بسمه تعالی

امتحان ترم المپیاد فیزیک (دوره ۱۰ ام)

۲۰/۱۱/۹۳

مدت امتحان: ۴ ساعت

مسئله‌ی ۱)

دیسکی با سرعت زاویه‌ای $\omega(0)$ حول محوری که عمود بر صفحه‌ی دیسک است و از مرکز آن می‌گذرد، می‌چرخد. مورچه‌ای در فاصله‌ی R از محور قرار دارد. مورچه با سرعت ثابت v_0 نسبت به دیسک، به سمت محور حرکت می‌کند. یعنی ناظری که روی دیسک نشسته و با آن می‌چرخد، می‌بیند که مورچه با سرعتی ثابت به محور نزدیک می‌شود. فرض کنید محور دوران بدون اصطکاک است. جرم مورچه را m و لختی دورانی دیسک حول محور دوران را $I = m\beta^2$ بگیرید. برای سادگی در نوشتار، از جرم مورچه در لختی دورانی دیسک استفاده کردیم. این صرفاً بازتعریف ثوابت است. از این پس ثوابت از این قراراند: $m, \omega(0), R, \beta, v_0$.

الف) فاصله‌ی مورچه از محور بر حسب زمان $r(t)$ و سرعت زاویه‌ای دیسک بر حسب زمان $\omega(t)$ را حساب کنید.

ب) معادله‌ی مسیر مورچه، $r = r(\theta)$ را حساب کنید. زاویه‌ی اولیه را صفر بگیرید. نمودار r بر حسب θ را رسم کنید.

ج) مورچه باید چند دور بزند تا به محور برسد؟

د) وقتی مورچه به محور می‌رسد، انرژی چه قدر از میزان اولیه‌ی خود کمتر است؟

ه) بردار نیروی وارد بر مورچه را بر حسب فاصله از محور حساب کنید.

و) ضریب اصطکاک را μ و شتاب گرانش را g بگیرید. اگر شعاع اولیه از مقداری بحرانی چون R_c بزرگتر باشد، حرکت انجام نمی‌شود؛ مورچه بلافاصله به بیرون پرت می‌شود. معادله‌ای بنویسید که از حل آن R_c به دست آید. تا حد امکان معادله را ساده کنید.

مسئله ۲۷)

کره صلب و همگنی به شعاع R در شکل ۱ نشان داده شده است. کره حول محور افقی که از مرکز جرم آن می‌گذرد با سرعت زاویه‌ای $\omega_\circ$ می‌چرخد. در ابتدا مرکز جرم کره ساکن و پایینترین نقطهٔ کره در ارتفاع h از زمین قرار دارد. کره را در شرایط خلأ رها می‌کنیم تا تحت اثر گرانش سقوط کند. پس از برخورد با سطح زمین پایینترین نقطهٔ کره تا ارتفاع مشخص αh (α برابر ارتفاع اولیه) به بالا می‌جهد. تغییرشکل کره و زمین هنگام برخورد ناچیز بوده و ضریب اصطکاک جنبشی میان آنها μ_k معلوم است. زمان برخورد بسیار کوچك و متناهی است. جرم کره m، شتاب ثقل g، و لختی دورانی کره نسبت به محوری که از مرکز جرم آن می‌گذرد $\frac{۲}{۵}mR^۲$ است. مسئله را در دو حالت مجزای زیر حل کنید.

۱ــ در حالت اول نقطهٔ تماس کره با زمین در تمام مدت برخورد روی زمین می‌لغزد. در این حالت کمیتهای زیر را حساب کنید:

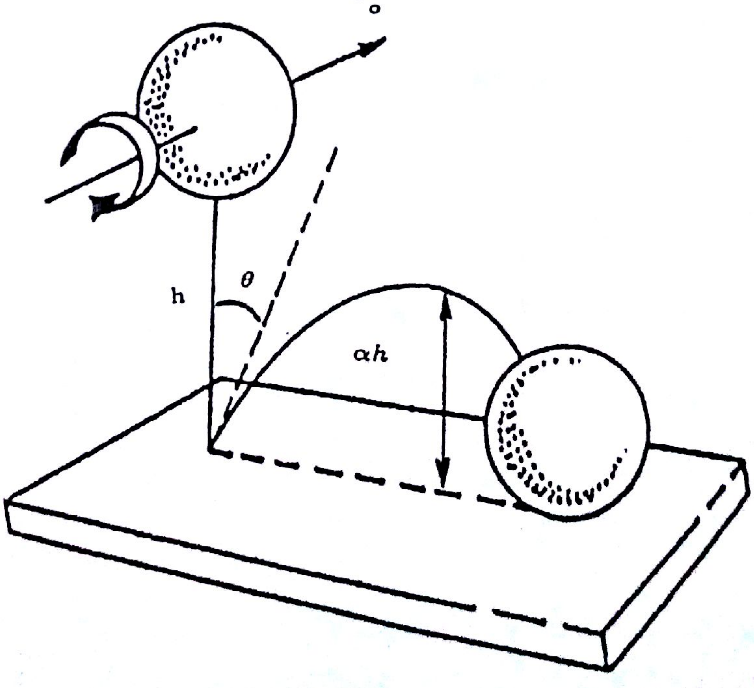
الف) تانژانت زاویهٔ جهش θ (به شکل ۱ نگاه کنید)

ب) فاصلهٔ افقی که مرکز جرم پس از اولین برخورد و قبل از برخورد دوم می‌پیماید.

ج) کمترین مقدار ممکن $\omega_\circ$

۲ــ در حالت دوم پیش از آنکه برخورد کره با زمین پایان یابد، لغزش آن متوقف می‌شود. در این حالت نیز کمیتهای بند «الف» و «ب» حالت پیش را به‌دست آورید.

براساس نتایج به‌دست آمده از قسمتهای ۱ و ۲ نموداری تقریبی از رفتار $\mathrm{tg}\,\theta$ برحسب $\omega_\circ$ رسم کنید.

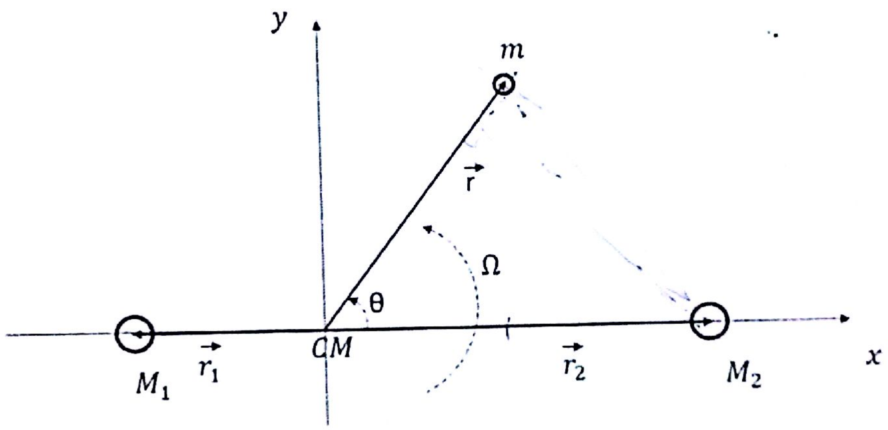


مسئله ۳۷)

دو جسم نقطه ای به جرمهای M_1 و M_2 و فاصله اولیه a از یکدیگر را در نظر بگیرید. بردار حامل جسم 1 و 2 را از مرکز جرم مشترکشان ، به ترتیب $\vec{r_1}$ و $\vec{r_2}$ می نامیم. در تمامی قسمت های مساله تنها برهم کنش موثر میان اجرام را نیروی گرانشی بین آنها در نظر بگیرید.

الف-با فرض آنکه دو جرم در مدارهایی دایروی، حول مرکز جرم و به فاصله ثابت a از یکدیگر دوران می کنند، بردار سرعت زاویه ای آنها $(\vec{\Omega})$ را بیابید.

اکنون یک جسم سوم و به جرم m را در نظر بگیرید. جرم این جسم بسیار کوچک است به گونه ای که می توان از اثر گرانشی آن بر روی دو جرم دیگر صرف نظر کرد. مطابق شکل زیر دستگاه مختصاتی را منطبق بر مرکز جرم سیستم، و دوار با سرعت زاویه ای Ω را در نظر بگیرید، به گونه ای که محور x این دستگاه همواره در راستای خط واصل جسم 1 و 2 و محور z آن هم جهت با بردار $\vec{\Omega}$ (عمود بر صفحه) است.



بردار حامل جسم m را در این دستگاه $\vec{r} = (r\hat{r} + z\hat{k})$ می نامیم.

ب- انرژی پتانسیل گرانشی جرم m را برحسب مختصات آن در دستگاه استوانه ای بدست آورید و با کمک آن، معادلات مربوط به شتاب این جسم، در دستگاه دوار را تعیین کنید

پ- نقاط تعادل معادله فوق را $\vec{r_0} = (r_0, \theta_0, z_0)$ می نامیم با توجه به جواب قسمت بالا معادلات جبری لازم برای تعیین این نقاط را بنویسید و نشان دهید که نقاط تعادل تنها در صفحه $z = 0$ وجود دارند. در دستگاه دوّار پیدا کردن نقاط سکون

$\neq \pi$

ت- معادلات بدست آمده در قسمت پ را برای حالت $\theta_0 \neq 0$ حل کنید. در این حالت فاصله جسم m را از 2 جسم دیگر و مرکز جرم بدست آورید.(مکان بدست آمده در این بخش را به ازای $y > 0$ ، نقطه تعادل L_4 می نامیم.)

ث- آیا نقطه تعادل L_4 نسبت به اختلال در راستای z پایدار است ؟ در صورت مثبت بودن جواب، فرکانس نوسانات جرم m را حول $z = 0$ بدست آورید.

در ادامه مساله می خواهیم پایداری نقطه L_4 را در صفحه $x - y$ بررسی کنیم.

فرض کنید که جرم m در ابتدا در نقطه L_4 (با مختصاتی که در قسمت ت تعیین کرده اید.) در حالت تعادل قرار دارد . بدلیل یک اختلال کوچک مکان این جرم به میزان $\delta\theta$ و δr (نسبت به ناظر دوار) تغییر می کند

ج- معادلات شتاب جرم m در دستگاه دوار را تا تقریب خطی نسبت به $\delta r, \delta\theta$ و مشتقات آنها بازنویسی کنید.

چ- بردار $\vec{\Delta}$ را به صورت $\vec{\Delta}=\begin{pmatrix}\delta r\\ r_0\delta\theta\end{pmatrix}$ تعریف می کنیم. نشان دهید که این بردار در معادله زیر صدق می کند

$$\ddot{\vec{\Delta}}= A\vec{\Delta}+ B\dot{\vec{\Delta}}$$

که در معادله فوق A و B دو ماتریس ثابت اند که باید تعیین کنید.

جواب معادله ی بدست آمده در قسمت بالا را به صورت $\vec{\Delta}= \vec{\Delta}_0 e^{\lambda t}$ در نظر بگیرید. ($\vec{\Delta}_0$ و λ به ترتیب یک بردار و عدد ثابت می باشند)

ح- با جایگذاری جواب به صورت داده شده یک معادله جبری برای λ بدست آورده و آن را تا حد امکان ساده کنید

خ- معادله مربوط به λ را حل کنید و درصورت امکان شرطی بین M_1 و M_2 بیابید تا حرکت جرم m پایدار باشد

در سیستم زمین و ماه نقطه L_4 (در صورت پایدار بودن) می تواند به عنوان مکانی برای کاوشگر های فضایی استفاده شود.

د- با توجه به مقادیر عددی زیر آیا نقطه L_4 در سیستم زمین وماه پایدار است ؟

$$M_{earth} = 6 \times 10^{24} Kg$$

$$M_{Moon} = 7 \times 10^{22} Kg$$

$$Distance\ to\ the\ Moon = 384000\ Km.$$

- در صورت لزوم می توانید از راهنمایی های زیر استفاده کنید.

- $f = f(r,\theta) => \Delta f = \frac{\partial f}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial f}{\partial \theta}\Delta\theta$

- $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = 0 => \det\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = 0$

  $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} \neq 0$

- $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

  $i = \sqrt{-1}$

مسئله ۴)

یک چهارقطبی الکتریکی در نظر بگیرید که متشکل است از یک بار نقطه ای $2q$ که در مکان $\vec{r_0} = r_0\hat{z}$ قرار دارد و دو بار نقطه‌ای $-q$ که در مکان‌های $\vec{r_0} \pm d\hat{x}$ قرار گرفته اند d بسیار کوچک است اما $\gamma = qd^2$ مقداری متناهی است. کره ای رسانا به شعاع a ($a < r_0$) و مرکز مبدأ مختصات در برابر چهار قطبی قرار داده شده و به پتانسیل صفر متصل است. پتانسیل الکتریکی را در نقطه ای به مختصات $\vec{r}$ بر حسب γ، $\vec{r_0}$، a و $\vec{r}$ به دست آورید. (۵ نمره)