جزوه درس فیزیک ۱

(براساس کتاب هریس بنسون)

مهندسی صنایع در محیط دانشگاه

www.ieuni.ir

فهرست مطالب

فصل اول: مقدمات

➔ فیزیک با رفتار ماده و برهمکنشهای اجزای سازنده آن در بنیادی ترین سطوح سر و کار دارد. موضوع این علم واقعیتهای فیزیکی است، یعنی فیزیک فقط به چیزهایی مربوط می شود که بتوانیم آنها را با وسایلی اندازه گیری کنیم. قلمرو فیزیک از درون هسته بسیار کوچک اتم تا ابعاد کهکشان های عظیم عالم گسترده است.

مجموعه موضوعات و مباحثی که بین سالهای ۱۶۰۰ تا ۱۹۰۰ میلادی در علم فیزیک تدوین شده، فیزیک کلاسیک نامیده می شود که شامل سه شاخه عمده زیر است:

۱. مکانیک کلاسیک: که در آن حرکت ذرات و شاره ها بررسی می شود.
۲. ترمودینامیک: که به مطالعه دما، انتقال گرما و خواص انبوهه های ذرات اختصاص دارد.
۳. الکترومغناطیس: که شامل الکتریسیته، مغناطیس، امواج الکترومغناطیسی و اپتیک است.

از اوایل قرن بیستم به بعد فیزیک جدیدی شکل گرفت که نظریه های مهم آن عبارتند از:

- نسبیت خاص: نظریه ای است برای توضیح رفتار ذراتی که با سرعتهای خیلی زیادحرکت می کنند. این نظریه منجر به تجدید نظر اساسی در تصورات ما از مفاهیم فضا، زمان و انرژی شده است.
- مکانیک کوانتومی: نظریه ای است برای توضیح دنیای بسیار کوچک (یا زیر میکروسکوپیک) اتمها و رفتار ذرات درون آنها.

- نسبیت عام: نظریه ای است که نیروی گرانش را به خواص هندسی فضا مربوط می کند.

فیزیکدانان پدیده های فیزیکی امروزه را بر حسب چهار نوع نیرو یا برهمکنش بنیادی توضیح می دهند:

۱. برهمکنش گرانشی: همان نیروی جاذبه ای است که بین تمام اجسام وجود دارد و موجب سقوط اجسام شده و سیاره ها را در مدارشان نگه می دارد.

۲. برهمکنش الکترومغناطیسی: بین بارهای الکتریکی موجب واکنشهای شیمیایی می شود. در بسیاری پدیده ها و سیستم ها مثل امواج الکترومغناطیسی، گیرنده ها و فرستنده ها دخیل است و به صورت بسیاری از نیروهای اطراف ما مثل اصطکاک و کشش نخ و غیره بروز می کند.

۳. برهمکنش هسته ای قوی: نوترون ها و پروتونها را در داخل هسته اتم در قید همدیگر نگه می دارد.

۴. برهمکنش هسته ای ضعیف: که منجر به پرتوزایی می شود.

برهمکنش گرانشی از همه ضعیفتر است.

در سال ۱۹۸۳ شواهد تجربی تأکید کرد که دو نیروی الکترومغناطیسی و هسته ای ضعیف در واقع نمودهای متفاوت برهمکنش بنیادی واحدی هستند که اصطلاحاً برهمکنش الکتروضعیف نامیده می شود و در سالهای اخیر نیز پیشرفتهایی در زمینه تلفیق نیروی هسته ای قوی با نیروی الکتروضعیف در قالب یک نظریه وحدت بزرگ حاصل شده است.

← هر انگاره (ایده) یا هر کمیت فیزیکی ای که برای تحلیل پدیده های طبیعی به کار برده می شود یک مفهوم است. مثل جرم، انرژی و بار الکتریکی که کمیتهای قابل اندازه گیری اند.

به برقراری روابط ریاضی برای کمیتهای فیزیکی از طریق تحلیل های تجربی یا نظری قانون گفته می شود. قانون محدود به زمینه خاصی است و حوزه اعتبار معینی دارد، اما اصل یک گزاره بسیار کلی درباره رفتار طبیعت است؛ مثل اصل پایستگی انرژی.

مدل عبارت است از مشابه ساده و مناسبی که از آن برای نمایش توصیف سیستم فیزیکی واقعی استفاده می شود و در اغلب موارد تحلیل پدیده هایی را که در سیستم رخ می دهند آسان می کند.

نظریه عبارت است از مجموعه ای از اصول و فرضهای اولیه (یا اصل موضوع ها) که برای رسیدن به نتایج یا قوانین خاصی، در قالب یک مدل، با هم ترکیب شده اند. نظریه فیزیکی باید بتواند به پیش بینی های دقیق عددی در مورد پدیده های مربوط منجر شود. نظریه ها پدیده های طبیعت را توصیف می کنند ولی الزاماً آنها را توضیح نمی دهند.

← در فیزیک اندازه گیری اهمیت بسیار زیادی دارد. برای مقایسه اندازه گیری ها باید مقدار هر کمیت فیزیکی را بر حسب استاندارد یا یکای معینی بیان کنیم.

در دستگاه بین المللی یکاها (SI) هفت کمیت به عنوان کمیت اصلی انتخاب شده اند:

۱. کیلوگرم Kg (جرم)
۲. متر m (طول)
۳. ثانیه S (زمان)
۴. کلوین K (دما)
۵. آمپر A (جریان الکتریکی)
۶. شمع cd (شدت روشنایی)
۷. مول mol (مقدار ماده)

- برای اندازه گیری در مقیاس اتمی یکای مناسبتری برای جرم درنظر گرفته شده است که به آن یکای جرم اتمی (u) می گویند که برابر است با $\frac{۱}{۱۲}$ جرم اتم کربن ۱۲، تعریف شده است.

$$۱u = ۱/۶۶ \times ۱۰^{-۲۷} Kg$$

- یک ثانیه برابر است با مدتی که در آن تابش معینی که از اتمهای سزیم ۱۳۳ گسیل می شود، ۹۱۶۲۶۳۱۷۷۰ بار ارتعاش کند. از ساعتهای اتمی امروزه به عنوان استاندارد زمان استفاده می شود که خطای آنها در ۳۰۰۰ سال از یک ثانیه بیشتر نیست.

- متر استاندارد برابر است با مسافتی که نور در خلاء در مدت $\frac{۱}{۲۹۹۷۹۲۴۵۸}$ ثانیه طی می کند.

- یکای فرعی یا مشتق: یکای کمیتهای فیزیکی مثل سرعت، شتاب و ... ترکیبی از یکاهای اصلی هستند. سرعت ($\frac{m}{s}$)، شتاب ($\frac{m}{s^۲}$)

- تبدیل یکاها: برای تبدیل یکاها به یکدیگر از رابطه ای که بین یکا ها برقرار است استفاده می کنیم. مثلاً می دانیم که هر مایل (mil) برابر ۱/۶ کیلومتر (Km) است ($۱mil = ۱/۶\text{Km}$)، پس برای اینکه بخواهیم مسافتی را که بر حسب مایل است به کیلومتر بیان کنیم از نسبت $\frac{۱/۶Km}{۱mil}$ استفاده می کنیم:

مثال: ۱۰ مایل را بر حسب کیلومتر بیان کنید؟

$$۱۰mil = ۱۰mil \times \frac{۱/۶Km}{۱mil} = ۱۰ \times ۱/۶Km = ۱۶\text{Km}$$

مثال: سرعت $۳۰\frac{m}{s}$ را بر حسب $\frac{Km}{h}$ بیان کنید؟

$$۱\text{Km}=۱۰۰۰\text{m} \qquad , \qquad ۱\text{h}=۳۶۰۰\text{s}$$

$$۳۰\frac{m}{s} = ۳۰\frac{m}{s} \times \frac{۱Km}{۱۰۰۰m} \times \frac{۳۶۰۰s}{۱h} = ۱۰۸\frac{Km}{h}$$

← اعداد خیلی بزرگ یا خیلی کوچک را به صورت ضریبی از توانهای مثبت یا منفی ده نمایش می دهیم. مثلاً:

قطر اتم $\quad ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲\ m = ۲ \times ۱۰^{-۱۰}\ m$

قطر هسته $\quad ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۵\ m = ۵ \times ۱۰^{-۱۵}\ m$

در بسیاری موارد به جای توانهای ده از پیشوندهای مناسبی در جلوی یکای کمیت استفاده می کنند، مثل کیلو (K) به معنی هزار یا میلی (m) به معنی یک هزارم.

- نتایج اندازه گیری همیشه با مقداری خطا یا عدم قطعیت همراه است. مثلاً طول معینی ۱۵/۶ m و عدم قطعیت آن ۲ درصد است. ۲ درصد ۱۵/۶ تقریباً ۰/۳ است:

$$\frac{۱۵/۶ \times ۲}{۱۰۰} = ۰/۳۱۲ \approx ۰/۳$$

یعنی نتیجه اندازه گیری را می توان به صورت $۱۵/۶ \pm ۰/۳\,\mathrm{m}$ بیان کرد که مقدار واقعی بین ۱۵/۳ و ۱۵/۹ است.

عدم قطعیت را با به طور ضمنی با ارقام با معنی نشان می دهند:

۵ رقم با معنی است ۱۵/۶۲۴

که رقم ۴ قطعیت ندارد. همچنین صفرهایی که نماینده توان ده باشد جزء ارقام با معنی شمرده نمی شود ولی صفرهای آخر به حساب می آیند:

۴ رقم با معنی است ۰/۰۰۲۵۶۰

۶ رقم با معنی است ۱۲۰۰۰/۰

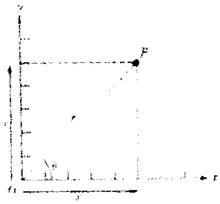
۲ رقم با معنی است $۱/۲ \times ۱۰^{۴}$

۲ رقم با معنی است $۱/۲۰۰ \times ۱۰^{۴}$

در ضرب و تقسیم تعداد ارقام با معنی در نتیجه نهایی، باید برابر با کمترین تعداد ارقام با معنی باشد که در عوامل عملیات است و در جمع و تفریق فقط کمترین رقم های اعشاری را در نتیجه نهایی حساب می کنیم.

← مکان یک جسم نسبت به یک دستگاه مختصات که به یک چارچوب مرجع متصل است، مشخص می شود. هر دستگاه مختصات شامل محورهایی است که هر یک جهتی را در فضا نشان می دهد.

– در دستگاه مختصت دکارتی در دو بعد مکان نقطه P را می توان با استفاده از تعداد واحدهایی که باید از مبداء تا رسیدن به نقطه P در جهت هر یک از محورها طی کنیم، بدست آورد.



- در مختصات قطبی دو بعدی مکان نقطه P با طول خط OP (r) و زاویه Θ، که این خط با جهت مرجع (+X) می سازد، مشخص می شود.

می توانیم این دو دستگاه را به هم تبدیل کنیم:

$$\begin{cases} x = \mathrm{r}\,\mathrm{Cos}\theta \\ \mathrm{y} = \mathrm{r}\,\mathrm{Sin}\theta \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}} \\ \theta = \tan^{-۱}(\frac{y}{x}) \end{cases}$$

Θ در جهت پاد ساعتگرد (خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت) از محور +x اندازه گیری می شود.

فصل دوم: بردارها

← دو نوع کمیت در فیزیک وجود دارند:

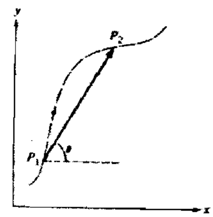
- کمیتهای اسکالر (نرده ای): که با یک مقدار و یکا مشخص می شوند. مثل: دما، چگالی ..
- کمیتهای برداری: که علاوه بر مقدار و یکا دارای جهت نیز هستند. مثل: سرعت، شتاب ....

کمیت برداری را با گذاشتن پیکانی در بالای نماد آن $\vec{A}$ یا به صورت حروف سیاه رنگ مشخص می شوند. اندازه بردار، اسکالر و مثبت ($\left|\vec{A}\right|$) است.

اسکالر ها از همان قواعد جبر معمولی تبعیت می کنند، اما عملیات جمع و تفریق و ضرب در مورد بردارها مستلزم استفاده از قواعد خاصی است که به مجموعه آنها جبر برداری می گویند.

هر بردار را به صورت یک پاره خط جهت دار یا پیکان نشان می دهیم و طول این پاره خط را متناسب با اندازه بردار می گیریم.

← متحرکی مطابق شکل از نقطه P_1 تا P_2 حرکت می کند. مسافت طی شده توسط متحرک مسیر خط چین است اما تغییر مکان متحرک از ابتدا تا انتهای این حرکت را که با خط پر مشخص است جابجایی می گویند، که فقط به مختصات اولیه و نهایی مسیر طی شده بستگی دارد (به شکل مسیر وابسته نیست.) و جهت آن نسبت به جهت مرجع (+X) مشخص می شود.

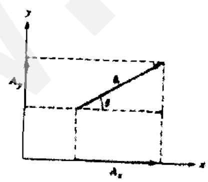


➜ در یک مختصات دو بعدی تصویر یک بردار مثل $\vec{A}$ را روی محورهای x و y مشخص می کنیم؛ به این ترتیب که از نوک بردار عمودهایی به محورها رسم می کنیم (خط چینها) هر محور دارای بردار یکه (واحد) است. بردارهای یکه کمیتهای بدون بعدی هستند که فقط برای مشخص کردن جهتی در فضا به کار می روند و اندازه آنها برابر ۱ است:

$$\left|\hat{i}\right| = \left|\hat{j}\right| = \left|\hat{k}\right| = 1$$

(در سه بعد بردارهای یکه برای محور xها $\hat{i}$، برای محور yها $\hat{j}$ و برای محور zها $\hat{k}$ است.)

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$



که با داشتن طول (اندازه) بردار و جهت آن نسبت به جهت مرجع (+X) می توان تصویرهای بردار یا مؤلفه های بردار را بدست آورد:

$$\begin{cases} A_x = A\,Cos\theta \\ A_y = A\,Sin\theta \end{cases}$$

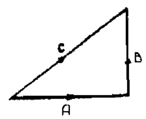
برعکس، می توان با استفاده از مؤلفه ها، اندازه و جهت بردار را بدست آورد:

$$A = \sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2} \qquad , \qquad \theta = \tan^{-1}(\frac{A_y}{A_x})$$

➜ جمع بردارها به دو صورت نموداری و تحلیلی است.

– روش نموداری شامل روشهای مثلثی و متوازی الاضلاع است.

روش مثلثی: بردار $\vec{B}$ را در نوک بردار $\vec{A}$ قرار می دهیم و ابتدای بردار $\vec{A}$ را به نوک بردار $\vec{B}$ وصل می کنیم.



روش متوازی الاضلاع: ابتدای دو بردار را در یک نقطه قرار می دهیم. از نوک بردارها تصویر بردار دیگر را می کشیم. ابتدای دو بردار را به نوک تصویر بردارها وصل می کنیم.

در هر دو حالت بردار برآیند را به صورت زیر مشخص می کنیم:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

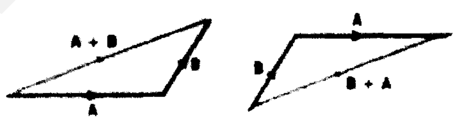
$$|\vec{C}| = |\vec{A} + \vec{B}| \quad , \quad C = |\vec{C}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\,Cos\theta}$$

- در روش تحلیلی کار با مؤلفه های بردارها است. شکل نشان می دهد که چگونه می توان مؤلفه های بردار برآیند $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ را از مؤلفه های بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بدست آورد:

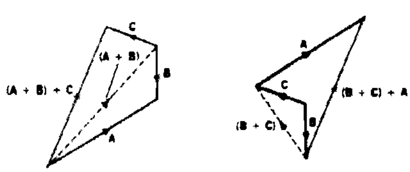
$$\begin{cases} R_x = A_x + B_x \\ R_y = A_y + B_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = \sqrt{R_x^2 + R_y} \\ \theta = \tan^{-1}(\dfrac{R_y}{R_x}) \end{cases}$$

- جمع برداری دارای دو خاصیت است:

- جابجایی پذیری $\quad \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$



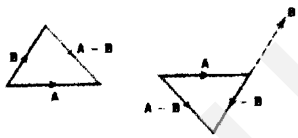
- انجمن پذیری $\quad (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$



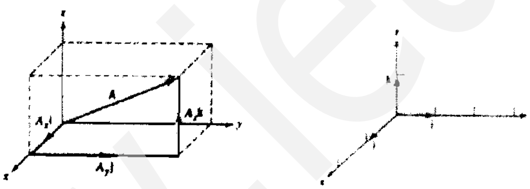
➜ تفریق برداری حالت خاصی از جمع برداری است. (جمع بردار $\overline{A}$ با قرینه بردار $\vec{B}$)

$$\vec{A}-\vec{\mathrm{B}}=\vec{A}+(\vec{\mathrm{B}})$$

ابتدا دو بردار را از یک مبداء رسم می کنیم. در این صورت تفاضل دو بردار $\vec{A}-\vec{\mathrm{B}}$ عبارت است از برداری که نوک $\vec{B}$ را به نوک $\overline{A}$ وصل می کند.



➜ در سه بعد یک بردار را بر حسب مؤلفه هایش به صورت زیر مشخص می کنند:



$$\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$$

$$A=\left|\vec{A}\right|=\sqrt{A_x^{۲}+A_y^{۲}+A_z^{۲}}$$

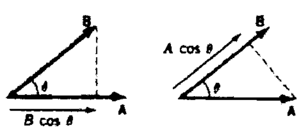
برای مجموع و تفاضل دو بردار در سه بعد داریم:

$$\vec{A}+\vec{B}=(A_x+B_x)\hat{i}+(A_y+B_y)\hat{j}+(A_z+B_z)\hat{k}$$

$$\vec{A}-\vec{B}=(A_x-B_x)\hat{i}+(A_y-B_y)\hat{j}+(A_z-B_z)\hat{k}$$

➜ ضرب اسکالر با داشتن زاویه کوچکتر بین دو بردار به صورت زیر بدست می آید:

$$\vec{A}.\vec{B}=AB\ Cos\theta$$



حاصلضرب یک کمیت اسکالر (عدد) و مستقل از دستگاه مختصاتی است که انتخاب می کنیم.

- در ضرب اسکالر ترتیب بردارها اهمیتی ندارد. (جابجایی پذیر است) $\vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A}$

- ضرب اسکالر توزیع پذیر است. $\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$

- حاصلضرب بردارهای یکه با توجه به تعریف ضرب اسکالر به صورت زیر است:

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = ۱$$
$$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = ۰$$

اگر دو بردار را بر حسب مؤلفه هایشان ضرب اسکالر کنیم:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\cdot(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$
$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

- برای دو بردار مشابه

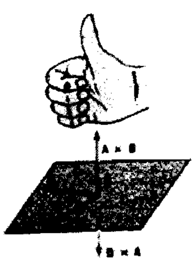
$$\vec{A}.\vec{A} = AACos(o) = A^۲ = A_x{}^۲ + A_y{}^۲ + A_z{}^۲$$

➔ ضرب برداری به صورت زیر بدست می آید:

$$\vec{A}\times\vec{B} = AB\ Sin\theta$$

حاصل این ضرب، برداری است به بزرگی $AB\ Sin\theta$ در راستای عمود بر صفحه متشکل از $\vec{A}$ و $\vec{B}$ که این راستا با بردار یکه $\hat{n}$ مشخص شده است. Θ کوچکترین زاویه بین بردارها است. این ضرب در بررسی رفتار برخی از کمیتهای فیزیکی مثل گشتاور نیرو مفید است.

- قاعده دست راست: اول چهار انگشت دست راست را در جهت بردار اول $\vec{A}$ قرار می دهیم و به طرف بردار دوم $\vec{B}$ خم می کنیم. شست دست جهت بردار یکه $\hat{n}$ (بردار حاصلضرب) خواهد بود.



ضرب خارجی جایجایی ناپذیر است (جهت تغییر می کند):

$$\vec{A}\times\vec{B}\neq\vec{B}\times\vec{A} \quad \Rightarrow \quad \vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$$

اما توزیع پذیر است.

$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$$

در یک دستگاه راستگرد بنا به تعریف ضرب برداری برای حاصلضرب بردارهای یکه داریم:

$$\hat{i}\times\hat{i}=0 \qquad \hat{j}\times\hat{j}=0 \qquad \hat{k}\times\hat{k}=0$$

$$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k} \qquad \hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k} \qquad \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$$

$$\hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j} \qquad \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i} \qquad \hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i}$$

$$\vec{C}=(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k})\times(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k})$$

$$=(A_xB_y\hat{k}-A_xB_z\hat{j})+(-A_yB_x\hat{k}+A_yB_z\hat{i})+(A_zB_x\hat{j}-A_zB_y\hat{i})$$

$$\vec{C}=C_x\hat{i}+C_y\hat{j}+C_z\hat{k}$$

$$=(A_yB_z-A_zB_y)\hat{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{k}$$

حاصلضرب یک بردار جدید است. می توان از تعریف دترمینان هم برای ضرب برداری استفاده کرد، به این ترتیب که سطر اول بردارهای یکه، سطر دوم مؤلفه های بردار اول و سطر سوم مؤلفه های بردار دوم قرار دارند:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=\hat{i}\begin{vmatrix}A_y & A_z\\ B_y & B_z\end{vmatrix}-\hat{j}\begin{vmatrix}A_x & A_z\\ B_x & B_z\end{vmatrix}+\hat{k}\begin{vmatrix}A_x & A_y\\ B_x & B_y\end{vmatrix}$$

$$=(A_yB_z-A_zB_y)\hat{i}+(A_xB_z-A_zB_x)\hat{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{k}$$

فصل سوم: حرکت یک بعدی

➜ سینماتیک عبارت است از توصیف چگونگی حرکت اجسام در فضا و زمان.

- در حرکت انتقالی همه اجزای جسم به یکسان تغییر مکان می دهند.

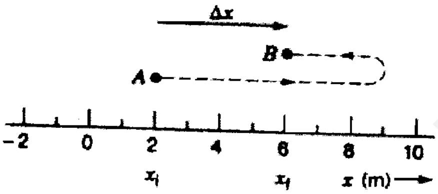
- در حرکت دورانی سمتگیری جسم در فضا تغییر می کند، یعنی اجزای جسم ممکن است جابجایی های متفاوتی داشته باشند.

- در حرکت ارتعاشی اجزای جسم طوری حرکت می کنند که شکل یا اندازه جسم به طور متناوب تغییر
می کند.

- سینماتیک یک بعدی یعنی حرکت انتقالی روی خط راست. در این حرکت چون تمام نقاط جسم مثل هم حرکت می کنند می توانیم کل جسم را مثل یک ذره در نظر بگیریم (ذره یعنی نقطه مادی بدون بعد که تمام جرم جسم در آن متمرکز است.)

مطابق شکل جسمی از نقطه A شروع در x = ۲m راه می افتد و پس از رسیدن به نقطه x=۹m بر می گردد و در نقطه B در x=۶m متوقف می شود. می توان جابجایی متحرک را با استفاده از Δx، (Δ یعنی تغییرات) تغییرات مکان یا جابجایی، با استفاده از مکان اولیه (x_i) و مکان نهایی (x_f) بدست آورد.

$$\Delta x = x_f - x_i \quad (m)$$



پس جابجایی متحرک :

$$\begin{cases} x_f = ۶m \\ x_i = ۲m \end{cases} \Rightarrow \quad \Delta x = x_f - x_i = ۶ - ۲ = +۴m$$

علامت مثبت یعنی جابجایی در جهت + محور x است.

مسافت طی شده یا کل مسیری که متحرک می پیماید کمیت اسکالر مثبتی است که برای متحرک مثال بالا ۱۰m است (کل مسافت بین A و B). مسافت طی شده بین دو نقطه با اندازه بردار جابجایی بین همان دو نقطه در حالت کلی برابر نیست.

در سینماتیک نیاز داریم به اینکه متحرک با چه آهنگی (چقدر تند یا چقدر کند) حرکت می کند.

$$\text{سرعت متوسط} = \frac{\text{جابجایی}}{\text{زمان سپری شده}} \qquad \text{تندی متوسط} = \frac{\text{مسافت طی شده}}{\text{زمان سپری شده}}$$

- تندی متوسط مثل مسافت طی شده یک کمیت اسکالر و مثبت است. سرعت متوسط ($\vec{\bar{v}}$) کمیتی برداری است که هم جهت با بردار جابجایی است.

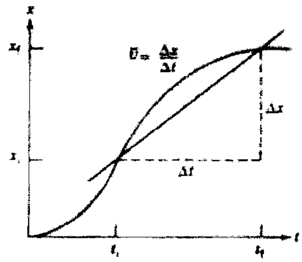
$$\text{سرعت متوسط} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$

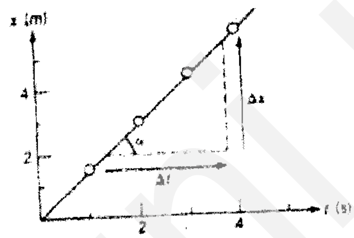
که واحد آن $\frac{m}{s}$ است. در مثال بالا

$$\text{سرعت متوسط} = \frac{+۴m}{۴s} = +۱\frac{m}{s} \quad , \quad \text{تندی متوسط} = \frac{۱۰m}{۴s} = ۲/۵\frac{m}{s}$$

(علامت مثبت جهت است.)

- اغلب از نمودار برای حرکت ذره استفاده می شود



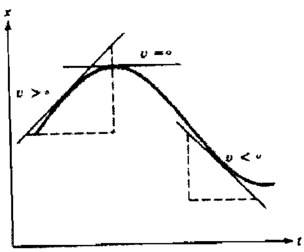


اگر سرعت ثابت باشد نمودار حرکت یک خط راست است و اگر سرعت ثابت نباشد نمودار حرکت به شکل منحنی است. شیب نمودار در هر بازه زمانی معین Δt برابر با شیب یا ضریب زاویه خط راستی است که نقاط ابتدا و انتهای منحنی در آن بازه زمانی را به هم وصل می کند. این شیب که با نسبت $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ مشخص می شود، همان اندازه سرعت ذره است.

← برای تحلیل دقیق حرکتهای غیر یکنواخت از سرعت لحظه ای ($\vec{v}$) که همان مفهوم سرعت متوسط ($\bar{\vec{v}}$) را دارد، استفاده می کنیم. یعنی سرعت متوسط را در بازه های زمانی خیلی کوچکتر بررسی می کنیم تا اینکه $\Delta t \to o$ میل کند. سرعت لحظه ای در هر لحظه برابر است با ضریب زاویه خط مماس بر منحنی مکان – زمان در آن لحظه:

$$v = \lim_{\Delta t \to o} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

یعنی مشتق مکان نسبت به زمان برابر سرعت لحظه ای است.



← شتاب یعنی آهنگ تغییرات سرعت که ممکن است ناشی از مقدار و جهت سرعت باشد.

$$\text{شتاب متوسط} = \frac{\text{تغییر سرعت}}{\text{مدت زمان}}$$

شتاب متوسط ($\vec{\bar{a}}$) یک کمیت برداری در جهت تغییر سرعت است و واحد آن $\frac{m}{s^۲}$ است.

$$\vec{\bar{a}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$$

شیب یا ضریب زاویه خطی که نقطه ابتدا و انتها را به هم وصل می کند شتاب لحظه ای می گویند.

$$a = \lim_{\Delta t \to o} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

- اگر a و v هم علامت باشند حرکت تند شونده و در غیر این صورت حرکت کند شونده است.

- در حرکت با سرعت ثابت مسافتی که در فاصله های زمانی مساوی طی می شودثابت است. اما در حرکت با شتاب ثابت افزایش یا کاهش مسافت طی شده در Δt های متوالی ثابت است.

- اگر سرعت ذره ای در مدت Δt با شتاب ثابت از مقدار اولیه (v_i) به مقدار نهایی (v_f) برسد،

سرعت متوسط آن در این مدت $\bar{v} = \frac{۱}{۲}(v_f - v_i)$

- می توان سرعت را از نمودار مکان - زمان و شتاب را از نمودار سرعت – زمان بدست آورد. اما برعکس، مساحت زیر منحنی سرعت – زمان مقدار جابجایی و مساحت زیر منحنی شتاب – زمان مقدار تغییر سرعت را مشخص می کند.

← وقتی سرعت ثابت است، سرعت لحظه ای و متوسط با هم برابرند:

$$\vec{v} = \bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$

- اگر زمان اولیه t_i را برابر صفر بگیریم (زمان شروع حرکت) و سرعت و مکان اولیه را به ترتیب با v_o و x_o و زمان نهایی t_f و مکان و سرعت را به ترتیب با t و x و v مشخص کنیم:

$$v = \frac{x - x_o}{t} \quad \rightarrow \quad x = vt + x_o \quad (۱)$$

معادله مکان – زمان با سرعت ثابت است.

- وقتی شتاب ثابت است، شتاب متوسط و لحظه ای با هم برابرند:

$$\bar{\vec{a}} = \vec{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} \quad , \quad a = \frac{v - v_o}{t_i}$$

$$v = at + v_o \qquad (۲)$$

$$\bar{v} = \frac{۱}{۲}(v - v_o) \qquad (۳)$$

$$x = \frac{۱}{۲}(v + v_o)t + x_o \qquad (۴)$$

$$x = \frac{۱}{۲}at^{۲} + v_o t + x_o \qquad (۵)$$

$$v^{۲} - v_o^{۲} = ۲a(x - x_o) \qquad (۶)$$

معادلات (۱) تا (۶) معادلات سینماتیکی برای حرکت یک بعدی (در راستای محور X) است.

← سقوط آزاد حرکتی است که صرفاً تحت تأثیر نیروی گرانی یا ثقل انجام می شود. سیبی که از درخت جدا شده و به طرف زمین می رود و ماهواره ای که موازی به دور زمین می گردد، هر دو سقوط آزادند. به طور کلی حرکت همه اجسامی را که فقط تحت تأثیر گرانی باشند چه در حین بالا رفتن و چه در موقع پایین آمدن، سقوط آزاد می گویند.

- در غیاب مقاومت هوا همه اجسام با شتاب یکسانی سقوط می کنند:

$g = ۹/۸ \ (\frac{m}{s^{۲}})$ (شتاب گرانش)

شتاب گرانش یک اسکالر مثبت است. چون شتاب گرانش در راستای محور Y و به سمت پایین است داریم، $\vec{a} = -g\hat{j}$ علامت منفی جهت شتاب را نشان می دهد (پایین)

- معادلات سقوط آزاد یک بعدی:

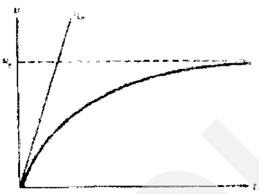
$$v = -gt + v_o \qquad (۱)$$

$$y = \frac{۱}{۲}(v + v_o)t + y_o \qquad (۲)$$

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^{۲} + v_o t + y_o \qquad (۳)$$

$$v^{۲} - v_o^{۲} = -۲g(y - y_o) \qquad (۴)$$

اگر مقاومت هوا را داشته باشیم اجسامی که از ارتفاعهای نسبتاً زیاد سقوط می کنند شتابشان ثابت نیست بلکه به تدریج کم می شود. سرعت سرانجام به یک مقدار حدی می رسد و جسم بقیه راه را با همین سرعت ثابت که سرعت حدی (V_T) نامیده می شود، طی می کند. مقدار سرعت حدی به وزن، شکل جسم و چگالی هوا بستگی دارد.



فصل چهارم:
لختی و حرکت دو بعدی

← اصل لختی: جسمی که روی سطح افقی بدون اصطکاکی در حرکت باشد همواره با سرعت ثابت به حرکت ادامه می دهد. اصطلاح لختی یا اینرسی در واقع بیانگر تمایل جسم به مقاومت در برابر هرگونه تغییر در (بردار) سرعت آن است.

- قانون اول نیوتن (قانون اول حرکت): هر جسمی حالت سکون یا حالت حرکت یکنواخت خود روی خط راست را حفظ می کند مگر اینکه ناچار شود در اثر نیروهایی که به آن وارد می شود حالتش را تغییر بدهد.

این قانون در واقع شامل خاصیتی به نام لختی (یا اینرسی) در همه اجسام است

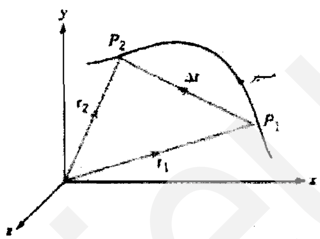
لختی هر جسم مقاومتی است که جسم در مقابل هرگونه تغییر در حالت حرکت از خودش نشان می دهد.

جسمی که با طناب روی یک سطح افقی کشیده می شود تحت تأثیر دو نیروی افقی است، یکی کشش طناب (در جهت حرکت) و دیگری اصطکاک سطح (در خلاف جهت حرکت). اگر اندازه این نیروها یکی باشد یعنی برآیندشان صفر باشد جسم با سرعت ثابت (طبق قانون اول) حرکت خواهد کرد.

➔ بردار مکان در فضای سه بعدی $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

اگر مطابق شکل ذره از نقطه P_1 در مکان $\vec{r}_1$ به نقطه P_2 در مکان $\vec{r}_2$ برود جابجایی آن عبارت است از:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j} + \Delta z\,\hat{k} = (x_2 - x_1)\,\hat{i} + (y_2 - y_1)\,\hat{j} + (z_2 - z_1)\,\hat{k}$$



سرعت متوسط ($\bar{\vec{v}}$) برابر است با نسبت جابجایی به مدت زمان سپری شده

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$$

سرعت لحظه ای $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right) = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x\,\hat{i} + v_y\,\hat{j} + v_z\,\hat{k}$

شتاب متوسط و لحظه ای

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\right) = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x\,\hat{i} + a_y\,\hat{j} + a_z\,\hat{k}$$

در مورد جسمی که با شتاب ثابت در سه بعد حرکت می کند معادلات سینماتیکی به صورت زیر است:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \frac{1}{2}(\vec{v}_0 + \vec{v})t \qquad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

$$v^2 - v_0^2 = 2\vec{a}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_0) \qquad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

مجذور یک کمیت برداری، اسکالر است. $v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v}$

روابط بالا به صورت برداری حساب می شوند.

در دو بعد روابط جبری اند:

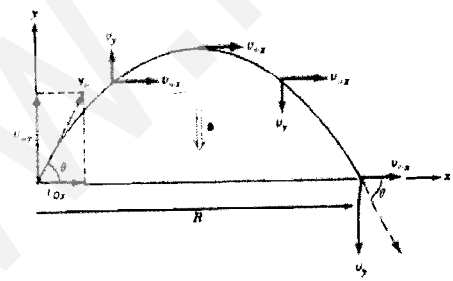
$$v_y = v_{\circ y} + a_y t \qquad v_x = v_{\circ x} + a_x t$$

$$y = y_\circ + \frac{1}{2}(v_{\circ y} + v_y)t \qquad x = x_\circ + \frac{1}{2}(v_{\circ x} + v_x)t$$

$$y = y_\circ + v_{\circ y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \qquad x = x_\circ + v_{\circ x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$v_y^2 - v_{\circ y}^2 = 2a_y (y - y_\circ) \qquad v_x^2 - v_{\circ x}^2 = 2a_x (x - x_\circ)$$

- جسمی که در نزدیکی سطح زمین پرتاب شده باشد دو حرکت مستقل از هم دارد: یکی حرکت افقی با سرعت ثابت (طبق قانون اول نیوتن، چون در جهت افقی نیرویی به آن وارد نمی شود) و دیگری حرکت شتابدار در راستای قائم که ناشی از شتاب ثقل زمین است.



$$(1) \begin{cases} a_x = o \\ a_y = -g \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} v_{\circ x} = v_\circ \, Cos\theta \\ v_{\circ y} = v_\circ \, Sin\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_x = v_{\circ x} = v_\circ \, Cos\theta \\ v_y = v_{\circ y} - gt = v_\circ \, Sin\theta - gt \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x = v_{\circ x} t = v_\circ \, Cos\theta \, t \\ y = v_{\circ y} t - \frac{1}{2} g t^2 = v_\circ \, Sin\theta \, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} , \quad \begin{cases} x_\circ = o \\ y_\circ = o \end{cases}$$

$$(4) \ v_y^{\ 2} - v_{\circ y}^{\ 2} = -2g(y - y_\circ)$$

این معادلات تا زمانی که سرعت پرتابه خیلی کمتر از سرعت حدی اش باشد (شتاب ثابت فرض شود) قابل استفاده اند.

معادله های گروه ۳ را می توان با هم ترکیب و معادله مسیر پرتابه را بدست آورد.

$$t = \frac{x}{v_\circ Cos\theta} \quad , \quad y = v_\circ Sin\theta \left(\frac{x}{v_\circ Cos\theta}\right) - \frac{۱}{۲} g \left(\frac{x}{v_\circ Cos\theta}\right)^۲$$

$$y = x \tan\theta - \frac{gx^۲}{۲v_\circ^۲ Cos^۲\theta} \qquad (۵)$$

که معادله (۵) یک سهمی است.

می توان پرواز پرتابه (T) را بدست آورد. می دانیم که پرتابه در انتهای مدت پرواز به زمین می خورد:

$$y = o$$

$$o = v_\circ Sin\theta t - \frac{۱}{۲} gt^۲ \quad \rightarrow \quad T = \frac{۲v_\circ Sin\theta}{g} \qquad (۶)$$

برای پیدا کردن برد (R) یا بیشترین مسافت افقی ای که گلوله طی می کند از زمان پرواز را استفاده می کنیم.

$$T = \frac{۲v_\circ Sin\theta}{g} \quad , \quad x = v_\circ Cos\theta t$$

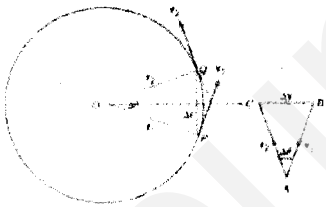
$$\begin{cases} Sin(۲\theta) = ۲ Sin\theta Cos\theta \\ R = v_\circ Cos\theta \left(\frac{۲v_\circ Sin\theta}{g}\right) = \frac{۲v_\circ^۲ Sin\theta Cos\theta}{g} \end{cases}$$

$$R = \frac{v_\circ^۲ Sin(۲\theta)}{g} \qquad (۷)$$

این رابطه زمانی استفاده می شود که نقطه پرتاب با نقطه فرود همتراز باشد.

بیشترین برد زمانی است که $Sin(۲\theta) = ۱$ باشد یعنی $\theta = ۴۵^\circ$

هنگامیکه ذره ای با سرعت ثابت روی دایره ای حرکت می کند جهت بردار سرعت پیوسته تغییر می کند ولی بزرگی آن ثابت است. در این حرکت جهت شتاب همیشه به سمت مرکز دایره است و در نتیجه بر V عمود است.



فرض در بازه زمانی کوتاه Δt بردار مکان ذره به اندازه زاویه $\Delta\theta$ دوران می کند یعنی ذره به اندازه $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ جابجا می شود و جابجایی آن در جهت قائم است (مطابق شکل) اندازه $\vec{v}_1$ با اندازه $\vec{v}_2$ برابر است و $\Delta\vec{v}$ در جهت افقی و به طرف مرکز دایره است. زاویه بین $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ هم $\Delta\theta$ است.

دو مثلث متساوی الساقین OPQ و ABC متشابه اند.

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta r}{r} = \dfrac{\Delta v}{v} \\ \Delta r = v\,\Delta t \end{cases} \rightarrow \qquad \Delta v = \frac{v}{r}\Delta r = \frac{v}{r}(v\,\Delta t) = \frac{v^2}{r}\Delta t$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) = \frac{v^2}{r}$$

پس اندازه شتاب مرکز گرا $\qquad a_r = \dfrac{v^2}{r}$

شاخص r نشان می دهد که این شتاب شعاعی (در راستای شعاع و به طرف مرکز دایره) است.

در شکل برداری $\vec{a}_r = -\dfrac{v^2}{r}\hat{r}$. $\hat{r}$ بردار یکه ای است که از مرکز دایره در امتداد شعاع و به طرف خارج رسم می شود. علامت منفی نشان می دهد جهت شتاب مرکز گرا به طرف مرکز دایره است.

- دوره تناوب (T) زمانی است که طول می کشد تا ذره یک دور کامل دایره یعنی مسافت $2\pi r$ را طی کند

$$\begin{cases}\Delta x = ۲\pi r \\ \Delta t = T\end{cases} \quad \rightarrow \quad v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۲\pi r}{T}$$

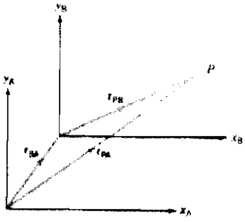
پس در حرکت دورانی یکنواخت شتاب مرکز گرا به صورت زیر بدست می آید:

$$a_r = \frac{v^۲}{r} = \frac{۱}{r}(\frac{۲\pi r}{T})^۲ = \frac{۴\pi^۲ r}{T^۲}$$

➔ مکان یا سرعت هر جسم فقط نسبت به اجسام دیگر معنی دارد (سرعت یک جسم نسبت به جاده (زمین) اندازه گیری می شود.) چارچوب مرجع یک موجود فیزیکی است مثل قطار، درخت، زمین...

چارچوب مرجعی که در آن قانون اول نیوتن صادق باشد چارچوب مرجع لخت نامیده می شود. (در چارچوب مرجع لخت جسمی که تحت تأثیر نیروی خالصی نباشد یا ساکن می ماند یا با سرعت ثابت حرکت می کند.)

هر چارچوبی که نسبت به یک چارچوب لخت با سرعت ثابت در حرکت باشد خودش هم یک چارچوب لخت است. اگر شتاب ذره ای در یک چارچوب لخت صفر باشد در تمام چارچوبهای لخت دیگر هم صفر است. گاهی لازم می شود که حرکت جسمی را نسبت به جسم دیگری که خودش هم نسبت به زمین در حرکت است بررسی کنیم.



مطابق شکل، مکان ذره P نسبت به چارچوب A با $\vec{r}_{PA}$ و نسبت به چارچوب B با $\vec{r}_{PB}$ مشخص شده است. $\vec{r}_{BA}$ هم مکان B نسبت به A است.

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}$$

فرض کنید که هم ذره P و هم چارچوب B نسبت به چارچوب A در حرکت باشند.

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}$$

(سرعت ذره P نسبت به A برابر است با سرعت آن نسبت به B به اضافه سرعت B نسبت به A.)

$$\vec{v}_{AB} = -\vec{v}_{BA}$$

اگر ذره ای در یک مسیر منحنی با سرعت غیر ثابت حرکت کند شتاب آن شامل مؤلفه شعاعی که از تغییر جهت سرعت حاصل می شود ($a_r = \frac{v^2}{r}$) و دیگری مؤلفه مماسی است که حاصل از تغییر در مقدار سرعت است ($a_t = \frac{dv}{dt}$).

این شتاب مماسی اگر سرعت در حال افزایش باشد در جهت سرعت و اگر سرعت در حال کاهش باشد در خلاف جهت آن است.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t = -\frac{v^2}{r}\hat{r} + \frac{dv}{dt}\hat{\theta}$$

فصل پنجم:
دینامیک ذره - قسمت اول

دینامیک شاخه ای از علم مکانیک است که در آن حرکت شتابدار اجسام با استفاده از مفهوم نیرو توضیح داده می شود.

- هر نیرویی یا نیروی تماسی است یا نیروی کنش از دور.

نیروهای تماسی وقتی ظاهر می شوند که اجسام با یکدیگر تماس فیزیکی داشته باشند. مثل نیروی اعمال شده به وسیله طناب یا فنر، نیروهای برخوردی، نیروهای اصطکاکی بن سطوح، نیروهای وارد از مایعات به جداره های ظرف و ...

این نیرو ها ناشی از برهمکنش الکترومغناطیسی بین اتمهای سطوح تماس دو جسم اند.

نیروهای کنشش از دور بین اجسامی مثل زمین و ماه بروز می کند که بدون هیچ واسطه مادی با یکدیگر برهمکنش دارند. آهنرباها و بارهای الکتریکی هم می توانند در خلاء (بدون نیاز به محیط مادی) نیرو مبادله کنند.

نیرو کمیتی است که هم مقدار و هم جهت دارد.

- جرم یک جسم معیار از لختی یا مقاومت آن در برابر تغییر سرعت است.

جرم کمیتی است اسکالر و خاصیت ذاتی جسم است و به مکان جسم بستگی ندارد. نسبت جرم دو جسم به هم برابر است با معکوس نسبت تغییر سرعتها

قانون دوم نیوتن رابطه بین نیروی وارد شده به جسم و شتاب ناشی از آن است. اگر جرم ثابت باشد

$$F \propto a \qquad \rightarrow \qquad F = Kma$$

K ثابت تناسب است.

در دستگاه SI یکای نیرو نیوتن (N) است و آن نیرویی است که اگر به جسمی به جرم ۱Kg وارد شود شتابی برابر با $۱\frac{m}{s^۲}$ به آن می دهد.

$$۱N = ۱\,\frac{Kg\,m}{s^۲}$$

- وقتی نیروهای متعددی به یک جسم وارد شود باید جمع برداری آنها را در نظر بگیریم:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

شتاب در همان جهت نیروی برآیند است.

بر حسب مؤلفه ها :

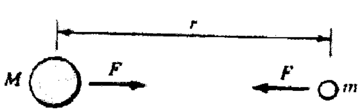
$$\sum F_x = ma_x \qquad , \qquad \sum F_y = ma_y \qquad , \qquad \sum F_z = ma_z$$

قانون دوم در تمام چارچوبهای لخت شکل یکسانی دارد.

- قانون گرانش جهانی نیروی جاذبه بین دو ذره به جرمهای m و M که در فاصله r از هم واقع شده اند را مشخص می کند.

$$F = \frac{GmM}{r^۲} \qquad , \qquad G = ۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱}\,\frac{N.m^۲}{Kg^۲}$$

G ثابت گرانش جهانی نامیده می شود.



نیرویی که کره زمین (M_E) (اگر تمام جرم در مرکز جسم متمرکز باشد) به جسمی (m) واقع شده در سطحش وارد می کند یعنی وزن جسمی به جرم m

$$W = \frac{GmM_E}{R_E^{۲}} \quad , \quad W = mg_{\circ} \quad \rightarrow \quad g_{\circ} = \frac{GM_E}{R_E^{۲}}$$

R_E شعاع زمین است.

$g_{\circ}$ (شدت میدان گرانشی در سطح زمین) مقدار نیروی گرانشی وارد بر واحد جرم در سطح زمین است و یکای آن $\frac{N}{Kg}$ یا $\frac{m}{s^{۲}}$ است. مقدار g (شتاب ثقل یا گرانشی) با $g_{\circ}$ (شدت میدان گرانشی) به علت دوران زمین مقداری متفاوت است.

– قانون سوم یا قانون عمل و عکس العمل می گوید نیروی وارد بر A از B ($\vec{F}_{AB}$) مقدارش مساوی و جهتش مخالف با نیرویی است که A بر B ($\vec{F}_{BA}$) وارد می کند

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

وزن واقعی ما $W = mg$ است. اما وزن ظاهر هر جسم برآیند نیروهایی است که از سطح نگهدارنده به آن جسم وارد می شوند.

فصل ششم:
دینامیک ذره - قسمت دوم

← اصطکاک نوعی نیروی تماسی است که با حرکت نسبی دو جسمی که با هم در تماس اند مخالفت می کند.

- نیروی اصطکاک متناسب با نیرویی است که دو جسم را به هم می فشارد.
- نیروی اصطکاک بستگی محسوسی به مساحت سطح تماس دو جسم ندارد.
- نیروی اصطکاک در سرعتهای نسبتاً کم مستقل از سرعت است.
- نیروی F به جسمی روی سطح افق وارد می شود، اگر جسمی حرکت نکند یعنی نیرویی در خلاف جهت F درت مساوی با آن وجود دارد که نیروی اصطکاک ایستایی (f_s) نامیده می شود.

اگر F را افزایش دهیم f_s افزایش می یابد تا به یک مقدار ماکزیمم برسد. اگر F بیشتر از ماکزیمم f_s باشد جسم شروع به لغزش می کند و اصطکاک جنبشی (f_k) داریم.

در سرعتهای کم نیروی اصطکاک بلافاصله بعد از شروع لغزش افت می کند. در سرعتهای زیاد f_k با افزایش سرعت یا ثابت می ماند یا به تدریج کم می شود.

- نیروی اصطکاک متناسب با نیروی عمودی تکیه گاه (N) است.

$f_k = \mu_k N$

(μ_k) ضریب اصطکاک جنبشی و (μ_s) ضریب اصطکاک ایستایی یک عدد بی بعد است.

$F_s \leq \mu_s N$

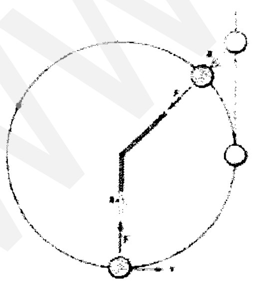
$F_{s(max)} = \mu_k N$ $\mu_k \leq \mu_s$

– به چرخ یا توپی که روی زمین می غلتد اصطکاک غلتشی اثر می کند این نوع اصطکاک معمولاً از اصطکاک جنبشی (لغزشی) بسیار کوچکتر است. جهت نیروی اصطکاک غلتشی بستگی به این دارد که عپغلتش آزاد باشد یا واداشته . غلتش واداشته مثل غلتش چرخهای عقب اتومبیل یا چرخ عقب دوچرخه

در غلتش واداشته نیروی اصطکاک رو به جلو (در جهت حرکت چرخ) است و در غلتش آزاد نیروی اصطکاک غلتشی به طرف عقب به چرخ وارد می شود و حرکت آنرا کند می کند.

– علت اصطکاک غلتشی آن است که محل تماس جسم غلتان و سطح در اثر فرورفتگی یکی از این دو یا هر دو، عملاً گسترده می شود و جسم غلتان موقع بیرون آمدن از این چاله ضربه ای به طرف عقب دریافت می کند.

← در حرکت دایره ای یکنواخت شتاب مرکز گرا $\vec{a}_r = -\frac{v^2}{r}\hat{r}$، که v سرعت و r شعاع دایره مسیر است.

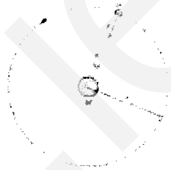


طبق قانون دوم نیوتن نیروی مرکزگرا $F = \frac{mv^2}{r}$ است.

نیروی مرکز گرا دائماً جهت سرعت جسم را تغییر می دهد و جسم به خاطر لختی اش مقاومت نشان می دهد.

- در سر پیچ جاده ها، شیب جانبی (عرضی) می سازند. این شیب که به طرف مرکز دایره است موجب می ود که نیروی عمودی وارد بر سایش (از جاده) مؤلفه ای به طرف مرکز مسیر داشته باشد. به این ترتیب، اگر نیروی اصطکاک به تنهایی برای تأمین نیروی مرکزگرا کافی نباشد به کمک این مؤلفه از لغزش ماشین به خارج از مسیر جلوگیری خواهد شد.

← یک نمونه مهم از حرکت دایره ای، گردش ماهواره ها به دور زمین است. در این مورد نیروی مرکزگرا از جاذبه زمین تؤمین می شود. در این گردش اگر جسم مرکزی خیلی بزرگتر از جرم جسمی باشد که در مدار قرار گرفته است می توانیم جسم مرکزی را ثابت بگیریم. اگر جرم m (ماهواره) حول M (زمین) حرکت دورانی یکنواخت داشته باشد.



$$F = ma \qquad , \qquad \frac{GmM}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

که v سرعت ماهواره در مدار استو به سرعت ماهواره بستگی نداردو با افزایش فاصله کاهش می یابد. دوره تناوب مدار آن عبارت است از:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

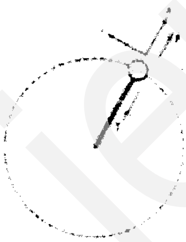
$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}r^3 \qquad , \qquad k = \frac{4\pi^2}{GM} \qquad \rightarrow \qquad T^2 = kr^3$$

که این رابطه به قانون سوم کپلر معروف است که می گوید مربع دوره تناوب مدار متناسب با مکعب شعاع مدار است. ثابت K فقط به جرم جسم مرکزی (M) بستگی دارد. (ماهواره در حال سقوط آزاد است.)

← اتوبوسی که در حال ترمز کردن است، اتومبیلی که پیچ جاده ای را طی می کند و هواپیمای در حال بلند شدن همگی چارچوبهای نالخت یا شتابدارند.

در چارچوبهای نالخت علاوه بر نیروی های واقعی (که در چارچوب لخت استفاده می شوند.) باید نیروی کاذب ناشی از لختی را هم به حساب آوریم.

گلوله ای که به نخی بسته شده است و روی یک میز افقی حرکت دورانی یکنواخت دارد از دیدگاه چارچوب لخت گلوله شتاب مرکز گرا دارد و تنها نیروی وارد بر آن کشش نخ است. پس قانون دوم نیوتن برای گلوله به شکل $T=\frac{mv^{2}}{r}$ است اما در دستگاه نالخت علاوه بر این نیرو نیروی کاذبی به اسم نیروی مرکز گریز (F') وجود دارد که ناشی از لختی جسم است.



$$F'=-\frac{mv^{2}}{r} \quad , \quad T+F'=o$$

فصل هفتم: کار و انرژی

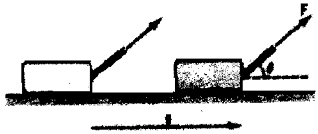
← اصل پایستگی انرژی یا بقای انرژی: انرژی کمیتی پایسته است. از شکلی به شکل دیگر تبدیل می شود ولی هرگز ایجاد یا نابود نمی شود.

← کار نیروی ثابت $\vec{F}$ وقتی که نقطه اثر آن به اندازه $\vec{S}$ جابجا می شود به صورت زیر تعریف می شود:

$$w = \vec{F}.\vec{S} = FS\,Cos\theta$$

θ زاویه بین $\vec{F}$ و $\vec{S}$ است. فقط مؤلفه ای از نیرو که در راستای جابجایی است یعنی$FCos\theta$ کار انجام
می دهد.

- کار یک کمیت اسکالر است و یکای آن در سیستم SI نیوتن بر متر (N.m) است که ژول (J) نامیده می شود. (1J=N.m)



$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} - F_z\hat{k} \quad , \qquad \vec{S} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}$$

$$w = \vec{F}.\vec{S} = F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z$$

- کار فقط بستگی به نیرو، جابجایی و زاویه بین آنها دارد و مستقل از سرعت و شتاب جسم است.

- نیروی عمودی جسمی که روی سطح است و نیروی مرکزگرا کاری انجام نمی دهد. چون که همواره به مسیر حرکت عمود است.

- وقتی چندین نیرو همزمان روی جسمی کارهایی انجام دهند کار خالصی که روی جسم انجام می شود برابر با جمع جبری کارهای تک تک نیروها است.

$$W_{\text{خالص}} = W_{۱} + W_{۲} + \dots + W_{N}$$

اگر جسم فقط حرکت انتقالی داشته باشد و بتوانیم جسم را مثل یک ذره در نظر بگیریم

$$W_{\text{خالص}} = \vec{F}_{۱}.\vec{S} + \vec{F}_{۲}.\vec{S} + \dots + \vec{F}_{N}.\vec{S} = (\sum \vec{F}).\vec{S}$$

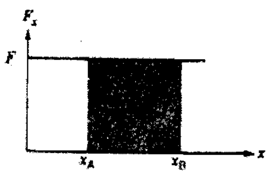
$\sum \vec{F}$ برآیند همه نیروهای خارجی ای است که به جسم وارد می شوند. پس در حرکت انتقالی

$$W_{\text{خالص}} = \vec{F}_{\text{خالص}}.\vec{S}$$

- کار نیروی اصطکاک و کار نیروی ثقل (گرانی) منفی است.

- کار انجام شده توسط نیروی ثقل فقطِ به مختصات قائم اولیه و نهایی جسم بستگی دارد و مستقل از مسیری است که جسم روی آن جابجا می شود. (کار نیروی ثقل برای هر مسیری که به نقطه اولیه اش برگردد، صفر است.)

← کار را می شود از مساحت زیر منحنی F بر حسب x محاسبه کرد:



کاری که نیروی ثابت F_o در جابجایی جسم از x_A تا x_B انجام می دهد برابر با مساحت هاشور خورده است.

$$(W = F_o(x_B - x_A))$$

- نیروی کشش در یک فنر ایده آل با مقدار تراکم یا انبساط فنر متناسب است.

$$F_S = -kx \quad \text{(قانون هوک)}$$

k ثابت فنر است و بر حسب $\frac{N}{m}$ اندازه گیری می شود.

- ثابت هر فنر، در واقع مقدار نیروی لازم برای تراکم یا انبساط آن به اندازه واحد طول است و فقط به جنس فنر بستگی دارد.

علامت منفی به این معنی است که نیرو همیشه با انبساط فنر ($x > o$) یا تراکم آن ($x < o$) مخالفت

می کند. این نیرو همیشه می خواهد که فنر را به حالت اولیه اش برگرداند، یعنی یک نیروی بازگرداننده است.

- کار نیروی ناشی از فنر ایده آل فقط به نقاط ابتدا و انتها وابسته است.

$$W_S = -\frac{۱}{۲}k(x_f^۲ - x_i^۲)$$

← قضیه کار – انرژی: کار خالصی که روی یک ذره انجام می شود مساوی با تغییرات انرژی جنبشی (انتقالی) آن ذره است. انرژی جنبشی هر جسم در واقع معیاری از کار خالصی است که باید روی آن جسم انجام شود تا سرعتش را از صفر به مقدار معینی برساند.

$$W_{\text{خالص}} = \Delta K \quad \rightarrow \quad \Delta K = K_f - K_i = \frac{۱}{۲}m(v_f^۲ - v_i^۲)$$

قضیه کار – انرژی یکی از پیامدهای قانون دوم نیوتن است.

← توان مکانیکی عبارت است از آهنگی که کار با آن انجام می شود. اگر کار ΔW در بازه زمانی Δt انجام شده باشد صبق تعریف عبارت است از:

$$\overline{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

یکای توان در دستگاه SI، $\frac{J}{s}$ است که وات (w) نامیده می شود.

توان لحظه ای در یک بازه زمانی کوچک:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{F}\cdot\vec{S}) = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

توان در هر لحظه برابر با حاصلضرب اسکالر نیرو و سرعت لحظه ای است

یکای دیگر توان اسب بخار (hp) است. ($۱hp = ۷۴۶w$)

در سه بعد نیرویی که مقدار و جهتش تغییر می کند را می توان به صورت تابعی از $\vec{r}$ بیان کرد. کاری که چنین نیرویی در جابجاییهای بی نهایت کوچک $d\vec{s}$ انجام می دهد. عبارت است از:

$$dW = \vec{F}.d\vec{S}$$

$$W_{A\to B} = \int_A^B F_x\,dx + \int_A^B F_y\,dy + \int_A^B F_z\,dz$$

که به این انتگرالها انتگرال خطی یا انتگرال مسیر می گویند. علامت انتگرال به علامت مؤلفه های نیرو و حدود انتگرال که جهت حرکت در مسیر را مشخص می کنند، بستگی دارد.

فصل هشتم: پایستگی انرژی

انرژی مکانیکی به مجموع انرژیهای جنبشی و پتانسیل هر سیستم می گویند.

انرژی مکانیکی یک سیستم تحت شرایط معینی همواره ثابت می ماند (اصل پایستگی انرژی مکانیکی)

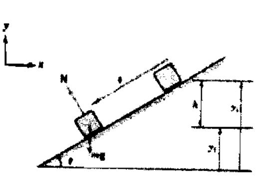
انرژی پتانسیل انرژی ای است که به وضعیت نسبی دو یا چند ذره ای که با یکدیگر برهمکنش دارند وابسته است. (عبارت است از کار خارجی لازم برای آنکه اجزای سیستم را با سرعت ثابت از وضعیت $U = o$ به وضعیت مشخص دیگری در بیاورند.)

کار یک عامل خارجی می تواند انرژی پتانسیل یک سیستم را تغییر بدهد.

(در سرعت ثابت) $W = \Delta U = U_f - U_i$

کار خارجی مثبت موجب افزایش انرژی پتانسیل می شود.

کار نیروی گرانشی و کار نیروی فنرمستقل از مسیر هستند و به مکانهای اولیه و نهایی بستگی دارد به آن نیروهای پایستار می گویند. اما نیروی اصطکاک هم به نقاط اول و آخر و هم به طول مسیر بستگی دارد، نمونه ای از نیروهای ناپایستار است.



$W_g = -mg(y_f - y_i)$ کار نیروی ثقل

$W_S = -\frac{۱}{۲}k(x_f^۲ - x_i^۲)$ کار نیروی فنر

$W_f = -f_k d$ کار نیروی اصطکاک

کار نیروی پایستار در هر مسیر بسته ای صفر است.

برای آنکه کار نیروی پایستار به مسیر بستگی نداشته باشد باید نیرو تابعی از مکان باشد نه تابعی از سرعت یا زمان.

انرژی پتانسیل فقط برای نیروهای پایستار تعریف می شود.

اگر $\Delta K = o$ باشد کار خالصی که روی جسم انجام می شود (حاصلجمع کار نیروی خارجی و کار نیروی پایستار داخلی) مساوی صفر است.

$$W_{EX} + W_C = o \quad \rightarrow \quad W_C = -W_{EX}$$

$$W_C = -\Delta U = -(U_f - U_i)$$

علامت منفی یعنی کار مثبت نیروی پایستار منجر به کاهش انرژی پتانسیل وابسته به آن می شود. (مثل سقوط سیب به زمین یا بازگشت فنر به حالت تعادل)

وقتی ذره از A تا B حرکت می کند، تغییر انرژی پتانسیل برابر خواهر بود با منفی کاری که نیروی پایستار انجام می دهد:

$$U_B - U_A = -\int_A^B \vec{F}_C . d\vec{s}$$

انرژی پتانسیل تابعی از مکان است.

$U_g = mgy$ انرژی پتانسیل گرانشی

$U_S = \frac{۱}{۲}kx^۲$ انرژی پتانسیل فنر

انرژی مکانیکی به صورت حاصلجمع انرژی جنبشی و پتانسیل تعریف می شود.

$$E = K + U$$

اصل پایستگی انرژی مکانیکی: مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل در همه نقاط مسیر با هم برابر است.

$$\Delta E = o \qquad \rightarrow \qquad E_i = E_f$$

هیچ نیروی خالص خارجی یا داخلی ناپایستاری نباید در کار باشد.

$$W_C = \Delta K \qquad , \qquad W_C = -\Delta U$$

$$\Delta K + \Delta U = o$$

$$\begin{cases} \Delta K = K_f - K_i \\ \Delta U = U_f - U_i \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad K_i + U_i = K_f + U_f$$

باید وضعیت مرجع پتانسیل $U = o$ را مشخص کنید. وقتی جسمی به زمین می خورد نیرویی از زمین دریافت می کند و انرژی مکانیکی اش دیگر پایسته نیست.

اصل بقای انرژی مکانیکی را فقط وقتی می شود به سیستمی اعمال کرد که هیچ نیروی ناپایستاری (داخلی یا خارجی) کاری انجام ندهد.

$$W_{کل} = W_C + W_{NC} = \Delta K$$

$$W_C = -\Delta U \qquad , \qquad W_{NC} = \Delta K + \Delta U$$

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U$$

$$W_{NC} = \Delta E = E_f - E_i$$

W_C کار نیروی پایستار و W_{NC} کار نیروی ناپایستار و ΔK کار خالصی که روی یک ذره انجام می شود.

پس کار نیروی ناپایستار باعث تغییر در انرژی مکانیکی سیستم می شود.

اصطکاک و مقاومت هوا انرژی مکانیکی را کم و نیروی پیشران حاصل از موتور انرژی مکانیکی را زیاد

می کند.

رابطه بین انرژی پتانسیل و کار نیروی پایستار به صورت زیر است:

$$dU = -\vec{F}_C . d\vec{S}$$

اگر در یک بعد باشیم $\qquad F_x = -\dfrac{dU}{dx}$

پس هر مؤلفه یک نیروی پایستار برابر با منفی مشتق (مکانی) تابع انرژی پتانسیل در جهت همان محور است. علامت منفی یعنی نیرو در جهت کاهش انرژی پتانسیل است.

$$U_g = mgy \quad \rightarrow \quad F_y = -\frac{dU}{dy} = -mg$$

$$U_S = \frac{۱}{۲}kx^{۲} \quad \rightarrow \quad F_x = -\frac{dU}{dx} = -kx$$

نیروی پایستار از تابع اسکالر انرژی پتانسیل مشتق می شود.

اصل بقا یا پاستگی انرژی: انرژی از صورتی به صورت دیگر تبدیل می شود اما هرگز امکان ندارد که خلق یا نابود شود.

ارتباط بین کار و انرژی : انجام کار در واقع به معنی انتقال انرژی از یک جسم به جسم دیگر است. اگر کاری که جسم A روی جسم B انجام می دهد مثبت باشد انرژی از جسم A به جسم B منتقل می شود و اگر منفی باشد برعکس است.

فصل نهم: تکانه خطی

← تکانه خطی کمیتی برداری است که مقدار آن حاصلضرب جرم ذره در سرعت آن (mv) است و جهتش همان جهت سرعت ذره است. یکای اندازه گیری تکانه خطی $\frac{Kg\,m}{s}$ است.

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

– یکی از قوانین مهم طبیعت اصل پایستگی (یا بقای) تکانه خطی است. اگر به سیستمی متشکل از ذرات متعدد هم هیچ نیروی خارجی اثر نکند یا برآیند نیروهای خارجی وارد بر آن صفر باشد بردار تکانه خطی کل سیستم پایسته می ماند.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$\vec{F} = o \quad \rightarrow \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = o \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \text{ثابت}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

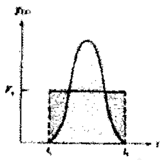
← ضربه برابر با تغییر تکانه خطی است.

$$\vec{I} = \Delta\vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i$$

یک کمیت برداری است و با همان یکای تکانه خطی یعنی $\frac{Kg\,m}{s}$ اندازه گیری می شود. ضربه همیشه در جهت تغییر تکانه است.

$$d\vec{P} = \vec{F}dt \qquad , \qquad \vec{I} = \Delta\vec{P} = \int_i^f \vec{F}\ dt$$

نیروهای ضربه ای در بازه زمانی کوتاه $\Delta t = t_f - t_i$ ثابت نیستند. ضربه مساحت زیر منحنی F بر حسب t است.

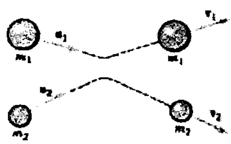


مساحت زیر نمودار نیروی ثابت F_a با مساحت زیر منحنی واقعی F(t) مساوی است و عملاً همان ضربه واقعی را حساب کرده ایم.

- تغییر ضربه بر حسب مساحت یعنی یک تغییر تکانه معین ممکن است از نیروی بزرگی که رد مدت زمان کوتاهی اثر می کند یا از نیروی کوچکی که در زمان درازی اثر می کند ناشی شده باشد (هرچه زمان کوتاه تر نیرو بزرگتر)

←برخورد در واقع برهمکنشی است که در بازه زمانی کوچک (Δt) صورت می گشرد. در رویداد برخورد حتی در حضور نیروهای خارجی، تکانه خطی کل سیستم در حین برخورد ثابت می ماند. یعنی تکانه سیستم از لحظه پیش از برخورد تا لحظه بعد از برخورد ثابت است.

- شکل نمایشی از برخورد میان دو گلوله به جرمهای m_1 و m_2 است.



سرعتهای قبل از برخورد $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ و سرعتهای بعد از برخورد $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

این یک معادله برداری است. بنابراین هر مؤلفه تکانه هم مستقلاً پایسته است.

$$m_1u_{1x} + m_2u_{2x} = m_1v_{1x} + m_2v_{2x}$$
$$m_1u_{1y} + m_2u_{2y} = m_1v_{1y} + m_2v_{2y}$$
$$m_1u_{1z} + m_2u_{2z} = m_1v_{1z} + m_2v_{2z}$$

- پایسته بودن تکانه خطی یعنی هیچ نیروی خارجی خالصی به سیستم اثر نکند. اگر نیروی خارجی به سیستم وارد شود این نیرو برابر است با آهنگ تغییر تکانه خطی کل آن سیستم

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

اگر $\vec{F}_{ext} = o$ باشد $\vec{P}$ ثابت است یعنی وقتی برآیند نیروهای خارجی وارد بر سیستم صفر باشد، تکانه خطی کل آن سیستم تغییر نمی کند.

- دو نوع برخورد داریم: الاستیک (کشسان) و غیر الاستیک

- در هر دو مورد تکانه خطی کل سیستم ثابت است.

- در برخورد الاستیک انرژی جنبشی پایسته است.

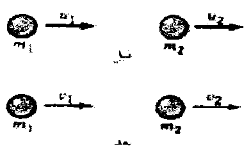
$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

در حین برخورد تمام یا بخشی از انرژی جنبشی ذرات برخورد کننده به صورت انرژی پتانسیل ذخیره می شود و بعد دوباره به طور کامل به صورت انرژی جنبشی در می آید.

- در برخورد غیر الاستیک انرژی جنبشی مجموعه ذرات سیستم تغییر می کند. مقداری از انرژی جنبشی صرف تغییر شکل یا ساختار داخلی می شود و آناً قابل بازیابی نیست.

در مورد ذرات میکروسکوپیک این انرژی ممکن است صرف تغییر حالت سیستم شود. مثلاً اتمی را به حالت انرژی بالاتر برساند یا ممکن است به انرژی گرمایی، صوت، نور یا هر شکل دیگری از انرژی تبدیل شود. در برخورد کاملاً غیر الاستیک دو جسم کاملاً به هم جفت می شوند یا می چسبند.

← در برخورد الاستیک یک بعدی سرعت نسبی ذرات (قبل و بعد از برخورد) از لحاظ مقدار تغییری نمی کند ولی از لحاظ جهت معکوس می شود.



$$\begin{cases} m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2 \\ \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \end{cases} \rightarrow \qquad v_2 - v_1 = -(u_2 - u_1)$$

- در جرمهای مساوی $m_1 = m_2 = m$

$$\begin{cases} u_1 + u_2 = v_1 + v_2 & \text{تکانه} \\ u_1 - u_2 = -v_1 + v_2 & \text{سرعت نسبی} \\ u_1 = v_2 - v_1 \end{cases} \rightarrow \qquad v_1 = u_2 \quad , \quad v_2 = u_1$$

- در جرمهای نامساوی $m_1 \neq m_2$ و هدف ساکن ($u_2 = o$)

$$\begin{cases} m_1u_1 = m_1v_1 + m_2v_2 \\ u_1 = v_2 - v_1 \end{cases}$$

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}u_1 \qquad , \qquad v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}u_1$$

اگر $\qquad m_1 \geq m_2 \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} v_1 \approx u_1 \\ v_2 \approx 2u_1 \end{cases}$

اگر $\qquad m_1 \leq m_2 \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} v_1 = -u_1 \\ v_2 = o \end{cases}$

← پایستگی تکانه خطی در همه برخوردها معتبر است. اما پایستگی انرژی جنبشی فقط در مورد برخوردهای الاستیک صدق می کند.

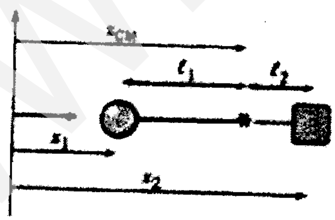
- تکانه بردار است و انرژی جنبشی اسکالر. هم تکانه خطی و هم انرژی جنبشی به نحوی به تلاش برای تغییر دادن سرعت ذرهخ مربوط می شوند. تغییر تکانه یعنی ضربه وارد بر ذره $\Delta\vec{P} = \vec{F}\Delta t$ تغییر انرژی جنبشی یعنی کاری که روی ذره انجام می شود $\Delta K = F\Delta x$

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} \qquad , \qquad F = \frac{\Delta K}{\Delta x}$$

نیرو به عبارتی آهنگ تغییر تکانه خطی نسبت به زمان است و به عبارت دیگر آهنگ تغییر انرژی جنبشی نسبت به مکان. اگر نیرو ثابت نباشد از این دو عبارت مقدارهای متفاوتی برای متوسط آن بدست می آید چون یکی میانگین زمانی است و دیگری میانگین مکانی است.

فصل دهم: سیستم های ذرات

ذرات یک سیستم ممکن است حرکتهای پیچیده ای داشته باشند، اما در هر سیستم نقطه خاصی است که ویژگیهای ساده و جالبی دارد. این نقطه را مرکز جرم می نامند.
در حرکت انتقالی مرکز جرم مشخصه ای از رفتار کل سیستم است، یعنی برای بررسی حرکت انتقالی سیستم می توانیم آنرا به صورت ذره ای به جرم کل سیستم که در مرکز جرم مستقر شده است، در نظر بگیریم.



مرکز جرم در واقع نوعی مکان میانگین (یا میانگین مکانهای) اجزای سیستم است.

$$X_{CM}=\frac{m_۱x_۱+m_۲x_۲}{m_۱+m_۲}$$

جرم سنگین تر مکان میانگین را به طرف خودش می کشد.

در سه بعد

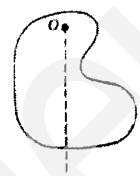
$$\vec{r}_{CM}=\frac{m_۱\vec{r}_۱+m_۲\vec{r}_۲+\ldots+m_N\vec{r}_N}{m_۱+m_۲+\ldots+m_N}=\frac{\sum m_i\vec{r}_i}{M}$$

جرم کل سیستم $M=\sum m_i$

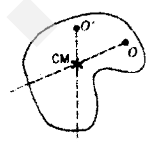
$$x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{M} \quad , \quad y_{CM} = \frac{\sum m_i y_i}{M} \quad , \quad z_{CM} = \frac{\sum m_i z_i}{M}$$

مرکز جرم اجسام یکنواختی که شکل منظم هندسی داشته باشند همان مرکز هندسی آنها است.

برای پیدا کردن مرکز جرم یک سیستم ورقه ای که شکل هندسی منظم ندارد می توانیم به روش تجربی عمل کنیم. ابتدا صفحه را از نقطه دلخواه O آویزان می کنیم. جسم مانند آونگ ساده ای عمل می کند که تمام جرمش در مرکز متمرکز شده باشد. وقتی جسم ثابت شد خطی از نقطه آویز در امتداد قائم رسم می کنیم

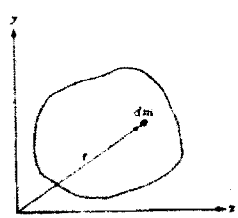


حال جسم را از نقطه دیگری مثلاً O' آویزان می کنیم و بعد از ثابت شدن خط قائم را رسم می کنیم. مرکز جرم محل تلاقی این دو خط خواهد بود.



برای اجسام غیر ورقه ای از روشی مشابه استفاده می کنیم فقط جسم را از سه نقطه آویزان می کنیم طوری که در یک صفحه نباشند.

برای بدست آوردن مرکز جرم اجسام جامد می توان جسم را به عنصرهای کوچک dm تقسیم کرد که متناسب با تقارن جسم انتخاب می شوند.



$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm$$

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\, dm \qquad , \qquad y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\, dm \qquad , \qquad z_{CM} = \frac{1}{M}\int z\, dm$$

می توانیم جرم را بر حسب چگالی آن مشخص کنیم:

چگالی حجمی $(\rho) \rightarrow \dfrac{Kg}{m^3}$ و

$$M = \rho V \quad \rightarrow \quad dM = \rho\, dV$$

چگالی سطحی $(\sigma) \rightarrow \dfrac{Kg}{m^2}$ و

$$M = \sigma V \quad \rightarrow \quad dM = \sigma\, dA$$

چگالی خطی $(\lambda) \rightarrow \dfrac{Kg}{m}$ و

$$M = \lambda V \quad \rightarrow \quad dM = \lambda\, dx$$

برای اجسام یک بعدی از چگالی خطی استفاده می کنیم: $dm = \lambda\, dx$

برای بدست آوردن سرعت مرکز جرم از معادله مکان مرکز جرم نسبت به زمان مشتق می گیریم:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{M}$$

$$M\,\vec{v}_{CM} = \sum m_i \vec{v}_i = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_N\vec{v}_N$$

طرف راست رابطه بالا مجموع تکانه های خطی تک تک ذرات سیستم است (یعنی تکانه خطی کل سیستم)

$$\vec{P} = M\,\vec{v}_{CM}$$

یعنی تکانه خطی کل سیستم معادل است با تکانه تک ذره ای (فرضی) به جرم M که با سرعت $\vec{v}_{CM}$ در حرکت باشد.

$$\frac{d}{dt}\left(M\,\vec{v}_{CM}\right)=\frac{d}{dt}\left(\sum m_i\vec{v}_i\right)$$
$$M\,\vec{a}_{CM}=\sum m_i\vec{a}_i=\sum \vec{F}_i$$

$\vec{F}_i$ نیروی خالصی که به ذره i ام وارد می شود.

$$\sum \vec{F}_i=\vec{F}_{ext}=M\,\vec{a}_{CM}$$

یعنی مرکز جرم سیستم طوری شتاب می گیرد که انگار تک ذره ای (فرضی) به جرم M در مرکز جرم قرار گرفته است و برآیند نیروهای خارجی در همین نقطه به آن اثر می کند.

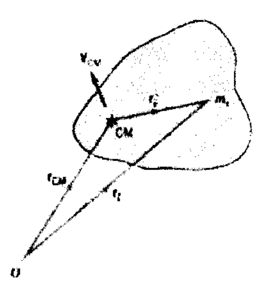
$$\vec{F}_{ext}=\frac{d\vec{P}}{dt}$$

یعنی آهنگ تغییر تکانه خطی کل یک سیستم برابر است با نیروی خالصی که از خارج به آن اثر می کند.

$$\vec{F}_{ext}=o \quad\rightarrow\quad \frac{d\vec{P}}{dt}=o \quad\rightarrow\begin{cases}\vec{P}=\text{ثابت}\\ \vec{v}_{CM}=\text{ثابت}\end{cases}$$

یعنی اگر برآیند نیروهای خارجی وارد بر یک سیستم صفر باشد سرعت مرکز جرم آن سیستم ثابت می ماند.

انرژی جنبشی سیستم در حالت کلی با انرژی جنبشی مرکز جرم (یعنی انرژی جنبشی ذره ای به جرم کل سیستم که در مرکز جرم واقع شده است.) به اضافه انرژی جنبشی ذرات سیستم نسبت به مرکز جرم.



مکان ذره iام ($\vec{r}_i$) نسبت به مبداء ثابت O برابر است با: $\quad \vec{r}_i=\vec{r}_{CM}+\vec{r}_i'$

$\vec{r}_{CM}$ مکان مرکز جرم و $\vec{r}_i'$ مکان ذره iام نسبت به مرکز جرم

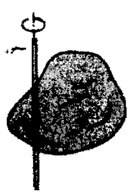
$$\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_i'$$

$$K_i = K_{CM} + K_i'$$

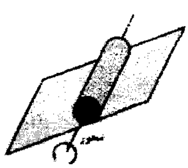
K_{CM} انرژی جنبشی مرکز جرم و K' انرژی جنبشی ذرات سیستم نسبت به مرکز جرم است و در حالت کلی ممکن است شامل انتقال دوران یا حتی نوسان نسبت به مرکز جرم باشد.

فصل یازدهم:
دوران جسم صلب حول محور ثابت

محور ثابت محوری است که نسبت به جسم ثابت است و راستای آن هم نسبت به یک چارچوب مرجع لخت ثابت است، یعنی در حالت کلی می تواند به موازات خودش در فضا منتقل شود. در صورتی که مکان محور هم نسبت به چارچوب مرجه لخت ثابت باشد
جسم حرکت دورانی خالص دارد، یعنی تمام ذرات آن روی دایره هایی که مرکزشان روی محور دوران قرار دارد، حرکت می کنند.



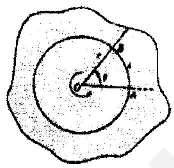
اگر محور دوران ثابت نباشد



در این صور ت محور دوران از مرکز جرم می گذرد و حرکت را به صور ت تر کیبی از انتقال مرکز جرم و دوران حول مرکز جرم توصیف می کنیم.

مطابق شکل مقطعی از جسم را در نظر می گیریم. در یک بازه زمانی معین همه ذرات روی خط OA به مکانهای متناظرشان روی خط OB می رسند. این ذرات جابجاییهای خطی متفاوتی دارند ولی جابجایی زاویه ای همه آنها یکی است.

زاویه مرکزی دایره بر حسب رادیان برابر است با نسبت طول قوس مقابل به شعاع دایره $\theta = \frac{S}{r}$



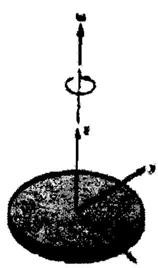
سرعت زاویه ای متوسط یعنی تغییر مکان زاویه ای نسبت به زمان است. در سیستم SI با یکای رادیان بر ثانیه ($\frac{rad}{s}$) اندازه گیری می شود.

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i}$$

سرعت زاویه ای لحظه ای

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} (\frac{\Delta\theta}{\Delta t}) = \frac{d\theta}{dt}$$

سرعت زاویه ای کمیتی برداری است، بردار سرعت زاویه ای ($\vec{\omega}$) در راستای محور دوران است. جهت آن را با استفاده از قاعده دست راست تعیین می کنیم. اگر انگشت دست راست را طوری بگیریم که خمش طبیعی چهار انگشت در جهت چرخش جسم باشد انگشت شست درحالت کشیده جهت ($\vec{\omega}$) را نشان می دهد



(چرخش پاد ساعتگرد را مثبت و ساعتگرد را منفی می گیریم.)

دوره تناوب (T): زمان پیمودن یک دور کامل و بسامد (f) تعداد دورها در یک ثانیه است.

$$f = \frac{۱}{T}$$

سرعت زاویه ای اگر ثابت باشدمثل سرعت متوسط تعیین می شود. جسم در هر دور به اندازه (۲π) رادیان دوران می کند.

$$\Delta\theta = ۲\pi \quad , \quad \Delta t = T \quad \rightarrow \quad \overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{۲\pi}{T} = ۲\pi f$$

بسامد یک دور بر ثانیه ($\frac{rev}{s}$) متناظر با سرعت زاویه ای (۲π) رادیان بر ثانیه است.

شتاب زاویه ای متوسط $\overline{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$

شتاب زاویه ای لحظه ای $\alpha = \lim_{\Delta t \to ۰}(\frac{\Delta\omega}{\Delta t}) = \frac{d\omega}{dt}$

شتاب زاویه ای کمیتی برداری است که در سیستم SI بر حسب رادیان بر مجذور ثانیه ($\frac{rad}{s^۲}$) اندازه گیری می شود.

در دوران حول محور ثابت، تمام ذرات جسم صلب با سرعت زاویه ای یکسان حرکت می کنند و شتاب زاویه ای شان هم یکی است. اگر $\vec{\omega}$ در حال افزایش باشد $\vec{\alpha}$ در جهت آن است و اگر در حال کاهش باشد $\vec{\alpha}$ در خلاف جهت آن است.

معادلات سینماتیکی دوران با شتاب زاویه ای ثابت حول محور ثابت

$$\omega = \alpha t + \omega_۰ \qquad (۱)$$

$$\theta = \frac{۱}{۲}\alpha t^۲ + \omega_۰ t + \theta_۰ \qquad (۲)$$

$$\omega^۲ - \omega_۰^۲ = ۲\alpha(\Delta\theta) \qquad (۳)$$

در فرمول زاویه مرکزی ($\theta = \frac{S}{r}$) S جابجایی خطی ذره، r فاصله اش از محور دوران و (θ) جابجایی زاویه ای آن است.

سرعت خطی $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(r\theta) = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega$

شتاب خطی (مماسی) $a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(r\omega) = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha$

ذره ای که در یک مسیر دایره ای به شعاع r با سرعت v در حرکت است، شتاب مرکز گرا دارد.

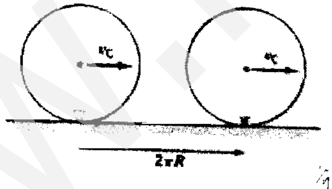
$$a_r = \frac{v^۲}{r} = r\omega^۲$$

اگر اندازه سرعت ذره تغییر کند آن وقت شتاب مماسی هم داریم.

در حالت کلی (وقتی که هم بزرگی و هم جهت سرعت خطی ذره دوران کننده تغییر می کند) شتاب خطی کلی برآیند دو مؤلفه شعاعی (مرکز گرا) و مماسی است.

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t \quad , \quad a = \sqrt{(a_r)^۲ + (a_t)^۲}$$

اگر مطابق شکل چرخی به شعاع R روی سطحی بغلتد (بدون لغزش) در هر دور کاملی که می زند به اندازه طول محیطش روی زمین جلو می رود و مدت زمان هر دور هم برابر با دوره تناوب حرکت دورانی (T) است پس سرعت مرکز چرخ



$$v_C = \frac{۲\pi R}{T} = R\omega$$

سرعت مماسی نقطه ای واقع بر لبه چرخ نسبت به مرکز $v_t = R\omega$

غلتش ترکیبی از انتقال مرکز چرخ و دوران حول مرکز چرخ است. سرعت هر نقطه ای واقع بر لبه چرخ

$$\vec{v} = \vec{v}_C + \vec{v}_t$$

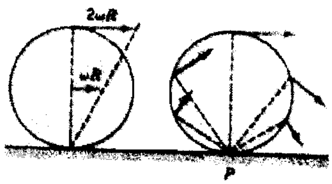
در بالای چرخ هر دو سرعت در یک جهتند

$$v = R\omega + R\omega = ۲R\omega$$

مرکز چرخ سرعت مماسی ندارد و سرعت آن ناشی از انتقال است

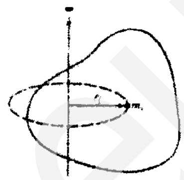
$$v = R\omega + o = R\omega$$

در پایین ترین نقطه دو سرعت در خلاف جهت هم هستند پس $v = o$ است.



هر چه ذره از مرکز دوران دورتر باشد سرعت خطی آن بیشتر است.

جسمی رادر نظر بگیرید



که حول محوری که مکان وجهتش ثابت است دوران می کند. این جسم از ذراتی به جرم m_i تشکیل شده که در فاصله های r_i از محور دوران واقع شده اند. (r_i فاصله عمودی از محور است)

انرژی جنبشی ذره i ام $K_i = \frac{۱}{۲} m_i v_i^۲$

سرعت زاویه ای برای تمام ذرات یکسان است.

$v_i = r_i \omega$

$K_i = \frac{۱}{۲} m_i v_i^۲ = \frac{۱}{۲} m_i (r_i \omega)^۲ = \frac{۱}{۲} m_i r_i^۲ \omega^۲$

انرژی جنبشی کل:

$K = \sum K_i = \frac{۱}{۲} \sum m_i r_i^۲ \omega^۲ = \frac{۱}{۲} I \omega^۲$

$I = \sum m_i r_i^۲$

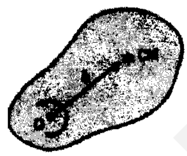
I را لختی دورانی (یا گشتاور لختی) جسم نسبت به یک محور معین می نامند. I به فاصله ذرات جسم از محور دوران یعنی به توزیع جرم جسم نسبت به محور دوران بستگی دارد. هیچ جسمی لختی دورانی یکتایی ندارد.

I در حرکت دورانی نقشی را دارد که m در حرکت انتقالی

$$K = \frac{۱}{۲} m v^{۲} \quad , \quad K = \frac{۱}{۲} I \omega^{۲}$$

لختی دورانی هر جسمی معیاری از مقاومت آن جسم در مقابل تغییر سرعت زاویه ای است.

اگر جسم صلبی با سرعت زاویه ای ω حول محوری که در فاصله h از مرکز جرم قرار دارد دوران کند،



انرژی جنبشی دارای دو جمله می شود $K = K_{CM} + K_{rel}$

که K_{CM} انرژی جنبشی وابسته به مرکز جرم و K_{rel} انرژی جنبشی مربوط به حرکت اجزای سیستم نسبت به مرکز جرم است.

$$K = K_{CM} + K_{rel}$$

$$K = \frac{۱}{۲} m v_{CM}^{۲} + \frac{۱}{۲} I_{CM} \omega^{۲} \quad , \quad v_{CM} = \omega h$$

$$K = \frac{۱}{۲} m (\omega h)^{۲} + \frac{۱}{۲} I_{CM} \omega^{۲} = \frac{۱}{۲} m \omega^{۲} h^{۲} + \frac{۱}{۲} I_{CM} \omega^{۲}$$

$$= \frac{۱}{۲} (I_{CM} + m h^{۲}) \omega^{۲} = \frac{۱}{۲} I \omega^{۲}$$

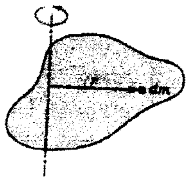
$$I = I_{CM} + m h^{۲}$$

این معادله به قضیه محورهای موازی معروف است و رابطه میان لختی دورانی حول هر محور (I) را با لختی دورانی حول محور موازی گذرنده از مرکز جرم (I_{CM}) بیان می کند.

در اجسام پیوسته جمع گسسته ($I = \sum m_i r_i^{۲}$) به انتگرال تبدیل می شود و برای محاسبه لختی دورانی باید سهم همه عنصرهای جسم را منظور کنیم.

$$dI = r^{۲} dm$$

r فاصله هر عنصر با محور دوران است نه از مبداء $I = \int r^{۲} dm$



باید m را بر حسب r مشخص کنیم تا I محاسبه شود.

برای میله نازک $dm = \lambda\, dl$ که λ چگالی خطی جرم است.

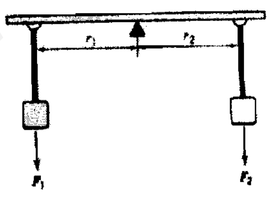
لختی دورانی یک میله نازک حول محوری که عمود بر میله از یک انتهای آن می گذرد

$$I = \frac{1}{3} ml^2$$

لختی دورانی قرص یا استوانه توپر به شعاع R وقتی محور دوران عمود بر قاعده از مرکز جسم می گذرد. $I_{CM} = \frac{1}{2} mR^2$

و اگر عمود بر قاعده از لبه جسم بگذرد: $I = I_{CM} + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2$

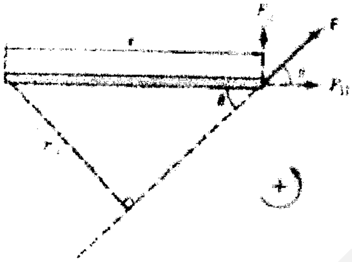
گشتاور موجب شتاب زاویه ای می شود. گشتاور یک نیرو قابلیت چرخانندگی آن حول یک محور یا تکیه گاه است.



اگر دو وزنه نامساوی در فاصله های $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ از تکیه گاه به دو طرف میله ای آویزان باشند شرط تعادل این است که گشتاور نیروهای F حول تکیه گاه با هم برابر باشد

$$\tau_1 = \tau_2 \qquad \rightarrow \qquad r_1 F_1 = r_2 F_2$$

مفهوم گشتاور را در مواردی که در آن نیرو عمود بر اهرم نیست هم کاربرد دارد



مؤلفه موازی با میله نیرو هیچ نقشی در چرخاندن میله ندارد پس فقط مؤلفه عمودی است که می تواند میله را حول لولا بچرخاند یعنی گشتاور برابر است با $rF_{\perp}$ و یا $r_{\perp}F$ که در آن $r_{\perp}$ فاصله مؤثری است که به آن بازوی اهرم می گوییم. (بازوی اهرم در واقع فاصله عمودی مبداء (لولا یا محور) از خط اثر نیرو است.

$$\begin{cases} r_{\perp} = r\,Sin\theta \\ F_{\perp} = F\,Sin\theta \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} \tau = r_{\perp}F = rF_{\perp} \\ \tau = rF\,Sin\theta \end{cases}$$

θ زاویه میان بردارهای $\vec{r}$ و $\vec{F}$ است. یکای گشتاور در سیستم SI برحسب N.m است.

جسم صلبی را در نظر بگیرید که حول محور ثابتی دوران می کند. $\vec{F}_i$ نیروی خارجی خالصی است که به ذره ای به جرم m_i وارد می شود. مؤلفه های از $\vec{F}_i$ که موازی محور است با عکس العمل تکیه گاه محور خنثی می شود. مؤلفه شعاعی این نیرو هم به همین ترتیب با عکس العمل تکیه گاه موازی می شود. تنها مؤلفه ای که به ذره شتاب می دهد F_{ll} یعنی مؤلفه مماسی بر مسیر دایره ای است.

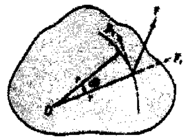
$$F_{ll} = m_i a_{ll} = m_i r_i \alpha$$

$$\tau_i = r_i F_{ll} = m_i r_i^{2} \alpha$$

$$\tau = \sum \tau_i = \sum m_i r_i^{2} \alpha = I\alpha$$

گشتاور موجب شتاب زاویه ای می شود و نیرو موجب شتاب خطی

این معادله ($\tau = I\alpha$) وقتی معتبر است که (۱) مکان و راستای محور هر دو ثابت باشند (۲) وقتی که فقط راستای محور ثابت باشد ولی محور از مرکز جرم بگذرد.



جسمی حول محور ثابتی که در نقطه O بر صفحه کتاب عمود است دوران می کند. نیروی خارجی $\vec{F}$ دارای دو مؤلفه شعاعی (F_r) و مماسی (F_t) است که به این جسم اثر می کند. نقطه اثر نیرو در زمان بسیار کوچک dt قوسی به طول $rd\theta$ را طی می کند. کاری که مؤلفه مماسی انجام می دهد :

$$dW = (F_t)(r\,d\theta) = \tau\,d\theta$$

و توان لحظه ای

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\,\omega$$

که مشابه با $P = Fv$ در حرکت انتقالی است.

قضیه کار – انرژی در حرکت دورانی:

کاری که گشتاور نیرو در چرخاندن جسم صلب حول محور ثابتی انجام می دهد برابر است با تغییر انرژی جنبشی دورانی جسم

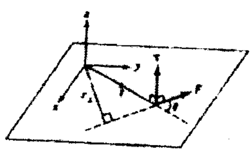
$$W = \frac{۱}{۲}I\omega_f^{۲} - \frac{۱}{۲}I\omega_i^{۲}$$

فصل دوازدهم:
تکانه زاویه ای و تعادل جسم صلب

نیرو به تکانه خطی مربوط است و گشتاور به تکانه زاویه ای. تکانه زاویه ای کمیتی پایسته است. جهت گشتاور نیرو باید نسبت به دستگاه مختصات مشخص شود.

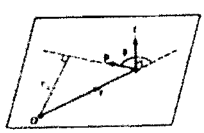
$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = rF\,Sin\theta\,\hat{n}$

$\hat{n}$ بردار یکه ای است که بر صفحه $\vec{r}$ و $\vec{F}$ عمود است و جهت $\vec{\tau}$ را مشخص می کند.



که با استفاده از قانون دست راست تعیین می شود. چون بردار مکان $\vec{r}$ نسبت به مبداء (O) اندازه گیری می شود، $\vec{\tau}$ هم باید نسبت به همین نقطه اندازه گرفته شود.

ذره ای را در نظر بگیرید که تکانه خطی اش $\vec{P}$ است و در مکان $\vec{r}$ نسبت به مبداء (O) واقع شده است.



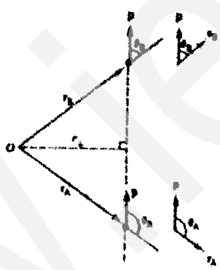
تکانه زاویه ای ($\vec{l}$) این ذره به صورت زیر تعرف می شود:

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{P}$$

تکانه زاویه ای هم نسبت به یک نقطه اندازه گیری می شود که این نقطه همان مبداء بردار مکان $\vec{r}$ است. می توان اندازه تکانه زاویه ای را بر حسب بازوی گشتاور بیان می کنیم که همان فاصله عمودی از مبداء مختصات تا خط حرکت ذره است:

$$l = rP\,Sin\theta = r_{\perp}P$$

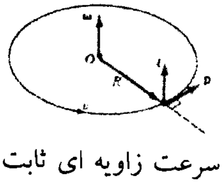
یکای تکانه زاویه ای در دستگاه بین المللی $\frac{Kgm^{2}}{s}$ است.



ذره ای که روی خط راست در حرکت است حول هر مبداء که روی این خط نباشد تکانه زاویه ای دارد. تکانه زاویه ای حرکت روی خط راست در واقع به دوران بردار مکان حول مبداء مربوط می شود. اگر با سرعت ثابت حرکت کند تکانه زاویه ای در دو نقطه A و B به طرف بیرون است.

$$\begin{cases} l_A = r_A P\,Sin\theta_A \\ l_B = r_B P\,Sin\theta_B \end{cases} \quad \rightarrow \quad r_A\,Sin\theta_A = r_B P\,Sin\theta_B = r_{\perp}$$

چون $r_{\perp}$ و P هر دو ثابت اند پس تکانه زاویه ای هم ثابت است.



اگر ذره ای که با سرعت ثابت v و سرعت زاویه ای ثابت ω در مسیری دایره ای به شعاع R حرکت کند (مبداء مرکز دایره) زاویه بین $\vec{R}$ و $\vec{P}$ همواره ۹۰ درجه است.

$$l = RP\,Sin(90) = RP$$

$$v = R\omega \quad , \quad P = mv$$

$$l = RP = Rmv = Rm(R\omega) = mR^2\omega$$

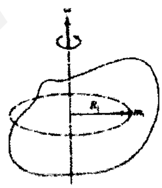
اگر مبداء در مرکز و روی سطح دایره باشد بردارهای $\vec{l}$ و $\vec{\omega}$ برای حرکت تک ذره با هم موازی اند در غیر این صورت (شکل ۶) $\vec{l}$ و $\vec{\omega}$ موازی نیستند. $\vec{\omega}$ به صفحه حرکت عمود است و $\vec{r}$ دیگر شعاعی نیست و $\vec{l}$ نیز بر صفحه حرکت عمود نیست. اما مؤلفه z تکانه زاویه ای با $\vec{\omega}$ موازی است. $\vec{r}$ و $\vec{P}$ بر هم عمودند و مؤلفه z آن

$$l_z = l\,Sin\varphi = rP\,Sin\varphi = mvr(\frac{R}{r}) = mR^2\omega$$

$$Sin\varphi = \frac{R}{r} \quad , \quad v = R\omega$$

تکانه زاویه ای $\vec{L}$ سیستمی از ذرات نسبت به یک مبداء معین برابر است با حاصلجمع بردارهای تکانه های زاویه ای تک تک ذرات نسبت به آن نقطه

$$\vec{L} = \sum \vec{l}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{P}_i$$



R_i شعاع مسیر دایره ای

$$L_z = \sum l_{iz} = \sum m_i R_i^2 \omega = I\omega$$

مؤلفه z تکانه زاویه ای کل برابر با حاصلضرب لختی دورانی در سرعت زاویه ای است.

← آهنگ تغییر زمانی تکانه زاویه ای یک ذره را بدست می آوریم:

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{P}$$

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{P} + \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = o + \vec{\tau} = \vec{\tau}$$

یعنی گشتاور نیروی وارد بر هر ذره برابر است با آهنگ تغییر تکانه زاویه ای آن ذره نسبت به زمان.
$\vec{l}$ و $\vec{\tau}$ باید دارای مبداء مشترکی باشند.
در دینامیک سیستم های متشکل از ذرات نیروهای خارجی را در نظر می گیریم. نیروهای داخلی دو به دو همدیگر را خنثی می کنند. در مورد گشتاور هم فقط گشتاورهای خارجی را تعیین می کنیم.

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum \vec{l}_i$$

یعنی گشتاور خالص خارجی وارد بر جسم برابر با آهنگ تغییر زمانی تکانه زاویه ای آن است.
(گشتاور تکانه زاویه ای نسبت به مبداء مشترکی در یک چارچوب لخت یا نسبت به مرکز جرم سیستم – حتی اگر شتاب داشته باشد. – اندازه گیری می شوند.)
اگر محور دوران ثابت باشد:

$$L = I\omega$$

$$\frac{dL}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha \qquad \rightarrow \qquad \tau = I\alpha$$

که یک کمیت اسکالر است.

اگر گشتاور خارجی خالص وارد بر سیستمی صفر باشد، اندازه و جهت تکانه زاویه ای کل سیستم ثابت می ماند:

$$\vec{\tau}_{ext} = o \qquad \rightarrow \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = o \qquad \Rightarrow \qquad \vec{L} = \text{ثابت}$$

که اصل پایستگی تکانه زاویه ای است.

$$L_i = L_f \qquad \rightarrow \qquad I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

اگر در ضمن حرکت، توزیع جرم جسم و در نتیجه لختی دورانی آن تغییر کند، سرعت زاویه ای هم طوری تغییر خواهد کرد که حاصلضرب $I\omega$ ثابت بماند.

← شرط تعادل ذره نقطه ای این است که برآیند نیروهای وارد بر آن صفر باشد. در جسم صلب در حال تعادل باید شتاب خطی مرکز جرم و شتاب زاویه ای جسم صفر باشد. اگر $a = o$ جسم در تعادل انتقالی ($\sum F = o$) و اگر $\alpha = o$ جسم در تعادل دورانی ($\sum \tau = o$) است.

به حالت خاصی که در آن دو جسم در سکون باشد تعادل ایستا (استاتیک) می گویند.

$$\sum F_x = o \quad , \quad \sum F_y = o \quad , \quad \sum \tau_z = o$$

مرکز ثقل هر جسم (که به آن مرکز گرانی یا گرانیگاه هم می گویند) نقطه ای است که گشتاور گرانشی خالص وارد بر جسم حول آن صفر است.

جرم سیستم را در مرکز جرم متمرکز می گیریم، کل وزن سیستم به آن وارد می شود. برآیند گشتاورهای گرانشی وارد بر ذرات سیستم حول هر نقطه دیگری برابر با گشتاور وزن کل سیستم (وارد بر مرکز ثقل) حول آن نقطه است.

$$W_i = m_i g_i$$

پس مکان مرکز ثقل (CG):

$$x_{CG} = \frac{\sum W_i x_i}{\sum W_i} = \frac{\sum m_i x_i}{M}$$

(اگر همه g_i ها یکی باشند مثل اجسام نزدیک به سطح زمین)

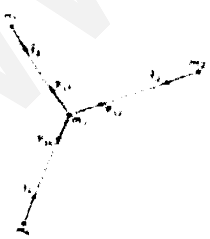
فصل سیزدهم: گرانش

➔ قانون گرانش جهانی نیوتن:

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}_{12} \quad , \quad G = 6/67\times10^{-11}\frac{N.m^2}{Kg^2}$$ ثابت گرانش

$\vec{F}_{12}$ نیرویی است که m_1 از m_2 دریافت می کند. این نیروی گرانشی بین دو ذره نقطه ای است.

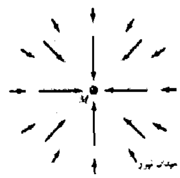
اصل برهمنهش: وقتی چندین ذره با هم برهمکنش داشته باشند نیروی حاصل از تک تک آنها را به یک ذره حساب می کنیم و با هم جمع می کنیم:



$$\vec{F} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + ...$$

➔ میدان عبارت است از توزیع مقادیر در ناحیه ای از فضا. ممکن است میدان اسکالر باشد مثل میدان فشار و دما ... یا برداری باشد مثل میدان سرعت و نیرو ....

$$\vec{g}_{\circ} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{GM}{r^{2}}\hat{r}$$

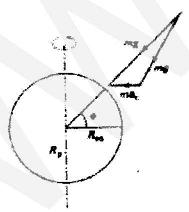


$\vec{g}_{\circ}$ را نیروی وارد بر جرم واحد هم می نامیم.

وقتی شدت میدانی معلوم باشد نیروی گرانشی وارد بر هر ذره ای به جرم m در آن میدان (یعنی وزن جسم) از رابطه $\vec{W} = m\vec{g}_{\circ}$ بدست می آید.

بزرگی شدت میدان در سطح زمین $$\vec{g}_{\circ}(R_e) = -\frac{GM_e}{R_e^{2}}$$

یکای شدت میدان گرانشی $\vec{g}_{\circ}$ همان ابعاد یکای شتاب ثقل ($\vec{g}$) است. اما مفهومشان متفاوت است.



$$\vec{g}_{\circ} = \vec{g} + \vec{a}_C$$

که $\vec{a}_C$ شتاب مرکز گرا است.

در قطب $\vec{a}_C = o$ و $\vec{g}_{\circ} = \vec{g}$ و در استوا $\vec{a}_C = ۳/۴\frac{cm}{s}$ و $\vec{g}_{\circ} = \vec{g} + ۳/۴\frac{cm}{s}$ است.

← تابع کلی انرژی پتانسیل گرانشی، که در آن تغییرات نیروی گرانشی وارد بر هر جسمی بر حسب فاصله منظور شده باشد و در هر موردی صدق کند:

$$U_B - U_A = GmM\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

نیروی گرانش یک نیروی مرکزی است یعنی همیشه در راستای خط واصل دو ذره عمـل مـی کنـد.

دارای تقارن کروی است یعنی فقط به مختصه شعاعی r بستگی دارد.

تغییر انرژی پتانسیل (یعنی کار نیروی پایستار) فقط به نقاط اول و آخر بستگی دارد.

شکل کلی تابع انرژی پتانسیل

$$U(r) = -\frac{GmM}{r}$$

برای افزایش فاصله دو ذره از یکدیگر باید عامل خارجی روی سیستم کار انجام بدهـد و ایـن یعنـی که نیروی میان دو ذره از نوع جاذبه است و منفی می گذاریم

در یک سیستم دو ذره ای که یکی خیلی بزرگتـر از دیگـری اسـت مـی تـوان تمـام انـرژی جنبـشی سیستم را به جرم کوچکتر نسبت داد:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r}$$

مثل ماهواره ای که در مداری دایره ای پایداری حول زمین می چرخد با سرعت مداری :

$$v_{\text{مداری}} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$E = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{GM}{r}}\right)^2 - \frac{GmM}{r} = -\frac{GmM}{2r}$$

علامت منفی یعنی اینکه ماهواره در حالت مقید به زمین است.

$|E|$ انرژی بستگی نامیده می شود و کمترین انرژی ای است که باید عامل خارجی به ذره (ماهواره) بدهد تا آنرا از قید زمین رها کند (ذره وقتی نامقید است کـه انـرژی مکـانیکی اش بزرگتـر از صـفر باشد.)

کمترین سرعت لازم جسمی که از زمین پرتاب می شود و هرگز به آن بر نمی گردد را سرعت فـرار ($v_{\text{فرار}}$)

می نامند که جسم می تواند خودش را با سرعت صفر به $r = \infty$ برساند.

$$E_i = \frac{۱}{۲}mv^۲ - \frac{GmM_e}{R_e} \qquad , \qquad E_f = o$$

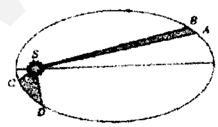
$$E_i = E_f \qquad \rightarrow \qquad v_{فرار} = \sqrt{\frac{۲GM_e}{R_e}}$$

سرعت فرار به جرم جسم بستگی ندارد.

← قوانین کپلر:

(۱) هر سیاره ای در مداری بیضی شکل که خورشید در یک کانون آن واقع شده است به دور خورشید می گردد. (نزدیکترین فاصله به خورشید را حضیض خورشیدی و دورترین فاصله به خورشید را اوج خورشیدی می نامند.)

(۲) خط واصل خورشید و سیاره در زمانهای مساوی مساحتهای مساوی را می روبد.



(۳) مربع دوره تناوب سیاره متناسب با مکعب فاصله متوسط (برابر نصف قطر بزرگ بیضی) آن از خورشید است. ($T^۲ = ka^۳$، k ثابتی است که برای همه سیاره ها یک مقدار دارد.)

در حرکت سیاره در مدار، انرژی مکانیکی و تکانه زاویه ای هر دو پایسته اند.

اگر A نقطه اوج و P نقطه حضیض باشد در این دو نقطه $\vec{r}$ بر $\vec{P}$ عمود است.

$$L_۱ = L_۲$$
$$r_A m v_A = r_p m v_p \qquad \rightarrow \qquad r_A v_A = r_p v_p$$
$$E_۱ = E_۲$$
$$\frac{۱}{۲}mv_A^۲ - \frac{GmM}{r_A} = \frac{۱}{۲}mv_p^۲ - \frac{GmM}{r_p}$$

$$۲a = r_A + r_p$$

$$v_A^۲ = \frac{GM}{a}\frac{r_p}{r_A} \qquad , \qquad v_p^۲ = \frac{GM}{a}\frac{r_A}{r_p}$$

پس انرژی مکانیکی برای سیستم خورشید + سیاره $E = -\frac{GmM}{۲a}$

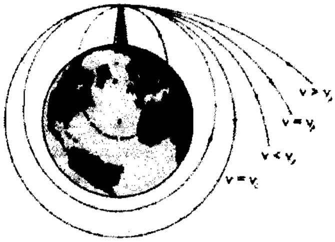
یعنی انرژی مکانیکی سیاره به اندازه قطر بزرگ مدار بستگی دارد.

اگر پرتابه در فاصله r از مرکز زمین باشد $v_{\text{فر}} = \sqrt{\frac{۲GM_e}{R_e}}$ و سرعت مداری در یک مدار دایره ای به شعاع r، $v_C = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ است:

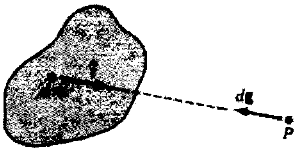
(۱) اگر $v < v_C$ باشد مسیر بیضی شکل و محل پرتاب همان نقطه اوج زمینی این مدار خواهد بود. $v = v_C$ مدار دایره ای شکل و $v > v_C$ مدار بیضی شکل است و محل پرتاب نقطه حضیض این مدار یعنی نزدیکترین فاصله پرتابه از زمین خواهد بود.

(۲) $v = v_{\text{فر}} = \sqrt{۲}v_C$ مسیر بسته نیست و شکل سهمی دارد و پرتابه دیگر به زمین مقید نیست.

(۳) $v > v_{\text{فر}}$ مسیر بسته نیست و به شکل هذلولی است (ذره انرژی کل اش مثبت و در قید زمین نیست.)



➔ گرانش ناشی از توزیع پیوسته جرم



$$dg = \frac{G\,dm}{r^{۲}}$$