



educo.ir

دانلود سوالات آزمون‌های مختلف

به نام او

مرحله‌ی دوم بیست و چهارمین المپیاد ریاضی کشور، ۱۳۸۵

روز اول

۱. فرض کنید دایره‌ی  $C_2$  از مرکز دایره‌ی  $C_1$  گذشته و آن را در نقاط  $M$  و  $N$  قطع کرده است. نشان دهید اگر نقاط  $A$  و  $B$  دو سر قطر دل‌خواهی از  $C_1$  و  $A'$  و  $B'$  محل تقاطع خط‌های  $AM$  و  $BN$  با دایره‌ی  $C_2$  باشند،  $A'B'$  برابر شعاع دایره است.

۲. همه‌ی چندجمله‌ای‌های با ضرایب حقیقی  $P(x, y)$  را بیابید که برای هر  $x$  و  $y$  حقیقی داشته باشیم:

$$P(x + y, x - y) = 2P(x, y)$$

۳. در طول شب، ستاره‌های آسمان، در بازه‌های زمانی مختلف، قابل رؤیت هستند. فرض کنید از بین هر  $k$  ستاره ( $k > 1$ )، دست‌کم دو تایشان را می‌توان در یک لحظه در آسمان دید. نشان دهید می‌توانیم  $k - 1$  عکس در لحظات مختلف از سرتاسر آسمان بگیریم که هر کدام از آن ستاره‌ها، دست‌کم در یکی از عکس‌ها دیده شود. (تعداد ستاره‌ها متناهی است. لحظاتی را که ستاره‌ی  $i$ ام در آسمان دیده می‌شود بازه‌ی بسته‌ی  $[a_i, b_i]$  بنامید که در آن  $a_i < b_i$ ).

به نام او

مرحله‌ی دوم بیست و چهارمین المپیاد ریاضی کشور، ۱۳۸۵

روز دوم

۴. الف) عدد طبیعی  $m$  بزرگ‌تر از یک است. ثابت کنید تنها متناهی عدد طبیعی مانند  $n$  وجود دارد که  $1 + mn$  بر  $m + n$  بخش پذیر است.

ب) برای اعداد طبیعی متمایز  $m, n > 2$  ثابت کنید دنباله‌ی  $(a_0, a_1, \dots, a_k)$  از اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۲ موجود است که  $a_0 = m$  و  $a_k = n$  و برای هر  $(i = 0, 1, \dots, k-1)$  داریم

$$a_i + a_{i+1} \mid a_i a_{i+1} + 1$$

۵. نقاط  $A, B, C$  و  $D$  با همین ترتیب، روی دایره‌ای قرار دارند. نشان دهید تعداد نقطه‌های روی دایره، مانند  $M$  که  $\frac{MA}{MB} = \frac{MD}{MC}$  چهار تاست و به علاوه قطرهای چهارضلعی حاصل از آن نقطه‌ها بر هم عمود هستند.

۶. تعدادی کتاب روی هم قرار گرفته‌اند. فردی ابتدا کتاب بالایی را پشت و رو می‌کند. سپس دو کتاب بالایی را هم‌زمان پشت و رو می‌کند. بعد سه کتاب بالایی را هم‌زمان پشت و رو می‌کند و الی آخر. پس از این که به آخرین کتاب رسید همان کار را از ابتدا شروع می‌کند. ثابت کنید پس از تعداد جابه‌جایی، کتاب‌ها دقیقاً به همان وضع اول برمی‌گردند.

