11.1$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 11.2$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 11.3$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 11.4$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 11.5$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 11.6$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 11.7$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 11.8$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 11.9$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 12$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 12.1$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 12.2$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 12.3$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 12.4$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 12.5$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 12.6$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 12.7$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 12.8$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 12.9$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 13$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 13.1$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 13.2$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 13.3$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 13.4$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 13.5$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 13.6$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 13.7$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 13.8$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 13.9$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 14$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 14.1$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 14.2$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 14.3$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 14.4$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 14.5$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 14.6$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 14.7$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 14.8$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 14.9$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 15$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 15.1$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 15.2$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 15.3$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 15.4$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 15.5$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 15.6$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 15.7$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 15.8$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 15.9$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 16$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 16.1$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 16.2$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 16.3$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 16.4$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 16.5$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 16.6$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 16.7$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 16.8$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 16.9$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 17$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 17.1$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 17.2$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 17.3$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 17.4$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 17.5$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 17.6$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 17.7$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 17.8$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 17.9$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 18$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 18.1$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 18.2$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 18.3$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 18.4$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 18.5$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 18.6$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 18.7$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 18.8$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 18.9$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 19$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 19.1$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 19.2$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 19.3$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 19.4$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 19.5$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 19.6$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 19.7$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 19.8$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 19.9$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 20$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 20.1$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 20.2$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 20.3$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 20.4$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 20.5$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 20.6$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 20.7$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 20.8$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 20.9$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 21$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 21.1$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 21.2$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 21.3$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 21.4$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 21.5$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 21.6$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 21.7$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 21.8$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 21.9$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 22$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 22.1$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 22.2$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 22.3$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 22.4$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 22.5$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 22.6$ s با $f(t) = 10\pi$ rad/s, $0 < t < 22.7$ s با $f(t) =$

به طور کلی می‌بینیم که فیلتر میان‌گذار ایده‌آل اجازه می‌دهد تا انرژی واقع در فاصله فرکانسی از پیش تعیین شده‌ای حذف شود و انرژی واقع در بقیه فاصله را نگه می‌دارد. تبدیل فوریه به نویصف عملی کمک فیلتر بدون محاسبه واقعی (۱) کمک می‌نماید. هر چند بعداً خواهیم دید که با کمک تبدیل فوریه هم می‌توان در صورت تعایل، (۱) را به دست آورد.

تمرین

$$18-10 \quad \text{اگر } F_v(j\omega) = 10e^{20t} [u(t+0.1) - u(t-0.1)] A \text{ باشد، مطلوب است (الف) } F_v(j0), (ب) \phi_v(10), (د) B_v(10), (ج) F_v(j10)$$

$$18-11 \quad \text{انرژی } 1 \text{ مریوط به جریان } A(t) = 20e^{-10t} u(t) \text{ در فاصله‌های زیر را به دست آورید.} \\ (\text{الف}) \quad -0.1 < t < 0.1 \text{ s} \quad (\text{ب}) \quad -10 < \omega < \infty \text{ rad/s} \quad (\text{ج}) \quad 10 < \omega < 100 \text{ rad/s}$$

$$\begin{aligned} \text{جواب} & \quad 3.33 \angle -31.7^\circ A/\text{rad/s} \quad 3.63 A/\text{rad/s} \\ & \quad -1.749 - 31.7^\circ \text{ و } 2.83 A/\text{rad/s} \\ \text{جواب} & \quad 17.29 J \quad 10 J \quad 5 J \end{aligned}$$

۱۸-۷ جفت تبدیل فوریه برای بعضی توابع زمانی ساده

تابع ضربه واحد

کنون به جستجوی تبدیل فوریه تابع ضربه واحد $\delta(t-t_0)$ ، تابعی که در بخش ۱۴-۴ ملاحظه شده‌است، یعنی علاوه‌نده تابع خواص با توصیف حوزه فرکانس این تابع یکتا را بدانیم. اگر $\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\}$ برای نمادین کردن جمله "تبدیل فوریه { } استفاده کنیم، آن‌گاه:

$$\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \delta(t-t_0) dt$$

زبحث قبلی خود در مورد این گونه انتگرال‌ها داریم:

$$\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-j\omega t_0} = \cos \omega t_0 - j \sin \omega t_0$$

بن تابع مختلط از ω به چگالی انرژی Ω زیر رامی دهد:

$$|\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\}|^2 = \cos^2 \omega t_0 + \sin^2 \omega t_0 = 1$$

بن نتیجه چنین بیان می‌دارد که انرژی (۱) بر واحد عرض یا پهنای باند برای همه رکانس‌ها برابر واحد است و انرژی کل ذخیره شده در تابع ضربه واحد بسیار بزرگ است. تابع نجوم خواهد بود که نتیجه بگیریم تابع ضربه واحد یک تابع غیر عملی است زیرا قابل رلید در آزمایشگاه نمی‌باشد. حتی اگر می‌توانست در دسترس قرار بگیرد، پس از این‌که در هر دو پهنای باند محدود در وسیله آزمایشگاهی عملی قرار گیرد، باید دارای اعوجاج شود. چون بنابراین تابع زمانی و تبدیل فوریه ارتباط منحصر یک به یک وجود دارد، می‌توان گفت هر عکس تبدیل فوریه $e^{j\omega t_0} \delta(t-t_0)$ است. باه کارگیری نماد \mathcal{F}^{-1} برای عکس تبدیل، داریم:

$$\mathcal{F}^{-1}\{e^{j\omega t_0}\} = \delta(t-t_0)$$

ابراز اکنون می‌دانیم که

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} e^{-j\omega t_0} d\omega = \delta(t-t_0)$$

تئی اگر در تلاش خود برای ارزیابی مستقیم این انتگرال موفق باشیم، به طور سمبولیک می‌توان چنین نوشت:

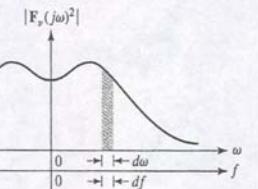
$$\delta(t-t_0) \Leftrightarrow e^{j\omega t_0} \quad (56)$$

مارک آنتوان پارسوا، ریاضی دان گعنای آورده. قضیه پارسوا مارا به درک بیشتر و تعبیر بهتر تبدیل فوریه رهمنون می‌کند. ولناز (۱) با تبدیل فوریه $F_v(j\omega)$ را در نظر بگیرید که انرژی در مقاومت Ω آن برابر W_Ω است:

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_v(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F_v(j\omega)|^2 d\omega$$

که در آن تساوی سمعت راست به این معنی است که $|F_v(j\omega)|^2$ یک تابع زوج از ω است. چون $W_{1\Omega} = 2\pi f$ است می‌توان نوشت:

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} |F_v(j\omega)|^2 df = 2 \int_0^{\infty} |F_v(j\omega)|^2 df \quad (55)$$



شکل ۱۸-۱۴ مساحت برش $|F_v(j\omega)|^2$ از ω در پنهانی باند df است را نشان می‌دهد.

اگر مقیاس فرکانس را به فواصل کوچکی مانند df تقسیم کنیم، معادله (۵۵) نشان می‌دهد که سطح برش دیفرانسیل به عرض df زیر منحنی $|F_v(j\omega)|^2$ برابر $|F_v(j\omega)|^2 df$ است. این سطح در روی شکل سایه زده شده است. از مجموع مساحت همه این برش‌ها با تغییر از $\omega = 0$ تا $\omega = \infty$ کل انرژی Ω ولناز (۱) به دست می‌آید. پس $|F_v(j\omega)|^2$ یا چگالی انرژی (Ω) یا انرژی بر واحد پهنای باند (J) ولناز (۱) است. این چگالی انرژی همیشه تابعی حقیقی، زوج و غیر منفی از ω است. با انتگرال گیری از $|F_v(j\omega)|^2$ در یک فاصله فرکانسی می‌توانیم انرژی کل واقع در آن فاصله را به دست آوریم. توجه کنید که چگالی انرژی مستقل از فاز $F_v(j\omega)$ است. پس تعداد توابع زمانی و تبدیلات فوریه‌ای که تابع چگالی انرژی یکسانی دارند، نامحدود است.

مثال ۱۸-۶

پالس نمایی یک طرفه [یعنی $0 \leq t < 0$] زیر را به ورودی یک فیلتر میان‌گذار اعمال می‌کنیم.

$$v(t) = 4e^{-3t} u(t)$$

اگر فیلتر میان‌گذار با $2H < f < 1$ تعریف شود، مطلوب است محاسبه انرژی خروجی کل. ولناز خروجی فیلتر را $v_0(t)$ نمایم. پس انرژی $v_0(t)$ را برابر با انرژی مؤلفه‌های فرکانسی واقع در $-1 < f < 1$ است. تبدیل فوریه $v_0(t)$ به دست می‌آوریم.

$$F_v(j\omega) = 4 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} e^{-3t} u(t) dt = 4 \int_0^{\infty} e^{-(3+j\omega)t} dt = \frac{4}{3+j\omega}$$

آن‌گاه می‌توان انرژی Ω کل را در سینگال ورودی با هر یک از دو رابطه زیر محاسبه کرد:

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_v(j\omega)|^2 d\omega = \frac{8}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{9+\omega^2} = \frac{16}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{9+\omega^2} = \frac{8}{3} J$$

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} v^2(t) dt = 16 \int_0^{\infty} e^{-6t} dt = \frac{8}{3} J$$

اما انرژی کل $v_0(t)$ از این است:

$$\begin{aligned} W_{01} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-4\pi}^{-2\pi} \frac{16d\omega}{9+\omega^2} + \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{16d\omega}{9+\omega^2} \\ &= \frac{16}{\pi} \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{d\omega}{9+\omega^2} = \frac{16}{3\pi} \left(\tan^{-1} \frac{4\pi}{3} - \tan^{-1} \frac{2\pi}{3} \right) = 0.358 J \end{aligned}$$

واز آن نتیجه می شود:

$$K \Leftrightarrow 2\pi K \delta(\omega) \quad (62)$$

و به این ترتیب مسئله حل شده است. طیف فرکانس تابع زمانی ثابت فقط از یک مؤلفه در $\omega = 0$ تشکیل شده است، این را زیر قبیل هم می دانستیم.

تابع علامت

به عنوان مثالی دیگر بگذارید تبدیل فوریه یک تابع یگانه به نام تابع علامت، $\text{sgn}(t)$ را که در زیر تعریف شده، بررسی کنیم.

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (63)$$

با

$$\text{sgn}(t) = u(t) - u(-t)$$



مجددآ باید سعی کنیم این تابع را در معادله تبدیل فوریه قرار دهیم، که پس از گذاشتن حدود انتگرال با یک عبارت بهم روبرو می شویم. هر بار بخواهیم تبدیل فوریه تابعی زمانی را به دست آوریم که برای $|t|$ در بینهایت تابع به صفر میل نکند، باز همین مشکل را خواهیم داشت. خوبشخانه می توان از این وضعیت با استفاده از تبدیل لاپلاس اجتناب کرد، زیرا این روش یک جمله همگرایکننده درونی دارد که بسیاری از مشکلات موجود در محاسبه تبدیل فوریه بعضی از توابع را رفع می نماید. تابع تبدیل را به صورت زیر می توان نوشت:

$$\text{sgn}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} [e^{-at} u(t) - e^{at} u(-t)]$$

توجه کنید عبارت داخل کروشه با بزرگ شدن $|t|$ به سمت صفر میل می کند. با به کارگیری تبدیل فوریه داریم:

$$\mathcal{F}\{\text{sgn}(t)\} = \lim_{a \rightarrow 0} \left[\int_0^{\infty} e^{-j\omega t} e^{-at} dt - \int_{-\infty}^0 e^{-j\omega t} e^{at} dt \right]$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-j2\omega}{\omega^2 + a^2} = \frac{2}{j\omega}$$

مؤلفه حقیقی صفر است زیرا $\text{sgn}(t)$ یک تابع فرد از t است. بنابراین:

$$\text{sgn}(t) \Leftrightarrow \frac{2}{j\omega} \quad (64)$$

تابع پله واحد

به عنوان آخرین مثال در این بخش، بگذارید به تابع آشنازی پله واحد $u(t)$ نگاه کنیم. این تابع به تعریف تابع علامت در بخش قبل، تابع پله واحد را چنین نمایش می دهیم.

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t)$$

رجفت تبدیل فوریه چنین است:

$$u(t) \Leftrightarrow [\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}] \quad (65)$$

جدول ۱۸-۲ خلاصه ای از مثال های مورد بحث در این بخش و چند جفت تبدیل فوریه دیگر که جزئیات آن ها بیان نشده را نشان می دهد.

که علامت \Leftrightarrow به معنی این است که دو تابع، جفت تبدیل فوریه را تشکیل می دهند. در ادامه ملاحظات خود در مورد تابع ضربه واحد باید تبدیل فوریه را به فرم زیر بررسی نماییم:

$$F(j\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$$

که تابع ضربه واحد در حوزه فرکانس بوده و در $\omega = \omega_0$ واقع است. آن گاه تابع $f(t)$ باید چنین باشد:

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \delta(\omega - \omega_0) d\omega = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t}$$

که در آن از خاصیت غربالی تابع ضربه واحد استفاده شده است. بنابراین اکنون می توان نوشت:

$$\frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow \delta(\omega - \omega_0)$$

یا

$$e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \quad (57)$$

همچنین با یک متغیر علامت ساده داریم:

$$e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi \delta(\omega + \omega_0) \quad (58)$$

واضح است که تابع زمانی در هر دو عبارت (57) و (58) مختلط اند و آن ها را نمی توان در آزمایشگاه تولید نمود. توابعی مانند $\cos \omega_0 t$ را می توان با تجهیزات آزمایشگاهی تولید کرد ولی $e^{j\omega_0 t}$ را نمی توان. با این وجود می دانیم که

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t}$$

و با تعریف تبدیل فوریه به سادگی دیده می شود که

$$\mathcal{F}\{f_1(t)\} + \mathcal{F}\{f_2(t)\} = \mathcal{F}\{f_1(t) + f_2(t)\} \quad (59)$$

بنابراین

$$\mathcal{F}\{\cos \omega_0 t\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} e^{j\omega_0 t}\right\} + \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t}\right\} = \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0)$$

که نشان می دهد توصیف حوزه فرکانس $\cos \omega_0 t$ یک جفت تابع ضرب واقع در $\omega = \pm \omega_0$ است. بناید تعجب کرد، زیرا در اولین بحث از فرکانس مختلط در فصل ۱۴، گفته شد که یک تابع سینوسی زمانی همیشه با یک جفت فرکانس موهومی واقع در $\omega = \pm j\omega_0$ نمایش داده می شود. بنابراین داریم:

$$\cos \omega_0 t \Leftrightarrow \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \quad (60)$$

تابع تحریک ثابت

اولین تابع تحریکی که چند فصل قبل ملاحظه کردیم و لذت یا جریان dc بود. برای یافتن تابع تبدیل فوریه تابع ثابت در زمان مثل $K = f(t)$ ، اولین تلاش ما جایگزینی این ثابت در معادله تبدیل فوریه و محاسبه انتگرال حاصل است. پس از آن عبارتی میهم را در دستتان خود خواهیم یافت. با این وجود خوبشخانه قبل این مسئله را در معادله (58) حل کرده ایم.

$$e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$$

می بینیم اگر $\omega = 0$ اختیار کنیم، آن گاه جفت تبدیل فوریه مطابق زیر خواهد بود:

$$1 \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \quad (61)$$

جدول ۱۸-۲ خلاصه‌ای از چند جفت تبدیل فوریه.

$f(t)$	$f(t)$	$F\{f(t)\} = F(j\omega)$	$ F(j\omega) $
	$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	
	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$	
	$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$	
	1	$2\pi\delta(\omega)$	
	$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$	
	$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$	
	$e^{-\alpha t} u(t)$	$\frac{1}{\alpha + j\omega}$	
	$[e^{-\alpha t} \cos \omega_d t] u(t)$	$\frac{\alpha + j\omega}{(\alpha + j\omega)^2 + \omega_d^2}$	
	$u(t + \frac{1}{2}T) - u(t - \frac{1}{2}T)$	$T \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega}{2}}$	

مثال ۱۸-۷

از جدول ۱۸-۲ برای یافتن تبدیل فوریه تابع زمانی $3e^{-4t} \cos 4t u(t)$ استفاده کنید.

با توجه به یک سطر مانده به آخر جدول داریم:

$$e^{-at} \cos \omega_d t u(t) \Leftrightarrow \frac{\alpha + j\omega}{(\alpha + j\omega)^2 + \omega_d^2}$$

بنابراین $\omega_d = 4$ و $\alpha = 1$ است داریم:

$$F(j\omega) = (3) \frac{1 + j\omega}{(1 + j\omega)^2 + 16}$$

برای تابع زمانی زیر تبدیل فوریه را در محاسبه کنید. (الف) $\omega = 12$
 (ب) $-4 \operatorname{sgn}(t) + 4 \cos 8t u(t)$ (ج) $5e^{-8t} u(t)$

برای تابع زمانی $j(4/\omega)$ (د) $F(j\omega)$ برابر باشد با (الف)
 $(8/\omega) \sin 5\omega$ (ز) $8[\delta(\omega - 3) + \delta(\omega + 3)]$ (ب)

$$\begin{aligned} & j0.667 - j0.6 \cdot 0.347 \angle -56.3^\circ, 10.01 \angle -178.1^\circ \\ & \text{جواب ۱۸-۱۲: } 0.800 \cdot 2.45, 2.00 \text{ و } 0.800 \cdot 2.45, 2.00 \end{aligned}$$

۱۸-۸ تبدیل فوریه یک تابع زمانی متناوب کلی

در بخش ۱۸-۵ گفتیم، می‌توان نشان داد که تابع متناوب هم مثل تابع نامتناوب تبدیل فوریه دارند. حال بگذارید تا این مطلب را برابر مینایی محکم بنا کنیم. یک تابع متناوب $f(t)$ با پریود T بسط سری فوریه را طبق آنچه در معادلات (۳۹)، (۴۰) و (۴۱) دیدیم، در نظر بگیرید.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (۳۹)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (۴۰)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (۴۱)$$

به یاد دارد که تبدیل فوریه یک مجموع برابر مجموع تبدیل تک‌تک جملات در آن است و چون c_n تابع زمان نیست، می‌توان نوشت:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathcal{F}\{e^{jn\omega_0 t}\}$$

پس از یافتن تبدیل $e^{jn\omega_0 t}$ از عبارت (۵۷) داریم:

$$f(t) \Leftrightarrow 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0) \quad (۶۶)$$

ین رابطه نشان می‌دهد که $f(t)$ دارای طیف گستنایی مشکل از تابع ضربه‌ای واقع در نقاطی روی محور $\omega = n\omega_0$ است که $n = \dots, -2, -1, 0, 1, \dots$ باشد. قوت هر ضربه ببرای مقدار متناظر ضربی فوریه در فرم مختلط بسط سری فوریه برای $f(t)$ است.

برای آزمایش این کار، بگذارید بینشیم عکس تبدیل فوریه سمت راست عبارت (۶۶) باز $f(t)$ شود یا خیر. این تبدیل معکوس می‌تواند چنین نوشته شود:

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \left[2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0) \right] d\omega \stackrel{?}{=} f(t)$$

چون جمله نمایی زیرنویس n ندارد، می‌توانیم جای انتگرال و جمع را عوض کنیم.

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega t} \delta(\omega - n\omega_0) d\omega \stackrel{?}{=} f(t)$$

تابع ω نیست، بنابراین نمی‌توان با آن مثل یک ثابت رفتار کرد. خاصیت غربالی تابع ضربه واحد نشان می‌دهد که

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \stackrel{?}{=} f(t)$$

$$\begin{aligned} F_0(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(z) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega(x+z)} v_i(x) dx \right] dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega z} h(z) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega x} v_i(x) dx \right] dz \end{aligned}$$

به نظر می‌رسد کار پیش‌رفت کرده است و انتگرال داخلی فقط تبدیل فوریه $v_i(t)$ است. به علاوه این بخش جمله z ندارد و می‌توان در هر انتگرال‌گیری روی z , آن را ثابت فرض کرد. پس می‌توان این تبدیل، $(F_i(j\omega), R)$ را کاملاً به بیرون همه علامات انتگرال‌گیری متنبّل نمود.

$$F_0(j\omega) = F_i(j\omega) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega z} h(z) dz$$

بالاخره بقیه انتگرال دوست قدریم ما یعنی یک تبدیل فوریه دیگر را نشان می‌دهد! این یکی تبدیل فوریه پاسخ ضربه است که ما آن را با $H(j\omega)$ نشان می‌دهیم، بنابراین همه تلاش مابه نتیجه ساده زیر متنه می‌شود:

$$F_0(j\omega) = F_i(j\omega) H(j\omega) = F_i(j\omega) F(h(t))$$

این نیز نتیجه مهم دیگری است: این رابطه تابع سیستم $H(j\omega)$ را به صورت نسبت تبدیل فوریه تابع پاسخ نه تبدیل فوریه تابع تحریک نشان می‌دهد. همچنین تابع سیستم و پاسخ ضربه جفت تبدیل فوریه را ایجاد می‌نماید.

$$h(t) \Leftrightarrow H(j\omega) \quad (47)$$

آن‌چه در پاراگراف فوق ملاحظه شد، بیانگر یک عبارت کلی است که تبدیل فوریه کانولوشن دو تابع زمانی، حاصل ضرب تبدیل‌های فوریه آن‌ها است:

$$\boxed{F(f(t) * g(t)) = F_f(j\omega) F_g(j\omega)} \quad (48)$$

عبارت فوق ممکن است یک بار دیگر مارانگران کند که چرا اصولاً ما حوزه زمان را برای کار نتایج می‌کنیم ولی باید به یاد داشت که ما چیزی را برای هیچ نمی‌دهیم، شاعری گفته بهترین خنده همراه با درد است. درد ما این جا مشکلات مقطعي، دریافتمن عکس تبدیل یک تابع پاسخ است و دلیل آن هم پیچیدگی ریاضي آن می‌باشد. از طرف دیگر یک کامپیوتر ساده رومیزی به احتیاج می‌تواند کانولوشن دو تابع زمانی را با سرعتی عالی فراهم کند. به این منظور می‌توان یک تبدیل فوریه سریع (FFT) را به سرعت به دست آورد و مان را در مثال مطلب زیر به دست خواهیم آورد. پس مزیت قاطعی برای کار در حوزه زمان و حوزه فرکانس وجود ندارد. برای مرستله جدید باید جداگانه تضمین گیری کرد. تصمیم باید بر اطلاعات موجود و امکانات کامپیوتری مبنی باشد.

تابع تحریکی به فرم زیر را در نظر بگیرید:

$$v_i(t) = u(t) - u(t-1)$$

پاسخ ضربه واحد را با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$h(t) = 2e^{-t} u(t)$$

بذا تبدیل فوریه متناظر را به دست می‌آوریم. تابع تحریک تفاضل بین دو تابع پله واحد است. این دو تابع یکی هستند، به جز این که یکی ۱ تابع بعد از دیگری شروع می‌شود. ما پاسخ ا در ازای $u(t)$ محاسبه می‌کنیم. پاسخ در ازای $1 - u(t - 1)$ هم با $1s$ تأخیر با آن برابر است. تفاضل بین این دو پاسخ جزئی، پاسخ کلی برای $v_i(t)$ است.

که دقیقاً همان معادله (۳۹)، یعنی بسط سری فوریه مختلط برای $f(t)$ است. حال می‌توانیم علامت سوالی که روی معادلات قبلی ملاحظه کردیم را برداریم و به این ترتیب وجود تبدیل فوریه برای تابع زمانی متناظر تحقق می‌پاید. در هر صورت تعجبی هم ندارد. در آخرین بخش ما تبدیل فوریه تابع کسینوس را محاسبه کردیم که تابعی کاملاً متناظر بود و مانند اشاره مستقیمی به تناوبی بودن آن نکردیم. با این وجود، در به دست آوردن تبدیل فوریه آن روش مستقیمی به کار نبردیم. اما اکنون از ازای ریاضی در دست داریم که به وسیله آن تبدیل خوبی سروراست تر حاصل می‌شود. برای نمایش این روش $\cos \omega_0 t = \cos \omega_0 t$ را یک بار دیگر در نظر بگیرید. ابتدا ضرایب فوریه c_n را محاسبه می‌کنیم.

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega_0 t e^{-jn\omega_0 t} dt = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = \pm 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

این عبارت فقط در $n = \pm 1$ دارای مقادیر غیر صفر است و بنابراین تمام طیف به صورت زیر خلاصه می‌گردد.

$$\mathcal{F}\{\cos \omega_0 t\} = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

که دقیقاً همان رابطه‌ای است که قبلاً به دست آمد. راحت شدیم!

۱۸-۱۴ مطلوب است (الف) (ب) (ج) $F(A \sin \omega_0 t)$

جواب: $j\pi A[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] + 2.5\pi[2\delta(\omega) - \delta(\omega + 6) - \delta(\omega - 6)]$

$$+ [18.85 \angle 18^\circ] \delta(\omega - 8) + [18.85 \angle -18^\circ] \delta(\omega + 8)$$

۱۸-۹ تابع سیستم و پاسخ در حوزه فرکانس

در بخش ۱۵-۵، موضوع تعیین خروجی یک سیستم فیزیکی بر حسب ورودی و پاسخ ضربه با استفاده از انتگرال کانولوشن و کار اوپله‌ای در حوزه زمان حل شد. ورودی، خروجی و پاسخ ضربه همگی توابع زمانی‌اند. به دنال آن دریافتمن که بهتر است در حوزه فرکانس کار کنیم، زیرا تبدیل لاپلاس کانولوشن دو تابع در واقع حاصل ضرب هر تابع در حوزه فرکانس است. در همین امتداد، این مطلب در تبدیل فوریه هم صحیح است.

برای انجام این کار، تبدیل فوریه خروجی سیستم را بررسی می‌کنیم. با فرض این‌که ورودی و خروجی ولتاژ باشند، تعریف اوپله تبدیل فوریه را اعمال کرده و خروجی را با انتگرال کانولوشن بیان می‌نماییم:

$$\mathcal{F}\{v_0(t)\} = F_0(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} v_i(t-z) h(z) dz \right] dt$$

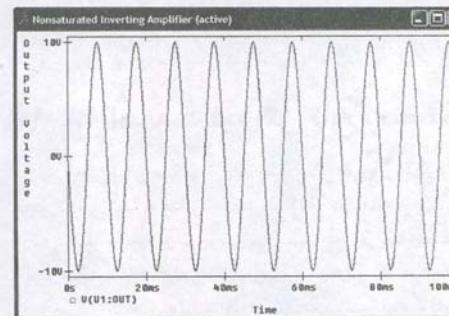
دوباره فرض می‌کنیم هیچ انرژی اولیه‌ای ذخیره نشده باشد. در ابتدا ممکن است این عبارت پیچیده به نظر برسد، ولی می‌توان تا حد شگفت‌انگیز آن را ساده کرد. چون جمله نمایی فاقد مستغیر انتگرال‌گیری است می‌توان آن را به داخل انتگرال منتقل کرد. سپس ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم و به دست می‌آوریم.

$$F_0(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} v_i(t-z) h(z) dt \right] dz$$

چون (z) تابع نیست آن را از داخل انتگرال خارج کرده و با تغییر $x = z - t$ آن را ساده می‌کنیم:

تحلیل کامپیوتویی

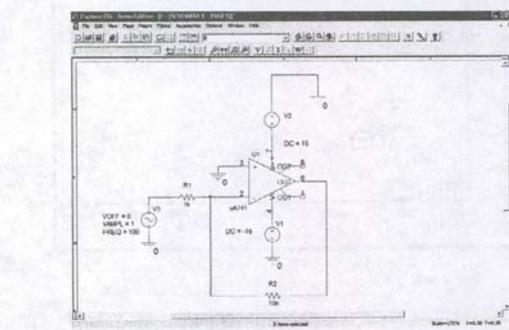
می شود. همان‌طور که انتظار می‌رفت طیف خطی ولتاژ خروجی این مدار تقویت‌کننده مشکل از یک ویژگی در فرکانس ۱۰۰ Hz است. با افزایش ولتاژ اوج ورودی، به ولتاژ اشباعی می‌رسیم که به وسیله منابع ولتاژ dc (در این مثال ۷ V ± ۱۵) برای راهاندازی به کار رفته‌اند. مثلاً یک ورودی با دامنه ۷ V شکل موج ولتاژ خروجی برده شده‌ای مانند شکل ۱۸-۱۸ را به دست می‌دهد. چون موج ولتاژ، دیگر یک سینوسی کامل نیست، انتظار می‌رود تا فرکانس‌های هارمونیک در طیف فرکانس تابع مطابق شکل ۱۸-۱۹ ظاهر گردند. تأثیر رسیدن به اشباع ایجاد اعوجاج در سیگنال است و اگر به یک بلندگو وصل شود، دیگر یک موج ساف ۱۰۰ Hz نخواهد بود. در عوض می‌توان آن را از تجمعی امواجی با فرکانس‌های ۳۰۰ و ۵۰۰ Hz علاوه‌بر ۱۰۰ Hz دانست. اعوجاج بیشتر موج سبب افزایش انرژی در فرکانس‌های هارمونیک می‌شود، به طوری که در این حالت



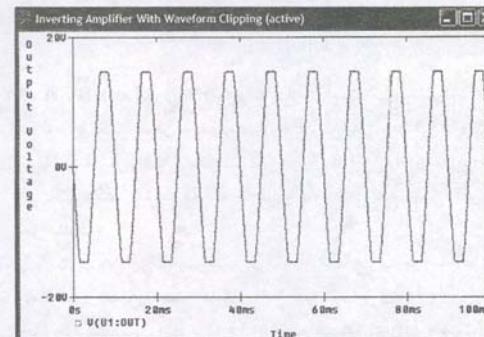
شکل ۱۸-۱۶ خروجی شبیه‌سازی شده شکل ۱۸-۱۵

مواردی که در این فصل ارائه شد، پایه بسیاری از زمینه‌های پیشرفت‌ده مطالعات از جمله پردازش سیگنال، مخابرات و کنترل است. مافق فقط قادریم بعضی از مفاهیم اصلی را در قالب مدارهای ساده ارائه کنیم ولی حتی در این مطلع تنها قسمتی از توانمندی‌های تحلیل مبتنی بر فوریه بیان شد. به عنوان اولین مثال، مدار op-amp شکل ۱۸-۱۵ را در نظر بگیرید، که با تقویت‌کننده عملیاتی μA741 در PSpice ساخته شده است.

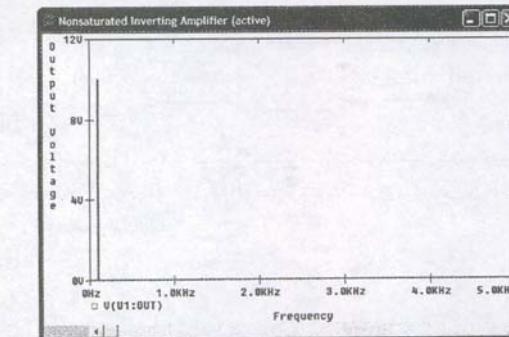
مدار دارای بهره ولتاژ ۱۰ است بنابراین انتظار داریم دامنه خروجی سینوسی ۷ V باشد. این نتیجه را در شکل ۱۸-۱۶ هم می‌توان ملاحظه کرد.



شکل ۱۸-۱۵ یک مدار تقویت‌کننده وارونگر با ورودی سینوسی . ۱۰۰Hz



شکل ۱۸-۱۸ تحلیل گذراي حاصل برای یک ورودی سینوسی ۱.۸V که تأثیر اشباع را نشان می‌دهد.



شکل ۱۸-۱۶ تقریب گستته تبدیل فوریه شکل ۱۸-۱۷ عرض محدود به دلیل محدودیت در تعداد پریویت شبیه‌سازی شده است.

تبدیل فوریه $u(t)$ را در بخش ۱۸-۷ مشاهده کردیم:

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

تابع سیستم از تبدیل لاپلاس $h(t)$ در جدول ۱۸-۲ به دست می‌آید.

$$\mathcal{F}\{h(t)\} = H(j\omega) = \mathcal{F}\{2e^{-t} u(t)\} = \frac{2}{1 + j\omega}$$

عكس تبدیل حاصل ضرب این دو تابع، مؤلفه $v_0(t)$ ناشی از $u(t)$ را نتیجه می‌دهد.

$$v_{01}(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2\pi\delta(\omega)}{1 + j\omega} + \frac{2}{j\omega(1 + j\omega)}\right\}$$

با استفاده از خاصیت غربالی تابع ضربه، عکس تبدیل اولین جمله مقادیر ثابت واحد است. بنابراین:

$$v_{01}(t) = 1 + \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{j\omega(1 + j\omega)}\right\}$$

دو مین جمله دارای ضرب جملات در مخرج و به فرم $(\alpha + j\omega)$ است و عکس تبدیل به سادگی با روش سطح به کسرهای جزئی می‌تواند به دست آید که مادر بخش ۱۴-۵ دیدیم. باید یک سطح به کسرهای جزئی را که مزیت زیادی دارد، برگزینیم گرچه روش‌های سریع‌تری در بسیاری از موارد وجود دارند. در صورت هر کسر کمیت مجهولی را تخصیص می‌دهیم:

$$\frac{2}{j\omega(1 + j\omega)} = \frac{A}{j\omega} + \frac{B}{1 + j\omega}$$

سپس مقادیری را برابر ω جایگزین کید. در اینجا $\omega = 10\pi$ را در نظر می‌گیریم:

$$1 = A + \frac{B}{2}$$

آنگاه $-2j\omega = -2$

$$1 = -\frac{A}{2} - B$$

در نتیجه $2 = -2A$ است. پس

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{j\omega(1 + j\omega)}\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{j\omega} - \frac{2}{1 + j\omega}\right\} = \text{sgn}(t) - 2e^{-t} u(t)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} v_{01}(t) &= 1 + \text{sgn}(t) - 2e^{-t} u(t) \\ &= 2u(t) - 2e^{-t} u(t) \\ &= 2(1 - e^{-t}) u(t) \end{aligned}$$

به همین ترتیب مؤلفه دوم $v_{02}(t)$ که به وسیله $v_{01}(t-1)$ تولید می‌شود برابر است با

$$v_{02}(t) = 2(1 - e^{-(t-1)}) u(t-1)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} v_o(t) &= v_{01}(t) + v_{02}(t) \\ &= 2(1 - e^{-t}) u(t) - 2(1 - e^{-1+t}) u(t-1) \end{aligned}$$

گستگی در $t = 0$ و $t = 1$ تابع را به سه بخش زمانی تقسیم می‌نماید.

$$v_o(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2(1 - e^{-t}) & 0 < t < 1 \\ 2(e-1)e^{-t} & t > 1 \end{cases}$$

۱۸-۱۵ پاسخ ضربه یک شبکه خطی $V_o(t) = 6e^{-20t} u(t)$ است. سیگنال ورودی $V_i(t)$ می‌باشد. مطلوب است (الف) $V_o(j\omega)$ ، (ب) $H(j\omega)$ ، (ج) $\text{sgn}(t)$ ، (د) $V_o(0.1)$ و (ه) $v_{0,max}$.

جواب: 0.5372 و $0.209V$ ، $0.532V$ ، $18/(20+j\omega)$ ، $3/(6+j\omega)$ ، $6/(20+j\omega)$

هر چند تبدیل $\cos\omega_xt$ را می‌دانیم، تبدیلی که مامی خواهیم به قرار زیر است:

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_x t + \beta)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \cos(\omega_x t + \beta) dt$$

اگر جایگزینی $\omega_x \tau + \beta = \omega_x t$ را انجام دهیم، آنگاه

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\cos(\omega_x t + \beta)] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau + j\omega\beta/\omega_x} \cos \omega_x \tau \, d\tau \\ &= e^{j\omega\beta/\omega_x} \mathcal{F}[\cos \omega_x t] \\ &= \pi e^{j\omega\beta/\omega_x} [\delta(\omega - \omega_x) + \delta(\omega + \end{aligned}$$

که جفت تبدیل فوریه جدید است.

$$\cos(\omega_x t + \beta) \Leftrightarrow \pi e^{j\omega\beta/\omega_x} [\delta(\omega - \omega_x) + \delta(\omega + \omega_x)] \quad (89)$$

که اکنون می‌تواند برای یک تابع سیستم مطلوب به کار رود.

$$H(j\omega) = \frac{\mathcal{F}\{\mathbf{B} \cos(\omega_x t + \phi)\}}{\mathcal{F}\{\mathbf{A} \cos(\omega_x t + \theta)\}}$$

$$= \frac{\pi Ae^{j\omega\phi/\omega_x} [\delta(\omega - \omega_x) + \delta(\omega + \omega_x)]}{\pi Ae^{j\omega\theta/\omega_x} [\delta(\omega - \omega_x) + \delta(\omega + \omega_x)]} = \frac{B}{A} e^{j\omega(\phi - \theta)/\omega_x}$$

عبارت $G(\omega_0)$ برابر بود با:

$$G(\omega_x) = \frac{B}{A} e^{j(\phi - \theta)}$$

که B و ϕ در $x = \omega$ محاسبه شده‌اند. اگر $H(j\omega)$ را هم در $x = \omega$ حساب کنیم، خواهیم داشت:

$$H(\omega_x) = G(\omega_x) = \frac{B}{A} e^{j(\phi - \theta)}$$

چون زیرنویس X چیز خاصی را نشان نمی دهد، پس آن را حذف می کنیم و نیز نتیجه می گیریم که تابع تبدیل و تابع سیستم یکی هستند:

$$H(j\omega) = G(\omega)$$

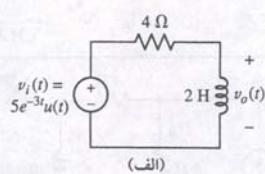
این که یکی از آرگومان‌ها ω و دیگری ω' است، اهمیتی ندارد. \mathcal{Z} صرفاً مقایسه مستقیم تری را می‌شود: تدبیاً های فوریه و لاپلاس، ممکن است مساوی باشند.

معادله (۷۰) ارتباط مستقیمی بین تکنیک‌های تبدیل فوریه و تحلیل حالت ماندگار سینوسی را نمایش می‌دهد. کار قابلی ما را روی تحلیل سینوسی حالت ماندگار به کمک فیزورها، حالت خاصی از حالت کلی تر تحلیل تبدیل فوریه است. خاصیت به این معنی که ورودی‌ها و خروجی‌ها سینوسی فرض شدند، در صورتی که تبدیل‌های فوریه و توابع سیستم امکان

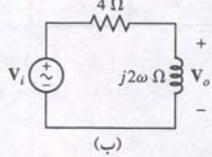
بنابراین برای یافتن تابع سیستم $H(j\omega)$ برای یک شبکه کافی است که تابع تبدیل سینوسی تناظر با حسب ω با $(j\omega)$ اید دست آوریم.

رلتاز ورودی یک پالس میرای نمایی ساده است. متابع سیستم را لازم داریم، ولی لازم نیست که یک تابع ضربه اعمال کنیم، باسخ ضربه را به دست اوردهم و سپس عکس تبدیل را یافتهیم. در عروض ما معادله (۷۰) را برای یافتن تابع سیستم ($j(w)$)H به کار می بزیم، با این فرض که رلتازهای ورودی و خروجی سیستمی بوده و با فیزورهای متناظر نمایش داده شوند، در

مثال ۱۸-۸

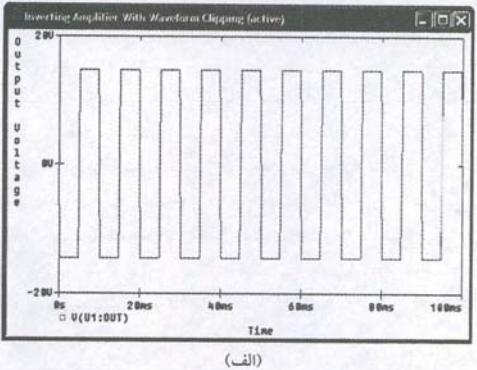


(الف)



(ب)

شکل ۱۸-۲۲ (الف) پاسخ (t) که به وسیله تولید شده است. (ب) تابع سیستم $H(j\omega)$ را می‌توان با تحلیل حالت ماندگار سینوسی به صورت $V_o(j\omega) = V_i(j\omega)H(j\omega)$ معین کرد.



The screenshot shows an oscilloscope displaying a waveform. The vertical axis is labeled "Output Voltage" and ranges from 0V to 2.0V. The horizontal axis is labeled "Frequency" and ranges from 0Hz to 2.0KHz. A single vertical spike is visible at approximately 0.1Hz. A small triangular pulse is visible near 1.8KHz.

۱۸-۱ اهمیت فیزیکی تابع سیستم

در این بخش سعی می کنیم تا چند جنبه تبدیل فوریه را بکاری که در چند فصل تکمیل شد، به هم مرتبط سازیم. شبکه دو دهانه N را بدون انتزاعی اولیه در نظر بگیرید و نیز فرض می کنیم توابع تحریک و پاسخ سینوسی مطابق شکل ۱۸-۲۱ و لتاژ پیشاند. ولتاژ ورودی را $A \cos(\omega_0 t + \theta)$ و $A \cos(\omega_0 t + \phi)$ نامیم که دامنه B و زاویه فاز خروجی را $v_o(t) = B \cos(\omega_0 t + \psi)$ می توانیم که تابعی از ω_0 هستند. می توانیم توابع تحریک پاسخ را به صورت $V_o = A e^{j\theta}$ و $v_o = B e^{j\psi}$ بنویسیم. نسبت پاسخ فیزوری به فیزوری تابع تحریک، عددی مخلوط است که تابعی از ω_0 می باشد:

$$\frac{V_o}{V_i} = G(\omega_x) = \frac{B}{A} e^{j(\phi - \theta)}$$

که G/A دامنه G , θ زاویه فاز آن است.تابع تبدیل $G(\omega_x)$ را می توان با تغییر ω_x در محدوده ای از مقادیر تولید کرد و A/θ و B/θ را برای هر مقدار ω_x اندازه گرفت. اگر هر یک از این پارامترها را برحسب فرکانس رسم کنیم، دو معادله حاصل به طور کامل تابع تبدیل را توصیف نخواهد کرد.

اکنون باید این تفسیرها را در یادمان نگه داریم و جنبه تا حدی متفاوت، از همین مستمله تحلیلی را ملاحظه کنیم. برای مداری باورودی و خروجی سینوسی، مثل مدار $18-21$ تابع سیستم $H(j\omega)$ چیست؟ برای پاسخ به این سوال، با تعریف $H(j\omega)$ به عنوان سنت تبدیلات فوریه خروجی و ورودی آغاز می‌کنیم. هر دو تابع زمانی دارای فرم تابعی $\cos(\omega_x t + \beta)$ هستند که تبدیل فوریه آن‌ها تاکنون محاسبه نشده است،

سینوس‌ها فرض می‌کنیم. با ضرب این تبدیل در تابع سیستم، تبدیل تابع پاسخ را به دست می‌آوریم که باز مجموعه پیوسته‌ای از سینوس‌ها است.

چه خروجی را مجموعه پیوسته‌ای از پاسخ ضربه‌ها دانیم و یا آن را مجموعه پیوسته‌ای از پاسخ‌های سینوسی تصور کنیم، خطی بودن و اصل تجمعی کمک می‌کند تا خروجی کل را به عنوان تابعی از زمان و مجموع تمام فرکانس‌ها (عکس تبدیل فوریه) و یا به عنوان تابعی از فرکانس با جمع در تمام زمان‌ها (تبدیل فوریه) تعیین کنیم.

متاسفانه هر دو تکنیک مشکلات و محدودیت‌هایی دارند. در مورد کاتولوشن، محاسبه انتگرال مشکل است، زیرا تابع تحریک یا پاسخ ضربه پیچیده است. علاوه بر آن به لحاظ تجزیب هم اندازه‌گیری پاسخ ضربه سیستم امری غیرممکن است، زیرا در عمل نمی‌توان تابع تحریک ضربه را تولید کرد. حتی اگر بخواهیم ضربه را با یک پالس باریک و بلند به طور تقریب تولید کنیم، سیستم اشایع می‌شود و از جایته عملکرد خطی خود خارج می‌گردد.

در مورد حوزه فرکانس، یک محدودیت بزرگ داریم و آن این که به سادگی می‌توان تابع تحریکی را در نظر گرفت که تبدیل فوریه نداشته باشد. علاوه بر آن اگر بخواهیم توصیف حوزه زمان تابع پاسخ را به دست آوریم، باید عکس تبدیل فوریه را حساب کنیم و این کار در بعضی مواقع بسیار مشکل است.

بالاخره هیچ یک از این روش‌های توانند مقادیر اولیه‌ای را وارد محاسبات نمایند. از این لحظه تبدیل لاپلاس ارجحیت دارد.

برگزین مریت ناشی از کاربرد تبدیل فوریه اطلاعات مفید فراوانی است که راجع به خواص طیفی سیگنال در اختیار می‌گذارد. خصوصاً می‌توان از اطلاعات مربوط به انرژی یا توان بر واحد پنهانی باند را نام برد. بعضی از این اطلاعات هم به سادگی به وسیله تبدیل لاپلاس حاصل می‌گردند. مباحث پیشتری را در این مورد ادامه نمی‌دهیم و آن را به مطالعات پیش‌فته‌تر و امی‌گذاریم.

خوب، سئوال این است که پس چرا تا اینجا چیزی گفته نشد؟ بهترین پاسخ شاید این باشد که تکنیک‌های قوی حل مسائل ساده را پیچیده‌تر می‌کند و تفسیر فیزیکی رفتار شبکه‌های ساده‌تر را می‌یچاند. مثلاً اگر ماقطع علاقمند به پاسخ واداشته هستیم، دلیل ندارد که با استفاده از تبدیل لاپلاس و با محاسبه یک تبدیل معکوس مشکل، هم پاسخ واداشته و هم پاسخ طبیعی را به دست آوریم. البته می‌توان به پیش رفت ولی همه چیزهای خوب به پایان می‌رسد. با آرزوی موفقیت در مطالعات بعدی شما.

کاربرد عملی

پردازش تصویر

هر چند در راستای درک کامل کار یک ماهیچه پیشرفت‌های بسیاری صورت گرفته است، هنوز سوالات زیادی مطرح است. تحقیقات زیادی هم با استفاده پایی قوریاغه انجام شده است (شکل ۱۸.۲۴).

یکی از این روش‌ها که بسیاری از دانشمندان تحلیل کر آن را به کار می‌برند، استفاده از میکروسکوپ الکترونی است. شکل ۱۸.۲۵ یک میکروگراف الکترونی از لایه‌ای از ماهیچه قوریاغه را نشان می‌دهد که نشان‌دهنده نظمی در آرایش myosin است که نوعی پروتئین contractile می‌باشد. برای بیولوژیست‌ها نکته جالب پریویدیکی بودن و عدم اطاعت آن در



شکل ۱۸.۲۴ چهره‌ای که یک بیولوژیست خیلی به آن علاقمند است.

شکل ۱۸-۲۲(ب) با به کارگیری تقسیم ولتاژ داریم:

$$H(j\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{j2\omega}{4 + j2\omega}$$

تبدیل فوریه تابع ورودی عبارت است از:

$$\mathcal{F}\{v_i(t)\} = \frac{5}{3 + j\omega}$$

تبدیل (t) V_o چنین است:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{v_o(t)\} &= H(j\omega) \mathcal{F}\{v_i(t)\} \\ &= \frac{j2\omega}{4 + j2\omega} \cdot \frac{5}{3 + j\omega} \\ &= \frac{15}{3 + j\omega} - \frac{10}{2 + j\omega} \end{aligned}$$

که کسرهای جزئی در آخرین گام برای تعیین عکس تبدیل فوریه به کار می‌روند:

$$\begin{aligned} v_o(t) &= F^{-1} \left\{ \frac{15}{3 + j\omega} - \frac{10}{2 + j\omega} \right\} \\ &= 15e^{-3t} u(t) - 10e^{-2t} u(t) \\ &= 5(3e^{-3t} - 2e^{-2t}) u(t) \end{aligned}$$

مسئله ما بدون دردرس‌های کاتولوشن و یا معادلات دیفرانسیل حل شد.

۱۸-۲۳ با استفاده از روی تبدیل فوریه در شکل ۱۸-۲۳، $i_1(t)$ را در $t = 1.5 \text{ ms}$ به دست آورید.

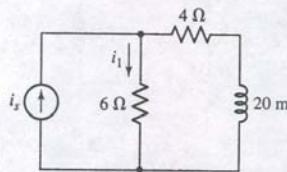
برابر است با (الف) A . (ب) $\delta(t) A$ و (ج) $\cos 500t A$.

جواب: 0.308 A و 0.683 A ، -141.7 A .

جمع بندی

به معادله (۷۰)، یعنی رابطه بین تابع سیستم $H(j\omega)$ و تابع تبدیل حالت ماندگار سینوسی $G(j\omega)$ باز می‌گردیم. اکنون تابع سیستم را به صورت نسبت فیزور خروجی به فیزور ورودی در نظر می‌گیریم. فرض کنید دامنه فیزور ورودی واحد و زاویه فاز آن صفر باشد. آن‌گاه فیزور خروجی $H(j\omega)$ است. تحت این شرایط، اگر دامنه خروجی فاز را برحسب تمام مقادیر ω ثبت کنیم، تابع سیستم را برحسب تمام مقادیر ω ثبت کرده‌ایم. در این صورت پاسخ سیستم را بررسی کرده‌ایم که متن‌الایه ورودی‌اش، بینهایت بسیگرال سینوسی، همه با دامنه واحد و فاز صفر اعمال شده است. اکنون فرض کنید ورودی یک تابع ضربه واحد باشد، سپس به پاسخ ضربه $h(t)$ توجه نمایید. آیا اطلاعات حاصل با آن‌چه که قبل از دست آمده متفاوت است؟ تبدیل فوریه تابع ضربه واحد قدر ثابت واحد است و نشان می‌دهد که همه مؤلفه‌های فرکانس وجود دارند، همگی دارای دامنه برابر و فاز صفر می‌باشند. پاسخ سیستم مجموع پاسخ‌هایه هم این مؤلفه‌ها است. می‌توان نتیجه را روی یک اسیلوسکوپ هم مشاهده کرد. واضح است که تابع سیستم و پاسخ ضربه از لحاظ تابع سیستم حاوی اطلاعات یکسانی هستند.

پس برای توصیف پاسخ یک سیستم به یک تابع تحریک کلی دو روش مختلف داریم. یکی تووصیف در حوزه زمان است و دیگری تووصیف در حوزه فرکانس می‌باشد. با کار در حوزه زمان می‌توانیم را روشی تابع تحریک و پاسخ ضربه سیستم اجرامی کنیم تا پاسخ به دست آید. در ابتدای مبحث کاتولوشن تکمیم که این روش را می‌توان به این صورت تعبیر کرد که ورودی مجموع پیوسته‌ای از توابع ضربه‌ای است که با قدرت متفاوت و در زمان‌های متفاوت اعمال می‌شوند. خروجی هم مجموع پیوسته‌ای از پاسخ‌های ضربه‌ها است. با این وجود در حوزه فرکانس، پاسخ را با ضرب تبدیل فوریه تابع تحریک در تابع سیستم به دست می‌آوریم. در این حالت، تابع تحریک را یک طیف پیوسته با مجموعه پیوسته‌ای از



شکل ۱۸.۲۳

تمرین

۱۸-۱۱ خلاصه فصل و مرور

فرکانس‌های هارمونیک یک تابع سینوسی که فرکانس اصلی ω_0 را دارد، برابر $n\omega_0$ است.

$$\text{قضیه فوریه بیان می‌کند که اگر یک تابع } f(t) \text{ خواص بخصوصی را دارد، قابل نمایش با سری نامحدود \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \text{ باشد که در آن } a_n = (1/T) \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t dt \text{ و } b_n = (2/T) \int_0^T f(t) \sin n\omega_0 t dt \text{ می‌باشد.}$$

تابعی تقارن زوج دارد که در آن $f(-t) = f(t)$ باشد.

تابعی تقارن فرد دارد که در آن $f(-t) = -f(t)$ باشد.

$$\text{تابعی تقارن نیم موج دارد که در آن } (f(t) - \frac{1}{2} T) = -f(t) \text{ باشد.}$$

سری فوریه یک تابع زوج فقط از یک ثابت و تابع کسینوسی تشکیل شده است.

سری فوریه یک تابع فرد فقط از یک ثابت و تابع سینوسی درست شده است.

سری فوریه هر تابع با تقارن نیم موج فقط شامل هارمونیک‌های فرد است.

$$\text{سری فوریه هر تابع را می‌توان به صورت مختلط با نامایی بیان کرد که در آن } c_n = (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \text{ است.}$$

تبدیل فوریه به ما اجازه می‌دهد تا توابع وابسته به زمان را مثل تبدیل لالاس در حوزه فرکانس نمایش دهیم، معادلات تبدیل عبارتند از:

$$f(t) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} F(j\omega) d\omega \quad F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f(t) dt$$

۱۸-۱۲ خواندنی‌های کمکی

A very readable treatment of Fourier analysis can be found in

A. Pinkus and S. Zafrany, *Fourier Series and Integral Transforms*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

Finally, for those interested in learning more about muscle research, including electron microscopy of tissue, an excellent treatment can be found in

J. Squire, *The Structural Basis of Muscular Contraction*. New York: Plenum Press, 1981.

۱۸-۱۳ فرم مثبتانی سری فوریه

$$4. \text{ (الف) موج ولتاژ } v(t) = 2 \cos \pi t + 1.8 \sin 4\pi t \text{ را در فاصله } 0 < t < T \text{ رسم کنید. (ب) مقدار حدکثر } (v(t)) \text{ را در این فاصله به دست آورید:}$$

آورید. (ج) اندازه منفی ترین مقدار $(v(t))$ را در این فاصله تعیین کنید.

5. را برای توابع زیر به دست آورید:

$$5 \cos 100t$$

$$5 \sin 100t$$

$$5 + \cos 100t$$

$$5 + \sin 100t$$

6. را برای توابع زیر به دست آورید:

$$100 \cos(5t - 180^\circ)$$

$$100 \sin(5t - 180^\circ)$$

پنج فرکانس هارمونیک اول $(n=1)$ را در این فاصله به دست آورید:

$$(الف) v_1(t) = 77 \cos(5t) V$$

$$(ب) i_1(t) = 32 \sin(5t) nA$$

$$(ج) q_1(t) = 4 \cos(90t - 85^\circ) C$$

$$(الف) v_2(t) = 8.5 \cos(2\pi t) nC$$

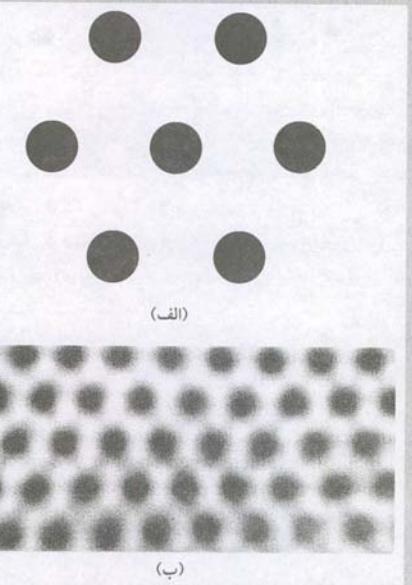
$$(ب) v_3(t) = 9 \sin(5.95t) MV$$

$$(ج) i_2(t) = 1.113 \cos(t - 45^\circ) pA$$

7. $v(t) = 3 - 3 \cos(100\pi t - 40^\circ) + 4 \sin(200\pi t + 10^\circ) + 2.5 \cos 300\pi t V$ را بگذارید -

8. V_{av} مطلوب است (الف)، V_{eff} (ب)، T (ج)، V_{eff} (د)، V_{avg} (ه).

$h(x) = \cos \omega_0 t$ در شکل ۱۸-۲۷ (ب) هم دیده می‌شود که اگر $\omega_0 \neq 0$ باشد مقدار صفر حاصل خواهد شد. اگر در عوض ماتابع فیلتری با همان فرکانس (x) انتخاب کنیم مقداری غیر صفر به دست می‌آوریم، یعنی: $\omega = \pm \omega_0$.



شکل ۱۸-۲۶ (الف) یک فیلتر فضایی با تقارن شش وجهی. (ب) تصویر پس از کانولوشن و عکس تبدیل فوریه گستته که کاهشی را در پارازیت زمینه می‌دهد.



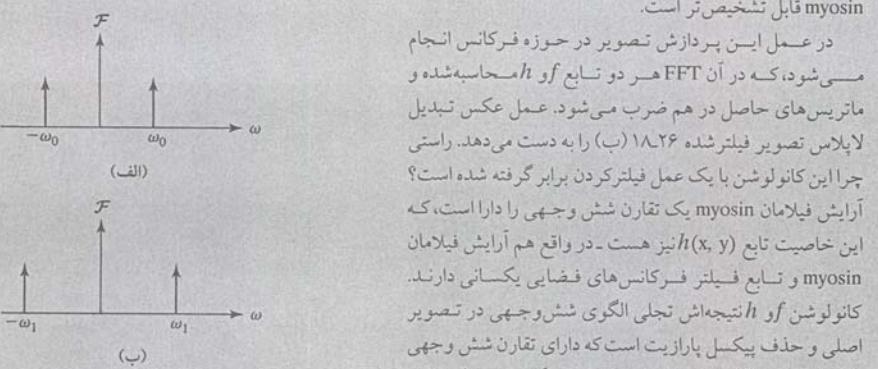
شکل ۱۸-۲۵ گراف الکترونیکی ناحیه‌ای از ماهیچه.

یک لایه ماهیچه وسیع است. برای ایجاد مدلی از برای این مشخصات، یک روش عددی را می‌توان به کار برد، تا تحلیل چنین تصاویری امکان‌پذیر باشد. با این وجود همان طور که در شکل مشاهده می‌شود، تصویر تولید شده به وسیله میکروسکپ الکترونی ممکن است با پارازیت‌های زمینه، تخریب شود و شناخت فیلامان‌های برونو ماهیچه را دچار خطأ نماید.

با معرفی روش‌های کمکی تحلیل مدارهای خطی متغیر با زمان، روش‌های مبتنی بر فوریه این فصل در واقع روش‌هایی قوی‌اند که کاربردهایی در دیگر زمینه‌ها فراهم شده است. از میان آنها، زمینه پردازش تصویر به دفات از تبدیل فوریه (FFT) و روش‌های عددی مربوط به پره می‌برد. تصویر شکل ۱۸-۲۵ توصیف با تابع فضایی $f(x, y)$ است که $f(x, y) = 0$ متعلق به سفید، $f(x, y) = 1$ متعلق به خاکستری و $f(x, y) = h(x, y)$ مشخص کننده یک پیکسل در تصویر است. با تعریف یک تابع فیلتر $h(x, y)$ در شکل ۱۸-۲۶ (الف) قابل مشاهده است عمل کانولوشن

$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y)$$

تصویر شکل ۱۸-۲۶ (ب) را نتیجه می‌دهد که در آن فیلامان یا لایه myosin قابل تشخیص تر است.



شکل ۱۸-۲۷ (الف) تبدیل فوریه $v = \cos \omega_0 t$. (ب) تبدیل فوریه $v = \cos \omega_0 t * h(t)$

۵۲. تابع مستناب $f(t)$ در پریود $0 < t < 4 \text{ ms}$ تعريف شده است. $f(t) = 10u(t) - 6u(t - 0.001) - 4u(t - 0.003)$. را پیدا کنید. $F(\omega)$

۵۳. اگر $F(j\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} [1/(|n|! + 1)] \delta(\omega - 20n)$ باشد، اگر $f(t) = f(0.05)$ باشد، مقدار $f(t)$ را بفرماید.

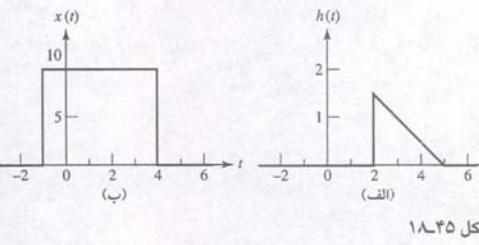
۵۴. اگر ورودی $x(t) = 5[u(t) - u(t - 1)]$ باشد با کانولوشن خروجی $y(t) = h(t) * x(t)$ را پیدا کنید: به شرطی که $h(t) = 2u(t - 2)$ و $(x(t) - 2u(t - 2))$.

۵۵. فرض کنید $h(t) = 5[u(t) - u(t - 2)]$ و $x(t) = 5[u(t) - u(t - 2)]$ باشد. $y(t)$ را در زمانهای $t = -0.4, 0.4, 0.4, 2$ با کانولوشن به دست آورید.

۱۸-۹ تابع سیستم و پاسخ در حوزه فرکانس

۵۶. پاسخ ضریب یک سیستم خطی برابر است با $c^{-2t}(e^{-t})$. اگر ورودی $u(t) = x(t)$ باشد، خروجی را برای $t > 0$ به دست آورید.

۵۷. پاسخ ضریب واحد ورودی به یک سیستم خطی در شکل ۱۸-۴۵ نشان داده شده است. (الف) یک عبارت انتگرالی برای خروجی به دست آورید که در فاصله $4 < t < 6$ معنی بوده و همچ تابع یگانهای به کار نرفته باشد. (ب) خروجی را در $t = 5$ محاسبه نمایید.



شکل ۱۸-۴۵

۵۸. با فرض سیگنال ورودی $x(t) = 5e^{-(t-2)} u(t-2)$ و پاسخ ضریب $h(t) = (4t-16)[u(t-4)-u(t-7)]$ ، مقدار سیگنال خروجی را در $t = 5$ (الف)، $t = 8$ (ب)، $t = 10$ (ج) به دست آورید.

۵۹. وقتی که یک سیستم خطی اعمال می شود، خروجی در $0 < t < \pi$ برابر $\sin t$ و در بقیه زمانها صفر است. اکنون اگر ورودی $u(t)^{-4}$ اعمال شود، مقدار عددی خروجی را در زمانهای داده شده مشخص کنید. (الف) ۱، (ب) ۲.۵ و (ج) ۴.

۶۰. فرض کنید $x(t) = 0.8(t-1) - u(t-3)$ و $y(t) = 0.2(t-2)[u(t-2) - u(t-3)]$ باشد. (ت) را برای (الف) را پیدا کنید.

۶۱. یک سیگنال $x(t) = 10e^{-2t} u(t)$ به یک سیستم خطی که پاسخ $y(t) = 10e^{-2t} u(t)$ باشد، اعمال شده است. خروجی را پیدا کنید.

۶۲. یک تابع ضریب به یک سیستم خطی اعمال شده و خروجی $h(t) = 5e^{-4t} u(t) V$ به دست آمده است. چند درصد از انرژی 1Ω

۱۸-۶ بعضی از خواص تبدیل فوریه

۴۲. با فرض $v(t) = 20e^{1.5t} u(-t-2)$ ، مطلوب است (الف) $F_v(j0)$ و (ب) $A_v(2)$, $C_v(2)$, $D_v(2)$ و $E_v(2)$.

۴۳. فرض کنید $i(t)$ جریان متغیر با زمان در مقاومت Ω باشد. اگر اندازه $|I(j\omega)| = (3 \cos 10\omega) [u(\omega) + i\omega b - 0.05\pi]$ باشد. مطلوب است (الف) تبدیل فوریه $i(t) = A/\omega + B\omega + C\omega^2 - D\omega^3$ باشد. (ب) این را پیدا کنید: به شرطی که $b = 0.05\pi$. (ج) چگالی انرژی در انرژی کل موجود در سیگنال (ب) فرکانس ω_x به نحوی که نصف کل انرژی در محدوده $|\omega| < \omega_x$ باشد.

۴۴. فرض کنید $f(t) = 10e^{-4t} u(t)$ باشد، مطلوب است (الف) انرژی Ω ارائه شده به وسیله سیگنال (ب) $|F(f\omega)|$ (ج) چگالی انرژی در $\omega = 4 \text{ rad/s}$ و $\omega = 0$.

۴۵. با فرض تابع زمانی $v(t) = 8e^{-2|t|} V$ باشد، مطلوب است (الف) انرژی Ω مربوط به این سیگنال. (ب) $|F_v(j\omega)|$ (ج) محدوده فرکانس $\omega_1 < \omega < \omega_2$ که در آن 90° درصد انرژی V قرار دارد.

۱۸-۷ جفت تبدیل فوریه برای بعضی توابع زمانی ساده

۴۶. از تعریف تبدیل فوریه برای اثبات نتایج زیر استفاده کنید، که در آن $\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = e^{-j\omega t_0} \mathcal{F}\{f(t)\}$ (الف) $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega)$ (ب) $\mathcal{F}\{f(kt)\} = (1/|k|) \mathcal{F}(j\omega/k)$ (ج) $\mathcal{F}\{df(t)/dt\} = j\omega \mathcal{F}\{f(t)\}$ (د) $\mathcal{F}\{tf(t)\} = j \int dF(j\omega)/d\omega$ (ه) $\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-j\omega)$ (ب) $\mathcal{F}\{f(t)\}$ به شرطی که $f(t)$ با روابط زیر داده باشد.

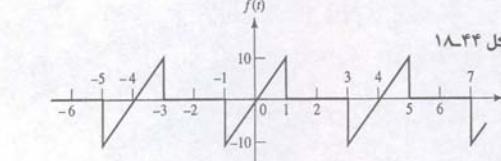
۴۷. مطلوب است $\mathcal{F}\{f(t)\}$ به شرطی که $f(t)$ با روابط زیر داده باشد. (الف) $\delta(t-1)$, $4[\operatorname{sgn}(t-1)] \delta(t)$, $4[\sin(10t-30^\circ)]$ (ب) $\operatorname{Acos}(\omega_0 t + \phi)$, $\operatorname{Asinh}(kt) u(t)$ (ج) $3\operatorname{sgn}(t-2) - 2\delta(t) - u(t-1)$.

۴۸. مطلوب است $F(j\omega)$ به شرطی که $f(t) = F(j\omega)$ باشد (الف) $\operatorname{Acos}(\omega_0 t + \phi)$, $\operatorname{Asinh}(kt) u(t)$ (ب) $3\operatorname{sgn}(t-2) - 2\delta(t) - u(t-1)$ (ج) $3u(\omega+3) - 3u(\omega-1) - 2\delta(\omega) + 3u(-3-\omega) - 3u(\omega-1)$.

۴۹. را در $t = 5$ به دست آورید به شرطی که $F(j\omega)$ باشد (الف) $3u(-3-\omega) + 3u(\omega+3) - 3u(\omega-1)$ (ب) $3u(\omega+3) - 3u(\omega-1) - 2\delta(\omega) + 3u(-3-\omega) - 3u(\omega-1)$ (ج) $3/(1+j\omega) + 3/j\omega + 3 + 3\delta(\omega-1)$ (د) $6(3+j\omega)/[(3+j\omega)^2 + 4]$ (ه).

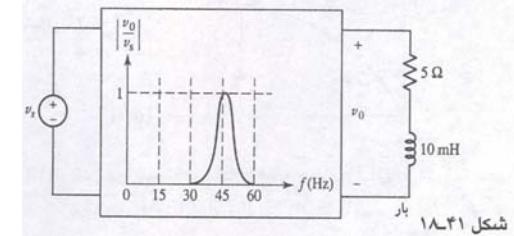
۱۸-۸ تبدیل فوریه یک تابع زمانی متناوب کلی

۵۱. تبدیل فوریه تابع زمانی متناوب شکل ۱۸-۴۴ را پیدا کنید.



شکل ۱۸-۴۴

۴۵. ولتاژ پریودیک V_s برای $0 < t < 40$ و $0 < t < 1$ باشد. مطلوب است (الف) $F_v(j0)$ و (ب) $A_v(2)$, $C_v(2)$, $D_v(2)$ و $E_v(2)$. مقاومت بار در شکل ۱۸-۴۱ را به دست آورید.



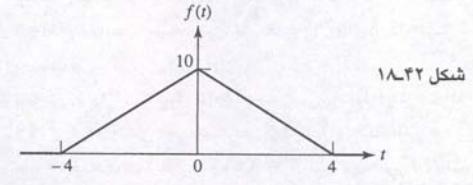
شکل ۱۸-۴۱

۱۸-۵ تعریف تبدیل فوریه

۴۶. با فرض تابع زمانی $v(t) = 5[u(t+3) + u(t+2) - u(t-2) - u(t-3)]$ (الف) $f(t)$ را رسم کنید. (ب) از تعریف تبدیل فوریه برای یافتن $F(j\omega)$ استفاده کنید.

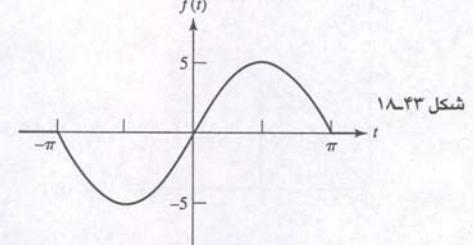
۴۷. از تعریف معادلات تبدیل فوریه برای یافتن $F(j\omega)$ استفاده نمایید (الف) $f(t) = a > 0, e^{-at} u(t)$ (ب) $f(t) = b > 0, e^{-bt} u(t)$ (ج) $f(t) = c > 0, t e^{-ct} u(t)$ (د) $f(t) = d > 0, t e^{-dt} u(t)$ (ه).

۴۸. تبدیل فوریه را برای پالس مثلثی شکل ۱۸-۴۲ به کار ببرید.



شکل ۱۸-۴۲

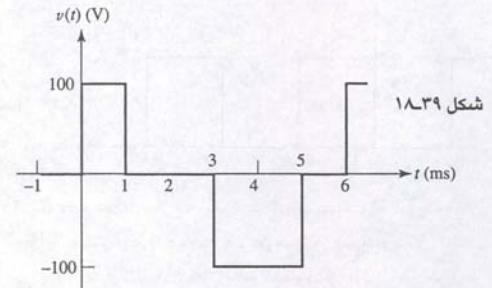
۴۹. تبدیل فوریه را برای پالس سینوسی شکل ۱۸-۴۳ به کار ببرید.



شکل ۱۸-۴۳

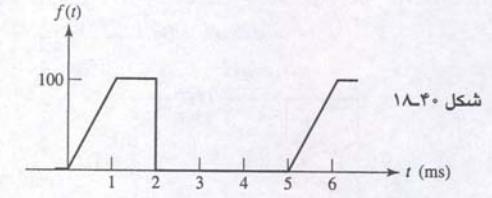
۵۰. فرض کنید $[u(t+0.5\pi) - u(t-0.5\pi)]$ باشد (الف) $F(j\omega)$ (ب) $0.8 + 0.8j$ (ج) $0.8 + 0.8j$ (د) $0.8 + 0.8j$ (ه).

۵۱. از معادلات تعریف عکس تبدیل فوریه برای یافتن $f(t)$ استفاده کنید (الف) $f(t) = c_0 + c_1 \operatorname{sin}(\omega t) + c_2 \operatorname{cos}(\omega t)$ (ب) $f(t) = c_0 + c_1 \operatorname{sin}(\omega t) + c_2 \operatorname{cos}(\omega t)$ (ج) $f(t) = c_0 + c_1 \operatorname{sin}(\omega t) + c_2 \operatorname{cos}(\omega t)$ (د) $f(t) = c_0 + c_1 \operatorname{sin}(\omega t) + c_2 \operatorname{cos}(\omega t)$ (ه).



شکل ۱۸-۳۹

۳۱. (الف) سری فوریه مختلط را برای موج متناوب در شکل ۱۸-۴۰ پیدا کنید. (ب) به C_n مقادیر عددی را بدهید.



شکل ۱۸-۴۰

۳۲. پالس های شکل ۱۸-۱۱ دارای دامنه $V = 8$ و دوره کاری $\mu s = 0.2$ میزان تکرار 6000 پالس در ثانیه است. (الف) فرکانس راکه در آن پوش طیف فرکانس دامنه صفر دارد، به دست آورید. (ب) جدایی فرکانس خطوط طیف را معین کنید. (ج) را برای نزدیکترین مؤلفه طیف به فرکانس 2 MHz به دست آورید. (د) نزدیکترین به 2 kHz را به دست آورید. (ه) پنهانی باند نامی یک تقویت کننده چه باید داشته باشد تا این رشتہ پالس با دقت منظمی انتقال یابد. (و) تعداد مؤلفه های طیفی را در محدوده فرکانس 2.2 Mrad/s به $\omega < 2$ بیان کنید. (ی) دامنه ω را حساب کنید و فرکانس آن را بین نمایید.

۳۳. شکل موج ولتاژی دارای پریود $T = 5 \text{ ms}$ و مقادیر ضرایب مختلط است: (الف) $C_1 = 1$, $C_2 = 0.5 + j0.25$, $C_3 = 0.2 - j0.2$, $C_4 = 0$, $C_5 = -1 - j2$, $C_6 = 0$, $C_7 = 0$, $C_8 = 0$, $C_9 = 0$, $C_{10} = 0$, $C_{11} = 0$, $C_{12} = 0$, $C_{13} = 0$, $C_{14} = 0$, $C_{15} = 0$, $C_{16} = 0$, $C_{17} = 0$, $C_{18} = 0$, $C_{19} = 0$, $C_{20} = 0$, $C_{21} = 0$, $C_{22} = 0$, $C_{23} = 0$, $C_{24} = 0$, $C_{25} = 0$, $C_{26} = 0$, $C_{27} = 0$, $C_{28} = 0$, $C_{29} = 0$, $C_{30} = 0$, $C_{31} = 0$, $C_{32} = 0$, $C_{33} = 0$, $C_{34} = 0$, $C_{35} = 0$, $C_{36} = 0$, $C_{37} = 0$, $C_{38} = 0$, $C_{39} = 0$, $C_{40} = 0$, $C_{41} = 0$, $C_{42} = 0$, $C_{43} = 0$, $C_{44} = 0$, $C_{45} = 0$, $C_{46} = 0$, $C_{47} = 0$, $C_{48} = 0$, $C_{49} = 0$, $C_{50} = 0$, $C_{51} = 0$, $C_{52} = 0$, $C_{53} = 0$, $C_{54} = 0$, $C_{55} = 0$, $C_{56} = 0$, $C_{57} = 0$, $C_{58} = 0$, $C_{59} = 0$, $C_{60} = 0$, $C_{61} = 0$, $C_{62} = 0$, $C_{63} = 0$, $C_{64} = 0$, $C_{65} = 0$, $C_{66} = 0$, $C_{67} = 0$, $C_{68} = 0$, $C_{69} = 0$, $C_{70} = 0$, $C_{71} = 0$, $C_{72} = 0$, $C_{73} = 0$, $C_{74} = 0$, $C_{75} = 0$, $C_{76} = 0$, $C_{77} = 0$, $C_{78} = 0$, $C_{79} = 0$, $C_{80} = 0$, $C_{81} = 0$, $C_{82} = 0$, $C_{83} = 0$, $C_{84} = 0$, $C_{85} = 0$, $C_{86} = 0$, $C_{87} = 0$, $C_{88} = 0$, $C_{89} = 0$, $C_{90} = 0$, $C_{91} = 0$, $C_{92} = 0$, $C_{93} = 0$, $C_{94} = 0$, $C_{95} = 0$, $C_{96} = 0$, $C_{97} = 0$, $C_{98} = 0$, $C_{99} = 0$, $C_{100} = 0$, $C_{101} = 0$, $C_{102} = 0$, $C_{103} = 0$, $C_{104} = 0$, $C_{105} = 0$, $C_{106} = 0$, $C_{107} = 0$, $C_{108} = 0$, $C_{109} = 0$, $C_{110} = 0$, $C_{111} = 0$, $C_{112} = 0$, $C_{113} = 0$, $C_{114} = 0$, $C_{115} = 0$, $C_{116} = 0$, $C_{117} = 0$, $C_{118} = 0$, $C_{119} = 0$, $C_{120} = 0$, $C_{121} = 0$, $C_{122} = 0$, $C_{123} = 0$, $C_{124} = 0$, $C_{125} = 0$, $C_{126} = 0$, $C_{127} = 0$, $C_{128} = 0$, $C_{129} = 0$, $C_{130} = 0$, $C_{131} = 0$, $C_{132} = 0$, $C_{133} = 0$, $C_{134} = 0$, $C_{135} = 0$, $C_{136} = 0$, $C_{137} = 0$, $C_{138} = 0$, $C_{139} = 0$, $C_{140} = 0$, $C_{141} = 0$, $C_{142} = 0$, $C_{143} = 0$, $C_{144} = 0$, $C_{145} = 0$, $C_{146} = 0$, $C_{147} = 0$, $C_{148} = 0$, $C_{149} = 0$, $C_{150} = 0$, $C_{151} = 0$, $C_{152} = 0$, $C_{153} = 0$, $C_{154} = 0$, $C_{155} = 0$, $C_{156} = 0$, $C_{157} = 0$, $C_{158} = 0$, $C_{159} = 0$, $C_{160} = 0$, $C_{161} = 0$, $C_{162} = 0$, $C_{163} = 0$, $C_{164} = 0$, $C_{165} = 0$, $C_{166} = 0$, $C_{167} = 0$, $C_{168} = 0$, $C_{169} = 0$, $C_{170} = 0$, $C_{171} = 0$, $C_{172} = 0$, $C_{173} = 0$, $C_{174} = 0$, $C_{175} = 0$, $C_{176} = 0$, $C_{177} = 0$, $C_{178} = 0$, $C_{179} = 0$, $C_{180} = 0$, $C_{181} = 0$, $C_{182} = 0$, $C_{183} = 0$, $C_{184} = 0$, $C_{185} = 0$, $C_{186} = 0$, $C_{187} = 0$, $C_{188} = 0$, $C_{189} = 0$, $C_{190} = 0$, $C_{191} = 0$, $C_{192} = 0$, $C_{193} = 0$, $C_{194} = 0$, $C_{195} = 0$, $C_{196} = 0$, $C_{197} = 0$, $C_{198} = 0$, $C_{199} = 0$, $C_{200} = 0$, $C_{201} = 0$, $C_{202} = 0$, $C_{203} = 0$, $C_{204} = 0$, $C_{205} = 0$, $C_{206} = 0$, $C_{207} = 0$, $C_{208} = 0$, $C_{209} = 0$, $C_{210} = 0$, $C_{211} = 0$, $C_{212} = 0$, $C_{213} = 0$, $C_{214} = 0$, $C_{215} = 0$, $C_{216} = 0$, $C_{217} = 0$, $C_{218} = 0$, $C_{219} = 0$, $C_{220} = 0$, $C_{221} = 0$, $C_{222} = 0$, $C_{223} = 0$, $C_{224} = 0$, $C_{225} = 0$, $C_{226} = 0$, $C_{227} = 0$, $C_{228} = 0$, $C_{229} = 0$, $C_{230} = 0$, $C_{231} = 0$, $C_{232} = 0$, $C_{233} = 0$, $C_{234} = 0$, $C_{235} = 0$, $C_{236} = 0$, $C_{237} = 0$, $C_{238} = 0$, $C_{239} = 0$, $C_{240} = 0$, $C_{241} = 0$, $C_{242} = 0$, $C_{243} = 0$, $C_{244} = 0$, $C_{245} = 0$, $C_{246} = 0$, $C_{247} = 0$, $C_{248} = 0$, $C_{249} = 0$, $C_{250} = 0$, $C_{251} = 0$, $C_{252} = 0$, $C_{253} = 0$, $C_{254} = 0$, $C_{255} = 0$, $C_{256} = 0$, $C_{257} = 0$, $C_{258} = 0$, $C_{259} = 0$, $C_{260} = 0$, $C_{261} = 0$, $C_{262} = 0$, $C_{263} = 0$, $C_{264} = 0$, $C_{265} = 0$, $C_{266} = 0$, $C_{267} = 0$, $C_{268} = 0$, $C_{269} = 0$, $C_{270} = 0$, $C_{271} = 0$, $C_{272} = 0$, $C_{273} = 0$, $C_{274} = 0$, $C_{275} = 0$, $C_{276} = 0$, $C_{277} = 0$, $C_{278} = 0$, $C_{279} = 0$, $C_{280} = 0$, $C_{281} = 0$, $C_{282} = 0$, $C_{283} = 0$, $C_{284} = 0$, $C_{285} = 0$, $C_{286} = 0$, $C_{287} = 0$, $C_{288} = 0$, $C_{289} = 0$, $C_{290} = 0$, $C_{291} = 0$, $C_{292} = 0$, $C_{293} = 0$, $C_{294} = 0$, $C_{295} = 0$, $C_{296} = 0$, $C_{297} = 0$, $C_{298} = 0$, $C_{299} = 0$, $C_{300} = 0$, $C_{301} = 0$, $C_{302} = 0$, $C_{303} = 0$, $C_{304} = 0$, $C_{305} = 0$, $C_{306} = 0$, $C_{307} = 0$, $C_{308} = 0$, $C_{309} = 0$, $C_{310} = 0$, $C_{311} = 0$, $C_{312} = 0$, $C_{313} = 0$, $C_{314} = 0$, $C_{315} = 0$, $C_{316} = 0$, $C_{317} = 0$, $C_{318} = 0$, $C_{319} = 0$, $C_{320} = 0$, $C_{321} = 0$, $C_{322} = 0$, $C_{323} = 0$, $C_{324} = 0$, $C_{325} = 0$, $C_{326} = 0$, $C_{327} = 0$, $C_{328} = 0$, $C_{329} = 0$, $C_{330} = 0$, $C_{331} = 0$, $C_{332} = 0$, $C_{333} = 0$, $C_{334} = 0$, $C_{335} = 0$, $C_{336} = 0$, $C_{337} = 0$, $C_{338} = 0$, $C_{339} = 0$, $C_{340} = 0$, $C_{341} = 0$, $C_{342} = 0$, $C_{343} = 0$, $C_{344} = 0$, $C_{345} = 0$, $C_{346} = 0$, $C_{347} = 0$, $C_{348} = 0$, $C_{349} = 0$, $C_{350} = 0$, $C_{351} = 0$, $C_{352} = 0$, $C_{353} = 0$, $C_{354} = 0$, $C_{355} = 0$, $C_{356} = 0$, $C_{357} = 0$, $C_{358} = 0$, $C_{359} = 0$, $C_{360} = 0$, $C_{361} = 0$, $C_{362} = 0$, $C_{363} = 0$, $C_{364} = 0$, $C_{365} = 0$, $C_{366} = 0$, $C_{367} = 0$, $C_{368} = 0$, $C_{369} = 0$, $C_{370} = 0$, $C_{371} = 0$, $C_{372} = 0$, $C_{373} = 0$, $C_{$