به نام خدا

ترکیبیات

جلسه ششم

۱۳۸۹/۵/۱۵

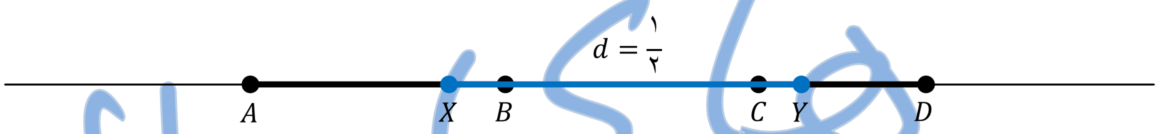
سید احسان آزرم سا
seazarmsa@gmail.com

نگین السادات موسوی
mousavi8@gmail.com

سوال: مجموعه ی M، شامل k پاره خط راست دو به دو غیر متقاطع و واقع بر یک خط راست است. می دانیم هر پاره خط راستی را که طولی بیشتر از واحد ندارد، می توان طوری روی خط راست قرار داد که دو انتهای آن متعلق به مجموعه M باشد. ثابت کنید مجموع طول پاره خط های راستی که M را تشکیل داده اند، از $\frac{1}{k}$ کمتر نیست. (سوال ۳۶۹ کتاب المپیادهای شوروی)

- **مسئله را برای حالت $k = 2$ حل کنید.**

فرض کنید دو پاره خط AB و CD روی خط l طوری واقع شوند که در فرض مسئله صدق کنند. می خواهیم نشان دهیم $AB + CD \geq \frac{۱}{۲}$. لزوما $AD \geq ۱$ خواهد بود. پاره خط XY با طول $\frac{۱}{۲}$ را در نظر بگیرید. طبق فرض می توان این پاره خط را طوری روی خط قرار داد که نقاط X و Y روی AB و CD قرار گیرند. اگر دو سر XY را بتوان روی یکی از این دو پاره خط جای داد که حکم اثبات می شود. حال اگر نتوان چنین کرد، در این صورت حتما می توان این پاره خط را روی خط l طوری قرار داد که X روی AB باشد و Y روی CD باشد. در نتیجه همان طور که در شکل مشاهده می کنید، پاره خط BC کاملا درون XY می افتد.

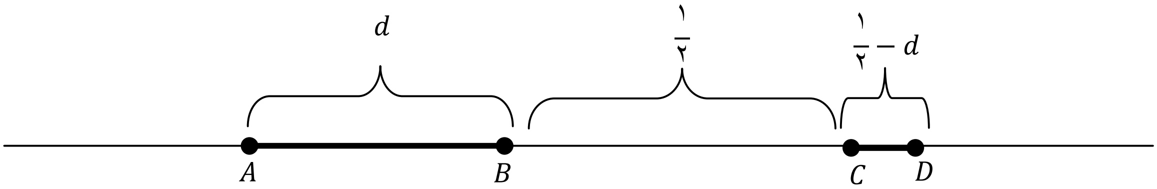


این نتیجه می دهد که $BC \leq \frac{۱}{۲}$. بنابراین خواهیم داشت:

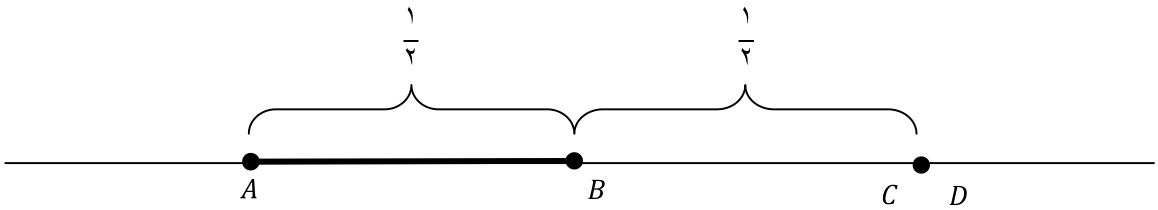
$$AB + CD = AD - BC \geq ۱ - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

و در نتیجه ادعایمان در این حالت ثابت خواهد شد.

حال خوب است ببینیم در چه وضعیتی $AB + CD = \frac{۱}{۲}$ می شود. برای این که مجموع طول ها برابر $\frac{۱}{۲}$ باشد، باید تمام نامساوی هایی که منجر به این نتیجه شدند نیز در حالت تساوی خود به سر برند. پس در این حالت $AD = ۱$ و $BC = \frac{۱}{۲}$ است. پس جواب ساختاری مانند زیر خواهد داشت:



فرض کنید $AB \geq CD$. واضح است که هر پاره خط با طول کمتر از d را می توان بر روی AB نشاند. هم چنین تنها پاره خط هایی با طول بیش از $\frac{۱}{۲}$ را می توان میان AB و CD قرار داد. می توان دید که پاره خط های با طولی بین d و $\frac{۱}{۲}$ را نمی توان روی این دو پاره خط جای داد . هر چقدر C را به D نزدیک کنیم و به طول AB بیفزاییم، بازه ی طول هایی که نمی توان بر روی این دو پاره خط نشاند ($\left[d, \frac{۱}{۲}\right]$) کوچکتر می شود تا جایی که برای حالت حدی زیر عملا مشکلی وجود نخواهد داشت.



- **مسئله را برای حالت $k = 3$ حل کنید.**

در این حالت سه پاره خط $A_۱B_۱$، $A_۲B_۲$ و $A_۳B_۳$ روی یک خط قرار گرفته اند. همانند قبل می توان گفت که $A_۱B_۳ \geq ۱$.
در تلاش اول سعی داریم ببینیم ایده قسمت قبل در این حالت نیز کارساز است یا نه. این بار، پاره خط XY با طول $\frac{۱}{۳}$ را در نظر بگیرید. اگر XY را بتوان روی یکی از این سه پاره خط قرار داد که مسئله حل است. حال اگر این اتفاق نیفتد، دو نقطه X و Y روی دو پاره خط مختلف قرار می گیرند. فرض کنید، بتوان X را روی $A_۱B_۱$ و Y را روی $A_۲B_۲$ قرار داد. مانند قبل می توان نتیجه گرفت، $B_۱A_۲ \leq \frac{۱}{۳}$. این نیز نتیجه می دهد:

$$A_۱B_۱ + A_۲B_۲ + A_۳B_۳ = A_۱B_۳ - B_۱A_۲ - B_۲A_۳ \geq ۱ - \frac{۱}{۳} - B_۲A_۳ = \frac{۲}{۳} - B_۲A_۳$$

اما آن چه که می خواستیم حاصل نشد. حال اگر نشان دهیم $B_۲A_۳ \leq \frac{۱}{۳}$ مسئله حل خواهد بود. اما آیا چنین چیزی را می توان نشان داد؟ به راحتی می توان مثال های صحیحی پیدا کرد که چنین چیزی برای آن ها صادق نباشد. بنابراین، ایده قسمت قبل برای این قسمت کارساز نخواهد بود و باید از ایده دیگری استفاده کرد.

می خواستیم نشان دهیم که مجموع طول این سه پاره خط لااقل $\frac{۱}{۳}$ است. فرض کنید با این سه پاره خط بتوان تمامی طول های ۰ تا ۱ را به دست آورد اما مجموع طول این سه از $\frac{۱}{۳}$ کمتر باشد. یعنی

$$A_۱B_۱ + A_۲B_۲ + A_۳B_۳ \leq \frac{۱}{۳}$$

در این وضعیت مطمئنا پاره خط های با طول $\frac{۱}{۳}$ یا بیشتر را نمی توان روی یکی از پاره خط های $A_۱B_۱$، $A_۲B_۲$ و $A_۳B_۳$ جای داد. پس برای به دست آوردن این طول ها، باید از دو پاره خط مختلف استفاده کرد.

حال بررسی می کنیم که چه طول هایی را می توان با استفاده از دو پاره خط مختلف پیدا کرد.

به کمک دو پاره خط $A_۱B_۱$ و $A_۲B_۲$ می توانیم طول هایی را که در بازه $[A_۲ - B_۱, B_۲ - A_۱]$ هستند، بیابیم. به همین ترتیب به کمک $A_۲B_۲$ و $A_۳B_۳$ طول هایی را که در بازه $[A_۳ - B_۲, B_۳ - A_۲]$ و به کمک $A_۱B_۱$ و $A_۳B_۳$ طول هایی را که در بازه $[A_۳ - B_۱, B_۳ - A_۱]$ هستند، می یابیم.

اکنون سعی می کنیم با استفاده از نتایج به دست آمده، مسئله را حل کنیم. باید اعداد $[\frac{۱}{۳}, ۱]$، درون سه بازه ای که معرفی کردیم قرار بگیرند تا حکم مسئله اثبات شود. پس به بیان ریاضی می توان گفت:

$$[\frac{۱}{۳}, ۱] \subseteq [A_۲ - B_۱, B_۲ - A_۱] \cup [A_۳ - B_۲, B_۳ - A_۲] \cup [A_۳ - B_۱, B_۳ - A_۱]$$

برای این که یک بازه، زیرمجموعه ی اجتماع سه بازه دیگر باشد، **لازم است** (اما کافی نیست) که طولش از مجموع طول آن سه بازه بیشتر نباشد یا به عبارتی:

$$\frac{۲}{۳} = ۱ - \frac{۱}{۳} \leq [(B_۲ - A_۱) - (A_۲ - B_۱)] + [(B_۳ - A_۲) - (A_۳ - B_۲)] + [(B_۳ - A_۱) - (A_۳ - B_۱)]$$
$$= ۲[(B_۱ - A_۱) + (B_۲ - A_۲) + (B_۳ - A_۳) = ۲[A_۱B_۱ + A_۲B_۲ + A_۳B_۳]$$

بنابراین خواهیم داشت:

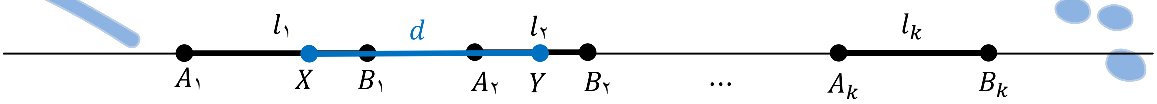
$$A_۱B_۱ + A_۲B_۲ + A_۳B_۳ \geq \frac{۱}{۳}$$

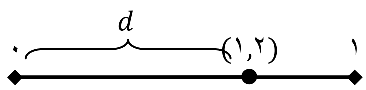
این نامساوی با آن چه در ابتدا فرض کردیم در تناقض است. پس مجموع طول این سه پاره خط نمی تواند از $\frac{۱}{۳}$ کمتر باشد، پس حکم مساله در این حالت نیز ثابت می شود.

- **حکم را برای حالت کلی نشان دهد.**

در این مرحله k پاره خط مجزا، $A_۱B_۱, A_۲B_۲, \cdots, A_kB_k$ روی یک خط راست در اختیار داریم. در فرض مسئله گفته شد که پاره خط XY به طول d را می توان طوری روی خط قرار داد که X و Y روی مجموعه M (مجموعه ی این k پاره خط) واقع شوند. فرض کنید X روی A_mB_m و Y روی A_nB_n قرار بگیرد.

طبق فرض با تغییر d در بازه $[۰,۱]$ باز هم می توان X و Y را روی اعضای مجموعه M قرار داد، اما احتمالا روی پاره خط های دیگری از این مجموعه قرار خواهند گرفت. حال این گونه عمل می کنیم که اگر دو سر پاره خط به طول d را بتوان روی پاره خط های A_mB_m و A_nB_n گذاشت، روی نقطه d از بازه $[۰,۱]$ زوج (m,n) را می نویسیم. (به شکل زیر توجه کنید).
در این صورت، مسئله فوق معادل خواهد بود با اینکه اگر بتوان کل اعداد بازه $[۰,۱]$ را این گونه عدد گذاری کرد، نشان دهید مجموع طول اعضای M کمتر از $\frac{۱}{k}$ نخواهد بود.





حداکثر طولی را که بتوان به طور کامل بر روی یکی از $A_۱B_۱, A_۲B_۲, \cdots, A_۳B_۳$ قرار داد، برابر با طول بلندترین A_iB_i ها است (این طول را L در نظر بگیرید). بنابراین دو سر پاره خط هایی با طول بیشتر از L لزوما بر روی دو پاره خط متفاوت جای می گیرند. حال بررسی می کنیم که چه طول هایی را می توان بر روی دو عضو مختلف M جای داد. دو عضو دلخواه از M، مانند A_jB_j و A_iB_i را در نظر بگیرید. می توان پاره خطی با طولی بین $A_j - B_i$ و $B_j - A_i$ را طوری روی این دو پاره خط گذاشت که هریک از دو سرش بر روی یکی از آن ها قرار گیرد. طول پاره خط A_iB_i را با l_i نشان می دهیم.

بنابراین می توان گفت این دو عضو M، حداکثر بازه ای به طول

$$(A_i - B_j) - (B_i - A_j) = (A_i - B_i) + (A_j - B_j) = l_j + l_i$$

از $[۰,۱]$ را می پوشانند.

در نهایت حداکثر طولی از بازه که اعضای M آن را می پوشانند برابر خواهد بود با

$$\max(l_۱, l_۲, \cdots, l_k) + \sum_{۱\leq i<j\leq k} [(B_j - A_i) - (A_j - B_i)] = L + \sum_{۱\leq i<j\leq k} [(B_i - A_i) + (B_j - A_j)]$$

$$= L + (k-۱)\sum_{i=۱}^{k}(B_i - A_i) = L + (k-۱)[l_۱ + l_۲ + \cdots + l_k]$$

منظور از $\sum_{۱\leq i<j\leq k}[(B_j - A_i) - (A_j - B_i)]$ مجموع تمام $(B_j - A_i) - (A_j - B_i)$ ها است که $۱ \leq i < j \leq k$ باشد. در واقع برای هر زیر مجموعه دو عضوی از $\{۱,۲,\cdots,k\}$ یک جمعوند در مجموع فوق خواهیم داشت. پس این مجموع دارای $\binom{k}{۲}$ جمعوند است.

چون کل بازه $[۰,۱]$ باید پوشانده شود، بنابراین مقدار فوق باید از بیشتر یا مساوی ۱ باشد، در این صورت داریم:

$$l + (k-۱)[l_۱ + l_۲ + \cdots + l_k] \geq ۱ \Longrightarrow l_۱ + l_۲ + \cdots + l_k \geq \frac{۱-L}{k-۱}$$

حال اگر $\sum_{i=۱}^{k} l_i \geq \frac{۱}{k}$ که مسئله اثبات است، در غیر این صورت(فرض خلف):

$$L = \max(l_۱, l_۲, \cdots, l_k) \leq \sum_{i=۱}^{k} l_i < \frac{۱}{k}$$

با توجه به نامساویهای فوق خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{k} > l_۱ + l_۲ + \cdots + l_k \geq \frac{۱-L}{k-۱} \geq \frac{۱-\frac{۱}{k}}{k-۱} = \frac{۱}{k}$$

که این تناقض است، بنابراین حکم مسئله ثابت می شود.

اکنون می خواهیم ببینیم آیا می توانیم مثالی برای حالتی که مجموع اعضای M دقیقا برابر $\frac{۱}{k}$ باشد، پیدا کنیم یا نه.

می دانیم حداکثر طولی که این k پاره خط از بازه $[۰,۱]$ می پوشانند، برابر $L + (k-۱)[l_۱ + l_۲ + \cdots + l_k]$ است.

هم چنین فرض کردیم، $\sum_{i=۱}^{k} l_i = \frac{۱}{k}$. پس خواهیم داشت:

$$L + (k-۱)[l_۱ + l_۲ + \cdots + l_k] = L + \frac{k-۱}{k} \geq ۱$$

لذا:

$$L \geq \frac{۱}{k}$$

بنابراین مجموع طول k پاره خط M نمی تواند از $\frac{۱}{k}$ کمتر شود. پس حکم مسئله به کلی ثابت می شود.

- **آیا چینش مطلوبی از k پاره خط وجود دارد که مجموع طول آن ها دقیقا $\frac{1}{k}$ شود.**

توجه کنید تا کنون نشان داده ایم، برای هر ساختار مطلوبی مانند M، مجموع طول ها **نمی تواند** از $\frac{۱}{k}$ کمتر شود. اما ممکن است کران بهتری نیز وجود داشته باشد. ممکن است بتوان نشان داد که مثلا هیچ ساختار مطلوبی که مجموع طول پاره خطها در آن کمتر از $\frac{۲}{k}$ شود، وجود ندارد. حال اگر نشان دهیم حالت مطلوبی وجود دارد و مجموع طول پاره خط ها در آن، $\frac{۱}{k}$ است، در این صورت لزوما $\frac{۱}{k}$ بهترین کران ممکن خواهد بود. به همین جهت به دنبال ساختاری با مجموع طول $\frac{۱}{k}$ هستیم.

فرض کنید M چینشی با این خاصیت باشد. طبق چیزی که در گذشته گفتیم، حداکثر طولی که اعضای M از بازه $[۰,۱]$ می پوشانند، برابر $L+(k-۱)[l_۱+l_۲+\cdots+l_k]$ است. هم چنین فرض کردیم، $\sum_{۱\le i\le k} l_i=\frac{۱}{k}$. پس خواهیم داشت:

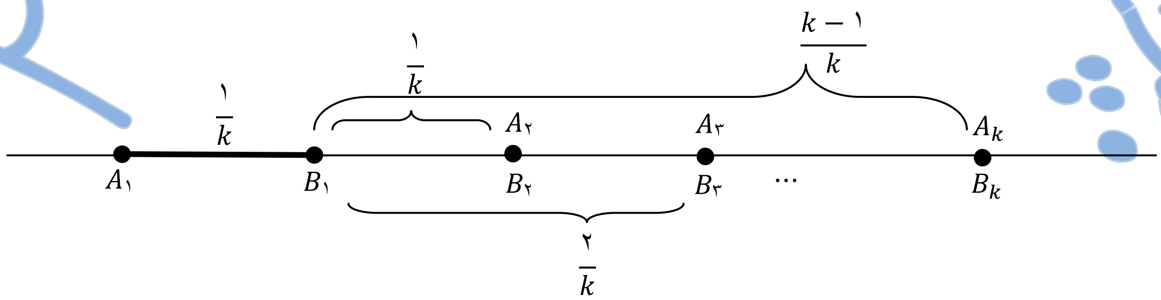
$$L+(k-۱)[l_۱+l_۲+\cdots+l_k]=L+\frac{k-۱}{k}\ge ۱$$

لذا:

$$L\ge\frac{۱}{k}$$

اما از طرفی $L\le\frac{۱}{k}$، بنابراین $L=\frac{۱}{k}$. در این صورت M از یک پاره خط به طول $\frac{۱}{k}$ و $k-۱$ نقطه (پاره خط به طول صفر) تشکیل شده است. همچنین به خاطر می آوریم که حالت تساوی در حالت $k=۲$ به چه شکل بود. ممکن است برای یافتن چنین ساختاری کارساز باشد. سعی کنید، بدون نگاه به شکل زیر ساختار را بیابید.

حال چینشی ارائه می دهیم که شرط مسئله را ارضا کند. در سمت راست پاره خط به طول $\frac{۱}{k}$ نقطه ها را با فاصله $\frac{۱}{k}$ از هم می گذاریم.



در این صورت، دو سر پاره خط به طول d، $\frac{i}{k}\le d\le\frac{i+۱}{k}$ را می توان بر روی نقطه $B_{i+۱}$ و پاره خط $A_۱B_۱$ قرار داد.

- ✓ ابتدا ثابت کردیم $\frac{۱}{k}$ کرانی برای مجموع طول اعضای M است، سپس باز ذکر مثالی برای حالتی که این مجموع برابر $\frac{۱}{k}$ است، نشان دادیم کرانی بزرگتر برای این مجموع وجود ندارد. پس اگر در صورت سوال پیدا کردن بهترین کران ممکن خواسته می شد، همان گونه که نشان دادیم جواب $\frac{۱}{k}$ بود.
- ✓ در این مقاله سعی داشتیم، اندکی با ساختارهای هندسی یک بعدی، مانند خط و نقطه و کار با بازه ها در مسایل ترکیبیاتی آشنا شویم.