به نام خدا

تشریح مسائل مبانی احتمال

مجید ایوزیان
آرنوش شاکری

پیشگفتار

امروزه نظریه احتمال بعنوان یک ابزار بسیار قوی برای دانشمندان، مهندسان، پزشکان و حتی قضات به حساب می آید. پیشرفت این نظریه چنان بوده است که در بسیاری از فعالیتهای اجتماعی و حتی مسائل روزمره زندگی نیز از احتمالات سخن گفته می شود.

یکی از کتابها و منابع اصلی که در زمینه نظریه احتمال معرفی شده است کتاب "مبانی‌احتمال" ریاضیدان معروف شلدون راس می باشد. بدلیل سطح بالای این کتاب، دانشجویان معمولا در حل مساله های آن به مشکل برخورد می کنند. این مساله ما را بر آن داشت تا با ارائه حل مساله های این کتاب، آموخته های خود را با دانشجویان عزیز و تمامی علاقه مندان به این موضوع به اشتراک بگذاریم.

کتابی که هم اکنون در اختیار شماست شامل حل کاملی از مسائل ویرایش ششم کتاب مبانی احتمال می باشد. در این کتاب سعی شده که علاوه بر حل مسأله ها، توضیح کاملی برای هر سوال ارائه گردد تا دانشجویان درک مناسبی نسبت به مسائل بدست آورند.

بر خود لازم می دانیم که از استاد عزیز جناب آقای دکتر تیموری که مبانی این درس را به بهترین نحو به ما آموختند قدر دانی نماییم.

در خاتمه لازم است تا از کلیه عزیزانی که ما را در راستای تهیه این کتاب یاری نمودند تشکر و قدردانی نماییم. از آقای مهندس ابوالفضل تقی زاده واقفی و دانشجویان گرامی خانمها زهره مهر افروز و بهناز قهستانی و آقایان رضا رمضانیان و محسن عسگری که در ویرایش کتاب ما را یاری نمودند نیز سپاسگزاری می نماییم. همچنین از آقای فرزام تهم که زحمت طرح روی جلد کتاب را برعهده داشتند تشکر و قدردانی می نماییم.

بهار ۱۳۸۵

مجید ایوزیان- eyvazian@iust.ac.ir
آرنوش شاکری-shakeri@iust.ac.ir

تقدیم به پدر ، مادر

و همسر عزیزم

بخاطر شکیبایی و زحماتشان

مجید ایوزیان

تقدیم به پدر و مادرم

بخاطر زحماتشان

آرنوش شاکری

فهرست

فصل ۱
آنالیز ترکیبی

۱- الف) چند پلاک نمره ۷ رقمی اتومبیل را می توان تهیه نمود، وقتی که دو رقم اول آن از حروف لاتین و ۵ رقم باقیمانده از اعداد باشد.

ب) قسمت (الف) را با فرض اینکه هیچ دو حرف یا دو عددی نباید در یک نمره تکرار شود، پاسخ دهید.

حل: الف) با توجه به اصل ضرب و وجود ۲۶ حرف الفبای انگلیسی و ۱۰ عدد بین ۰ تا ۹، تعداد حالات برابر است با:

$$26\times26\times10\times10\times10\times10\times10=26^2\times10^5=67600000$$

ب) با فرض عدم تکرار، حرف و عددی را که یک بار استفاده شده است، دیگر نمی توان بکار برد، لذا در هر مرتبه، یکی از تعداد انتخاب های مجاز ما کاسته می شود. پس داریم:

$$26\times25\times10\times9\times8\times7\times6=19656000$$

۲- وقتی که تاسی را چهار مرتبه پرتاب می کنیم، چند دنباله از نتایج ممکن حاصل می شود؟ برای مثال نتیجه ۱،۳،۴،۳ حاصل شده است هرگاه نتیجه اولین پرتاب ۳، دومین پرتاب ۴، سومین پرتاب ۳ و پرتاب چهارم برابر با ۱ باشد.

حل: در هر آزمایش ۶ حالت وجود دارد، پس مطابق اصل ضرب تعداد دنباله ها برابر است با:

$$6\times6\times6\times6=1296$$

۳- ۲۰ کارگر را برای ۲۰ شغل مختلف در نظر گرفته ایم. اگر به هر کارگر یک شغل را بتوان اختصاص داد به چند حالت اختصاص شغلها به کارگران امکان پذیر است؟

حل: برای کارگر اول ۲۰ حالت ممکن وجود دارد که به ازای هر یک از حالت های آن، ۱۹ حالت برای کارگر دوم وجود دارد و به همین ترتیب الی آخر.

$$۲۰\times۱۹\times۱۸\times\ldots\times۲\times۱=۲۰!$$

۴- چهار فرد A،B،C،D یک گروه موسیقی مرکب از ۴ وسیله موسیقی را تشکیل داده اند. اگر هر کدام بتوانند هر ۴ وسیله را بنوازند، چند ترتیب متفاوت وجود دارد؟ در صورتیکه فرد A و فرد B بتوانند هر ۴ وسیله را بنوازند ولی فرد C و فرد D هر کدام بتوانند پیانو و طبل بنوازند آنگاه چند ترتیب متفاوت وجود دارد؟

حل: الف) از آنجا که چهار فرد و چهار وسیله موسیقی داریم، پس به هر فرد، یکی اختصاص می یابد. وقتی فرد اول یکی از ۴ وسیله را انتخاب کند، به ازای هر حالت ممکن برای انتخاب او ، فرد دوم سه وسیله را برای انتخاب خواهد داشت و تا آخر. لذا مطابق اصل ضرب داریم:

$$۴\times۳\times۲\times۱=۴!=۲۴$$

ب) چون C،D تنها می توانند پیانو و طبل بنوازند، پس ابتدا یکی از آنها، یکی از دو وسیله را انتخاب می‌کند و دومی هم وسیله دیگر را، سپس A،B هم ۲ انتخاب اولیه دارند. لذا

$$\underbrace{۲\times۱}_{C,D}\times\underbrace{۲\times۱}_{A,B}=۴$$

۵- سالهاست که کد بین شهری تلفن در آمریکا و کانادا از سه عدد تشکیل شده است که عدد اول آن بین ۲ و ۹، عدد دوم آن ۰ یا ۱ و عدد سوم آن هر عددی بین ۱ و ۹ است. چند کد بین شهری تلفن می تواند وجود داشته باشد؟ چند تا از کدها با عدد ۴ شروع شده اند؟

حل: الف) بر طبق اصل اساسی شمارش و با توجه به اینکه برای عدد اول ۸ انتخاب (اعداد بین ۲ تا ۹)، برای عدد دوم ۲ انتخاب (۰ یا ۱) و برای عدد سوم ۹ انتخاب (اعداد بین ۱ تا ۹) داریم، لذا تعداد حالات برابر است با:

$$۸\times۲\times۹=۱۴۴$$

ب) چون عدد اول، ۴ و مشخص است، لذا تعداد حالات برابر است با:

$$۱\times۲\times۹=۱۸$$

۶- یک سرود معروف کودکستان دارای اشعار زیر است:

همین طور که در حال رفتن به کودکستان بودم،
مردی را با هفت فرزند ملاقات کردم،

هر فرزند ۷ ساک دستی داشت،
در هر ساک ۷ گربه بود،
هر گربه ۷ بچه گربه داشت،
چند بچه گربه توسط کودک دیده شده است؟

حل: براساس اصل اساسی شمارش، جواب برابر است با:

$$۷\times۷\times۷\times۷=۷^{۴}=۲۴۰۱$$

۷- الف) به چند طریق ۳ پسربچه و۳ دختربچه می توانند در یک ردیف بنشینند؟
ب) به چند طریق ۳ پسربچه و۳ دختربچه می توانند در یک ردیف بنشینند اگر لازم باشد پسربچه ها پهلوی هم و دختربچه ها نیز پهلوی هم باشند؟
ج) پاسخ قسمت(الف) وقتی که فقط لازم باشد پسربچه ها پهلوی هم بنشینند، چیست؟
د) پاسخ قسمت(الف) وقتی که بنا باشد افراد همجنس پهلوی هم ننشینند، چیست؟

حل: الف) برای جایگشت ۶ فرد تعداد حالات برابر است با: $۶!=۷۲۰$

ب) جایگشت پسرها با هم و دخترها با هم. همچنین اینکه اول پسرها بنشینند یا دخترها نیز مهم است. لذا:

$$۲!\times۳!\times۳!=۷۲$$

ج) سه پسر و دسته دخترها را ۴ دسته مختلف در نظر گرفته که می توانند بـه !۴ حالت جابجا شوند و با توجه به جایگشت دختر ها داریم:

$$۴!\times۳!=۱۴۴$$

د) باید یک در میان بنشینند و با توجه به اینکه اولین نفر دختر باشد یا پسر، تعداد حالات برابر است با:

$$۲(۳\times۳\times۲\times۲\times۱\times۱)=۲\times(۳!\times۳!)=۷۲$$

۸- چند ترتیب متفاوت از حروف کلمه های زیر می توان تهیه نمود؟

الف)FLUKE ب)PROPOSE ج)MISSISSIPPI د)ARRANGE

حل: الف) جایگشت ۵ شیء متمایز برابر است با: $۵!=۱۲۰$

ب) حروف P و O هر کدام ۲ بار تکرار شده اند.پس $\frac{۷!}{۲!۲!۱!۱!۱!}=۱۲۶۰$

ج) $\frac{۱۱!}{۴!۴!۲!۱!}=۳۴۶۵۰$

د) $\frac{۷!}{۲!۲!۱!۱!۱!}=۱۲۶۰$

۹- کودکی ۱۲ مکعب دارد که۶ تای آنها سیاه،۴ تا قرمز، یکی سفید و یکی آبی است اگر او بخواهد مکعب ها را در یک ردیف قرار دهد، چند ترتیب متفاوت امکان پذیر است؟

حل: با توجه به تکراری و یکسان بودن مکعب های سیاه و قرمز، داریم: $\frac{۱۲!}{۶!۴!۱!۱!}=۲۷۷۲۰$

۱۰- به چند طریق ۸ نفر می توانند در یک ردیف بنشینند اگر،

الف) هیچ محدودیتی در نشستن آنها وجود نداشته باشد.

ب) فرد A و فرد B باید پهلوی هم بنشینند.

ج)۴ مرد و ۴ زن باشند و هیچ دو مرد و یا دو زنی نتوانند پهلوی هم بنشینند.

د)۵ مرد باشند و باید پهلوی هم بنشینند.

ه) ۴ زوج باشند و باید هر زوج پهلوی هم بنشینند.

حل: الف) $۸!$

ب) همانند قسمت((ج)) سوال ۷. $۷!\times۲!$

ج) همانند قسمت((د)) مساله ۷. $۴!\times۴!\times۲!$

د) همانند قسمت((ج)) سوال ۷. $۵!\times۴!$

ه) ۴ گروه متفاوت(زوجها) داریم که هر کدام به !۲ در دسته خود جایگشت دارند.

$۴!(۲!\times۲!\times۲!\times۲!)$

۱۱- به چند طریق می توان ۳ کتاب داستان،۲ کتاب ریاضی و یک کتاب شیمی را در یک قفسه کتاب به ترتیب پهلوی هم قرار داد بطوریکه،

الف) کتابها بدون هیچ محدودیتی چیده شوند.

ب) کتابهای ریاضی پهلوی هم و کتابهای داستان نیز پهلوی هم باشند.

ج) کتابهای داستان پهلوی هم باشند و سایر کتب محدودیتی نداشته باشند.

حل: الف) $۶!$ ب) $۳!(۳!\times۲!)$ ج) $۴!\times۳!$

۱۲- ۵ جایزه جداگانه (بورس تحصیلی و...) به گروهی منتخب از دانشجویان یک کلاس ۳۰ نفری اهداء می شود. این کار به چند طریق امکان پذیر است اگر،

الف) یک دانشجو بتواند به هر تعداد جایزه بگیرد؟

ب) یک دانشجو بتواند حداکثر یک جایزه بگیرد؟

حل: الف) مسأله تقسیم ۵ شیء متفاوت به ۳۰ ظرف متفاوت بدون داشتن محدودیت می باشد. پس داریم:

$$۳۰^۵ = ۲۴۳۰۰۰۰۰$$

ب) برای جایزه اول ۳۰ حالت داریم، برای دوم ۲۹ تا و تا آخر.

$$۳۰ \times ۲۹ \times ۲۸ \times ۲۷ \times ۲۶ = \binom{۳۰}{۵} \times ۵! = ۱۷۱۰۰۷۲۰$$

۱۳- یک گروه ۲۰ نفری را در نظر بگیرید. اگر هر فرد بخواهد با افراد دیگر دست بدهد به چند طریق دست دادن امکان پذیر است؟

حل: راه اول: برای هر بار دست دادن باید دو نفر انتخاب شوند، پس تعداد حالات دست دادن معادل است با تعداد حالات انتخاب دو نفر از یک گروه ۲۰ نفری:

$$\binom{۲۰}{۲} = ۱۹۰$$

راه دوم: نفر اول باید با ۱۹ نفر دست بدهد. نفر دوم با ۱۸ نفر و الی آخر. لذا ۱۹۰=۱+...+۱۸+۱۹

۱۴- *

۱۵- در یک تیم ورزشی ۲۲ نفره، ۱۰ دانشجوی سال اول و ۱۲ دانشجوی سال دوم شرکت می کنند. اگر ۵ دانشجوی سال اول و ۵ دانشجوی سال دوم را برای تشکیل گروه های ۲ نفره که هر گروه شامل یک دانشجوی سال اول و یک دانشجوی سال دوم باشد انتخاب کنیم، به چند حالت این انتخاب امکان پذیر است؟

حل: $\binom{۱۰}{۵}$ حالت برای انتخاب دانشجویان سال اول، $\binom{۱۲}{۵}$ حالت برای انتخاب دانشجویان سال دوم داریم. حال برای تشکیل گروه های دو نفره که شامل یک دانشجوی سال اول و یک دانشجوی سال دوم باشند !۵ حالت داریم.

$$\binom{۱۰}{۵}\binom{۱۲}{۵}۵!$$

۱۶- دانشجویی می خواهد ۲ کتاب از مجموعه کتابهای خود را که شامل ۶ کتاب ریاضی، ۷ کتاب فیزیک و ۴ کتاب اقتصاد است، بفروشد. او چند انتخاب ممکن دارد اگر

الف) هر دو کتاب از یک موضوع انتخاب شوند.

ب) کتابها از موضوع های متفاوتی باشند.

حل: الف) $\binom{6}{2}\binom{7}{0}\binom{4}{0}+\binom{6}{0}\binom{7}{2}\binom{4}{0}+\binom{6}{0}\binom{7}{0}\binom{4}{2}$

ب) $\binom{6}{1}\binom{7}{1}\binom{4}{0}+\binom{6}{1}\binom{7}{0}\binom{4}{1}+\binom{6}{0}\binom{7}{1}\binom{4}{1}$

۱۷- ۷ جایزه را می خواهیم بین ۱۰ دانش آموز تقسیم نماییم. اگر هیچ دانش آموزی بیش از یک جایزه نگیرد، به چند طریق این کار امکان پذیر است؟

اگر جایزه ها متفاوت باشند (فرض مسأله همین بوده است): $10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4=\binom{10}{7}\times 7!$

اگر جایزه ها یکسان باشند: $\binom{10}{7}$

۱۸- شورایی متشکل از، ۷ نفرکه۲ نفر آنها جمهوریخواه،۲ نفر دموکرات و۳ نفر مستقل هستند، و از یک گروه متشکل از۵ جمهوریخواه،۶ دموکرات و۴ مستقل انتخاب می کنیم. این عمل به چند طریق امکان پذیر است؟

حل: $\binom{5}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{3}=600$

۱۹- از گروهی متشکل از ۸ زن و۶ مرد شورایی مرکب از ۳ زن و۳ مرد بایستی تشکیل شود. این کار به چند طریق امکان پذیر است هرگاه:

الف)۲ نفر از مردها نخواهند با هم انتخاب شوند؟

ب) ۲ نفر از زنها نخواهند با هم انتخاب شوند؟

ج) یکی از مردها و یکی از زنها نخواهند با هم انتخاب شوند؟

حل: الف) زنها را به $\binom{8}{3}$ حالت مختلف می توان انتخاب کرد. برای انتخاب مردها، چون دو نفر از آنها نمی خواهند با هم انتخاب شوند بنابراین یا یکی از این دومرد انتخاب می شوند و یا هیچ کدام از آنها. لذا:

$$\binom{8}{3}\left[\binom{2}{0}\binom{4}{3}+\binom{2}{1}\binom{4}{2}\right]=896$$

راه دوم: تعداد کل حالات، منهای تعداد حالاتی که هر دو مردانتخاب شوند:

$$\binom{۸}{۳}\left[\binom{۶}{۳}-\binom{۲}{۲}\binom{۴}{۱}\right]=۸۹۶$$

ب) $$\binom{۶}{۳}\left[\binom{۸}{۳}-\binom{۲}{۲}\binom{۶}{۱}\right]=۱۰۰۰$$

یا $$\binom{۶}{۳}\left[\binom{۲}{۰}\binom{۶}{۳}+\binom{۲}{۱}\binom{۶}{۲}\right]=۱۰۰۰$$

ج) $$\binom{۸}{۳}\binom{۶}{۳}-\left[\binom{۱}{۱}\binom{۷}{۲}\binom{۱}{۱}\binom{۵}{۲}\right]=۹۱۰$$

۲۰- فردی ۸ دوست دارد که می خواهد ۵ نفر آنها را به یک مهمانی دعوت کند. چند انتخاب وجود دارد.
الف) اگر دو نفر از دوستان وی با هم اختلاف داشته باشند و نخواهند با هم شرکت کنند؟
ب) اگر دو نفر از دوستان وی در صورتیکه با هم دعوت شوند در مهمانی شرکت کنند؟

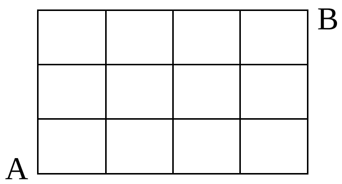
حل: الف) $$\binom{۸}{۵}-\binom{۲}{۲}\binom{۶}{۳}=۳۶$$

یا $$\binom{۲}{۰}\binom{۶}{۵}+\binom{۲}{۱}\binom{۶}{۴}=۳۶$$

ب) یعنی یا هر دو با هم یا هیچکدام. $$\binom{۲}{۲}\binom{۶}{۳}+\binom{۲}{۰}\binom{۶}{۵}=۲۶$$

۲۱- مجموعه ای از نقاط را به صورت شکل زیر در نظر بگیرید. فرض کنید از نقطه A شروع کرده و در هر حرکت می توانید به طرف بالا یا به طرف راست یک قدم بردارید. اگر این حرکت ادامه یابد تا به نقطه B برسید در این صورت چند مسیر از A به B امکان پذیر است؟

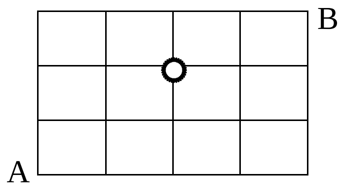
راهنمایی: توجه کنید که برای رفتن از نقطه A و رسیدن به نقطه B بایستی ۴ قدم بطرف راست و ۳ قدم بطرف بالا برداشته شود.



حل: هر مسیر رسیدن از نقطه A به B، معادل یک حالت از حالات ساختن یک کلمه با حروف UUURRRR می باشد مثلاً کلمه UURRRRU یعنی دوبار بالا و سپس سه بار به سمت راست و در نهایت دوبار به سمت بالا بردیم پس تعداد حالات این دو مسأله برابر است، لذا تعداد حالات برابر است با:

$$\frac{۷!}{۳!۴!}$$

۲۲- در مساله ۲۰ چند مسیر از A به B وجود دارد، درصورتیکه مسیر از نقطه مشخص شده در شکل بگذرد؟



حل: اگر این نقطه را C بنامیم، برای اینکه از نقطه C عبور کند ابتدا از A به C سپس از C به B می رویم بنابراین مسیر به دو بخش تقسیم می شود. پس با استفاده از اصل ضرب داریم:

$$\left[\frac{۴!}{۲!\,۲!}\right]\times\left[\frac{۳!}{۲!\,۱!}\right]=۱۸$$

۲۳- یک آزمایشگاه روانسنجی از ۳ قسمت که در هر قسمت ۲ تخت وجود دارد، تشکیل شده است. اگر ۳ جفت دو قلو را بخواهیم در این مرکز بستری کنیم، بطوریکه هر جفت دو قلو در یک قسمت روی تخت‌های متفاوت بستری شوند. این عمل به چند طریق امکان پذیر است؟

حل: جایگشت سه جفت در سه بخش و جایگشت دو قلوها در هر بخش را باید در نظر گرفت. لذا تعداد حالات برابر است با:

$$۳![۲!\times۲!\times۲!]=۴۸$$

۲۴- عبارت $(۳x^{۲}+y)^{۵}$ را بسط دهید.

حل:

$$(3x^2+y)^5=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}(3x^2)^k(y)^{5-k}$$
$$\binom{5}{0}(3x^2)^0(y)^5+\binom{5}{1}(3x^2)^1(y)^4+\binom{5}{2}(3x^2)^2(y)^3$$
$$\binom{5}{3}(3x^2)^3(y)^2+\binom{5}{4}(3x^2)^4(y)^1+\binom{5}{5}(3x^2)^5(y)^0$$
$$=y^5+15x^2y^4+90x^4y^3+270x^6y^2+405x^8y+243x^{10}$$

۲۵- *

۲۶- عبارت $(x_1+2x_2+3x_3)^4$ را بسط دهید.

حل:

$$(x_1+2x_2+3x_3)^4=(A+B+C)^4=$$
$$\binom{4}{4,0,0}A^4B^0C^0+\binom{4}{3,1,0}A^3B^1C^0+\dots$$

تعداد جملات این بسط برابر است با:

$$\binom{4+3-1}{3-1}=\binom{6}{2}=15$$

۲۷- به چه طریق می توان۱۲ نفر را در سه شورای متفاوت با تعداد اعضای به ترتیب ۳، ۴ و۵ تقسیم نمود؟

حل: ۱۲ نفر متفاوت به سه گروه مجزا با تعداد عضو مشخص:

$$\binom{12}{3,4,5}=\frac{12!}{3!\,4!\,5!}=27720$$

۲۸- اگر بخواهیم۸ معلم جدید را بین۴ مدرسه تقسیم کنید، به چند طریق مختلف این کار امکان پذیر است؟ چنانچه به هر مدرسه لازم باشد دو معلم اختصاص داده شود آنگاه به چند طریق این کار امکان پذیر است؟

حل: الف) ۸ معلم متفاوت و۴ مدرسه متفاوت داریم:

$$4^8=65536$$

ب)

$$\binom{8}{2,2,2,2}=\frac{8!}{2!\,2!\,2!\,2!}=2520$$

۲۹- ۱۰ وزنه بردار در یک مسابقه شرکت دارند که۳ نفرآنها آمریکایی،۴ نفر روسی،۲ نفر چینی و۱ نفر کانادایی هستند. اگر امتیاز کسب شده به نام کشور وزنه بردار ثبت شود، چند نتیجه ممکن از نظر امتیاز می‌تواند وجود داشته باشد؟ چنانچه آمریکا ۱ وزنه بردار در سه نفر اول و۲ وزنه بردار در سه نفر آخر داشته باشد آنگاه نتایج ممکن به چند صورت خواهد بود؟

حل: الف)

$$\frac{10!}{4!3!2!1!} = 12600$$

ب)

$$\binom{3}{1}\binom{3}{2}\frac{7!}{4!2!1!} = 945$$

۳۰- نمایندگان ۱۰ کشور از جمله روسیه، فرانسه، انگلیس و آمریکا باید در یک ردیف قرار گیرند. چنانچه نمایندگان فرانسه و انگلیس بخواهند پهلوی هم باشند و نمایندگان روسیه و آمریکا بخواهند پهلوی هم نباشند، به چند طریق این کار امکان پذیر است؟

حل: تعداد کل حالاتی که نمایندگان فرانسه و انگلیس کنار هم باشند، منهای تعداد حالاتی از آن، که نمایندگان روسیه وآمریکا هم کنار هم قرار دارند.

$$(9!\times 2!) - (8!\times 2!\times 2!) = 564480$$

۳۱- اگر بخواهیم ۸ تخته سیاه یکسان را بین۴ مدرسه تقسیم کنیم، به چند طریق این کار امکان پذیر است؟ چنانچه به هر مدرسه لازم باشد یک تخته سیاه داده شود دراین صورت به چند طریق این کار امکان پذیر است؟

حل: الف) تقسیم ۸ شیء یکسان به ۴ گروه متفاوت با فرض $x_i \geq 0$:

$$\binom{8+4-1}{4-1} = \binom{11}{3} = 165$$

ب) منظور این است که حداقل۱ تخته سیاه به هر مدرسه برسد. تقسیم ۸ شیء یکسان به ۴ گروه متفاوت با فرض $x_i > 1$:

$$\binom{8-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$$

۳۲- یک آسانسور از طبقه همکف با ۸ مسافر(بدون مسئول آسانسور) حرکت کرده و تا طبقه ششم همه را پیاده می‌کند. اگر مسافران از نظر مسئول آسانسور یکسان باشند به چند طریق مختلف او می‌تواند شاهد پیاده شدن مسافران باشد؟ اگر ۵ نفر از مسافران مرد و ۳ نفر زن باشند و مسئول آسانسور بتواند مرد و زن را تشخیص دهد، آنگاه به چند طریق ممکن شاهد پیاده شدن مسافران خواهد بود؟

حل: الف) تقسیم ۸ مسافر یکسان به ۶ طبقه مختلف با شرط $x_i \geq ۰$ (از نظر مسئول آسانسور تنها تعداد افرادی که در هر طبقه پیاده می شوند مهم است)، لذا تعداد حالات برابر است با:

$$\binom{۸+۶-۱}{۶-۱}=\binom{۱۳}{۵}=۱۲۸۷$$

ب) دو گروه مجزا داریم که در نتیجه دو آزمایش مجزا داریم، پس مطابق اصل شمارش حالات آنها در هم ضرب می شود:

$$\binom{۵+۶-۱}{۶-۱}\binom{۳+۶-۱}{۶-۱}=\binom{۱۰}{۵}\binom{۸}{۵}=۱۴۱۱۲$$

۳۳- می خواهیم ۲۰ میلیون ریال پول را در۴ فعالیت اقتصادی سرمایه گذاری کنیم. هر سرمایه گذاری بایستی مضربی از یک میلیون ریال بوده و چنانچه بخواهیم در این فعالیت ها سرمایه گذاری کنیم لازم است حداقل سرمایه گذاری ۲،۲،۳و۴ میلیون ریال در هر فعالیت انجام گیرد، به چند طریق این کار امکان پذیر است اگر،

الف) بخواهیم در همه فعالیت ها سرمایه گذاری کنیم؟

ب) بخواهیم در حداقل۳ فعالیت سرمایه گذاری کنیم؟

حل: الف) پس از سرمایه گذاری های اجباری، $۹=(۲+۲+۳+۴)-۲۰$ میلیون ریال باقی می ماند که باید در۴ زمینه متفاوت با فرض $x_i \geq ۰$ سرمایه گذاری شود. پس داریم:

$$\binom{۹+۴-۱}{۴-۱}=\binom{۱۲}{۳}=۲۲۰$$

ب) یعنی در۳ یا۴ فعالیت. در مورد سرمایه گذاری در ۳ فعالیت، از آنجاییکه میزان حداقل سرمایه گذاری در هر فعالیت فرق می کند، تعداد حالات ممکن بستگی به این دارد که در کدام فعالیت سرمایه گذاری نشود، پس مجموع تعداد حالات برابر است با:

$$\binom{۹+۴-۱}{۴-۱}+\left[\binom{۱۳+۳-۱}{۳-۱}+\binom{۱۲+۳-۱}{۳-۱}+\binom{۱۱+۳-۱}{۳-۱}+\binom{۱۱+۳-۱}{۳-۱}\right]=\binom{۱۲}{۳}=۵۷۲$$

لطفا از قرار دادن این فایل در سایل فایلها با حذف توضیحات انتشارات، آدرس سایتها و نام مولف خودداری فرمایید.

این کتاب به دلیل چاپ شدن، شامل قوانین کپی رایت است و با اجازه مولف تنها در باشگاه مهندسان صنایع ایران انتشار داده شده است.

انتشارات ترمه

eyvazian.ir
ieclub.ir
حق چاپ برای انتشارات ترمه محفوظ است. مولف کتاب دکتر مجید ایوزیان می باشد.

فصل ۲
اصول احتمال

۱- جعبه ای شامل ۳ مهره قرمز، سبز و آبی است. آزمایشی را در نظر بگیرید که از این جعبه یک مهره انتخاب کرده و سپس آن را به جعبه بازگردانده و مهره دوم را انتخاب می کنیم، فضای نمونه آزمایش را تعیین کنید. مسأله را وقتی که انتخاب دومین مهره بدون جایگذاری اولین مهره انجام می گیرد تکرار کنید.

حل: الف) س: سبز، ق: قرمز، آ: آبی

$S_1=$ {(آ ، آ)و(ق، آ)و(س، آ)و(آ ،ق)و(ق،ق)و(س،ق)و(آ ،س)و(ق،س)و(س،س)}

ب) $S_2=$ {(ق، آ)و(س، آ)و(آ،ق)و(س،ق)و(آ ،س)و(ق،س)}

۲- تاسی را آن قدر پرتاب می کنیم تا عدد ۶ ظاهر شود که در این صورت آزمایش متوقف می گردد. فضای نمونه این آزمایش چیست؟ اگر E_n نشان دهنده پیشامدی باشد که نیاز به n پرتاب داشته باشد تا آزمایش کامل شود، چه نقاطی از فضای نمونه در E_n قرار دارند؟ احتمال $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ چیست؟

حل: الف) $S=$ {(۶)و(۱،۶)و(۲،۶)و...و(۵،۶)و(۱،۱،۶)و(۱،۲،۶)و...و(۵،۵،۶)و...}

ب) $E_n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},6)\mid x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}\in\{1,2,3,4,5\}\}$

ج) $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)=P(S)=1$

۳- دو تاس را پرتاب می کنیم. اگر E پیشامد اینکه مجموع دو تاس عدد فرد باشد، F پیشامد اینکه حداقل در یک تاس عدد ۱ ظاهر شود و G پیشامد اینکه مجموع دو تاس ۵ باشد پیشامدهای $F\cup E$، EF، FG، EF^c و EFG را بیان کنید.

حل:

$F\cup E=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1),(2,3),(2,5),(3,2),(3,4),(3,6),(4,3),(4,5),(5,2),(5,4),(5,6),(6,3),(6,5)\}$

$EF=\{(1,2),(1,4),(1,6),(2,1),(4,1),(6,1)\}$

$FG=\{(1,4),(4,1)\}$

$EF^c=\{(2,3),(2,5),(3,2),(3,4),(3,6),(4,3),(4,5),(5,2),(5,4),(5,6),(6,3),(6,5)\}$

$EFG=\{(1,4),(4,1)\}$

۴- افراد A ، B و C به نوبت سکه ای را پرتاب می کنند و اولین نفری که شیر بیاورد برنده است. فضای نمونه این آزمایش را می توان بصورت زیر تعریف نمود:

$$S=\{1,01,001,0001,\ldots,0000\ldots1\}$$

الف) فضای نمونه را تفسیر کنید.

ب) پیشامدهای زیر را با استفاده از اعضای S تعریف کنید:

i) A برنده شود=A

ii) B برنده شود=B

iii) $(A\cup B)^c$

فرض کنید که A ابتدا سکه را پرتاب می کند آنگاه B و سپس C و...

حل: الف)

۱: A در اولین پرتاب خود شیر بیاورد.

۰۱: A در اولین پرتاب خود شیر نیاورد ولی B در اولین پرتاب خود شیر بیاورد.

۰۰۱: A و B در اولین پرتاب خود شیر نیاورد ولی C در اولین پرتاب خود شیر بیاورد.

۰۰۰۱: A و B و C در اولین پرتاب خود شیر نیاورد ولی A در دومین پرتاب خود شیر بیاورد.

ب) i)

$A=\{1,0001,0000001,\ldots\}$

$B=\{01,00001,00000001,\ldots\}$

$C(A\cup B)^c == \{$۰۰۱و۰۰۰۰۰۱و۰۰۰۰۰۰۰۰۱و...$\}$

۵- سیستمی از ۵ جزء تشکیل شده است که اجزاء آن فعال یا خراب هستند. آزمایشی را در نظر بگیرید که وضعیت هر جزء را مشاهده و نتیجه آزمایش را بصورت بردار $(x_۱,x_۲,x_۳,x_۴,x_۵)$ نشان می دهد که x_i برابر ۱ است اگر جزءiام فعال و برابر صفر است اگر جزءiام خراب باشد.

الف)چه تعداد نتیجه در فضای نمونه این آزمایش وجود دارد؟

ب) فرض کنید که سیستم زمانی کار می کند که یا اجزاء۱ و ۲ هر دو فعال، یا اجزاء ۳ و ۴ هر دو فعال و یا اجزاء ۱،۳و۵ همگی فعال باشند. اگر W نشان دهنده پیشامد کارکردن سیستم باشد. اعضاء پیشامدW را مشخص نمایید.

ج) فرض کنید A پیشامد خراب بودن اجزاء ۴ و ۵ باشد، چه تعداد عضو در پیشامد A وجود دارد؟

د) همه اعضای پیشامد AW را بنویسید.

حل: الف) هریک اجزاء دارای دو حالت ممکن می باشند، پس مطابق اصل ضرب $۲^۵$ عضو برای کل حالات وجود دارد.

ب) $AW=\{(۱,۱,۰,۰,۰),(۱,۱,۱,۰,۰),(۱,۱,۰,۱,۰),(۱,۱,۰,۰,۱),(۱,۱,۱,۱,۰),(۱,۱,۱,۰,۱),(۱,۱,۰,۱,۱)$

$,(۱,۱,۱,۱,۱),(۰,۰,۱,۱,۰),(۱,۰,۱,۱,۰),(۰,۱,۱,۱,۰),(۰,۰,۱,۱,۱),(۱,۰,۱,۱,۱),(۰,۱,۱,۱,۱),(۱,۰,۱,۰,۱)\}$

ج) هریک از سه جزء ۱و۲و۳ دارای دو حالت ممکن می باشند پس مطابق اصل ضرب $۲^۳$ عضو برای پیشامد A وجود دارد.

د) $AW=\{(۱,۱,۰,۰,۰),(۱,۱,۱,۰,۰)\}$

۶- دریک بیمارستان بیماران را بر اساس وضعیت بیمه (اگر بیمار بیمه باشد کد ۱ و اگر بیمه نباشد کد ۰) و وضعیت جسمی خوب (g)، متوسط (f) و وخیم (s) پذیرش می نمایند. آزمایشی را در نظر بگیرید که عبارتست از پذیرش یک بیمار.

الف) فضای نمونه آزمایش را بنویسید.

ب) اگر پیشامد A بیان کننده بیمه بودن وضعیت بیمار باشد، عضوهای A را تعیین کنید.

ج) اگر پیشامد B بیان کننده بیمه نبودن بیمار باشد، عضوهای B را تعیین کنید.

د) همه عضوهای پیشامد $B^c\cup A$ را بنویسید.

حل: الف) $S=\{(۱, g)$و$(۱, f)$و$(۱, s)$و$(۰, g)$و$(۰, f)$و$(۰, s)\}$

ب) $A=\{(۱, g)و(۱, f)و(۱, s)\}$

ج) $B=\{(۰, g)و(۰, f)و(۰, s)\}$

د) $A\cup B^{c}=A-B=A=\{(۱, g)و(۱, f)و(۱, s)\}$

۷- آزمایشی را در نظر بگیرید که بازیکنان یک تیم را بر اساس رنگ لباس (آبی یا سفید) و وابستگی حزبی آنها (جمهوریخواه، دمکرات و مستقل) تقسیم بندی می نمایند. اگر تیم دارای ۱۵ بازیکن باشد چه تعداد نتیجه در هر یک از موارد زیر وجود دارد؟

الف) فضای نمونه آزمایش.

ب) پیشامد اینکه حداقل یکی از اعضای تیم آبی پوش باشد.

ج) پیشامد اینکه هیچ یک از اعضای تیم خودش را مستقل به حساب نیاورد.

با توجه به تعداد حالات رنگ لباس و وابستگی حزبی، $۶=۳\times۲$ نتیجه ممکن برای هر بازیکن وجود دارد. بنابراین اگر تیمی ۱۵ بازیکن داشته باشد. تعداد نتایج هر یک از موارد خواسته شده عبارت است از:

حل: الف) فضای نمونه آزمایش.
$۶\times۶\times\ldots\times۶=۶^{۱۵}$

ب) = تعداد حالاتی که حداقل یکی ازاعضای تیم آبی پوش باشد

حالاتیکه هیچ کس آبی پوش نباشد-کل حالات

$=۶^{۱۵}-۳^{۱۵}$

(اگر شخص آبی پوش نباشد ۳ نتیجه ممکن برای او وجود دارد)

ج) اگر شخص مستقل نباشد ۴ نتیجه ممکن برای او وجود دارد بنابراین کل حالات پیشامد خواسته شده عبارت است از: $۴^{۱۵}$

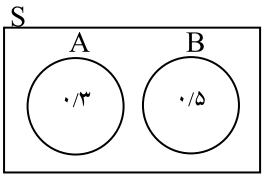
۸- فرض کنید پیشامدهای A و B ناسازگارند و $P(A)=۰/۳$ و $P(B)=۰/۵$ است. احتمال پیشامدهای زیر را بدست آورید:

الف) A یا B اتفاق افتند.

ب) A اتفاق افتد اما B اتفاق نیفتد.

ج) A و B هردو اتفاق افتند.

حل: الف)



$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۳+۰/۵-۰=۰/۸$$

ب) $P(A\cap B^c)=P(A)=۰/۳$

ج) $P(A\cap B)=۰$

۹- یک مغازه خرده فروشی دو نوع کارت اعتباری A و B را می پذیرد. ۲۴ درصد از مشتریان کارت نوع A، ۶۱ درصد کارت نوع B و ۱۱ درصد هر دو نوع کارت را با خود دارند. چند درصد از مشتریان کـارتی دارند که مورد قبول فروشگاه است؟

حل: درصد مشتریانی که حداقل یکی از کارتهای A یا B را دارند مورد نظر است:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۲۴+۰/۶۱-۰/۱۱=۰/۷۴$$

$$\Rightarrow ۰/۷۴\times ۱۰۰=۷۴\%$$

۱۰- ۶۰ درصد از دانش آموزان یک مدرسه دخترانه انگشتر و گردنبند ندارنـد. ۲۰ درصـد انگشـتر و ۳۰ درصد گردنبند دارند. اگر یک دانش آموز به تصادف انتخاب شود، احتمال اینکه این دانش آموز،

الف) انگشتر یا گردنبند داشته باشد چقدر است؟

ب) انگشتر و گردنبند داشته باشد چقدر است؟

حل: الف) A: انگشتر، B: گردنبند.

$$P(A\cup B)=۱-P(A\cup B)'=۱-P(A'\cap B')=۱-۰/۶=۰/۴$$

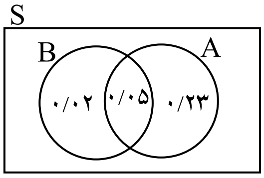
ب) $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=۰/۲+۰/۳-۰/۴=۰/۱$

۱۱- ۲۸ درصد از مردان آمریکایی سیگار، ۷ درصد سیگار برگ و ۵ درصد هم سیگار و هم سـیگار بـرگ می کشند.

الف) چند درصداز مردان آمریکایی سیگار و سیگار برگ نمی کشند؟

ب) چند درصد سیگار برگ می کشند ولی سیگار نمی کشند؟

حل: A: سیگار ، B: سیگار برگ



الف) $P(A^c \cap B^c)=P(A\cup B)^c=۱-P(A\cup B)$

$=۱-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]=۱-[۰/۲۸+۰/۰۷-۰/۰۵]=۰/۷$

ب) با توجه به نمودار ون احتمال خواسته شده ۲ درصد می باشد.

توجه کنید که مزیت نمودار ون این است که فضا را به قسمتهای ناسازگار تقسیم می کند که این کار محاسبه احتمال پیشامدهای مختلف را ساده تر می کند.

۱۲- یک مدرسه ۳ کلاس زبان اسپانیایی، فرانسوی و آلمانی را ارائه می دهد و هر یک از ۱۰۰ دانش آموز مدرسه می توانند در هر یک از کلاسهای فوق ثبت نام کنند. اگر ۲۸ نفر در کلاس اسپانیایی، ۲۶ نفر در کلاس فرانسه و ۱۶ نفر در کلاس آلمانی ثبت نام کنند وبعلاوه ۱۲ نفر در دو کلاس اسپانیایی و فرانسوی، ۴ نفر در دو کلاس اسپانیایی و آلمانی، ۶ نفر در دو کلاس فرانسوی و آلمانی و ۲ نفر در هر سه کلاس ثبت نام کرده باشند، آنگاه:

الف) اگر دانش آموزی را به تصادف انتخاب کنیم، با چه احتمالی او در هیچ کلاسی ثبت نام نکرده است؟

ب) اگر دانش آموزی به تصادف انتخاب شود، با چه احتمالی او دقیقاً در یک کلاس ثبت نام کرده است؟

ج) اگر ۲ دانش آموز به تصادف انتخاب شوند، با چه احتمالی حداقل یکی از آنها در کلاس ثبت نام کرده است؟

حل: الف) P(هیچ کلاس)=۱-P(حداقل یک کلاس)

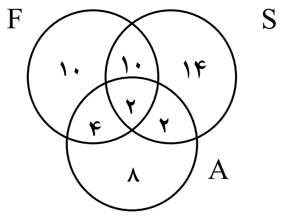
$=۱-P(F\cup S\cup A)=$

$=۱-[۰/۲۸+۰/۲۶+۰/۱۶-۰/۱۲-۰/۰۴-۰/۰۶+۰/۰۲]$

$=۱-۰/۵=۰/۵$

ب) با توجه به نمودار ون داریم: P(دقیقاً یکی)=۰/۱۰+۰/۰۸+۰/۱۴=۰/۳۲

ج) یعنی یا یکی ازآنها یا هردو، در کلاس ثبت نام کرده اند. با توجه به قسمت الف، نیمی از دانش‌آموزان (۵۰ نفر) در کلاس ثبت نام کرده اند، پس احتمال فوق برابر است با:



$$P=\frac{\binom{۵۰}{۱}\binom{۵۰}{۱}+\binom{۵۰}{۲}\binom{۵۰}{۰}}{\binom{۱۰۰}{۲}}=\frac{۱۴۹}{۱۹۸}$$

راه دوم:

$$P(\text{دقیقاً یکی})=۱-P(\text{هیچکدام})=۱-\left(\frac{۵۰}{۱۰۰}\times\frac{۴۹}{۹۹}\right)=۱-\frac{۴۹}{۱۹۸}=\frac{۱۴۹}{۱۹۸}$$

۱۳- در شهری با جمعیت ۱۰۰،۰۰۰ نفر سه روزنامه I، II و III منتشر می شود، نسبت کسانی که این روزنامه ها را مطالعه می کنند بصورت زیر داده شده است:

I: ۱۰ درصد　　II: ۳۰ درصد　　III: ۵ درصد　　I و II: ۸ درصد

III و I: ۲ درصد　　III و II: ۴ درصد　　III، II و I: یک درصد

الف) تعداد افرادی که فقط یک روزنامه را مطالعه می کنند چقدر است؟

ب) چه تعدادی حداقل ۲ روزنامه را مطالعه می کنند؟

ج) اگر I و III روزنامه صبح و II روزنامه عصر باشد، چند نفر حداقل یک روزنامه صبح بعلاوه یک روزنامه عصر را مطالعه می کنند؟

د) چند نفر هیچ روزنامه ای را مطالعه نمی کنند؟

ه) چند نفر فقط یک روزنامه صبح و یک روزنامه عصر را مطالعه می کنند؟

حل: الف) با توجه به شکل:

$$n=(۰/۰۱+۰/۱۹+۰)(۱۰۰۰۰۰)=۲۰۰۰۰$$

ب)

$$n=(۰/۰۷+۰/۰۱+۰/۰۳+۰/۰۱)(۱۰۰۰۰۰)=۱۲۰۰۰$$

ج) با توجه به شکل داریم:

$$n=(۰/۰۷+۰/۰۱+۰/۰۳)(۱۰۰۰۰۰)=۱۱۰۰۰$$

د)

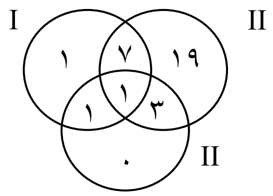
$$P(\text{هیچ})=۱-P(\text{حداقل یکی})$$

$$=۱-[۰/۱+۰/۳+۰/۰۵-۰/۰۸-۰/۰۲-۰/۰۴+۰/۰۱]=۱-۰/۳۲=۰/۶۸$$

$$\Rightarrow n=۰/۶۸\times۱۰۰۰۰۰=۶۸۰۰۰$$

ه) با توجه به شکل:

$$n=(۰/۰۷+۰/۰۳)(۱۰۰۰۰۰)=۱۰۰۰۰$$



۱۴- اطلاعات زیر در رابطه با شغل، وضعیت تاهل و تحصیلات ۱۰۰۰ نفر مشترک یک مجله داده شده است: ۳۱۲ نفر شاغل، ۴۷۰ نفر متاهل، ۵۲۵ نفر دانشجو، ۴۲ نفر دانشجوی شاغل، ۱۴۷ نفر دانشجوی متاهل، ۸۶ نفر متاهل شاغل و ۲۵ نفر دانشجوی شاغل و متاهل هستند. نشان دهید که اعداد گزارش شده غلط هستند.

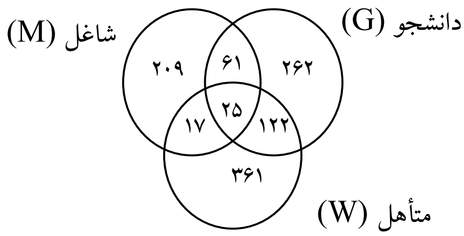
راهنمایی: اگر M، W و G نشان دهنده مجموعه های شاغلین، متاهلین و دانشجویان باشد، فرض کنید یک نفر از ۱۰۰۰ نفر به تصادف انتخاب شده است و گزاره(۴-۴) را بکار برده، نشان دهید که اگر اطلاعات فوق صحیح باشد آنگاه:

حل:

$P(M\cup W\cup G)>۱$

$P(M\cup W\cup G)=۰/۳۱۲+۰/۴۷+۰/۵۲۵-۰/۰۴۲-۰/۱۴۷-۰/۰۸۶+۰/۰۲۵$

$=۱/۰۵۷>۱ \Rightarrow$ اطلاعات غلط است



۱۵-*

۱۶-*

۱۷- اگر ۸ مهره رخ شطرنج را به تصادف روی صفحه شطرنج قرار دهیم احتمال اینکه هیچ یک از رخ ها دیگری را نزند یعنی اینکه هیچ سطر و یا ستونی بیش از یک رخ نداشته باشد را بدست آورید.

حل: راه اول- اگر رخ ها را متفاوت بگیریم، برای انتخاب اولین مکان، ۶۴ گزینه وجود دارد. پس از گذاشتن اولین رخ در صفحه، سطر و ستون آن رخ دیگر قابل استفاده نیست، یعنی ۱۵ خانه کم می شود و انتخاب بعدی، ۴۹=۱۵-۶۴ گزینه دارد. برای انتخاب سوم، سطر و ستون انتخاب دوم نیز حذف می‌شوند ولی ۲ خانه از این سطر و ستون قبلاً حذف شده پس ۳۶=۱۳-۴۹ گزینه داریم و همینطور تا آخرین خانه.

$$P=\frac{۶۴\times۴۹\times۳۶\times۲۵\times۱۶\times۹\times۴\times۱}{۶۴\times۶۳\times...\times۵۷}=\frac{(۸!)^۲}{P_۸^{۶۴}}=۹/۱۰۹\times۱۰^{-۶}$$

راه دوم :اگر رخها را یکسان در نظر بگیریم؛ $\frac{۸!}{\binom{۶۴}{۸}}=۹/۱۰۹\times۱۰^{-۶}$

۱۸-*

۱۹- دو تاس متقارن را که دو وجه آن قرمز، دو وجه آنها سیاه، یک وجه آنها زرد و وجه دیگرآنها سفید است پرتاب می کنیم. احتمال اینکه نتیجه پرتاب آنها وجه هم رنگ باشد را بدست آورید.

حل: $P(\text{همرنگ}) = P(\text{هردو قرمز}) + P(\text{هردو سیاه}) + P(\text{هردو زرد}) + P(\text{هردو سفید})$

$$=\frac{۲}{۶}\times\frac{۲}{۶}+\frac{۲}{۶}\times\frac{۲}{۶}+\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۶}=\frac{۱۰}{۳۶}=\frac{۵}{۱۸}$$

۲۰-*

۲۱- یک سازمان کوچک محلی از ۲۰ خانواده تشکیل شده است که ۴ خانواده آنها یک فرزند، ۸ خانواده ۲ فرزند، ۵ خانواده ۳ فرزند، ۲ خانواده ۴ فرزند و یک خانواده ۵ فرزند دارند.

الف) اگر یکی از این خانواده ها را به تصادف انتخاب کنیم احتمال اینکه این خانواده i فرزند داشته باشد چقدر است؟

$(i=۱,۲,۳,۴,۵)$

ب) اگر یکی از بچه ها را به تصادف انتخاب کنیم احتمال اینکه این بچه از خانواده ای با i فرزند باشد چقدر است؟

$(i=۱,۲,۳,۴,۵)$

حل: الف) در این قسمت احتمال انتخاب شدن هر یک از خانواده ها یکسان در نظر گرفته می شود.

$$P(i=۱)=\frac{۴}{۲۰}\quad P(i=۲)=\frac{۸}{۲۰}\quad P(i=۳)=\frac{۵}{۲۰}\quad P(i=۴)=\frac{۲}{۲۰}\quad P(i=۵)=\frac{۱}{۲۰}$$

ب) در این قسمت شانس انتخاب هر خانواده به تعداد فرزندان آن بستگی دارد.

$\text{تعداد کل بچه ها} = ۴\times۱+۸\times۲+۵\times۳+۲\times۴+۱\times۵=۴۸$

$$P(i=۱)=\frac{۴\times۱}{۴۸}\quad P(i=۲)=\frac{۸\times۲}{۴۸}\quad P(i=۳)=\frac{۵\times۳}{۴۸}\quad P(i=۴)=\frac{۲\times۴}{۴۸}$$

$$P(i=۵)=\frac{۱\times۵}{۴۸}$$

۲۲-*

۲۳- یک جفت تاس منظم را پرتاب می کنیم. احتمال اینکه نتیجه عدد حاصل شده در تاس دوم بیشتر از نتیجه حاصل شده در تاس اول باشد چقدر است؟

حل: راه اول $P(\text{نتیجه تاس دوم بیشتر از تاس اول})=P(۱,۲)+P(۱,۳)+\ldots+P(۵,۶)=\frac{۱۵}{۳۶}=\frac{۵}{۱۲}$

راه دوم: اگر از ۳۶ حالت ممکن تعداد حالاتیکه نتیجه دو تاس مساوی هستند (۶ حالت) را کم کنیم، در نیمی از ۳۰ نتیجه باقیمانده عدد تاس دوم بیشتر است، بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(\text{نتیجه تاس دوم بیشتر از تاس اول}) = \frac{(۳۶-۶)/۲}{۳۰} = \frac{۱۵}{۳۶}$$

۲۴- اگر دو تاس را پرتاب کنیم، احتمال اینکه مجموع دو عدد ظاهر شده برابر i باشد را بدست آورید. مقدار آن را برای $i = ۲,۳,...,۱۱,۱۲$ پیدا کنید.

حل:

$$P(i=۲)=\frac{۱}{۳۶}\ ,\ P(i=۳)=\frac{۲}{۳۶}\ ,\ P(i=۴)=\frac{۳}{۳۶}\ ,\ P(i=۵)=\frac{۴}{۳۶}\ ,$$
$$P(i=۶)=\frac{۵}{۳۶}\ ,\ P(i=۷)=\frac{۶}{۳۶}\ ,\ P(i=۸)=\frac{۵}{۳۶}\ ,\ P(i=۹)=\frac{۴}{۳۶}\ ,$$
$$P(i=۱۰)=\frac{۳}{۳۶}\ ,\ P(i=۱۱)=\frac{۲}{۳۶}\ ,\ P(i=۱۲)=\frac{۱}{۳۶}$$
$$P(i)=\frac{۶-|i-۷|}{۳۶}$$

۲۵- یک زوج تاس را پرتاب می کنیم، تا جمع ۵ یا ۷ ظاهر شود. احتمال اینکه جمع ۵ ابتدا ظاهر شود را بدست آورید.

راهنمایی: اگر E_n نشان دهنده پیشامد ظاهر شدن ۵ در nامین پرتاب و ظاهر نشدن ۵ یا ۷ در $(n-1)$ پرتاب اول باشد. $P(E_n)$ را محاسبه کنید و بررسی نمایید که $\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$ احتمال مورد نظر است.

حل:

$$P(\text{مجموع ۵ قبل از مجموع ۷}) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$$
$$= P(\text{مجموع دفعه اول ۵ شود}) + P(\text{مجموع دفعه اول ۵ یا ۷ نشود})\,P(\text{مجموع دفعه دوم ۵ شود})$$
$$+ P(\text{مجموع دفعه اول و دوم ۵ یا ۷ نشود})\,P(\text{مجموع دفعه سوم ۵ شود}) + \ldots$$

با توجه به مساله قبل داریم:

$$P(\text{مجموع دفعه اول ۵ یا ۷ نشود}) = 1-P(\text{مجموع دفعه اول ۵ یا ۷ شود}) = ۱-\left(\frac{۴}{۳۶}+\frac{۶}{۳۶}\right)=\frac{۲۶}{۳۶}$$

$$\Rightarrow P(\text{مجموع ۵ قبل از ۷}) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$$
$$= \frac{۴}{۳۶} + \frac{۲۶}{۳۶} \times \frac{۴}{۳۶} + \left(\frac{۲۶}{۳۶}\right)^{۲} \times \frac{۴}{۳۶} + \left(\frac{۲۶}{۳۶}\right)^{۳} \times \frac{۴}{۳۶} + \ldots$$
$$= \frac{۴}{۳۶} \times \left(\frac{۱}{۱-\frac{۲۶}{۳۶}}\right) = \frac{۴}{۳۶} \times \frac{۳۶}{۱۰} = \frac{۴}{۱۰} = ۰/۴ \quad \text{با توجه به تصاعد هندسی}$$

توجه داشته باشید که $P(E_n) = \left(\frac{۲۶}{۳۶}\right)^{n-۱} \times \frac{۴}{۳۶}$

۲۶- در یک بازی، بازیکنی دو تاس را پرتاب می کند اگر مجموع دو عدد ظاهر شده ۲ یا۳ یا ۱۲ باشد بازنده است و اگر مجموع ۷ یا ۱۱ باشد برنده است. اگر نتیجه عدد دیگری باشد بازی ادامه پیدا می کند تا اینکه او نتیجه قبلی را بدست آورد و یا نتیجه ۷ حاصل گردد. اگر نتیجه ۷ ابتدا ظاهر شود بازیکن بازنده است، در حالیکه اگر نتیجه قبلی پیش از ۷ ظاهر شود بازیکن برنده است. احتمال برنده شدن این بازیکن را بدست آورید.

حل: منظور از نتیجه قبلی، همان نتیجه پرتاب اول می باشد. پس داریم:

$$P(\text{برد}) = P(۷) + P(۱۱) + [P(۴)\,P(\text{۴ قبل از ۷})] + [P(۵)\,P(\text{۵ قبل از ۷})] + [P(۶)\,P(\text{۶ قبل از ۷})]$$
$$+ [P(۸)\,P(\text{۸ قبل از ۷})] + [P(۹)\,P(\text{۹ قبل از ۷})] + [P(۱۰)\,P(\text{۱۰ قبل از ۷})]$$

که منظور از $P(i)$، (نتیجه مجموع پرتاب اول i باشد) P و منظور از $P(\text{i قبل از ۷})$، (از پرتاب دوم به بعد، مجموع i قبل از ۷ بیاید) P است. همچنین باید توجه داشت که اگر نتیجه پرتاب اول، ۲، ۳ یا ۱۲ باشد، ما بازی را باخته ایم و بازی ادامه نمی یابد. لذا:

$$P(\text{برد}) = \frac{۶}{۳۶} + \frac{۲}{۳۶} + \left(\frac{۳}{۳۶} \times \frac{\frac{۳}{۳۶}}{\frac{۳}{۳۶} + \frac{۶}{۳۶}}\right) + \left(\frac{۴}{۳۶} \times \frac{\frac{۴}{۳۶}}{\frac{۴}{۳۶} + \frac{۶}{۳۶}}\right) + \left(\frac{۵}{۳۶} \times \frac{\frac{۵}{۳۶}}{\frac{۵}{۳۶} + \frac{۶}{۳۶}}\right)$$
$$\left(\frac{۵}{۳۶} \times \frac{\frac{۵}{۳۶}}{\frac{۵}{۳۶} + \frac{۶}{۳۶}}\right) + \left(\frac{۴}{۳۶} \times \frac{\frac{۴}{۳۶}}{\frac{۴}{۳۶} + \frac{۶}{۳۶}}\right) + \left(\frac{۳}{۳۶} \times \frac{\frac{۳}{۳۶}}{\frac{۳}{۳۶} + \frac{۶}{۳۶}}\right) = ۰/۴۹۲۹$$

دانشجویان توجه داشته باشند که این مسأله را با اطلاعات فصل ۳ به راحتی می توان حل نمود.

۲۷- ظرفی شامل۳ توپ قرمز و۷ توپ سیاه است. بازیکن های A وB یکی پس از دیگری توپ ها را از ظرف خارج می کنند تا یک توپ قرمز انتخاب شود. احتمال اینکه بازیکن A توپ قرمز را انتخاب کند بدست آورید. (ابتدا بازیکن A، توپ از ظرف انتخاب می کند و سپس بازیکن B و به همین ترتیب بازی ادامه می یابد، در ضمن توپهای انتخاب شده به ظرف بازگردانده نمی شوند).

حل: احتمال فوق برابر است با اینکه فرد A در اولین انتخاب، توپ قرمز را بردارد؛ یا اینکه A سیاه بردارد، B هم سیاه و در بار دوم فرد A توپ قرمز را بردارد و...تا ۴ مرحله. پس از آن چون تنها سه توپ قرمز در ظرف می ماند، انتخاب بعدی حتماً قرمز خواهد بود. لذا جواب مسأله مجموع احتمال این ۴ مرحله است:

$$P=\left(\frac{۳}{۱۰}\right)+\left(\frac{۷}{۱۰}\times\frac{۶}{۹}\times\frac{۳}{۸}\right)+\left(\frac{۷}{۱۰}\times\frac{۶}{۹}\times\frac{۵}{۸}\times\frac{۴}{۷}\times\frac{۳}{۶}\right)+\left(\frac{۷}{۱۰}\times\frac{۶}{۹}\times\frac{۵}{۸}\times\frac{۴}{۷}\times\frac{۳}{۶}\times\frac{۲}{۵}\times\frac{۳}{۴}\right)=۰/۵۸۳۳۳$$

۲۸- ظرفی شامل ۵ توپ قرمز، ۶ توپ آبی و ۸ توپ سبز است. اگر یک مجموعه ۳ تایی از توپها به تصادف انتخاب شود، احتمال پیشامدهای زیر را بدست آورید.

الف) توپها از یک رنگ باشند.

ب) توپها از رنگهای متفاوت باشند.

مساله را در صورتی که رنگ توپ انتخاب شده را یادداشت نموده و سپس قبل از انتخاب دوم در ظرف بازگردانده شود حل کنید. این نوع انتخاب را نمونه گیری با جایگذاری گویند.

حل: الف) بدون جایگذاری

$$P=\frac{\binom{۵}{۳}+\binom{۶}{۳}+\binom{۸}{۳}}{\binom{۱۹}{۳}}=۰/۰۸۹$$

ب) یعنی یکی سبز، یکی قرمز و یکی آبی. پس:

$$P=\frac{\binom{۵}{۱}\binom{۶}{۱}\binom{۸}{۱}}{\binom{۱۹}{۳}}=۰/۲۴۷۷$$

ج) با جایگذاری؛ یعنی ترتیب هم داریم. پس:

P(هر سه قرمز)+P(هر سه آبی)+P(هر سه سبز)

$$=\left(\frac{۵}{۱۹}\right)^{۳}+\left(\frac{۶}{۱۹}\right)^{۳}+\left(\frac{۸}{۱۹}\right)^{۳}=\frac{۸۵۳}{۶۸۵۹}=۰/۱۲۴۴$$

د) یعنی یکی سبز، یکی آبی و یکی قرمز و با توجه به !۳ حالت ترتیب رنگها داریم:

$$P=۳!\left(\frac{۵}{۱۹}\times\frac{۶}{۱۹}\times\frac{۸}{۱۹}\right)=۰/۲۰۹۹$$

۲۹- در ظرفی n توپ سفید و m توپ سیاه وجود دارد.

الف) اگر ۲ توپ را به تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه رنگ آنها یکسان باشد چقدر است؟

ب) اگر ۱ توپ را به تصادف انتخاب نموده و قبل از انتخاب دومین توپ آن را جایگزین نماییم، احتمال اینکه توپهای انتخاب شده هم رنگ باشند را بدست آورید.

ج) نشان دهید که احتمال پیشامد بند (ب) همیشه بزرگتر از احتمال پیشامد بند (الف) است.

حل: الف) انتخاب بدون ترتیب

$$\frac{\binom{m}{۰}\binom{n}{۲}+\binom{m}{۲}\binom{n}{۰}}{\binom{m+n}{۲}}$$

انتخاب با ترتیب (جواب نهایی با حالت قبل فرقی نمی کند.)

$$\frac{m(m-۱)+n(n-۱)}{(m+n)(m+n-۱)}$$

ب)

$$\frac{m\times m+n\times n}{(m+n)^{۲}}$$

ج)

$$\frac{m(m-۱)+n(n-۱)}{(m+n)(m+n-۱)}\overset{?}{<}\frac{m^{۲}+n^{۲}}{(m+n)^{۲}}\Leftrightarrow\frac{m^{۲}-m+n^{۲}-n}{m+n-۱}\overset{?}{<}\frac{m^{۲}+n^{۲}}{m+n}$$

$$\Leftrightarrow\ m^{۳}-m^{۲}+mn^{۲}-mn+nm^{۲}-nm+n^{۳}-n^{۲}$$

$$\overset{?}{<}m^{۳}+nm^{۲}-m^{۲}+mn^{۲}+n^{۳}-n^{۲}$$

$$\Leftrightarrow\ -۲mn<۰$$

۳۰- تیمهای شطرنج دو مدرسه به ترتیب از ۸ و ۹ بازیکن تشکیل شده اند. ۴ بازیکن از هر تیم بـه تصـادف انتخاب می کنیم تا در یک مسابقه شرکت نمایند. افراد انتخاب شده از دو تیم را بـه تصـادف بـه جفتهـایی تقسیم نموده تا با یکدیگر مسابقه دهند. اگر علـی در تـیم شـطرنج یـک مدرسـه و بـرادرش محمـد در تـیم شطرنج مدرسه دیگر باشند. احتمال پیشامدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) علی و محمد با یکدیگر مسابقه دهند.

ب) علی و محمد بعنوان نماینده مدارس خود انتخاب شوند ولی با یکدیگر بازی نکنند.

ج) دقیقاً یکی از دو برادر بعنوان نماینده مدرسه خود انتخاب شوند.

حل: الف) هردو باید انتخاب شوند و سپس با هم بازی کنند.

$$P(A)=\frac{\binom{1}{1}\binom{7}{3}\binom{1}{1}\binom{8}{3}\times 1\times 3!}{\binom{8}{4}\binom{9}{4}4!}=\frac{1}{18}$$

ب) تعداد حالات کل مجموعه S مانند مثال قبل است (مخرج کسر). ولی بـرای تعـداد حـالات مـورد نظـر پیشامد (صورت کسر)، تعداد حالاتی مد نظر است که هر دو انتخاب شوند ولی با هم بازی نکننـد. بنـابراین قسمت دوم تعداد حالات پیشامد در بند ((ب)) مکمل قسـمت دوم تعـداد حـالات پیشـامد در بنـد ((الـف)) می‌باشد.

$$\frac{\binom{1}{1}\binom{7}{3}\binom{1}{1}\binom{8}{3}[4!-3!]}{\binom{8}{4}\binom{9}{4}4!}=\frac{1}{6}$$

ج)

$$\frac{\left[\binom{1}{1}\binom{7}{3}\binom{1}{0}\binom{8}{4}+\binom{1}{0}\binom{7}{4}\binom{1}{1}\binom{8}{3}\right]\times 4!}{\binom{8}{4}\binom{9}{4}4!}=\frac{1}{2}$$

۳۱- یک تیم بسکتبال سه نفره شامل یک مدافع، یک نفر خط حمله و یک نفر در مرکز است.

الف) از هر یک از سه تیم با ترکیب فوق یک فرد به تصادف انتخاب شود. احتمال اینکـه یـک تـیم کامـل انتخاب شود را بدست آورید.

ب) احتمال اینکه هر سه نفر انتخاب شده بازیکن یک موقعیت باشند را بدست آورید.

حل: الف) با توجه به !۳ جایگشت سه بازیکن و $\frac{1}{3}$ احتمال قرار گرفتن هر یک در هر پست داریم:

$$P=3!\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$$

ب)

$$P=\binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$$

۳۲- یک گروه از افراد خردسال شامل b پسربچه و g دختر بچه را به تصادف در یک خط ردیف می‌کنیم، یعنی هر یک از $(b+g)!$ جایگشت افراد هم شانس هستند. احتمال اینکه فرد قرار گرفته در موقعیت i ام $(1 \le i \le b+g)$ دختربچه باشد را بدست آورید.

حل:

$$P=\frac{\binom{g}{1}(b+g-1)!}{(b+g)!}=\frac{g}{b+g}$$

۳۳- در جنگلی ۲۰ گوزن وجود دارد که ۵ تای آنها را پس از به دام انداختن علامتگذاری و رها کرده اند. مدتی بعد ۴ گوزن را مجدداً به دام می اندازند. احتمال اینکه ۲ تا از ۴ گوزن به دام افتاده دارای علامت باشند را بدست آورید. چه فرضی را در نظر می گیرید؟

با فرض اینکه زاد و ولد و مرگ ومیر صورت نگرفته باشد، داریم:

حل:

$$P=\frac{\binom{5}{2}\binom{15}{2}}{\binom{20}{4}}=\frac{1050}{4845}=\frac{70}{323}=0/22$$

۳۴-*

۳۵- تعداد ۳۰ نفر روانپزشک و ۲۴ نفر روانشناس در یک کنفرانس شرکت کرده اند. ۳ نفر از آنها را برای حضور در یک میزگرد به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال اینکه حداقل یک روانپزشک انتخاب شود چقدر است؟

حل: راه اول:

$$P(A)=\frac{\binom{30}{1}\binom{24}{2}+\binom{30}{2}\binom{24}{1}+\binom{30}{3}\binom{24}{0}}{\binom{54}{3}}=0/9184$$

راه دوم:

$$P(\text{حداقل یکی})=1-P(\text{هیچکدام})=1-\frac{\binom{24}{3}\binom{30}{0}}{\binom{54}{3}}=0/9184$$

۳۶-*

۳۷- معلمی به دانش آموزان یک کلاس ۱۰ سوال داده و به آنها اطلاع می دهد که امتحان نهایی شامل ۵ سوال تصادفی از سوالات داده شده است. اگر دانش آموزی توانسته باشد به ۷ سوال پاسخ دهد، مطلوب است احتمال اینکه،

الف) در امتحان به هر ۵ سوال پاسخ صحیح بدهد؟

ب) حداقل به ۴ سوال امتحانی پاسخ صحیح بدهد؟

حل: الف)

$$P(A)=\frac{\binom{۷}{۵}\binom{۳}{۰}}{\binom{۱۰}{۵}}=۰/۰۸۳۳$$

ب)

$$P(B)=\frac{\binom{۷}{۵}\binom{۳}{۰}+\binom{۷}{۴}\binom{۳}{۱}}{\binom{۱۰}{۵}}=۰/۵$$

۳۸- n جوراب داریم که ۳ تای آنها قرمز است. اگر احتمال انتخاب ۲ جوراب قرمز به تصادف برابر با $\frac{۱}{۲}$ باشد، مقدار n را بدست آورید.

حل:

$$P(A)=\frac{\binom{۳}{۲}\binom{n-۳}{۰}}{\binom{n}{۲}}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow n(n-۱)=۱۲\Rightarrow n=۴$$

۳۹- در شهری ۵ هتل وجود دارد. اگر در یک روز ۳ نفر ساکن هتل شده باشند. احتمال اینکه هر یک در هتلی جداگانه مستقر باشند را بدست آورید. چه فرضهایی را برای حل مساله در نظر می گیرید؟

حل: با فرض عدم تعویض هتل پس از اسکان و اینکه هر نفر بطور مستقل فقط در یک هتل اسکان می‌یابد، داریم:

$$P(A)=\frac{۵\times۴\times۳}{۵^{۳}}=\frac{\binom{۵}{۳}\times ۳!}{۵^{۳}}=۰/۴۸$$

توجه کنید که فضای نمونه، برابر تعداد حالات تقسیم n شیء متفاوت به r گروه متفاوت باشرط $x_i \geq ۰$ است که برابر r^n می باشد.

۴۰- شهری ۴ نفر تعمیرکار تلویزیون دارد. اگر ۴ دستگاه تلویزیون خراب باشند با چه احتمالی دقیقاً به i تعمیرکار مراجعه می شود؟ مسأله را برای i=۱،۲،۳،۴ حل کنید. چه فرضهایی را در نظر می گیرید؟

حل: الف) با فرض اینکه هر نفر بطور مستقل به یک تعمیرکار مراجعه می کند، داریم:

$$P(i=۱)=\frac{\binom{۴}{۱}}{۴^{۴}}=\frac{۱}{۶۴}$$

$$P(i=۲)=\frac{\binom{۴}{۲}\left(\frac{۴!}{۲!۲!}+\binom{۲}{۱}\frac{۴!}{۳!۱!}\right)}{۴^{۴}}=\frac{\binom{۴}{۲}\left(۲^{۴}-۲\right)}{۴^{۴}}=\frac{۲۱}{۶۴}$$

دقت شود که فضای نمونه، تعداد حالات تقسیم n شیء مختلف به r گروه مختلف با فرض $x_i \geq ۰$ است که برابر $r^n=۴^۴$ می شود. اما در حالت i=۲، ابتدا ۲ تا از ۴ تعمیرکار انتخاب می گردد. حال ما ۴ تلویزیون متفاوت و ۲ تعمیرکار مختلف داریم، اما برای تقسیم، نمی توان از ۲^n استفاده نمود، چرا که فرض $x_i \geq ۰$ برقرار نیست، یعنی هر کدام از ۲ تعمیرکار باید حداقل یک تلویزیون داشته باشد و x_i ها نمی توانند صفر شوند. لذا از شمارش استفاده می شود، به این ترتیب که یا به هر کدام از ۲ تعمیرکار، ۲ تلویزیون بدهیم یا یکی را انتخاب کرده، به او ۳ تلویزیون بدهیم و به دیگری یکی. این روش برای حالات بعد نیز استفاده می گردد.

$$P(i=۳)=\frac{\binom{۴}{۳}\times\binom{۳}{۱}\times\frac{۴!}{۲!۱!۱!}}{۴^{۴}}=\frac{۳۶}{۶۴}$$

$$P(i=۴)=\frac{\binom{۴}{۴}\times\frac{۴!}{۱!۱!۱!۱!}}{۴^{۴}}=\frac{۶}{۶۴}$$

۴۱- اگر تاسی را ۴ مرتبه پرتاب کنیم، احتمال اینکه حداقل یک مرتبه عدد ۶ ظاهر شود چقدر است؟

حل:

$$P(\text{حداقل یک ۶})=۱-P(\text{هیچ بار ۶ نیاید})=۱-\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۴}=۰/۵۱۷۷۴$$

۴۲- دو تاس را n مرتبه بطور متوالی پرتاب می کنیم.احتمال اینکه حداقل یک مرتبه جفت ۶ ظاهر شود را بدست آورید. n چقدر بزرگ باشد تا احتمال فوق حداقل برابر با $\frac{۱}{۲}$ گردد؟

حل:

$$P(\text{حداقل یک جفت۶}) = ۱-P(\text{هیچ جفت۶}) = ۱-\left(\frac{۳۵}{۳۶}\right)^n$$

$$۱-\left(\frac{۳۵}{۳۶}\right)^n \geq \frac{۱}{۲} \Rightarrow n \geq ۲۵$$

۴۳- الف) اگر N نفر شامل A و B به تصادف در یک ردیف قرار گیرند. احتمال اینکه A و B پهلوی هم باشند چقدر است؟

ب) احتمال پیشامد فوق، وقتی که افراد به تصادف روی محیط یک دایره قرار گیرند را بدست آورید.

حل: الف) با توجه به جایگشت A و B

$$P(A)=\frac{۲\times(N-۱)!}{N!}=\frac{۲}{N}$$

ب)

$$P(B)=\frac{۲\times(N-۲)!}{(N-۱)!}=\frac{۲}{N-۱}$$

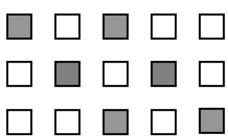
۴۴- ۵ نفر که بوسیله حروف A، B ، C، D و E نشان داده شده اند در یک ردیف قرار می گیرند. فرض کنید که هر ترتیب ممکن از قرار گرفتن آنها هم شانس باشد. احتمال پیشامدهای زیر را بدست آورید:

الف) دقیقاً یک نفر بین A و B باشد.

ب) دقیقاً دو نفر بین A و B باشند.

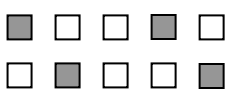
ج) سه نفر بین A و B باشند.

حل:الف)



$$\frac{\binom{۳}{۱}۲!۳!}{۵!}$$

ب)



$$\frac{\binom{۲}{۱}۲!۳!}{۵!}$$

ج)

$$\frac{\binom{۱}{۱}۲!۳!}{۵!}$$

۴۵- خانمی n کلید دارد که یکی از آنها درب منزلش را باز می کند.

الف) اگر او کلیدها را به تصادف انتخاب کرده و آنهایی که درب را باز نمی کنند کنار گذارد با چه احتمالی او در kامین تلاش درب را باز می کند؟

ب) اگر او کلیدهای قبلی را کنار نگذارد احتمال پیشامد فوق چقدر است؟

حل: الف) توجه کنید که گفته شده: ((در k امین تلاش)) نه ((تا k امین تلاش))، لذا احتمال دفعات اول تا k ام جمع نمی شود. پس احتمال فوق برابر است با اینکه همه(k-۱) آزمایش قبلی بی نتیجه بوده باشد و آزمایش k ام نتیجه دهد:

$$P(A)=\frac{n-۱}{n}\times\frac{n-۲}{n-۱}\times\dots\times\frac{n-k+۱}{n-k+۲}\times\frac{۱}{n-k+۱}=\frac{۱}{n}$$

ب) یعنی همه(k-۱) امتحان اول (با جایگذاری) با عدم موفقیت همراه بوده است و امتحان k ام موفق بوده است. پس:

$$P(B)=\left(\frac{n-۱}{n}\right)^{k-۱}\times\frac{۱}{n}$$

۴۶- چند نفر بایستی در یک اتاق حضور داشته باشند تا احتمال اینکه حداقل دو نفر از آنها تولدشان را در یک ماه جشن بگیرند بیش از $\frac{۱}{۲}$ باشد؟ فرض کنید تولد در ماه های مختلف هم شانس است.

حل: مساله برای $n \le ۱۲$ حل می شود:

$$P(\text{حداقل ۲ نفر})=۱-P(\text{هیچ ۲ نفر})$$
$$=۱-\frac{۱۲\times۱۱\times\dots\times(۱۲-n+۱)}{۱۲^{n}}>\frac{۱}{۲}\Rightarrow n=۵$$

۴۷- اگر در اتاقی ۱۲ نفر باشند، احتمال اینکه هیچ دوتایی از آنها در یک ماه بدنیا نیامده باشند چقدر است؟

حل: اگر ماههای سال را هم شانس در نظر بگیریم، آنگاه احتمال برابر است با: $P(A)=\frac{۱۲!}{۱۲^{۱۲}}$

۴۸- ۲۰ نفر را در نظر بگیرید، احتمال اینکه در ۱۲ ماه سال، ۴ ماه هر کدام ۲ تولد و ۴ ماه هر کدام ۳ تولد داشته باشند را بدست آورید.

حل: اگر ماههای سال را هم شانس در نظر بگیریم، تعداد حالات فضای نمونه برابر با تعداد حالات تقسیم ۲۰ شیء مختلف به ۱۲ گروه مختلف با شرط $x_i \ge ۰$ است، یعنی $۱۲^{۲۰}$. برای بدست آوردن تعداد حالات

پیشامد، ابتدا ۴ ماه از ۱۲ ماه، و ۸ نفر از ۲۰ نفر را انتخاب کرده و سپس ۸ نفر را به ۴ ماه که هر کدام ۲ عضو دارد، تقسیم می کنیم. یعنی $\binom{۸}{۲,۲,۲,۲}$ و بعد ۴ ماه دوم را انتخاب می کنیم و...

$$P(A)=\frac{\binom{۱۲}{۴}\binom{۲۰}{۸}\frac{۸!}{(۲!)^{۴}}\binom{۸}{۴}\binom{۱۲}{۱۲}\frac{۱۲!}{(۳!)^{۴}}}{۱۲^{۲۰}}$$

۴۹- یک گروه متشکل از ۶ مرد و ۶ زن را به تصادف به دو گروه ۶ نفره تقسیم می کنیم احتمال اینکه هر دو گروه تعداد مساوی مرد داشته باشند را بدست آورید.

حل: می بینیم که برای مردها، ابتدا ترتیب دو گروه مهم نبوده است، یعنی گروهها یکسانند، پس !۲ در مخرج داریم و نیز در مخرج کلی کسر. اما پس از تعیین دو گروه مردها، از آنجاییکه دو گروه انتخاب شده افراد متمایزی دارند پس برای انتخاب خانمها دو گروه متمایز داریم و ترتیب مهم می شود و لذا در مخرج کسر برای زن ها، !۲ نخواهیم داشت.

$$P(A)=\frac{\underbrace{\frac{۶!}{۳!۳!۲!}}_{\text{مردها}}\times\underbrace{\frac{۶!}{۳!۳!}}_{\text{زن ها}}}{\frac{۱۲!}{۶!۶!۲!}}=۰/۴۳۲۹$$

اگر گروهها را متفاوت در نظر بگیریم نیز تغییری در جواب حاصل نمی شود.

$$P(A)=\frac{\frac{۶!}{۳!۳!}\times\frac{۶!}{۳!۳!}}{\frac{۱۲!}{۶!۶!}}=۰/۴۳۲۹$$

۵۰-*

۵۱- فرض کنید n توپ را به تصادف در N ظرف توزیع کنیم. احتمال اینکه m توپ در ظرف اول باشد را بدست آورید. فرض کنید که همه N^{n} ترتیب توزیع توپها هم شانس باشند.

حل: m توپ را جدا کرده و در ظرف اول قرار می دهیم. حال N-۱ ظرف داریم:

$$P(A)=\frac{\binom{n}{m}(N-۱)^{n-m}}{N^{n}}$$

۵۲- در کمدی ۱۰ جفت کفش نگهداری می شود. اگر ۸ کفش به تصادف انتخاب شود، احتمال پیشامدهای زیر را بدست آورید.

الف) هیچ جفت کفش انتخاب نشود.

ب) درست یک جفت کفش انتخاب شود.

حل: الف) راه اول: ابتدا ۸ جفت از کفشها را انتخاب می کنیم (بدون ترتیب) و سپس از هر جفت یک لنگه انتخاب می‌کنیم تا ۸ لنگه از ۸ جفت کفش متفاوت انتخاب شود.

$$P(A)=\frac{\binom{۱۰}{۸}\times ۲^{۸}}{\binom{۲۰}{۸}}=۰/۰۹۱۴۵$$

راه دوم: (انتخاب با ترتیب) برای انتخاب کفش اول، ۲۰ حالت داریم و چون در انتخاب دوم، لنگه دیگر کفش انتخاب شده اول را نمی توانیم انتخاب کنیم، لذا ۱۸ گزینه داریم و ... پس:

$$P(A)=\frac{۲۰\times ۱۸\times ۱۶\times ...\times ۶}{۲۰\times ۱۹\times ۱۸\times ...\times ۱۳}=۰/۰۹۱۴۵$$

ب) یک جفت از ۱۰ جفت را برمی داریم. حال ادامه مسأله مانند قسمت الف با ۶ لنگه می باشد.

$$P(B)=\frac{\binom{۱۰}{۱}\binom{۹}{۶}۲^{۶}}{\binom{۲۰}{۸}}=۰/۴۲۶۷$$

۵۳- اگر ۴ زوج به تصادف در یک ردیف صندلی بنشینند، احتمال اینکه هیچ شوهری پهلوی همسرش نباشد را بدست آورید.

حل:

$$P(\text{هیچ زوجی کنار هم})=۱-P(\text{حداقل یک زوج کنار هم})$$

$$=۱-\left[\frac{\binom{۴}{۱}۲!۷!}{۸!}-\frac{\binom{۴}{۲}۲!^{۲}۶!}{۸!}+\frac{\binom{۴}{۳}۲!^{۳}۵!}{۸!}-\frac{\binom{۴}{۴}۲!^{۴}۴!}{۸!}\right]$$

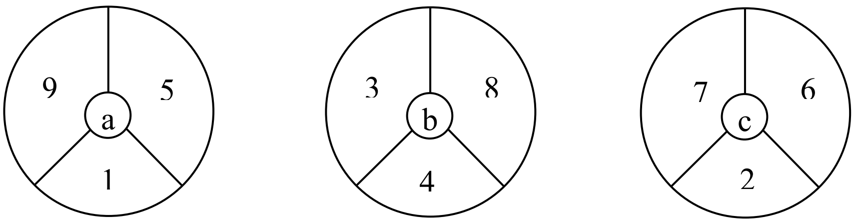
$$=۱-\frac{۲۳}{۳۵}=\frac{۱۲}{۳۵}$$

۵۴-*

۵۵-*

۵۶- دو بازیکن در یک بازی بصورت زیر شرکت می کنند. بازیکن A یکی از سه گردونه زیر را انتخاب و سپس بازیکن B یکی از دو گردونه باقیمانده را انتخاب می نماید. هر دو بازیکن گردونه ها را به چرخش درآورده و گردونه ای که با عدد بزرگتر متوقف می شود برنده اعلام می گردد. فرض کنید هر گردونه با شانس برابر در یکی از نواحی متوقف گردد. در این صورت آیا شما ترجیح می دهید بازیکن A باشید یا بازیکن B ؟

پاسخ خود را شرح دهید!



۱ ۲ ۳

حل: ترجیح می دهیم بازیکن B باشیم. اما دلیل آن،

اگر احتمال برد یکی از این سه گردونه، بیشتر از دو تای دیگر بود، ترجیح می دادیم بازیکن A باشیم تا با انتخاب گردونه بهتر، بتوانیم برنده بازی باشیم. اما در اینجا وضع فرق می کند و هیچ یک از سه گردونه از دو تای دیگر بهتر نیست، چرا که:

گردونه اول با احتمال $\frac{5}{9}$ گردونه دوم را می برد (کلاً ۹ حالت برای مسابقه دو گردونه وجود دارد که در ۵ حالت، گردونه a گردونه b را می برد. یعنی اگر ۹= a باشد و b مقادیر ۳، ۴ یا ۸ را بیاورد یا ۵=a باشد و b مقادیر ۳ یا ۴ را بیاورد، a برنده است و در ۴ حالت دیگر b برنده است. پس $\frac{5}{9}$ احتمال برد a از b است).

گردونه دوم(b) با احتمال $\frac{5}{9}$ گردونه سوم (c) را می برد.

گردونه سوم(c) با احتمال $\frac{5}{9}$ گردونه اول (a) را می برد.

پس گردونه a از b بهتر، b از c بهتر و c از a بهتر است. حال اگر ما نفر دوم باشیم، نفر اول هر گردونه ای را که انتخاب کند، گردونه بهتری وجود دارد که می توانیم با انتخاب آن، شانس برنده شدن خود را بیشتر کنیم.

فصل ۳
احتمال شرطی و استقلال

۱- دو تاس منظم پرتاب شده اند احتمال شرطی اینکه حداقل یکی از تاس ها عدد ۶ ظاهر شود اگر نتیجه دو تاس متفاوت باشد چقدر است؟

E: حداقل یکی از تاس ها ۶ باشد- F : نتیجه دوتاس متفاوت باشد.

حل:

$$P(E|F)=\frac{P(EF)}{P(F)}$$

$$\frac{P(\text{اولی ۶ و دومی غیر ۶})+P(\text{دومی ۶ و اولی غیر ۶})}{P(\text{نتیجه متفاوت})}=\frac{\left(\frac{۱}{۶}\times\frac{۵}{۶}\right)+\left(\frac{۵}{۶}\times\frac{۱}{۶}\right)}{\frac{۳۰}{۳۶}}=\frac{\frac{۱۰}{۳۶}}{\frac{۳۰}{۳۶}}=\frac{۱}{۳}$$

۲- اگر ۲ تاس منظم پرتاب شوند. احتمال شرطی اینکه اولین تاس عدد ۶ ظاهر شود، به شرط اینکه مجموع دو تاس i باشد را بدست آورید. این احتمال را برای i بین ۲ و ۱۲ محاسبه کنید.

حل:

$$P(\text{اولی ۶}\mid \text{مجموع برابر } i)=P(E\mid F_i)=\frac{P(EF_i)}{P(F_i)}$$

$$i<۷\Rightarrow P(E\mid F_i)=۰ \quad ؛ \quad i=۷\Rightarrow P(E\mid F_۷)=\frac{\frac{۱}{۳۶}}{\frac{۶}{۳۶}}=\frac{۱}{۶} \quad ؛ \quad i=۸\Rightarrow P(E\mid F_۸)=\frac{۱}{۵}$$

$$i=۹\Rightarrow P(E\mid F_۹)=\frac{۱}{۴} \quad ؛ \quad i=۱۰ \Rightarrow P(E\mid F_{۱۰})=\frac{۱}{۳} \quad ؛ \quad i=۱۱\Rightarrow P(E\mid F_{۱۱})=\frac{۱}{۲} \quad ؛$$

$$i=۱۲\Rightarrow P(E\mid F_{۱۲})=۱$$

۳-*

۴- احتمال اینکه حداقل در یکی از دو تاس منظم پرتاب شده عدد ۶ ظاهر شود بشرط اینکه مجموع دو تاس i باشد را بدست آورید. (i=۲،۳،...،۱۲)

حل:

$$P(\text{حداقل یکی ۶} \mid \text{مجموع } i) = P(E \mid F_i) = \frac{P(EF_i)}{P(F_i)}$$

$$i<۷ \Rightarrow P(E \mid F_i)=۰ \;؛\quad i=۷ \Rightarrow P=\frac{۱}{۳} \;؛\quad i=۸ \Rightarrow P=\frac{۲}{۵} \;؛$$

$$i=۹ \Rightarrow P=\frac{۲}{۴} \;؛\quad i=۱۰ \Rightarrow P=\frac{۲}{۳} \;؛\quad i=۱۱ \Rightarrow P=\frac{۲}{۲}=۱ \;؛$$

$$i=۱۲ \Rightarrow P=۱$$

۵- کیسه ای شامل ۶ توپ سفید و ۹ توپ سیاه است. اگر ۴ توپ را به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب کنیم. احتمال اینکه ۲ توپ انتخاب شده اول سفید و دو توپ انتخاب شده آخر سیاه باشند را بدست آورید.

حل: اولی سفید و دومی سفید، سومی سیاه و چهارمی هم سیاه.

$$P(W_۱ \cap W_۲ \cap B_۳ \cap B_۴) = P(W_۱)\,P(W_۲ \mid W_۱)\,P(B_۳ \mid W_۱ \cap W_۲)\,P(B_۴ \mid W_۱ \cap W_۲ \cap B_۳)$$

$$=\frac{۶}{۱۵}\times\frac{۵}{۱۴}\times\frac{۹}{۱۳}\times\frac{۸}{۱۲}=\frac{۶}{۹۱}$$

۶- ظرفی را در نظر بگیرید که در آن ۱۲ توپ قرار دارد و ۸ تای آن سفید است. یک نمونه ۴ تایی را از ظرف با جایگذاری (بدون جایگذاری) انتخاب می کنیم احتمال شرطی اینکه اولین و سومین توپ انتخاب شده سفید باشند به شرط اینکه نمونه انتخاب شده شامل ۳ توپ سفید باشد را بدست آورید. (در هر دو حالت)

حل: الف) بدون جایگذاری

$$P(\text{اولی و سومی سفید} \mid \text{سه توپ سفید}) = P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$=\frac{\left(\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۷}{۱۱}\times\frac{۶}{۱۰}\times\frac{۴}{۹}\right)+\left(\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۴}{۱۱}\times\frac{۷}{۱۰}\times\frac{۶}{۹}\right)}{\binom{۸}{۳}\binom{۴}{۱}\div\binom{۱۲}{۴}}=\frac{۱}{۲}$$

ب) با جایگذاری

$$P(A \mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\left(\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۴}{۱۲}\right)+\left(\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۴}{۱۲}\times\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۸}{۱۲}\right)}{\binom{۴}{۳}\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۴}{۱۲}}=\frac{۱}{۲}$$

۷- پادشاه از خانواده ای است که دو فرزند دارد، احتمال اینکه فرزند دیگر خانواده خواهر او باشد چقدر است؟

حل: E: یک پسر و یک دختر در خانواده

F: حداقل یک پسر در خانواده

$$S=\{(b،b),(b،g),(g،b),(g،g)\}$$

$$F=\{(b،g),(g،b),(b،b)\} \qquad P(E \mid F)=\frac{P(EF)}{P(F)}=\frac{\frac{۲}{۴}}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۲}{۳}$$

$$E=\{(b،g),(g،b)\}$$

۸- زوجی دارای ۲ فرزند هستند. احتمال اینکه هر دو دختر باشند به شرط اینکه فرزند بزرگتر دختر است را بدست آورید.

حل:

$$F=\{(g،b),(g،g)\} \quad E=\{(g،g)\} \Rightarrow P(E \mid F)=\frac{P(EF)}{P(F)}=\frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۲}{۴}}=\frac{۱}{۲}$$

۹- ۳ ظرف را در نظر بگیرید. ظرف A شامل ۲ توپ سفید و ۴ توپ قرمز است، ظرف B شامل ۸ توپ سفید و ۴ توپ قرمز است و در ظرف C یک توپ سفید و ۳ توپ قرمز قرار دارد. اگر یک توپ رابه تصادف از هر ظرف انتخاب کنیم، احتمال اینکه توپ انتخاب شده از ظرف A سفید باشد به شرط اینکه ۲ توپ سفید انتخاب شده باشد را بدست آورید.

حل: راه اول:

$$P(\text{سفید } A \text{ توپ} \mid \text{دو توپ سفید})=P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$=\frac{\frac{۲}{۶}\times\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۳}{۴}+\frac{۲}{۶}\times\frac{۴}{۱۲}\times\frac{۱}{۴}}{\frac{۲}{۶}\times\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۳}{۴}+\frac{۲}{۶}\times\frac{۴}{۱۲}\times\frac{۱}{۴}+\frac{۴}{۶}\times\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۱}{۴}}=\frac{۷}{۱۱}$$

راه دوم: $A^c=$ توپ ظرف A قرمز باشد:

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(B\mid A)P(A)}{P(B\mid A)P(A)+P(B\mid A^c)P(A^c)}$$

$$=\frac{\left(\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۳}{۴}+\frac{۴}{۱۲}\times\frac{۱}{۴}\right)\times\frac{۲}{۶}}{\left(\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۳}{۴}+\frac{۴}{۱۲}\times\frac{۱}{۴}\right)\times\frac{۲}{۶}+\left(\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۱}{۴}\right)\times\frac{۴}{۶}}=\frac{۷}{۱۱}$$

۱۰-*

۱۱- شانس بارداری غیر طبیعی برای زنان بارداری که سیگاری هستند دو برابر زنان غیر سیگاری است. اگر ۳۲ درصد از زنهای سن بارداری سیگاری باشند چند درصد از زنهایی که بارداری غیر طبیعی دارند سیگاری هستند؟

حل:

$$P(\text{سیگاری بودن}\mid\text{بارداری غیر طبیعی})=P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$=\frac{P(B\mid A)P(A)}{P(B\mid A)P(A)+P(B\mid A^c)P(A^c)}=\frac{۲p\times ۰/۳۲}{(۲p\times ۰/۳۲)+(p\times ۰/۶۸)}$$

$$=\frac{۰/۶۴}{۰/۶۴+۰/۶۸}=\frac{۱۶}{۳۳}=۰/۴۸۴۸$$

۱۲- ۹۸ درصد نوزادان هنگام تولد زنده هستند، ۱۵ درصد از زایمان ها با عمل سزارین انجام می گیرد و شانس زنده ماندن با عمل سزارین ۹۶ درصد است. اگر یک زن باردار به تصادف انتخاب شود و برای زایمان تحت عمل سزارین قرار نگیرد. با چه احتمالی بچه او زنده خواهد بود.

حل: طبق فرمول بیز:

$$P(\text{زنده ماندن})=P(\text{زنده ماندن}\mid\text{سزارین})P(\text{سزارین})+P(\text{زنده ماندن}\mid\text{غیر سزارین})P(\text{غیر سزارین})$$

$$۰/۹۸=۰/۹۶\times ۰/۱۵+P(\text{زنده ماندن}\mid\text{غیر سزارین})\times ۰/۸۵\Rightarrow$$

$$P(\text{زنده ماندن}\mid\text{غیر سزارین})=\frac{۰/۹۸-(۰/۹۶\times ۰/۱۵)}{۰/۸۵}=۰/۹۸۳۵$$

۱۳- در یک محله، ۳۶ درصد از خانواده ها یک اتومبیل دارند که ۲۲ درصد از آنها یک دوچرخه هم دارند، همچنین ۳۰ درصد از خانواده ها یک دوچرخه دارند، مطلوب است:

الف) احتمال اینکه خانواده‌ای که به تصادف انتخاب می شود هم اتومبیل و هم دوچرخه داشته باشد.

ب) احتمال شرطی اینکه یک خانواده انتخاب شده اتومبیل داشته باشد بشرط اینکه این خانواده صاحب یک دوچرخه است.

حل: الف)

$$P(\text{دوچرخه دارد} \cap \text{اتومبیل دارد})$$
$$=P(B\cap A)=P(B)P(A\mid B)=0/36\times 0/22=0/0792$$

ب)
$$P(\text{اتومبیل} \mid \text{دوچرخه})=P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{0/0792}{0/3}=0/264$$

۱۴- در شهری ۴۶ درصد از رأی دهندگان خود را در گروه مستقل می پندارند در حالیکه ۳۰ درصد لیبرال و ۲۴ درصد محافظه کار هستند. در یک انتخابات محلی ۳۵ درصد از گروه مستقل، ۶۲ درصد لیبرالها و ۵۸ درصد از محافظه کاران رأی داده اند. اگر یک رأی دهنده را به تصادف انتخاب کنیم و بدانیم که در انتخابات محلی شرکت کرده است. احتمال اینکه او،

الف) از گروه مستقل باشد.

ب) از گروه لیبرال باشد.

ج) از گروه محافظه کار باشد.

را بدست آورید.

د) چه نسبتی از رأی دهندگان در انتخابات محلی شرکت داشته اند.

مستقل باشد=A ؛ در انتخابات شرکت کند=B ؛ لیبرال باشد=C ؛ محافظه کار باشد=D

حل:

الف)
$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(B\mid A)P(A)}{P(B\mid A)P(A)+P(B\mid C)P(C)+P(B\mid D)P(D)}$$
$$=\frac{0/35\times 0/46}{(0/35\times 0/46)+(0/62\times 0/3)+(0/58\times 0/24)}=\frac{0/161}{0/4862}=0/331$$

ب)
$$P(C\mid B)=\frac{P(CB)}{P(B)}=\frac{P(B\mid C)P(C)}{P(B)}=\frac{0/62\times 0/3}{0/4862}=0/383$$

ج)
$$P(D\mid B)=\frac{P(DB)}{P(B)}=\frac{P(B\mid D)P(D)}{P(B)}=\frac{0/58\times 0/24}{0/4862}=0/286$$

د)
$$P(B)=(0/35\times 0/46)+(0/62\times 0/3)+(0/58\times 0/24)=0/4862$$
$$\Rightarrow \quad 0/4862\times 100=48/62\%$$

۱۵- در یک کلاس ترک سیگار، ۴۸ درصد از زنها و ۳۷ درصد از مردهاییکه شرکت کرده اند، وموفق شده اند که حداقل یکسال بعد از کلاس سیگار نکشند. این افراد در پایان یکسال در یک جشن شرکت می‌کنند. اگر ۶۲ درصد از شرکت کنندگان در آن کلاس مرد باشند.

الف) مطلوب است درصد زنهایی که در جشن شرکت کرده اند.

ب) چند درصد از افراد شرکت کننده در کلاس در جشن شرکت کرده اند؟

حل: الف) ۶۲ درصد از شرکت کنندگان کلاس مرد و در نتیجه ۳۸ درصد زن هستند و ۳۷ درصد از مردهای کلاس، موفق به ترک سیگار شده اند. پس داریم:

$$P(\text{فردی در جشن شرکت کند}|\text{زن باشد}) = P(\text{فردی که در جشن شرکت کرده، زن باشد})$$

$$= P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B \mid A)P(A) + P(B \mid A^c)P(A^c)}$$

$$= \frac{۰/۴۸ \times ۰/۳۸}{(۰/۴۸ \times ۰/۳۸) + (۰/۳۷ \times ۰/۶۲)} = ۰/۴۴۳ \Rightarrow ۰/۴۴۳ \times ۱۰۰ = ۴۴/۳\%$$

ب)

$$P(\text{فردی که در کلاس شرکت کرده، در جشن شرکت کرده باشد})$$

$$= P(B) = P(B \mid A)P(A) + P(B \mid A^c)P(A^c)$$

$$= (۰/۴۸ \times ۰/۳۸) + (۰/۳۷ \times ۰/۶۲) = ۰/۴۱۱۸ \Rightarrow ۰/۴۱۱۸ \times ۱۰۰ = ۴۱/۱۸\%$$

۱۶- در یک دانشکده، ۵۲ درصد از دانشجویان زن هستند. رشته اصلی ۵ درصد از دانشجویان این دانشکده، کامپیوتر است. ۲ درصد از دانشجویان زن رشته اصلی آنها کامپیوتر است. اگر یک دانشجو را به تصادف انتخاب کنیم. احتمال شرطی پیشامدهای زیر را بدست آورید.

الف) این دانشچو زن باشد به شرط اینکه در رشته کامپیوتر تحصیل کند.

ب) این دانشجو در رشته کامپیوتر تحصیل کند بشرط اینکه دانشجو زن باشد.

با رجوع به متن اصلی کتاب متوجه می شویم که منظور سوال این بوده که احتمال اینکه شخص زن باشد و کامپیوتر بخواند۰/۰۲ است و یا $P(\text{زن باشد} \cap \text{کامپیوتر بخواند}) = ۰/۰۲$، لذا داریم:

حل: الف)

$$P(\text{زن} \mid \text{کامپیوتر}) = \frac{P(\text{زن} \cap \text{کامپیوتر})}{P(\text{کامپیوتر})} = \frac{۰/۰۲}{۰/۰۵} = ۰/۴$$

ب)

$$P(\text{کامپیوتر} \mid \text{زن}) = \frac{P(\text{زن} \cap \text{کامپیوتر})}{P(\text{زن})} = \frac{۰/۰۲}{۰/۵۲} = \frac{۱}{۲۶}$$

۱۷- در مورد حقوق روزانه ۵۰۰ زوج ازدواج کرده از آنها سوال کرده ایم. نتیجه اطلاعات بدست آمده در جدول زیر خلاصه شده است. یعنی مثلاً در ۳۶ زوج، زن بیشتر از ۲۵۰۰۰ ریال و شوهرش کمتر از آن درآمد دارد. مطلوب است:

زن	شوهر: کمتر از ۲۵۰۰۰ ریال	شوهر: بیش از ۲۵۰۰۰ ریال
کمتر از ۲۵۰۰۰ ریال	۲۱۲	۱۹۸
بیش از ۲۵۰۰۰ ریال	۳۶	۵۴

الف) احتمال اینکه یک شوهر کمتر از ۲۵۰۰۰ ریال درآمد داشته باشد.

ب) احتمال شرطی اینکه زن بیش از ۲۵۰۰۰ ریال درآمد داشته باشد، بشرط اینکه شوهر او نیز بیش از این مبلغ درآمد داشته باشد.

ج) احتمال شرطی اینکه زن بیش از ۲۵۰۰۰ ریال درآمد داشته باشد، بشرط اینکه شوهر او کمتر از این مبلغ درآمد داشته باشد.

حل: الف) A پیشامد این است که درآمد شوهر کمتر از ۲۵۰۰۰ باشد.
B پیشامد این است که درآمد زن کمتر از ۲۵۰۰۰ باشد.

$$P(A)=\frac{۳۶+۲۱۲}{۵۰۰}=۰/۴۹۶$$

ب)

$$P(\text{زن بیشتراز ۲۵۰۰۰}\mid\text{شوهر بیشتراز ۲۵۰۰۰})=P(B^c\mid A^c)=\frac{P(B^c\cap A^c)}{P(A^c)}=\frac{\frac{۵۴}{۵۰۰}}{\frac{۱۹۸+۵۴}{۵۰۰}}=\frac{۵۴}{۲۵۲}=\frac{۳}{۱۴}$$

ج)

$$P(\text{زن بیشتراز ۲۵۰۰۰}\mid\text{شوهر کمتراز ۲۵۰۰۰})=P(B^c\mid A)=\frac{P(B^c\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{۳۶}{۵۰۰}}{\frac{۳۶+۲۱۲}{۵۰۰}}=\frac{۳۶}{۲۴۸}=\frac{۹}{۶۲}$$

۱۸- یک فارغ التحصیل جدید برای شرکت در سه امتحان در تابستان برنامه ریزی نموده است. او اولین امتحان را در تیر ماه می دهد، اگر قبول شود آنگاه دومین امتحان را در مرداد ماه و درصورت قبولی آخرین امتحان را در شهریور ماه می دهد و اگر در یک امتحان رد شود دیگر اجازه شرکت در امتحان بعدی را ندارد. احتمال قبولی در امتحان اول ۰/۹ و احتمال قبولی در امتحان دوم به شرط قبولی در امتحان اول ۰/۸ و احتمال قبولی در امتحان سوم به شرط قبولی در دو امتحان قبلی ۰/۷ است.

الف) احتمال اینکه او در هر سه امتحان قبول شود چقدر است؟

ب) به شرط اینکه او هر سه امتحان را قبول نشود با چه احتمالی در امتحان دوم رد شده است؟

حل: الف) S_i: قبولی در امتحان i ام

$$P(S_1 \cap S_2 \cap S_3) = P(S_1)P(S_2|S_1)P(S_3|S_2 S_1) = ۰/۹ \times ۰/۸ \times ۰/۷ = ۰/۵۰۴$$

ب)

$$P(\text{رد درامتحان دوم} \mid \text{در کل رد}) = \frac{P(\text{درامتحان دوم} \cap \text{در کل رد})}{P(\text{در کل رد})}$$

$$= \frac{P(\text{رد درامتحان دوم})}{P(\text{در کل رد})} = \frac{۰/۹ \times ۰/۲}{۱ - ۰/۵۰۴} = \frac{۰/۱۸}{۰/۴۹۶} = ۰/۳۶۲۹$$

۱۹-*

۲۰- از ظرفی که ۵ توپ سفید و ۷ توپ سیاه دارد هر مرتبه توپی را به تصادف انتخاب کرده، رنگ آن را یادداشت نموده و همراه دو توپ هم رنگ دیگر به ظرف بر می گردانیم احتمال پیشامدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) دو توپ انتخاب شده اول سیاه و دو توپ بعدی سفید باشند.

ب) از چهار توپ انتخاب شده اول ۲ توپ سیاه انتخاب شده باشد.

حل: الف)

$$P(A) = \frac{۷}{۱۲} \times \frac{۹}{۱۴} \times \frac{۵}{۱۶} \times \frac{۷}{۱۸} = \frac{۳۵}{۷۶۸}$$

ب) دقیقاً دو توپ سیاه

$$P(B) = \binom{۴}{۲} \frac{۷ \times ۹ \times ۵ \times ۷}{۱۲ \times ۱۴ \times ۱۶ \times ۱۸} = \frac{۲۱۰}{۷۶۸}$$

در قسمت "ب" به تعداد $\binom{۴}{۲}$ طریق می تواند ۲ توپ سیاه ظاهر شود که احتمال هر طریق از آن $\frac{۳۵}{۷۶۸}$ می‌باشد.

۲۱- ظرف I شامل ۲ توپ سفید و ۴ توپ قرمز است و ظرف II شامل ۱ توپ سفید و یک توپ قرمز است. یک توپ را به تصادف از ظرف I انتخاب نموده و در ظرف II قرار می دهیم و سپس یک توپ از ظرف II انتخاب می کنیم. احتمال پیشامدهای زیر را بدست آورید.

الف) توپ انتخاب شده از ظرف II سفید باشد.

ب) توپ منتقل شده سفید باشد بشرط اینکه توپ انتخاب شده از ظرف II سفید باشد.

حل: الف) W_2: توپ ظرف II سفید

$$P(W_2)=P(W_2|W_1)\ P(W_1)+P(W_2|R_1)\ P(R_1)$$
$$=\left(\frac{2}{3}\times\frac{2}{6}\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{4}{6}\right)=\frac{4}{9}$$

ب) با توجه به الف

$$P(W_1|W_2)=\frac{P(W_2\cap W_1)}{P(W_2)}=\frac{P(W_2|W_1)P(W_1)}{P(W_2)}=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{2}{6}}{\frac{4}{9}}=\frac{1}{2}$$

۲۲- هر یک از دو توپ را سیاه یا طلایی رنگ زده و در یک ظرف قرار می دهیم فرض کنید احتمال اینکه توپ سیاه رنگ شود $\frac{1}{2}$ است و توپها مستقل از یکدیگر رنگ شوند.

الف) اگر بدانیم که رنگ طلایی استفاده شده (حداقل یک توپ طلایی رنگ زده شده است) احتمال شرطی اینکه هر دو توپ طلایی رنگ شده باشند را بدست آورید.

ب) فرض کنید که ظرف کج شده و یک توپ از آن خارج شود و رنگ آن طلایی باشد در این حالت احتمال اینکه هر دو توپ طلایی باشند چقدر است؟ شرح دهید.

حل: الف)

$$F\{(G,B),(B,G),(G,G)\}$$

$$E=\{(G,G)\}\qquad \Rightarrow P(E|F)=\frac{P(EF)}{P(F)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$$

ب)

$$H\{(G,B),(G,G)\}$$

$$E=\{(G,G)\}\qquad \Rightarrow P(E|H)=\frac{P(EF)}{P(H)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}}=\frac{1}{2}$$

در حالت ((ب))، رنگ یکی از توپها دقیقاً معلوم شده است ولی در حالت ((الف)) فقط می دانیم که حداقل یک توپ طلایی وجود دارد و رنگ هیچ توپی دقیقاً معلوم نیست.

۲۳- روش زیر را برای برآورد تعداد افراد بالای ۵۰ سال در یک شهر با جمعیت ۱۰۰۰۰۰ نفر بکار برده‌اند. ((همانگونه که در خیابان راه می روید درصد افرادی که از کنار شما عبور می کنند و بالا ۵۰ سال هستند را

یادداشت کنید و این عمل را چند روز تکرار کنید. آنگاه نسبت بدست آمده را در ۱۰۰۰۰۰ ضرب کنید، تا برآورد حاصل گردد)) نظر خود را درباره این روش ارائه دهید.

راهنمایی: فرض کنید p نسبت افرادی باشد که بالای ۵۰ سال هستند و در این شهر ساکنند بعلاوه فرض کنید α_1 نسبت زمانی باشد که یک فرد زیر ۵۰ سال از خیابان عبور می کند و α_2 همین نسبت برای افراد بالای ۵۰ سال باشد. چه کمیتی را روش مربوطه برآورد می کند؟ چه زمانی این کمیت تقریباً برابر p است؟

حل: اگر p نسبت افراد بالای ۵۰ سال و α_1 نسبت زمانی باشد که یک فرد زیر ۵۰ سال از خیابان عبور می کند، روش پیشنهادی برای برآورد، $100000\dfrac{\frac{p}{\alpha_2}}{\frac{p}{\alpha_2}+\frac{(1-p)}{\alpha_1}}$ را تخمین می زند که این مقدار زمانی با $100000p$ برابر می شود که $\alpha_1=\alpha_2$ باشد.

۲۴- تصور کنید که ۵ درصد مردان و ۰/۲۵ درصد از زنان بیماری کوررنگی دارند. اگر یک فرد کوررنگ را به تصادف انتخاب کنیم. احتمال اینکه این فرد مرد باشد چقدر است؟ فرض کنید تعداد مردها و زنها برابر باشند. اگر تعداد مردها دو برابر تعداد زنها باشد پاسخ چیست؟

حل: A پیشامد مرد بودن و B پیشامد کوررنگ بودن می باشد. توجه داشته باشید که اگر تعداد مردها و تعداد زنها برابر باشد:

$$P(\text{مرد})=P(\text{زن})=\frac{1}{2}$$

و اگر تعداد مردها دو برابر تعداد زنها باشد:

$$P(\text{مرد})=\frac{2}{3} \quad \text{و} \quad P(\text{زن})=\frac{1}{3}$$

با فرض $P(\text{مرد}\,|\,\text{کوررنگ})=0/05$ و $P(\text{زن}\,|\,\text{کوررنگ})=0/0025$ داریم:

الف) $$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B|A)\,P(A)+P(B|A^c)\,P(A^c)}=\frac{0/05\times\frac{1}{2}}{0/05\times\frac{1}{2}+0/0025\times\frac{1}{2}}=\frac{20}{21}$$

ب) $$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B|A)\,P(A)+P(B|A^c)\,P(A^c)}=\frac{0/05\times\frac{2}{3}}{0/05\times\frac{2}{3}+0/0025\times\frac{1}{3}}=\frac{40}{41}$$

۲۵- همه کارگران یک شرکت با خودرو به سرکار آمده و خودرو را در پارکینگ شرکت پارک می‌کنند. شرکت مایل است متوسط تعداد کارگرانی که در یک خودرو به محل کار می‌آیند را برآورد نماید. کدام یک از روشهای زیر می تواند برای تحقق این هدف مفید باشد؟ پاسخ خود را شرح دهید.

الف) بطور تصادفی n کارگر را انتخاب نموده و تعداد افرادی که با خودرو آنها آمده اند را تعیین و سپس متوسط این اعداد را محاسبه نمایید.

ب) بطور تصادفی n خودرو را در پارکینگ انتخاب نموده و تعداد افرادی که با این خودروها به محل کار آمده اند را شمارش و متوسط آنها را محاسبه نمایید.

حل: روش "ب" صحیح است. زیرا در روش "الف" به اشتباه وزن اتومبیلهایی که تعداد افراد بیشتری با آنها آمده اند را بیش از حد واقعی در نظرگرفته ایم.

فرض کنید که شما ۱۰ ماشین را بعنوان نمونه در نظر گرفته اید ($n=۱۰$). اگر در ۵ ماشین ۴ نفر و در ۵ ماشین ۲ نفر باشند، واضح است که متوسط تعداد افرادی که با هر ماشین آمده اند ۳ می‌باشد.

اگر مطابق روش "الف" از افراد همین ماشینها (۳۰ نفر) سؤال کنیم که چند نفر در ماشین شما بوده اند، مقدار تخمین بصورت زیر است:

$$\frac{۴+۴+\ldots+۴+۲+\ldots+۲}{۳۰}=\frac{۴\times۲۰+۲\times۱۰}{۳۰}=\frac{۱۰۰}{۳۰}=۳/\overline{۳}$$

(۲۰ نفر با ماشینهای ۴ نفره و ۱۰ نفر با ماشینهای ۲ نفره آمده‌اند).

ولی اگر مطابق روش "ب" برویم، مقدار تخمین بصورت زیر است:

$$\frac{۴+۴+۴+۴+۴+۲+۲+۲+۲+۲}{۱۰}=\frac{۳۰}{۱۰}=۳$$

روش "الف" متوسط تعداد هم سفرهای هر فرد را برآورد می کند (اگر خود فرد را هم بشماریم) درحالیکه روش "ب" متوسط تعداد افراد هر ماشین را برآورد می کند. (سؤال ۲۱ فصل ۲ را مطالعه کنید).

۲۶-*

۲۷- ۱۵ توپ تنیس در یک جعبه وجود داردکه ۹ تای آنها قبلاً استفاده شده است. سه توپ را به تصادف انتخاب نموده و با آنها بازی می کنیم و سپس به جعبه برمی گردانیم. مدتی بعد ۳ توپ دیگر را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه هیچ یک از این سه توپ قبلاً استفاده نشده باشد را بدست آورید.

حل: E : هیچ یک از سه توپ انتخابی در مرحله دوم، قبلاً انتخاب نشده باشند.

F_i: در مرحله اول i توپ تکرار ی وجود داشته باشد.

$$P(E)=\sum_{i=0}^{3} P(E|F_i)\,P(F_i)$$

$$=\frac{\binom{3}{3}\binom{12}{0}}{\binom{15}{3}}\frac{\binom{9}{0}\binom{6}{3}}{\binom{15}{3}}+\frac{\binom{4}{3}\binom{11}{0}}{\binom{15}{3}}\frac{\binom{9}{1}\binom{6}{2}}{\binom{15}{3}}+\frac{\binom{5}{3}\binom{10}{0}}{\binom{15}{3}}\frac{\binom{9}{2}\binom{6}{1}}{\binom{15}{3}}+\frac{\binom{6}{3}\binom{9}{0}}{\binom{15}{3}}\frac{\binom{9}{3}\binom{6}{0}}{\binom{15}{3}}$$

$$=\sum_{i=0}^{3}\frac{\binom{3+i}{3}\binom{9}{i}\binom{6}{3-i}}{\binom{15}{3}^2}$$

۲۸- دو جعبه را در نظر بگیرید که در یکی از آنها یک مهره سیاه و یک مهره سفید و در دیگری ۲ مهره سیاه و یک مهره سفید قرار دارد. یک جعبه را به تصادف انتخاب می کنیم و یک مهره را به تصادف از آن بیرون می آوریم. احتمال اینکه این مهره سیاه باشد را بدست آورید. اگر مهره انتخاب شده سفید باشد احتمال اینکه جعبه اول انتخاب شده باشد را بدست آورید.

حل: الف) $P(B)=P(B\,|\,\text{از ظرف ۱})\,P(\text{ظرف ۱})+P(B\,|\,\text{از ظرف ۲})\,P(\text{از ظرف ۲})$

$$\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{12}$$

ب) $P(\text{جعبه ۱}\,|\,\text{سفید})=P(A\mid B^c)=\dfrac{P(AB^c)}{P(B^c)}$

$$=\frac{P(B^c\mid A)P(A)}{P(B^c\mid A)P(A)+P(B^c\mid A^c)P(A^c)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right)}=\frac{3}{5}$$

۲۹- لغت ((سختی یا شدت)) را آمریکایی ها بصورت rigour و انگلیسی ها بصورت rigor می نویسند. مردی که در یک هتل اقامت دارد، این لغت را می نویسد. یکی از حروف آن را به تصادف انتخاب کرده و مشاهده می کنیم که حرف صدادار است. اگر ۴۰ درصد افراد ساکن در این هتل انگلیسی و ۶۰ درصد آمریکایی باشند، احتمال اینکه نویسنده لغت انگلیسی باشد را بدست آورید.

حل: $P(\text{انگلیسی}\,|\,\text{صدادار})=P(E\mid S)=\dfrac{P(ES)}{P(S)}$

$$=\frac{P(S \mid E)P(E)}{P(S \mid E)P(E)+P(S \mid E^c)P(E^c)}=\frac{\frac{۲}{۵}\times ۰/۴}{\left(\frac{۲}{۵}\times ۰/۴\right)+\left(\frac{۳}{۶}\times ۰/۶\right)}=\frac{۴۸}{۱۳۸}$$

۳۰- در مثال ۳-۶ فرض کنید شواهد جدید بستگی به تقسیر آن دارد و فقط ۹۰ درصد محتمل است که متهم این خصوصیت را داشته باشد. در این حالت احتمال اینکه متهم گناهکار باشد را بدست آورید. (همانند قبل فرض کنید که او این ویژگی را دارد).

حل:

$$P(\text{گناهکار} \mid \text{دارای ویژگی})=P(A \mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$
$$=\frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B \mid A)P(A)+P(B \mid A^c)P(A^c)}=\frac{۰/۹\times ۰/۶}{۰/۹\times ۰/۶+۰/۲\times ۰/۴}=\frac{۲۷}{۳۱}$$

۳۱- در یک کلاس احتمال با ۳۰ دانشجو، وضعیت درس بدین صورت است که ۱۵ نفر خوب، ۱۰ نفر متوسط و ۵ نفر ضعیف هستند. در یک کلاس احتمال دیگر که آن هم ۳۰ دانشجو دارد، ۵ نفر خوب، ۱۰ نفر متوسط و ۱۵ نفر ضعیف هستند. شما (بعنوان یک کارشناس) از اعداد فوق اطلاع دارید ولی نمی دانید که کدام کلاس چنین وضعیت هایی را دارند. اگر یک دانشجو را به تصادف از هر کلاس انتخاب و آزمایش ساده نموده و مشاهده کنید که دانشجوی انتخابی از کلاس A متوسط و دانشجوی انتخابی از کلاس B ضعیف است. احتمال اینکه کلاس A کلاس برتر باشد چقدر است؟

حل:

$$P(\text{برتر } A \mid \text{ضعیف } B \text{ و متوسط } A)=P(A \mid BC)=\frac{P(A\cap BC)}{P(BC)}$$
$$=\frac{P(BC\mid A)P(A)}{P(BC\mid A)P(A)+P(BC\mid A^c)P(A^c)}=\frac{\left(\frac{۱۰}{۳۰}\times\frac{۱۵}{۳۰}\right)\times\frac{۱}{۲}}{\left(\frac{۱۰}{۳۰}\times\frac{۱۵}{۳۰}\right)\times\frac{۱}{۲}+\left(\frac{۱۰}{۳۰}\times\frac{۵}{۳۰}\right)\times\frac{۱}{۲}}=\frac{۳}{۴}$$

۳۲- فروشگاه های A، B و C به ترتیب ۵۰، ۷۵ و ۱۰۰ نفر کارمند دارند از این کارمندان به ترتیب ۵۰٪، ۶۰٪ و ۷۰٪ زن هستند. اگر امکان استعفا بین کارمندان یکسان باشد و یک کارمند زن استعفا دهد، با چه احتمالی وی کارمند فروشگاه C است؟

حل:

$$P(\text{کارمند C}|\text{استعفای زن}) = P(C \mid Z)$$

$$= \frac{P(Z|C)P(C)}{P(Z|C)P(C)+P(Z|B)P(B)+P(Z|A)P(A)}$$

$$= \frac{۰/۷ \times \frac{۱۰۰}{۲۲۵}}{\left(۰/۷\times\frac{۱۰۰}{۲۲۵}\right)+\left(۰/۶\times\frac{۷۵}{۲۲۵}\right)+\left(۰/۵\times\frac{۵۰}{۲۲۵}\right)} = \frac{۱}{۲}$$

۳۳- الف) فردی در جیب خود یک سکه سالم و یک سکه که دو طرفش شیر است نگه می دارد. او یکی از سکه ها را به تصادف انتخاب و آن را پرتاب می کند، اگر شیر ظاهر شود با چه احتمالی سکه سالم انتخاب شده است؟

ب) فرض کنید وی همان سکه را یک مرتبه دیگر پرتاب کند و دوباره شیر ظاهر شود، حال احتمال اینکه این سکه سالم باشد چقدر است؟

حل: الف)

$$P(\text{سکه سالم}|\text{شیر بیاید}) = P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B \mid A)P(A)+P(B \mid A^c)P(A^c)} = \frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}}{\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\right)+\left(۱\times\frac{۱}{۲}\right)} = \frac{۱}{۳}$$

ب)

$$P(\text{سکه سالم}|\text{دوبار شیر}) = P(A \mid C) = \frac{P(AC)}{P(C)}$$

$$= \frac{P(C \mid A)P(A)}{P(C \mid A)P(A)+P(C \mid A^c)P(A^c)} = \frac{\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}}{\left(\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}\right)+\left(۱\times\frac{۱}{۲}\right)} = \frac{۱}{۵}$$

۳۴-*

۳۵- در مثال۳-۱ احتمال اینکه فردی در سال دوم یک تصادف داشته باشد بشرط اینکه در سال اول، هیچ تصادفی نداشته است را بدست آورید.

حل:

$$P(\text{سال دوم تصادف کند}|\text{سال اول تصادف نکند}) =$$

$$P(A_۲ \mid A_۱^c) = P(A_۲ \mid E\cap A_۱^c)P(E \mid A_۱^c)+P(A_۲ \mid E^c\cap A_۱^c)P(E^c \mid A_۱^c)$$

$$=۰/۴\times\frac{۰/۶\times۰/۳}{(۰/۶\times۰/۳)+(۰/۸\times۰/۷)}+۰/۲\times\frac{۰/۸\times۰/۷}{(۰/۸\times۰/۷)+(۰/۶\times۰/۳)}$$
$$=\frac{۴۶}{۱۸۵}=۰/۲۴۸$$

۳۶- یک نمونه ۳ تایی انتخاب شده بصورت زیر را در نظر بگیرید: از ظرفی که ۵ توپ سفید و ۷ توپ قرمز دارد در هر مرحله یک توپ به تصادف انتخاب نموده و رنگ آن را یادداشت و آن را همراه با یک توپ از همان رنگ به ظرف بازمی گردانیم. احتمال اینکه نمونه، شامل i توپ سفید باشد را بدست آورید.$(i=۰،۱،۲،۳)$

حل:

$$P(i=۰)=\frac{۷}{۱۲}\times\frac{۸}{۱۳}\times\frac{۹}{۱۴}=\binom{۳}{۰}\frac{۷}{۱۲}\times\frac{۸}{۱۳}\times\frac{۹}{۱۴}=\frac{۳}{۱۳}$$
$$P(i=۱)=\frac{۵}{۱۲}\times\frac{۷}{۱۳}\times\frac{۸}{۱۴}+\frac{۷}{۱۲}\times\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۸}{۱۴}+\frac{۷}{۱۲}\times\frac{۸}{۱۳}\times\frac{۵}{۱۴}=\binom{۳}{۱}\frac{۷}{۱۲}\times\frac{۸}{۱۳}\times\frac{۵}{۱۴}=\frac{۵}{۱۳}$$
$$P(i=۲)=\frac{۵}{۱۲}\times\frac{۶}{۱۳}\times\frac{۷}{۱۴}+\frac{۵}{۱۲}\times\frac{۷}{۱۳}\times\frac{۶}{۱۴}+\frac{۷}{۱۲}\times\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۶}{۱۴}=\binom{۳}{۲}\frac{۷}{۱۲}\times\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۶}{۱۴}=\frac{۱۵}{۵۲}$$
$$P(i=۳)=\frac{۵}{۱۲}\times\frac{۶}{۱۳}\times\frac{۷}{۱۴}=\binom{۳}{۳}\frac{۵}{۱۲}\times\frac{۶}{۱۳}\times\frac{۷}{۱۴}=\frac{۵}{۵۲}$$

۳۷-*

۳۸- سه آشپز A ، B و C هر کدام کیک خاصی را تهیه می کنند که با احتمالهای ۰/۰۲، ۰/۰۳و۰/۰۵ کیک آنها هنگام پخت خراب می شود. اگر در رستورانی که آنها کار می کنند، آشپز A ۵۰ درصد، آشپز B۳۰ درصد و آشپزC۲۰ درصد از کیک ها را پخت کنند، چه نسبتی از کیک های خراب توسط آشپز A تهیه می شود.

حل:

$$P(\text{A آشپز}|\text{کیک خراب})=P(A|E)=\frac{P(E\cap A)}{P(E)}$$
$$=\frac{P(E|A)P(A)}{P(E|A)P(A)+P(E|B)P(B)+P(E|C)P(C)}$$
$$=\frac{۰/۰۲\times۰/۵}{(۰/۰۲\times۰/۵)+(۰/۰۳\times۰/۳)+(۰/۰۵\times۰/۲)}=\frac{۱۰}{۲۹}=۰/۳۴۴۸$$

۳۹- در جعبه ای ۳ سکه وجود دارد که یکی از آنها هر دو طرف شیر دیگری یک سکه سالم و سومی سکه ای اریب است که هنگام پرتاب با احتمال ۰/۷۵ شیر ظاهر می شود. وقتی که یکی از سکه ها را به

تصادف انتخاب کرده و پرتاب می کنیم، شیر ظاهر می شود. احتمال اینکه سکه دو طرف شیر انتخاب شده باشد چقدر است؟

حل:

$$P(\text{دو طرف شیر} | \text{شیر بیاید}) = P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|C)P(C)+P(B|D)P(D)}$$

$$= \frac{1\times\frac{1}{3}}{\left(1\times\frac{1}{3}\right)+\left(0/5\times\frac{1}{3}\right)+\left(0/75\times\frac{1}{3}\right)} = \frac{4}{9}$$

۴۰- زندانبانی به سه نفر زندانی اطلاع داده است که یکی از آنها را به تصادف برای اعدام کردن انتخاب کرده اند و دو نفر دیگر آزاد می شوند. زندانی A از زندانبان می خواهد که بطور خصوصی به او بگوید که کدامیک از دو نفر B و C آزاد می شوند و ادعا می کند که این اطلاع هیچگونه مشکلی را برای زندانبان بوجود نمی آورد زیرا حداقل یکی از دو نفر B و C آزاد خواهند شد. زندانبان تقاضای زندانی A را رد می کند و برای خود چنین دلیل می آورد که اگر A بداند که کدامیک از دو نفر B و C آزاد می‌شوند آنگاه شانس اعدام شدن خودش از $\frac{1}{3}$ به $\frac{1}{2}$ افزایش می یابد. زیرا وی یکی از دو نفر زندانی باقیمانده است. در مورد دلیل زندانبان چه نظری دارید؟

حل: نظر زندانبان درست نیست، زیرا از آنجا که هر نفر با احتمال $\frac{1}{3}$ اعدام می شود، شخص A با احتمال $\frac{1}{3}$ اعدام می شود و با احتمال $\frac{2}{3}$ هم دقیقاً یکی از دو نفر C و B اعدام می شود. حال اگر زندانبان به شخص A بگوید که کدامیک از افراد C و B آزاد می شوند، باز هم احتمال اعدام شدن شخص A همان $\frac{1}{3}$ است و فقط احتمال اعدام شدن شخص دیگری که باقی مانده از $\frac{1}{3}$ به $\frac{2}{3}$ افزایش می یابد. ولی توجه داشته باشید که اگر زندانبان از بین هر سه نفر (نه از دو نفر) یکی را مشخص کرد و گفت که او آزاد می‌شود، احتمال اعدام شدن هر یک از دو نفر دیگر $\frac{1}{2}$ می شود.

اثبات از طریق قانون بیز: فرض کنید A، B و C به ترتیب پیشامدهای اعدام شدن افراد A، B و C باشند و E این پیشامد باشد که زندانبان به شخص A بگوید مثلا شخص B آزاد می شود، آنگاه:

$$P(A|E) = \frac{P(E|A)P(A)}{P(E|A)P(A)+P(E|B)P(B)+P(E|C)P(C)}$$

$$=\frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}+۰\times\frac{۱}{۳}+۱\times\frac{۱}{۳}}=\frac{۱}{۳}$$

۴۱- فرض کنید ۱۰ سکه داریم که اگرسکه i ام را پرتاب کنیم با احتمال $\frac{i}{۱۰}$ $(i=۱,...,۱۰)$ شیر ظاهر می‌شود. وقتی که یکی از سکه ها را به تصادف انتخاب کرده و آن را پرتاب می کنیم شیر ظاهر می شود. احتمال شرطی اینکه این سکه، پنجمین سکه باشد را بدست آورید.

حل:

$$P(\text{پنجمین سکه}|\text{شیر بیاید})=P(A_۵\mid H)=\frac{P(A_۵\cap H)}{P(H)}$$

$$=\frac{P(H|A_۵)P(A_۵)}{P(H|A_۱)P(A_۱)+P(H|A_۲)P(A_۲)+\cdots+P(H|A_{۱۰})P(A_{۱۰})}$$

$$=\frac{\frac{۵}{۱۰}\times\frac{۱}{۱۰}}{\left(\frac{۱}{۱۰}\times\frac{۱}{۱۰}\right)+\left(\frac{۲}{۱۰}\times\frac{۱}{۱۰}\right)+\cdots+\left(\frac{۱۰}{۱۰}\times\frac{۱}{۱۰}\right)}=\frac{۵}{۱+۲+\cdots+۱۰}=\frac{۱}{۱۱}$$

۴۲- احتمال اینکه یک راننده مرد بیمه شده در یک سال ادعای خسارت نماید برابر با p_m و همچنین این احتمال برای یک راننده زن بیمه شده برابر با p_f است $(p_m\neq p_f)$. نسبت مردان راننده بیمه شده برابر با α است $(۰<\alpha<۱)$. اگر یک راننده بیمه شده به تصادف انتخاب شود و A_i را پیشامد اینکه وی در سال i ام ادعای خسارت نماید در نظر بگیریم. نشان دهید که

$$P(A_۲|A_۱)>P(A_۱)$$

شرح دهید که چرا نامساوی فوق صحیح است.

حل:

$$P(A_۱)=P_m\alpha+P_f(۱-\alpha)$$

از تابع احتمال استفاده می‌کنیم:

$$P(A_۲|A_۱)=P_m\frac{P_m\alpha}{P_m\alpha+P_f(۱-\alpha)}+P_f\frac{P_f(۱-\alpha)}{P_m\alpha+P_f(۱-\alpha)}$$

$$=\frac{P^۲{}_m\alpha+P^۲{}_f(۱-\alpha)}{P_m\alpha+P_f(۱-\alpha)}$$

$$P(A_۲|A_۱)\overset{?}{>}P(A_۱)$$

$$\frac{P(A_۲|A_۱)}{P(A_۱)}\overset{?}{>}۱\Rightarrow\frac{P^۲{}_m\alpha+P^۲{}_f(۱-\alpha)}{(P_m\alpha+P_f(۱-\alpha))^۲}\overset{?}{>}۱\Rightarrow P^۲{}_m\alpha+P^۲{}_f(۱-\alpha)\overset{?}{>}(P_m\alpha+P_f(۱-\alpha))^۲$$

$$A = P_m^2 \alpha + P_f^2 (1-\alpha) - P_m^2 \alpha^2 - P_f^2 (1-\alpha)^2 - 2\alpha(1-\alpha) P_m P_f \overset{?}{>} 0$$

$$A = \alpha(1-\alpha)[P_m^2 + P_f^2 - 2P_m P_f] = \alpha(1-\alpha)(P_m - P_f)^2$$

چون مقدار α در فاصله (۰،۱) است، مقدار A همواره مثبت است و در نتیجه $P(A_2|A_1) > P(A_1)$.
واضح است که در فضای افرادیکه سال گذشته ادعای خسارت کرده اند (تصادف کرده اند) احتمال تصادف و ادعای خسارت مجدد بیشتر است (این افراد با احتمال بیشتری تصادف می کنند).

۴۳- ظرفی شامل ۵ توپ سفید و ۱۰ توپ سیاه است. یک تاس را پرتاب و به تعداد عدد ظاهر شده از ظرف توپ انتخاب می کنیم. احتمال اینکه همه توپهای انتخاب شده سفید باشند چقدر است؟ احتمال شرطی اینکه نتیجه پرتاب تاس عدد ۳ بوده، بشرط اینکه همه توپهای انتخاب شده سفید باشند را بدست آورید.

حل: الف)

P(همه توپها سفید باشد) = P(همه سفید | تاس ۱ بیاید) P(تاس ۱ بیاید) + P(همه سفید | تاس ۲ بیاید) P(تاس ۲ بیاید) + ... + P(همه سفید | تاس ۶) P(تاس ۶)

$$= P(E \mid A_1)P(A_1) + P(E \mid A_2)P(A_2) + \cdots + P(E \mid A_6)P(A_6)$$

$$= \frac{1}{6} \times \left[\frac{\binom{5}{1}\binom{10}{0}}{\binom{15}{1}} + \frac{\binom{5}{2}\binom{10}{0}}{\binom{15}{2}} + \cdots + \frac{\binom{5}{5}\binom{10}{0}}{\binom{15}{5}} + 0 \right] = \frac{5}{66} \cong 0/075$$

ب) با توجه به الف

P(تاس ۳ بیاید | همه توپها سفید) $= P(A_3 \mid E) = \dfrac{P(A_3 \cap E)}{P(E)}$

$$= \frac{P(E|A_3)P(A_3)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{\binom{5}{3}\binom{10}{0}}{\binom{15}{3}}}{\frac{5}{66}} = \frac{22}{455} = 0/048$$

۴۴- دو کمد یکسان هر کدام دارای دو کشو هستند. در هر یک از کشوهای کمد A یک سکه نقره وجود دارد، اما در یکی از کشوهای کمد B یک سکه طلا و در کشوی دیگر آن یک سکه نقره است. یکی از

کمدها را به تصادف انتخاب نموده یکی از کشوهای آن را باز می کنیم و یک سکه نقره بدست می‌آوریم. احتمال اینکه در کشوی دیگر این کمد یک سکه نقره باشد چقدر است؟

حل: P(در کشوی ۲ نقره | در کشوی ۱ نقره) = P(A کمد | در کشوی ۱ نقره)

$$=P(A\mid E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{P(E\mid A)P(A)}{P(E\mid A)P(A)+P(E\mid B)P(B)}$$

$$=\frac{1\times\frac{1}{2}}{\left(1\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}$$

۴۵- فرض کنید آزمایش مبتلا به بیماری سرطان برای کسانی که بیماری را دارند و کسانی که سالم هستند دارای دقت ۰/۹۵ باشد. اگر ۰/۴ درصد از افراد جامعه دارای بیماری سرطان باشند، مطلوب است احتمال اینکه فردی که مورد آزمایش قرار گرفته دارای بیماری سرطان باشد بشرط اینکه نتیجه آزمایش مثبت باشد.

حل:

P(سرطان دارد | نتیجه مثبت) $=P(E\mid F)=\dfrac{P(E\cap F)}{P(F)}$

$$=\frac{P(F\mid E)\,P(E)}{P(F\mid E)\,P(E)+P(F\mid E^{c})\,P(E^{c})}$$

$$=\frac{0/95\times 0/004}{(0/95\times 0/004)+(0/05\times 0/996)}=\frac{0/0038}{0/0536}=\frac{19}{268}$$

۴۶- تصور کنید که یک موسسه بیمه افراد جامعه را به سه گروه افراد با ریسک بالا افراد با ریسک متوسط و افراد با ریسک پایین تقسیم بندی نموده و اطلاعات وی نشان می دهد که احتمال تصادف کردن این گروه ها در طول یکسان به ترتیب ۰/۰۵، ۰/۱۵ و ۰/۳۰ است. اگر ۲۰ درصد افراد جامعه ریسک بالا، ۵۰ درصد ریسک متوسط و ۳۰ درصد ریسک پایین باشند. چه نسبتی از افراد جامعه در یکسال تصادف دارند؟ اگر فرد بیمه شده A در یک سال تصادف نداشته باشد، احتمال اینکه وی از گروه با ریسک متوسط باشد را بدست آورید.

حل: الف) P(تصادف)=P(تصادف | ریسک بالا) P(ریسک بالا)+P(تصادف | ریسک متوسط) × P(ریسک متوسط)+P(تصادف | ریسک پایین) P(ریسک پایین)

$=۰/۰۵\times۰/۲+۰/۱۵\times۰/۵+۰/۳۰\times۰/۳=۰/۱۷۵$

البته صورت سؤال کمی اشکال دارد، چرا که احتمال تصادف برای ریسک بالا کمتر از ریسک پایین داده شده است؛ ولی با توجه به داده ها، حل چنین است.

ب) P(ریسک متوسط | تصادف نکرده) $=P(B|E)=\dfrac{P(B\cap E)}{P(E)}$

$=\dfrac{P(E|B)P(B)}{۱-۰/۱۷۵}=\dfrac{۰/۸۵\times۰/۵}{۰/۸۲۵}=\dfrac{۴۲۵}{۸۲۵}=\dfrac{۱۷}{۳۳}$

۴۷- کارمندی از مدیر خود تقاضای یک توصیه نامه برای استخدام در یک شغل جدید می نماید. او برآورد می کند که اگر توصیه نامه قوی باشد با شانس ۸۰ درصد استخدام خواهد شد و اگر توصیه نامه خوب باشد با شانس ۴۰ درصد و درصورت دریافت توصیه نامه ضعیف تنها ۱۰ درصد شانس استخدام دارد. همچنین احتمال دریافت توصیه نامه قوی، خوب و ضعیف را به ترتیب ۰/۷ ، ۰/۲ و ۰/۱ برآورد می کند.

الف) چقدر اطمینان دارد که او در شغل جدید استخدام می شود؟

ب) اگر با استخدام او موافقت شود با چه احتمالی توصیه نامه داده شده برای او قوی، خوب و ضعیف بوده است؟

ج) اگر با استخدام او موافقت نشود با چه احتمالی توصیه نامه داده شده برای او، قوی، خوب و ضعیف بوده است؟

حل: A : در شغل جدید استخدام شود.

E : توصیه نامه عالی

G : توصیه نامه خوب

W : توصیه نامه ضعیف

الف) $P(A)=P(A|E)P(E)+P(A|G)P(G)+P(A|W)P(W)$

$=۰/۸\times۰/۷+۰/۴\times۰/۲+۰/۱\times۰/۱=۰/۶۵$

ب) $P(E|A)=\dfrac{P(A|E)P(E)}{P(A)}=\dfrac{۰/۸\times۰/۷}{۰/۶۵}=\dfrac{۵۶}{۶۵}$

$$P(G|A)=\frac{P(A|G)P(G)}{P(A)}=\frac{۰/۴\times۰/۲}{۰/۶۵}=\frac{۸}{۶۵}$$

$$P(W|A)=\frac{P(A|W)P(W)}{P(A)}=\frac{۰/۱\times۰/۱}{۰/۶۵}=\frac{۱}{۶۵}$$

ج)

$$P(A^c)=۱-۰/۶۵=۰/۳۵$$

یا

$$P(A^c)=۰/۲\times۰/۷+۰/۶\times۰/۲+۰/۹\times۰/۱=۰/۳۵$$

$$P(E|A^c)=\frac{P(A^c|E)P(E)}{P(A^c)}=\frac{۰/۲\times۰/۷}{۰/۳۵}=\frac{۱۴}{۳۵}$$

$$P(G|A^c)=\frac{P(A^c|G)P(G)}{P(A^c)}=\frac{۰/۶\times۰/۲}{۰/۳۵}=\frac{۱۲}{۳۵}$$

$$P(W|A^c)=\frac{P(A^c|W)P(W)}{P(A^c)}=\frac{۰/۹\times۰/۱}{۰/۳۵}=\frac{۹}{۳۵}$$

۴۸- یک دانش آموز بی صبرانه منتظر دریافت نامه ای است که نتیجه پذیرفته شدن او در دانشگاه را نشان می‌دهد. او برآورد میکند که احتمالهای شرطی دریافت نامه در روزهای هفته به شرط پذیرش و عدم پذیرش به شرح زیر باشد.

روز	P(پذیرش | نامه)	P(عدم پذیرش | نامه)
دوشنبه	۰/۱۵	۰/۰۵
سه شنبه	۰/۲۰	۰/۱۰
چهارشنبه	۰/۲۵	۰/۱۰
پنج شنبه	۰/۱۵	۰/۱۵
جمعه	۰/۱۰	۰/۲۰

او همچنین شانس پذیرش خود را ۰/۶ تخمین زده است.

الف) با چه احتمالی نامه را روز دوشنبه دریافت می کند؟

ب) احتمال اینکه وی نامه را روز سه شنبه دریافت کند به شرط اینکه دوشنبه دریافت نکرده باشد چقدر است؟

ج) اگر تا چهارشنبه نامه را دریافت نکند، احتمال شرطی اینکه وی پذیرش شود را بدست آورید؟

د) اگر نامه را روز پنج شنبه دریافت نماید با چه احتمالی پذیرش شده است؟

ه) احتمال شرطی پذیرش او درصورت دریافت نکردن نامه درآن هفته چقدر است؟

حل: با توجه به اطلاعات موجود در مسأله، جدول زیر را می توان تهیه نمود.

پیشامد	P(پذیرش ∩ پیشامد)	P(عدم پذیرش ∩ پیشامد)
دریافت دوشنبه	۰/۱۵ × ۰/۶	۰/۰۵ × ۰/۴
دریافت سه شنبه	۰/۲۰ × ۰/۶	۰/۱۰ × ۰/۴
دریافت چهارشنبه	۰/۲۵ × ۰/۶	۰/۱۰ × ۰/۴
دریافت پنج شنبه	۰/۱۵ × ۰/۶	۰/۱۵ × ۰/۴
دریافت جمعه	۰/۱۰ × ۰/۶	۰/۲ × ۰/۴
عدم دریافت	۰/۱۵ × ۰/۶	۰/۴ × ۰/۴

الف) $P(\text{دریافت دوشنبه}) = P(A_۲)=۰/۱۵\times۰/۶+۰/۰۵\times۰/۴=۰/۱۱$

ب)
$$P(A_۳|A_۲^c)=\frac{P(A_۳\cap A_۲^c)}{P(A_۲^c)}=\frac{P(A_۳)}{P(A_۲^c)}$$
$$=\frac{۰/۲\times۰/۶+۰/۱\times۰/۴}{۱-۰/۱۱}=\frac{۱۶}{۸۹}$$

(توجه کنید که : $A_۳\subset A_۲^c$)

ج)
$$P\,(\text{پذیرش}\,|\,(A_۲\cup A_۳\cup A_۴)^c)=\frac{P(E\cap(A_۲\cup A_۳\cup A_۴)^c)}{P(A_۲\cup A_۳\cup A_۴)^c}$$
$$=\frac{(۰/۱۵+۰/۱+۰/۱۵)۰/۶}{(۰/۱۵+۰/۱+۰/۱۵)۰/۶+(۰/۱۵+۰/۲+۰/۴)\times۰/۴}=\frac{۲۴}{۵۴}=\frac{۱۲}{۲۷}$$

د)
$$P\,(\text{پذیرش}\,|\,\text{پنج شنبه})=P(E|A_۵)=\frac{P(E\cap A_۵)}{P(A_۵)}=\frac{۰/۱۵\times۰/۶}{۰/۱۵\times۰/۶+۰/۱۵\times۰/۴}=\frac{۹}{۱۵}=\frac{۳}{۵}$$

ه)
$$P\,(\text{پذیرش}|\text{دریافت نکردن})=P(E|A_۰)=\frac{P(E\cap A_۰)}{P(A_۰)}=\frac{۰/۱۵\times۰/۶}{۰/۱۵\times۰/۶+۰/۴\times۰/۴}=\frac{۹}{۲۵}$$

۴۹- یک سیستم موازی کار می کند اگر حداقل یکی از اجزای تشکیل دهنده آن سیستم کار کند. یک سیستم موازی تشکیل شده از n جزء را که احتمال کار کردن هر جزء مستقل از یکدیگر ۰/۵ باشد در نظر می گیریم. احتمال شرطی اینکه جزء ۱ کار کند به شرط اینکه سیستم کار کند را بدست آورید.

حل: A_i: جزء i ام کار کند.

$$P(A_۱|A_۱\cup A_۲\cup\ldots\cup A_n)=\frac{P(A_۱\cap(A_۱\cup A_۲\cup\ldots\cup A_n))}{P(A_۱\cup A_۲\cup\ldots\cup A_n)}$$

$$=\frac{P(A_1)}{P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)}=\frac{0/5}{1-0/5^n}$$

۵۰- اگر لازم باشد یک مدل ریاضی برای پیشامدهای E و F به ترتیبی که در حالت های زیر شرح داده شده اند، بسازید. آیا فرض مستقل بودن آنها را در نظر می گیرید؟ دلیل خود را شرح دهید.

الف) E ، پیشامدی است که یک زن پیشه ور دارای چشمان آبی باشد و F پیشامدی است که منشی او نیز چنین باشد.

ب) E ،پیشامدی است که یک معلم دارای اتومبیل باشد و F پیشامدی است که نام وی در دفتر تلفن باشد.

ج) E ،پیشامدی است که قد یک مرد کمتر از ۶ فوت باشد و F پیشامدی است که وزن او بیش از ۲۰۰ پوند باشد.

د) E ،پیشامدی است که یک زن در آمریکا زندگی می کند و F پیشامدی است که او در نیمکره غربی زندگی می کند.

ه) E ،پیشامدی است که فردا باران خواهد آمد و F پیشامدی است که پس فردا بارانی باشد.

حل: الف) بله

ب)خیر. به نظر می آید کسی که اتومبیل دارد توانایی مالی برای خرید تلفن هم دارد.

ج) خیر. قد و وزن با هم ارتباط دارند.

د) خیر. E زیر مجموعه F است.

ه) خیر. بارانی بودن پس فردا به بارانی بودن فردا بستگی دارد.

۵۱- در یک کلاس ۴ دانشجوی پسر سال اول، ۶ دانشجوی دختر سال اول و ۶ دانشجوی پسر سال دوم ثبت نام کرده اند. چند دانشجوی دختر سال دوم بایستی در این کلاس ثبت نام کنند تا در صورت انتخاب یک دانشجو به تصادف، پیشامدهای جنس و سال تحصیلی مستقل باشند؟

حل: بعنوان مثال باید:

$P(\text{سال اول} \cap \text{پسر})=P(\text{سال اول})\,P(\text{پسر})$

$$\Rightarrow \frac{4}{16+n}=\frac{10}{16+n}\times\frac{10}{16+n} \Rightarrow 4(16+n)=100 \Rightarrow n=9$$

البته برای این سؤال ۳ رابطه دیگر هم باید بررسی شود که با برقراری این رابطه آنها هم خودبخود برقرار می شوند. زیرا:

$P(E\cap F)=P(E)\times P(F) \Rightarrow P(E\cap F^c)=P(E)\times P(F^c)$

۵۲- فرض کنید که شما بطور پیوسته تمبر جمع می کنید و کلاً m نوع تمبر وجود داشته باشد. همچنین فرض کنید که هر مرتبه که یک تمبر جدید خریداری می کنید با احتمال P_i از نوع i ام$(i=۱,۲,...,m)$ است. حال اگر شما n امین تمبر را جمع آوری کرده باشید با چه احتمالی این تمبر جدید است؟

راهنمایی: پیشامد را روی نوع تمبر مشروط کنید.

حل: روی نوع تمبر n ام مشروط می کنیم.

$$P(n\text{امین تمبر جدید})=P(\text{جدید}|\text{نوع}۱)P(\text{نوع}۱)$$
$$+P(\text{جدید}|\text{نوع}۲)P(\text{نوع}۲)+...+P(\text{جدید}|\text{نوع}m)P(\text{نوع}m)$$
$$=(۱-p_۱)^{n-۱}p_۱+(۱-p_۲)^{n-۱}p_۲+\ldots+(۱-p_m)^{n-۱}p_m$$
$$=\sum_{i=۱}^{m}(۱-p_i)^{n-۱}p_i$$

توجه کنید که برای n امین تمبر، $P(\text{جدید}\mid\text{نوع}۱)$ یعنی اینکه تمام $(n-۱)$ تمبر قبلی، از نوع ۱ نبوده باشند؛ یعنی $(۱-p_۱)^{n-۱}$.

۵۳- یک مدل ساده برای تغییرات نرخ سهام بازار بورس بدین ترتیب است که در هر روز، نرخ سهام یک واحد با احتمال p افزایش و با احتمال $(۱-p)$ کاهش می یابد. همچنین تغییرات در روزهای مختلف مستقلند.

الف) احتمال اینکه بعد از دو روز نرخ سهام همان قیمت اولیه باشد چقدر است؟

ب) احتمال اینکه بعد از ۳ روز نرخ سهام به اندازه ۱ واحد افزایش یافته باشد چقدر است؟

ج) به شرط اینکه بعد از ۳ روز نرخ سهام یک واحد افزایش یافته باشد با چه احتمالی در اولین روز یک واحد افزایش داشته است؟

حل: الف)
$$P(\text{قیمت ثابت})=p(۱-p)+(۱-p)p=\binom{۲}{۱}p(۱-p)$$

ب)
$$P(\text{یک واحد افزایش در سه روز})=\binom{۳}{۲}p^۲(۱-p)$$

ج)
$$P(\text{در اولین روز افزایش}|\text{بعد از سه روز، یک واحد افزایش})$$
$$=P(E|F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}=\frac{P(F|E)P(E)}{P(F|E)P(E)+P(F|E^c)P(E^c)}$$

$$=\frac{\left[\binom{2}{1}p(1-p)\right]\times p}{\left[\binom{2}{1}p(1-p)\right]\times p+\left[\binom{2}{2}p^{2}\right]\times(1-p)}=\frac{2p^{2}(1-p)}{(2+1)\,p^{2}(1-p)}=\frac{2}{3}$$

۵۴- فرض کنید می خواهیم نتیجه حاصل از پرتاب یک سکه سالم را تعیین نماییم ولی سکه ای که در اختیار داریم سالم نیست. بطوریکه احتمال شیر آمدن آن یک مقدار مجهول p که لزوماً ۰/۵ نیست می‌باشد. برای تأمین هدف خود آزمایشی با مراحل زیر را در نظر می گیریم:

۱- سکه را پرتاب می کنیم.

۲- سکه را یک بار دیگر پرتاب می کنیم.

۳- اگر هر دو مرتبه خط ظاهر شود به مرحله ۱ باز می گردیم.

۴- نتیجه آزمایش را نتیجه آخرین پرتاب در نظر می گیریم.

الف) نشان دهید که نتیجه شیر و خط آمدن برابر است.

ب) آیا می توانیم آزمایش ساده تر "پرتاب سکه تا آمدن دو نتیجه متفاوت متوالی" را به کار ببریم و نتیجه آخرین پرتاب را در نظر بگیریم؟

حل: مرحله ۳ سوال به این صورت اصلاح شود "اگر هر دو مرحله خط ظاهر شود یا هر دو مرتبه شیر ظاهر شود به مرحله ۱ بروید".

الف)
$$P(\text{شیر})=(1-p)p+[p^{2}+(1-p)^{2}](1-p)p+[p^{2}+(1-p)^{2}]^{2}(1-p)p+\ldots$$

$$=\frac{(1-p)p}{1-(p^{2}+(1-p)^{2})}=\frac{(1-p)p}{2p(1-p)}=\frac{1}{2}$$

$$P(\text{خط})=p(1-p)+[p^{2}+(1-p)^{2}]p(1-p)+[p^{2}+(1-p)^{2}]^{2}p(1-p)+\ldots$$

$$=\frac{p(1-p)}{1-(p^{2}+(1-p)^{2})}=\frac{p(1-p)}{2p(1-p)}=\frac{1}{2}$$

ب) در روش پیشنهاد شده احتمال شیر معادل است با "احتمال آمدن ۲ شیر متوالی قبل از ۲ خط متوالی" که برابر است با:

$$\frac{p^{2-1}(1-(1-p)^{2})}{p^{2-1}+(1-p)^{2-1}-p^{2-1}(1-p)^{2-1}}=\frac{p(2p-p^{2})}{p+(1-p)-p(1-p)}=\frac{p^{2}(2-p)}{1-p+p^{2}}$$

مشاهده می شود که این مقدار لزوماً با $\frac{1}{2}$ برابر نیست (رابطه بالا از فرمول صفحه ۹۹ کتاب مبانی احتمال آورده شده است).

۵۵- پرتابهای مستقل سکه ای را که احتمال شیر آمدن آن p است انجام می دهیم. احتمال اینکه ۴ نتیجه اول پرتابها بصورت زیر باشد را محاسبه کنید:

الف) H,H,H,H

ب) T,H,H,H

ج) احتمال اینکه دنباله T,H,H,H قبل از H,H,H,H ظاهر شود چقدر است؟

راهنمایی: برای بند (ج) چگونه می تواند دنباله H,H,H,H ابتدا ظاهر شود.

حل: الف) $P(H,H,H,H)=p^4$

ب) $P(T,H,H,H)=(1-p)p^3$

ج) پیشامدی که احتمال آن خواسته شده را A می نامیم. حال ابتدا احتمال A^c را بدست می آوریم که برای محاسبه آن روی نتیجه ۴ آزمایش اول افراز می کنیم.

$$P(A^c)=P(A^c|HHHH)P(HHHH)+P(A^c|(HHHH)^c)P((HHHH)^c)$$

$$=1\times p^4+0\times(1-p^4)=p^4 \Rightarrow P(A)=1-p^4$$

واضح است که اگر نتیجه ۴ آزمایش اول شیر باشد، پیشامد A^c رخ داده است ولی اگر نتیجه یکی از این ۴ آزمایش خط باشد دیگر امکان وقوع پیشامدآن وجود نخواهد داشت. بعبارتی دیگر امکان نداردکه نتیجه HHHH قبل از THHH رخ دهد. زیرا هر زمانی که ۴ شیر پشت سر هم رخ داده باشد حتماً یک خط قبل از آنها رخ داده و در نتیجه حتماً قبل از آن یک پیشامد THHH رخ داده است.

برای فهم بهتر نتیجه روبرو را برای خود تحلیل کنید. $HT\underbrace{HHHH}$

۵۶- رنگ چشم یک انسان بوسیله یک زوج ژن تعیین می شود. بطوریکه اگر هر دو ژن چشم، آبی باشند رنگ چشم فرد آبی و اگر هر دو ژن چشم، قهوه ای باشند رنگ چشم فرد قهوه ای و اگر یک ژن آبی و یک ژن قهوه ای باشد رنگ چشم قهوه ای خواهد بود (به این دلیل که رنگ قهوه ای غالب است). یک نوزاد یک ژن را به طور مستقل از مادر و ژن دیگر را از پدر می گیرد، که به طور هم شانس می تواند ژن آبی یا ژن قهوه ای باشد. فرض کنید علی و والدین او دارای چشم قهوه ای هستند ولی خواهر آن فرد چشم آبی دارد.

الف) با چه احتمالی علی دارای ژن چشم آبی است.

فرض کنید همسر علی چشم آبی باشد.

ب) احتمال اینکه اولین فرزند علی و همسرش چشم آبی داشته باشد چقدر است؟

ج) اگر اولین فرزند آنها چشمان قهوه ای داشته باشد با چه احتمالی فرزند بعدی آنها نیز چشم قهوه ای خواهد داشت.

خواهر علی چشم آبی و علی چشم قهوه ای دارد که پدر و مادر آنها چشم قهوه ای دارند . پس هر یک از پدر و مادر علی دارای یک ژن قهوه ای و یک ژن آبی می باشند.

حل: الف) علی دارای چشم قهوه ای است، پس ۳ حالت برای ژنهایی که پدر و مادر به او داده اند، وجود دارد (شانس هر یک از حالات برابر است):

	مادر	پدر	
$\Rightarrow$ P(چشم قهوه ای | داشتن ژن آبی)$=\frac{۲}{۳}$	قهوه ای	قهوه ای	x)
	قهوه ای	آبی	y)
	آبی	قهوه ای	z)

ب) همسر علی دارای چشم آبی است، پس حتماً ژن آبی می دهد لذا با توجه به ۳ حالت بالا برای علی، افراز می کنیم:

$$P(\text{اولین فرزند چشم آبی})=\left(۰\times\frac{۱}{۳}\right)+\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}\right)+\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}\right)=\frac{۱}{۳}$$

ج) از تابع احتمال استفاده می کنیم

$$P(\text{فرزند اول چشم قهوه ای}\,|\,\text{فرزند دوم چشم قهوه ای})=P(A_۲|A_۱)$$

$$=P(A_۲|XA_۱)P(X|A_۱)+P(A_۲|YA_۱)P(Y|A_۱)+P(A_۲|ZA_۱)P(Z|A_۱)$$

$$=۱\times\frac{۱\times\frac{۱}{۳}}{\frac{۲}{۳}}+\frac{۱}{۲}\times\frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}}{\frac{۲}{۳}}+\frac{۱}{۲}\times\frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{۳}{۴}$$

۵۷- ژنهای مربوط به خصوصیت آلبینو بودن افراد با A و a نشان داده می شوند. فقط افرادی که ژن a را از پدر و مادر خود دریافت می کنند آلبینو می باشند. افرادی که ژن آنها A و a است دارای دید طبیعی هستند ولی چون می توانند آن را به فرزند خود منتقل نمایند حامل ژن آلبینو هستند. فرض کنید یک زوج طبیعی دو فرزند داشته باشند که یکی از آنها آلبینو است. همچنین فرض کنید فرزند غیر آلبینو با فردی ازدواج می کند که حامل ژن آلبینو است. مطلوب است:

الف) احتمال اینکه اولین فرزند آنها آلبینو باشد؟

ب) احتمال اینکه دومین فرزند آنها آلبینو باشد به شرط آنکه اولین فرزند آنها آلبینو نباشد؟

حل: هر فرد جامعه می تواند یکی از ژنهای aa ،aA ،Aa ،AA را داشته باشد. ولی شخص غیر آلبینو که در مورد آن توضیح داده شده، تنها می تواند یکی از ژنهای aA ،Aa ،AA را داشته باشد (پدر و مادر او هر دو aA یا Aa بوده اند زیرا هر دو طبیعی هستند ولی یکی از فرزندان آنها آلبینو و دیگری غیر آلبینو است. و همچنین می دانیم خود شخص aa نیست).

همسر این زن حامل ژن است پس او نیز یا aA است و یا Aa

شخص غیر آلبینو	همسر او
Aa	aA
aA	Aa
AA	

الف) احتمال اینکه اولین فرزند آنها آلبینو باشد را روی نتیجه ممکن برای شخص مورد نظر افراز می کنیم.

$$P\,(\text{فرزند آنها آلبینو})=P(E)=P(E|AA)\,P(AA)+P(E|Aa)\,P(Aa)+P(E|aA)\,P(aA)$$

$$=0\times\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}=0\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

همسر ژن Aa بدهند — هردو a بدهند — همسر ژن aA بدهند

ب) از تابع احتمال استفاده می کنیم.

$$P\,(\text{فرزند اول غیر آلبینو})=P(E^c)=1\times\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

$$P(E_2|E_1^c)=0\times\frac{1\times\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}}+\frac{1}{4}\times\frac{\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}}+\frac{1}{4}\times\frac{\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{5}{6}}=\frac{3}{20}$$

۵۸- دو فرد A و B برای تیراندازی مسابقه می دهند. فرض کنید هر شلیک A با احتمال p_1 به هدف اصابت کند و هر شلیک B با احتمال p_2 به هدف بخورد. بعلاوه فرض کنید آنها به طور هم زمان بطرف یک هدف تیراندازی می کنند اگر تیری به هدف خورده باشد مطلوب است:

الف) احتمال اینکه هر دو تیر به هدف خورده باشند.

ب) تیر A به هدف خورده باشد.

چه فرض استقلالی را در نظر گرفته اید.

فرض شده است که هر یک از دو تیر، مستقل از دیگری می تواند به هدف بخورد.

حل:

$P($تیری به هدف بخورد$)=P($A بزند یا B بزند$)$

$=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=p_۱+p_۲-p_۱p_۲$

یا

$P($تیری به هدف بخورد$)=۱-P($هیچ تیری نخورد$)$

$=۱-(۱-p_۱)(۱-p_۲)=p_۱+p_۲-p_۱p_۲$

الف)

$P($هر دو تیر به هدف بخورد | تیری به هدف بخورد$)$

$$=P(E|F)=\frac{P(E\cup F)}{P(F)}=\frac{P(F|E)P(E)}{P(F)}=\frac{۱\times p_۱p_۲}{p_۱+p_۲-p_۱p_۲}$$

ب)

$P($A به هدف بزند | تیری به هدف بخورد$)$

$$=P(G|F)=\frac{P(F|G)P(G)}{P(F)}=\frac{۱\times p_۱}{p_۱+p_۲-p_۱p_۲}$$

۵۹- A و B در یک مبارزه شرکت می کنند. قاعده مبارزه چنین است که آنها تفنگ های خود را برداشته و همزمان بطرف یکدیگر شلیک می کنند. اگر یکی از آنها یا هردو مورد اصابت قرار گیرند آنگاه مبارزه تمام می شود، اگر تیر هردو خطا رود آنها دوباره تکرار می کنند. فرض کنید نتایج شلیک ها مستقل بوده و A با احتمال p_A و B با احتمال p_B به هدف می زند. مطلوب است:

الف) احتمال اینکه A به هدف نزند.

ب) احتمال اینکه هر دو به هدف بزنند.

ج) احتمال اینکه مبارزه بعد از n امین دوره تیراندازی تمام شود.

د) احتمال شرطی اینکه مبارزه بعد از n امین دوره تیراندازی تمام شود بشرط اینکه A مورد اصابت قرار نگرفته باشد.

ه) احتمال شرطی اینکه مبارزه بعد از n امین دوره تیراندازی تمام شود بشرط اینکه هردو نفر مورد اصابت قرار گرفته باشند.

حل: الف) اگر منظور این باشد که فقط B به هدف بزند، داریم:

$P($A به هدف نزند$)=(۱-p_A)p_B+[(۱-p_A)(۱-p_B)](۱-p_A)p_B$

$+[(۱-p_A)(۱-p_B)]^۲(۱-p_A)p_B+\dots$

$$\frac{(۱-p_A)p_B}{۱-[(۱-p_A)(۱-p_B)]}=\frac{p_B(۱-p_A)}{p_A+p_B-p_Ap_B}$$

ب) ممکن است در اولین بار بزنند؛ یا هیچکدام نزده و در دومین بار هردو بزنند یا...

$$P(\text{هردو به هدف بزنند})=p_A p_B+[(1-p_A)(1-p_B)]\,p_A p_B$$
$$+[(1-p_A)(1-p_B)]^2\,p_A p_B+\dots=\frac{p_A p_B}{p_A+p_B-p_A p_B}$$

ج) یعنی تا دوره (n-1) ام، هیچکدام موفق نشوند و در دوره n ام مبارزه تمام شود.

$$P(\text{اتمام بعد از } n \text{ دوره})$$
$$=[(1-p_A)(1-p_B)]^{n-1}[p_A(1-p_B)+p_B(1-p_A)+p_A p_B]$$
$$=[(1-p_A)(1-p_B)]^{n-1}[p_A+p_B-p_A p_B]$$

د) $P(A \text{ مورد اصابت قرار نگیرد} \mid \text{مبارزه بعد از } n \text{ مرتبه تمام شود})$

$$=P(X|A)=\frac{P(XA)}{P(A)}$$
$$=\frac{(1-p_A)^{n-1}(1-p_B)^{n-1}p_A(1-p_B)}{\frac{p_A(1-p_B)}{p_A+p_B-p_A p_B}}=(p_A+p_B-p_A p_B)(1-p_A)^{n-1}(1-p_B)^{n-1}$$

ه) با کمی دقت متوجه می شوید که جواب آخر این قسمت هم مثل قسمت((د)) است.

۶۰- در یک مسابقه خانوادگی قرار است یک سوال به یک زوج داده شود که پاسخ آن ((صحیح)) یا ((غلط)) است. اگر زن و شوهر بطور مستقل پاسخ مناسب را با احتمال p بدهند. کدامیک از حالات زیر برای برنده شدن زوج بهتر است.

الف) یکی از آنها را انتخاب و اجازه دهیم او پاسخ دهد.

ب) هردو نفر سوال را بررسی نموده و پس از توافق، یکی از آنها پاسخ را اعلام نماید و یا اگر توافق نداشتند یک سکه را پرتاب و بر اساس نتیجه آن پاسخ دهند.

حل: الف)

$$P(\text{صحیح})=P(\text{صحیح}|\text{زن})P(\text{زن})+P(\text{صحیح}|\text{مرد})P(\text{مرد})$$
$$=p\times\frac{1}{2}+p\times\frac{1}{2}=p$$

ب)

$$P(\text{صحیح})=P(\text{صحیح}|\text{هردو صحیح})P(\text{هردو صحیح})$$
$$+P(\text{صحیح}|\text{هردو غلط})P(\text{هردو غلط})+P(\text{صحیح}|\text{زن صحیح، مرد غلط})$$
$$\times P(\text{زن صحیح، مرد غلط})+P(\text{صحیح}|\text{مرد صحیح، زن غلط})P(\text{مرد صحیح، زن غلط})$$
$$=(1\times p^2)+(0\times(1-p)^2)+\frac{1}{2}(1-p)\,p+\frac{1}{2}p\,(1-p)=p^2+p-p^2=p$$

می بینیم که درهر دو حالت، احتمال دادن جواب صحیح، یکسان است.

۶۱- در مساله ۶۰، اگر p= ۰/۶ باشد و آنها روش (ب) را بکار ببرند، مطلوب است احتمال شرطی اینکه زوج پاسخ صحیح دهند بشرط اینکه،

الف) آنها به توافق برسند.

ب) آنها به توافق نرسند.

الف):

$$P(\text{پاسخ صحیح} \mid \text{توافق}) = \frac{P(\text{صحیح} \cap \text{توافق})}{P(\text{توافق})}$$

$$= \frac{p^۲}{p^۲ + (۱-p)^۲} = \frac{(۰/۶)^۲}{(۰/۶)^۲ + (۰/۴)^۲} = \frac{۳۶}{۵۲} = \frac{۹}{۱۳}$$

ب)

$$P(\text{پاسخ صحیح} \mid \text{عدم توافق}) = \frac{P(\text{صحیح} \cap \text{عدم توافق})}{P(\text{عدم توافق})}$$

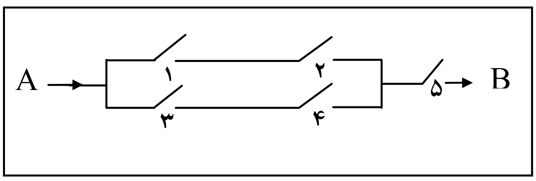
$$= \frac{[p(۱-p) + (۱-p)p] \times \frac{۱}{۲}}{۲ \times p(۱-p)} = \frac{۱}{۲}$$

توجه: در حالت عدم توافق، چون سکه تعیین کننده است، بدون حل نیز می توان پاسخ $\frac{۱}{۲}$ رابدست آورد.

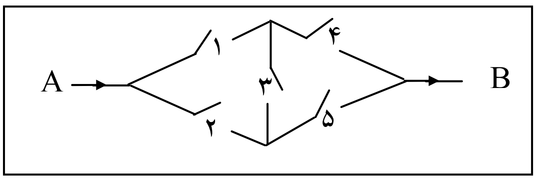
۶۲- احتمال بسته شدن رله i ام (i= ۱،۲،۳،۴،۵) در مدارهای زیر برابر با p_i است. اگر همه رله ها بطور مستقل عمل کنند، احتمال اینکه جریان از نقطه A به نقطه B عبور کند را درهر یک از مدارهای زیر بدست آورید.

راهنمایی: برای بند (ب) روی پیشامد اینکه رله ۳ عمل نکند مشروط کنید.

الف)



ب)



حل: احتمال اینکه جریان از دو رله سری ۱ و ۲ بگذرد، $p_۱p_۲$ و احتمال اینکه از دو رله موازی ۱ و ۲ بگذرد $۱-(۱-p_۱)(۱-p_۲)$ می باشد.

الف) به غیر از رله ۵، مدار دو شاخه موازی دارد که هر یک، از دو رله سری تشکیل شده است.

P(عبور جریان از دو شاخه موازی) = P(حداقل یکی از دو شاخه) = ۱− P(هیچ یک از دو شاخه)

P(عبور جریان درهر شاخه) = P(همه اجزای شاخه کار کند)

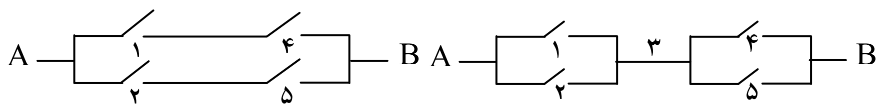
$\Rightarrow$ P(عدم عبور در هر شاخه) = ۱− P(همه اجزا کار کند)

$$\Rightarrow P(AB)=[۱-(۱-p_۱p_۲)(۱-p_۳p_۴)]p_۵$$

ب) P(مدار کار کند) = P(مدار کار کند | رله۳ باز باشد) P(رله۳ باز باشد)

+P(مدار کار کند | رله۳ بسته باشد) P(رله۳ بسته باشد)

$$=[۱-(۱-p_۱p_۴)(۱-p_۲p_۵)](۱-p_۳)$$
$$+[۱-(۱-p_۱)(۱-p_۲)][۱-(۱-p_۴)(۱-p_۵)]p_۳$$



رله ۳ باز رله ۳ بسته

۶۳- یک سیستم مهندسی که از n جزء تشکیل شده باشد را یک سیستم ((k از n)) گویند، $(k \le n)$ هرگاه کارکردن سیستم مشروط به کارکردن حداقل k جزء باشد. فرض کنید همه اجزاء بطور مستقل کار کنند.

الف) اگر i امین جزء با احتمال p_i ($i=۱،۲،۳،۴$) کار کند احتمال کارکردن یک سیستم ((۲ از ۴)) را بدست آورید.

ب) قسمت (الف) را برای یک سیستم ((۳ از ۵)) تکرار کنید.

ج) اگر $p_i=p$ ($i=۱،۲،...،n$)، احتمال کارکردن یک سیستم ((k از n)) را بدست آورید.

دقت کنید که حداقل k جزء باید کار کند.

حل:

$$P(A)=p_۱p_۲(۱-p_۳)(۱-p_۴)+p_۱p_۳(۱-p_۲)(۱-p_۴)+p_۱p_۴(۱-p_۲)(۱-p_۳)$$
$$+p_۲p_۳(۱-p_۱)(۱-p_۴)+p_۲p_۴(۱-p_۱)(۱-p_۳)+p_۳p_۴(۱-p_۱)(۱-p_۲)$$
$$+p_۱p_۲p_۳(۱-p_۴)+p_۱p_۲p_۴(۱-p_۳)+p_۲p_۳p_۴(۱-p_۱)+p_۱p_۳p_۴(۱-p_۲)+p_۱p_۲p_۳p_۴$$

تعداد جملات برابر است با:

$$n=\binom{۴}{۲}+\binom{۴}{۳}+\binom{۴}{۴}=۱۱$$

ب) همانند قسمت الف، باید تمام حالات ۳ تایی، ۴ تایی و ۵ تایی را حساب نموده و با هم جمع کنیم. اما تعداد جملات برابر است با:

$$n=\binom{۵}{۳}+\binom{۵}{۴}+\binom{۵}{۵}=۱۶$$

ج)

$$P=\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}p^{i}(۱-p)^{n-i}$$

۶۴- در مسأله ۶۲ بند (الف) احتمال اینکه رله ۱ و ۲ هر دو بسته باشند به شرط اینکه جریان بین A و B عبور کند را بدست آورید.

$$P(\text{رله ۱و۲} \mid \text{عبور جریان})=P(۱,۲|AB)=\frac{P(۱,۲\cap AB)}{P(AB)}$$

$$=\frac{P(AB|۱,۲)\,P(۱,۲)}{[۱-(۱-p_۱p_۲)(۱-p_۳p_۴)]p_۵}=\frac{p_۵\ p_۱p_۲}{[۱-(۱-p_۱p_۲)(۱-p_۳p_۴)]p_۵}$$

۶۵- یک موجود زنده دارای یک زوج از هر کدام از ۵ ژن است که آنها را با حروف الفبای انگلیسی نشان می دهیم. هر ژن به دو صورت ظاهر می شود که آنها را با حرف بزرگ و کوچک نشان داده بطوریکه حرف بزرگ نشان دهنده ژن غالب است. یعنی اگر موجود دارای زوج Xx باشد آنگاه شکل ظاهری بصورت ژن X است. مثلاً اگر X برای چشم قهوه ای و x برای چشم آبی باشد. آنگاه، موجودی که XX یا xX را داشته باشد دارای چشم قهوه ای است. و موجودی که xx را داشته باشد چشمان آبی دارد. ویژگی ظاهری یک موجود را ((فنوتیپ)) و ساختار ژنتیکی او را ((ژنوتیپ)) گویند. (بنابراین دو موجود یکی با ترکیب ژنی aA، bB، cc، dD و ee و دیگری با ترکیب AA، BB، cc، DD و ee دارای ژنوتیپ‌های متفاوت بوده ولی فنوتیپ های یکسان دارند).در جفتگیری دو موجود هر کدام به تصادف در واگذاری یکی از زوج ژنها مشارکت دارد. در۵ زوج ژنهای یک موجود زنده فرض می شود که هر کدام بطور مستقل و همچنین مستقل از ژن طرف مقابل واگذاری انجام گیرد. در یک جفتگیری بین دو موجود زنده که دارای ژنوتیپ های aA ، bB، cC، dD، eE و aa ، bB، cc، dD و ee هستند. مطلوب است احتمال اینکه مولود آنها (۱) بطور فنوتیپ (۲) بطور ژنوتیپ شبیه،

الف) موجود اول باشد.

ب) موجود دوم باشد.

ج) هردو موجود باشد.

د) هیچکدام از آنها نباشد.

حل: الف) مثلاً برای ژن A $S=\{(A،A)،(A،a)،(a،A)،(a،a)\}$ فضای نمونه.

فنوتیپ $P=\frac{۲}{۴}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۲}{۴}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۲}{۴}=\frac{۹}{۱۲۸}$

ژنوتیپ $P=\frac{۲}{۴}\times\frac{۲}{۴}\times\frac{۲}{۴}\times\frac{۲}{۴}\times\frac{۲}{۴}=\frac{۴}{۱۲۸}$

ب)

فنوتیپ $P=\frac{۲}{۴}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۲}{۴}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۲}{۴}=\frac{۹}{۱۲۸}$

ژنوتیپ $P=\frac{۲}{۴}\times\frac{۲}{۴}\times\frac{۲}{۴}\times\frac{۲}{۴}\times\frac{۲}{۴}=\frac{۴}{۱۲۸}$

ج) شبیه هردو بودن امکان ندارد؛ چون با هم متفاوتند. با فرض اینکه حداقل شبیه یکی باشد داریم:

فنوتیپ $P=\frac{۹}{۱۲۸}+\frac{۹}{۱۲۸}=\frac{۱۸}{۱۲۸}$

ژنوتیپ $P=\frac{۴}{۱۲۸}+\frac{۴}{۱۲۸}=\frac{۸}{۱۲۸}$

د)

فنوتیپ $P(\text{شبیه هیچ یک})=۱-P(\text{حداقل شبیه یکی})=۱-\frac{۱۸}{۱۲۸}=\frac{۱۱۰}{۱۲۸}$

ژنوتیپ $P(\text{شبیه هیچ یک})=۱-P(\text{حداقل شبیه یکی})=۱-\frac{۸}{۱۲۸}=\frac{۱۲۰}{۱۲۸}$

۶۶- با احتمال $\frac{۱}{۲}$، ملکه دارای ژن هموفیلی است. اگر او دارای ژن باشد آنگاه هر فرزند اوبا احتمال $\frac{۱}{۲}$ بیماری هموفیلی را خواهد داشت. اگر ملکه سه فرزند سالم داشته باشد احتمال اینکه او دارای ژن هموفیلی باشد چقدر است؟ اگر ملکه فرزند چهارمی بدنیا آورد احتمال اینکه او هموفیلی باشد چقدر است؟

حل:

$$P(\text{ملکه هموفیلی}|\text{سه فرزند سالم})=P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|A^c)P(A^c)}=\frac{\left(\frac{۱}{۲}\right)^۳\times\frac{۱}{۲}}{\left(\frac{۱}{۲}\right)^۳\times\frac{۱}{۲}+(۱)^۳\times\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۹}$$

ب) با توجه به الف داریم:

$$P(\text{فرزند چهارم هموفیلی}) = P(\text{فرزند چهارم هموفیلی} | \text{ملکه هموفیلی})P(\text{ملکه هموفیلی})$$
$$+P(\text{فرزند چهارم هموفیلی} | \text{ملکه غیر هموفیلی})P(\text{ملکه غیر هموفیلی})$$
$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۹}+۰\times\frac{۸}{۹}=\frac{۱}{۱۸}$$

۶۷- در صبح روز ۳۱ سپتامبر سال ۱۹۸۲، رکورد برنده- بازنده سه تیم بیسبال مهم در یکـی از ایالـت هـای آمریکا بصورت زیر گزارش داده شده است:

بازنده	برنده	تیم
۷۲	۸۷	آتلانتا
۷۳	۸۶	سانفرانسیسکو
۷۳	۸۶	لوس آنجلس

هر تیم سه بازی باقیمانده دیگر را بایستی انجام دهـد. هـر سـه بـازی باقیمانـده تـیم سانفرانسیسـکو بـا تـیم لوس‌آنجلس است و سه بازی تیم آتلانتا با تیم سان دیاگو انجام مـی گیـرد. فـرض کنیـد نتـایج بـازی‌هـای باقیمانده مستقل از یکدیگر بوده و درهر مسابقه شانس بردن برای طرفین یکسان باشد. احتمال برد نهایی هر یک از تیم ها را بدست آورید. (اگر دو تیم برای مقام اول مساوی باشـند بایسـتی یـک بـازی نهـایی انجـام دهند که هر تیم شانس مساوی بردن را دارد).

حل: A_i = آتلانتا i برد- L_i = لوس آنجلس i برد- S_i = سانفرانسیسکو i برد

$$P(\text{قهرمانی لوس آنجلس})=P(L)=P(L|A_۰)P(A_۰)+P(L|A_۱)P(A_۱)+P(L|A_۲)P(A_۲)$$
$$+P(L|A_۳)P(A_۳)=\Bigg[\underbrace{\left(\frac{۱}{۲}\right)^۳}_{\text{لوس آنجلس ۳ برد}}+\underbrace{\binom{۳}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)^۳}_{\text{لوس آنجلس ۲ برد}}\Bigg]\left(\frac{۱}{۲}\right)^۳$$
$$+\left[\left(\frac{۱}{۲}\right)^۳+\binom{۳}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)^۳\times\underbrace{\frac{۱}{۲}}_{\text{بازی لوس آنجلس و آتلانتا}}\right]\binom{۳}{۱}\left(\frac{۱}{۲}\right)^۳+\left[\left(\frac{۱}{۲}\right)^۳\times\frac{۱}{۲}\right]\binom{۳}{۱}\left(\frac{۱}{۲}\right)^۳+[۰]\binom{۳}{۳}\left(\frac{۱}{۲}\right)^۳=\frac{۱۳}{۶۴}$$

$$P(\text{قهرمانی سانفرانسیسکو})=P(S)=P(L)=\frac{۱۳}{۶۴}$$

$$P(\text{قهرمانی آتلانتا}) = P(A) = 1 - [P(S) + P(L)] = 1 - \frac{26}{64} = \frac{38}{64}$$

۶۸- شورای یک شهر متشکل از ۷ عضو است که یک گروه ۳ عضوی دارد. نظریه های جدید در مورد یک قانون ابتدا در گروه مطرح شده و سپس اگر حداقل ۲ نفر از ۳ نفر موافقت نمایند آن را در شورا مطرح می کنند. روزی قانونی در شورای شهر مطرح شد که برای تصویب نیاز به حداقل ۴ رأی مثبت داشت. حال اگر هر عضو شورا بطور مستقل با احتمال P به قانون رأی دهد. احتمال این پیشامد که رأی یکی از اعضای گروه سرنوشت ساز باشد، یعنی، اگر رأی خود را عوض کند قانون تصویب نشود را بدست آورید. این احتمال برای حالتی که عضو سرنوشت ساز از اعضای گروه نباشد چیست؟

حل: الف) فرض می کنیم که شخص مورد نظر معلوم نیست. برای اینکه رأی یکی از اعضای گروه سرنوشت ساز باشد، باید دو نفر دیگر گروه رأی موافق بدهند تا در شورا مطرح شود وهمچنین از ۴ نفر دیگر هم یکی رأی موافق بدهد که در اینصورت رأی شخص مورد نظر سرنوشت ساز می شود. (اگر رأی موافق بدهد، با ۴ رأی موافق، نظریه تصویب می شود و اگر رأی مخالف بدهد، با ۳ رأی موافق، نظریه رد می‌شود).

$$P(A) = \left[\binom{3}{2}p^2\right]\left[\binom{4}{1}p(1-p)^3\right]$$

ب) برای اینکه رأی یکی از اعضا که عضو گروه نیست سرنوشت ساز باشد، دو حالت داریم: یا سه عضو گروه موافق باشند و یا اینکه فقط دو عضو از گروه موافق باشند، لذا:

$$P(B) = \left[\binom{3}{2}p^2(1-p)\right]\left[\binom{4}{1}p\binom{3}{2}(1-p)^2\right] + \left[p^3\binom{4}{3}(1-p)^3\right]$$

۶۹- فرض کنید هر طفلی که بدنیا می آید با شانس برابر، پسر یا دختر و مستقل از جنس سایر فرزندان باشد. برای زوجی که ۵ فرزند دارند، احتمال پیشامدهای زیر را بدست آورید.

الف) همه فرزندان از یک جنس باشند.

ب) ۳ فرزند بزرگتر پسر و دو نفر دیگر دختر باشند.

ج) دقیقاً ۳ فرزندپسر باشد.

د) ۲ فرزند بزرگتر دختر باشند.

ه) حداقل یک فرزند دختر باشد.

حل: الف) $\binom{۲}{۱}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۵}=\frac{۱}{۱۶}$

ب) $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۵}=\frac{۱}{۳۲}$

ج) $\binom{۵}{۳}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۵}=\frac{۵}{۱۶}$

د) $\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}$ ، چون درباره دو فرزند اول است، بقیه فرزندان وارد محاسبه نمی شود یا

$$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}\times\left[۲^{۳}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}\right]=\frac{۱}{۴}$$

ه) $P(\text{حداقل یک دختر}) = ۱-P(\text{هیچ دختر}) = ۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۵}=\frac{۳۱}{۳۲}$

۷۰- A و B یک در میان یک جفت تاس را پرتاب می کنند تا زمانیکه A مجموع ۹ و یا B مجموع ۶ را بدست آورد. با فرض اینکه A ابتدا تاسها را پرتاب کند، احتمال اینکه آخرین پرتاب را نیز A انجام دهد چقدر است؟

حل: احتمال برد A مورد نظر است.

$$P(A)=\frac{۴}{۳۶}+\left(۱-\frac{۴}{۳۶}\right)\left(۱-\frac{۵}{۳۶}\right)\frac{۴}{۳۶}+\left(۱-\frac{۴}{۳۶}\right)^{۲}\left(۱-\frac{۵}{۳۶}\right)^{۲}\frac{۴}{۳۶}+\dots$$

$$=\sum_{i=۰}^{\infty}\frac{۴}{۳۶}\left(۱-\frac{۴}{۳۶}\right)^{i}\left(۱-\frac{۵}{۳۶}\right)^{i}=\sum_{i=۰}^{\infty}\frac{۴}{۳۶}\times\left(\frac{۳۱\times۳۲}{۳۶\times۳۶}\right)^{i}$$

$$=\frac{\frac{۴}{۳۶}}{۱-\frac{۳۱}{۳۶}\times\frac{۳۲}{۳۶}}=\frac{\frac{۱}{۹}}{\frac{۱۹}{۸۱}}=\frac{۹}{۱۹}$$

۷۱- در یک روستا مرسوم است که پسر بزرگتر و همسر او مسئولیت نگهداری والدین خود را در دوران کهولت بر عهده داشته باشند. در سالهای اخیر زنان روستا بدلیل این مسئولیت تمایلی برای ازدواج با پسر بزرگ خانواده را ندارند.

الف) اگر هر خانواده در این روستا دو فرزند داشته باشد چه نسبتی از همه فرزندان پسر، پسر بزرگتر هستند؟

ب) اگر هر خانواده در این روستا سه فرزند داشته باشد چه نسبتی از همه فرزندان پسر، پسر بزرگتر هستند؟ (فرض کنید هر فرزند به طور مستقل با شانس برابر پسر یا دختر است).

حل: الف) فضای نمونه فرزندان برای خانواده هایی که دو فرزند دارند بصورت زیر است.

$$S=\{(\underline{b},g),(g,\underline{b}),(\underline{b},\underline{\underline{b}}),(g,g)\}$$

در چنین فضایی شانس هر یک از ۴ قسمتی که زیر آنها خط کشیده شده برابر است. حال در بین ۴ نوع پسری که می تواند وجود داشته باشد، تنها زمانی که خانواده دو فرزند پسر داشته باشد، پسر دوم از این مسئولیت معاف است. پس از بین پسران، درصد پسران بزرگتر برابر با $\frac{۳}{۴}$ است.

$$P(\text{پسر بزرگتر}\mid\text{پسر})=\frac{P(\text{پسر بزرگتر}\cap\text{پسر})}{P(\text{پسر})}=\frac{\frac{۳}{۸}}{\frac{۴}{۸}}=\frac{۳}{۴}$$

ب)

$$S=\{(\underline{b},\underline{\underline{b}},\underline{\underline{\underline{b}}}),(\underline{b},\underline{\underline{b}},g),(\underline{b},g,\underline{\underline{b}}),(\underline{b},g,g),(g,\underline{b},\underline{\underline{b}}),(g,\underline{b},g),(g,g,\underline{b}),(g,g,g)\}$$

$$P(\text{پسر بزرگتر}\mid\text{پسر})=\frac{\frac{۷}{۲۴}}{\frac{۱۲}{۲۴}}=\frac{۷}{۱۲}$$

۷۲- فرض کنید E و F، دو پیشامد ناسازگار از یک آزمایش باشند. نشان دهید که اگر آزمایشهای ساده مستقل از این نوع را تکرار کنیم آنگاه E قبل از F با احتمال $P(E)/[P(E)+P(F)]$ اتفاق می افتد.

حل:

$$P(F\ \text{قبل از}\ E)=P(E)+(۱-P(E)-P(F))P(E)+\cdots$$

$$P(E)\times\sum_{i=۰}^{\infty}(۱-P(E)-P(F))^{i}=\frac{P(E)}{۱-(۱-P(E)-P(F))}=\frac{P(E)}{P(E)+P(F)}$$

۷۳- A و B یک دور بازی را انجام می دهند. A در هر بازی به طور مستقل با احتمال p و B با احتمال $۱-p$ برنده است. آنها بازی را زمانی متوقف می کنند که جمعاً تعداد بردهای یکی از بازیکنها دو مرتبه بیشتر از بازیکن دیگر باشد و برنده بازی کسی است که تعداد برد بیشتری داشته باشد.

الف) احتمال اینکه جمعاً ۴ بازی انجام گیرد را بدست آورید.

ب) احتمال اینکه A برنده مسابقه باشد را محاسبه کنید.

حل: الف) برای اینکه جمعاً ۴ بازی صورت گیرد، حتماً یکی باید ۳ بار و دیگری یک بار ببـرد و شـخص برنده باید بازی آخر را حتماً ببرد (اگر بازی آخر شخص برنده، باخت باشد، حتماً سه بازی اول او برد بوده و در نتیجه در دفعه دوم بازی تمام شده است). همچنین شخص برنده نباید دو بازی اول خود را ببـرد چـون در آن صورت بازی تمام می شود.

$$(1-p)ppp+p(1-p)pp+p(1-p)(1-p)(1-p)+(1-p)p(1-p)(1-p)$$

ب) با کمی دقت متوجه می شویم که این مسأله کاملاً شبیه مسأله نابودی قماربازی است که A با دو سـکه و B نیز با دو سکه شروع می کنند. هرگاه تعداد بردهای A دو تا بیشتر از تعـداد بردهـای B شـد، بـرای دیگر سکه ای باقی نمی‌ماند.

$$\frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{2}}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{4}}=\frac{\frac{p^{2}-1-p^{2}+2p}{p^{2}}}{\frac{p^{4}-p^{4}+4p^{3}-6p^{2}+4p-1}{p^{4}}}=\frac{p^{2}(2p-1)}{4p^{3}-6p^{2}+4p-1}$$

$$=\frac{p^{2}(2p-1)}{(2p-1)(1-2p+2p^{2})}=\frac{p^{2}}{1-2p+2p^{2}}$$

۷۴- در پرتاب متوالی یک جفت تاس، احتمـال اینکـه ۲ مرتبـه پیشـامد مجمـوع ۷ قبـل از ۶ مرتبـه پیشـامد مجموع عدد زوج بدست آید را محاسبه کنید.

حل: اگر آمدن زودتـر مجمـوع ۷ را ((بـرد)) وآمـدن مجمـوع زوج را ((باخـت)) بـدانیم، مسـأله بصـورت احتمال ۲ برد قبل از ۶ باخت (پیشامد A) درمی آید که همان ((مسأله امتیازها)) است. لذا داریم:

$$P(\text{مجموع ۷ قبل از مجموع زوج})=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$$

$$P(\text{مجموع زوج قبل از مجموع ۷})=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow P(A)=\sum_{k=2}^{7}\binom{7}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{7-k}=1-\left(\frac{3}{4}\right)^{7}-\binom{7}{1}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{6}=0/5550$$

۷۵- بازیکن هایی با مهارت یکسان در یک مسابقه شرکت می کنند و احتمال اینکه یکی از دو بازیکن برنده شود برابر با $\frac{۱}{۲}$ است. یک گروه ۲^n نفری را به تصادف بصورت زوجهایی تقسیم نموده که در مقابل یکدیگر بازی کنند. آنگاه $۲^{n-۱}$ نفر برنده را نیز بصورت زوجهای دیگری به تصادف تقسیم نموده و این کار ادامه می یابد تا یک نفر برنده باقی بماند. دو بازیکن یعنی A و B را در نظر گرفته و پیشامدهای A_i $(i,۱,\ldots,n)$ را بصورت زیر تعریف می کنیم.

A_i: A دقیقاً در i بازی شرکت کند:

E: A و B همیشه در مقابل یکدیگر بازی می کنند:

الف) مطلوب است $P(A_i)$ $(i=۱,\ldots,n)$

ب) مطلوب است $P(E)$

ج) اگر $P_n=P(E)$ ، نشان دهید:

$$P_n=\frac{۱}{۲^n-۱}+\frac{۲^n-۲}{۲^n-۱}\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲P_{n-۱}$$

و با استفاده از این رابطه، نتیجه بدست آمده در قسمت (ب) را کنترل کنید.

راهنمایی: $P(E)$ را با مشروط کردن روی اینکه کدامیک از پیشامدهای A_i $(i=۱،۲،\ldots،n)$ اتفاق می‌افتد بدست آورید. آنگاه پاسخ بدست آمده را با توجه به رابطه جبری زیر ساده کنید.

$$\sum_{i=۱}^{n-۱} i\,x^{i-۱}=\frac{۱-nx^{n-۱}+(n-۱)x^n}{(۱-x)^۲}$$

برای روش دیگری جهت حل این مسأله توجه کنید که جمعاً $۲^n-۱$ بازی انجام می گیرد.

د) توضیح دهید که چرا $۲^n-۱$ بازی انجام می گیرد. این بازیها را بشمارید و فرض کنید B_i نشان دهنده پیشامدی باشد که A و B در بازی i ام با یکدیگر بازی می کنند. $(i=۱،\ldots،۲^n-۱)$

ه) مطلوب است $P(B_i)$

و) نتیجه قسمت (ه) را برای محاسبه $P(E)$ بکار ببرید.

حل: الف) برای شرکت در i بازی، باید (i-۱) تای قبلی را ببرد و آخری را ببازد.

$$P(\text{در i بازی شرکت کند A})=P(A_i)=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{i-۱}\times\frac{۱}{۲}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^i$$

ب)

$$P(E)=\sum_{i=۰}^{n}P(E|A_i)\,P(A_i)$$

اگر A یک مرحله بازی کند باید در همان مرحله اول با B بازی کند.

$$P(E|A_1)=\frac{1}{2^n-1}$$

اگر A دو مرحله بازی کند یا باید در مرحله اول با B بازی کند و یا در مرحله دوم. اگر قرار باشد در مرحله دوم با هم بازی کنند، B هم باید بازی اول خود را ببرد.

$$P(E|A_2)=\frac{1}{2^n-1}\times 1+\frac{(2^n-1)-1}{2^n-1}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^{n-1}-1}=\frac{1}{2^n-1}+\frac{1}{2^n-1}=\frac{2}{2^n-1}$$

درمرحله اول با هم بازی کنند.　درمرحله اول با هم بازی نکنند.　B بازی اول خود را ببرد.　درمرحله دوم با هم بازی کنند.

$$=P(E|A_i)=\frac{i}{2^n-1}$$

$$P(E)=\sum_{i=1}^{n}P(E|A_i)\,P(A_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^i$$

$$=\frac{1}{2^n-1}\times\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}=\frac{1}{2^n-1}\times\frac{1}{2}\times\frac{1-(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{2}{2^n-1}\times\frac{2^{n+1}-2(n+1)+n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^n-1}\;\frac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$$

ج)

$$P_n=\underbrace{\frac{1}{2^n-1}}_{\text{A و B دور اول به هم بخورند}}+\underbrace{\frac{2^n-2}{2^n-1}}_{\text{دور اول به هم نخورند}}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^2}_{\text{در دور اول هر دوببرند}}\underbrace{P_{n-1}}\;=P(\text{A و B به هم بخورند})=P(E)$$

چون $\frac{2^n}{2}=2^{n-1}$ نفر حذف شده اند و 2^{n-1} نفر مانده اند؛

د) چون بازیها حذفی است، به ازای هر یک بازی، یک نفر حذف می شود. و از آنجاییکه در انتها یک نفر قهرمان می گردد و کلاً 2^n نفر هستند، پس (2^n-1) نفر حذف می شوند، یعنی (2^n-1) بازی انجام می گردد.

یا

$$\frac{2^n}{2}+\frac{2^{n-1}}{2}+\ldots+\frac{2^1}{2}+\frac{2^0}{2}=2^n-1$$

۷۶- یک سرمایه‌گذار در بازار بورس سهامی دارد که ارزش آن ۲۵ واحد است. او تصمیم گرفته است که سهم خود را در صورتیکه ارزش آن ۱۰ واحد کم شود و یا به ۴۰ واحد برسد بفروش برساند. اگر هر تغییر در قیمت به اندازه ۱ واحد با احتمال ۰/۵۵ افزایش و با احتمال ۰/۴۵ کاهش داشته باشد و همچنین تغییرات متوالی مستقل باشند، با چه احتمالی سرمایه گذار بصورت برنده بازنشست می شود.

حل: مسأله همان مثال ((نابودی قمارباز)) است.

$$P=\frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{x}}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{x+y}} \qquad x=10\text{،}\ y=15\text{،}\ p=0/55$$

$$\Rightarrow\ P_{(\text{برد})}=\frac{1-\left(\frac{9}{11}\right)^{10}}{1-\left(\frac{9}{11}\right)^{25}}=0/871$$

۷۷- A و B به پرتاب سکه می پردازند، A بازی را شروع می کند و آنقدر ادامه می دهد که خط ظاهر شود. در این حالت، B پرتاب را شروع می کند و او نیز آنقدر پرتاب می کند تا خط ظاهر شود، آنگاه سکه را به A می دهد و به همین ترتیب بازی ادامه می یابد. اگر p_1 احتمال آمدن شیر توسط A و p_2 احتمال شیر آمدن توسط B باشد و برنده بازی کسی باشد که:

الف) ۲ شیر بطور متوالی بیاورد.

ب) جمعاً ۲ شیر بیاورد.

ج) ۳ شیر بطور متوالی بیاورد.

د) جمعاً ۳ شیر بیاورد.

احتمال برنده شدن A درهر یک از حالات فوق را بدست آورید.

حل: الف)راه اول:

$P(A$ دو شیر متوالی بیاورد$)$

$$=p_1^2+\underbrace{\left[p_1(1-p_1)+(1-p_1)\right]}_{1-p_1^2}\underbrace{\left[p_2(1-p_2)+(1-p_2)\right]}_{1-p_2^2}\times p_1^2$$

$$+\underbrace{\left[p_1(1-p_1)+(1-p_1)\right]^2}_{(1-p_1^2)^2}\underbrace{\left[p_2(1-p_2)+(1-p_2)\right]^2}_{(1-p_2^2)^2}p_1^2+\cdots=\frac{p_1^2}{1-(1-p_1^2)(1-p_2^2)}$$

الف) راه دوم:

$$P(A)=p_1^2+[1-p_1^2]\,[1-p_2^2]\,P(A)\ \Rightarrow$$

$$P(A)=\frac{p_1^2}{1-(1-p_1^2)(1-p_2^2)}$$

ب) تا حدودی شبیه همان مسأله امتیازهاست ، با این تفاوت که ممکن است در طول بازی احتمال برد تغییر کند. توجه کنید که در مسأله امتیازها باید مجموع احتمال برد و باخت در هر مرحله برابر عدد ۱ باشد.

$$P(\text{شیر بیاورد } B \text{ قبل از } A)=\frac{p_1}{p_1+p_2(1-p_1)}=P(A)$$

$$P(\text{شیر بیاورد } A \text{ قبل از } B)=\frac{p_2(1-p_1)}{p_1+p_2(1-p_1)}=P(B)$$

p_A احتمال این است که A اولین شیر را بیاورد، هرگاه A بازی را شروع کند. حال برای بار دوم (دومین شیر)، اگر اولین شیر را A بیاورد چون باید آنقدر سکه را پرتاب کند تا خط بیاید پس باز هم A بازی را شروع می کند و در نتیجه احتمال موفقیت همان p_A می ماند. اما اگر قبل از شیر بدست آمده توسط A، B یک شیر بیاورد چون حالا B بازی را شروع می کند دیگر احتمال اینکه A شیر را بیاورد p_A نیست بلکه $\frac{p_1(1-p_2)}{p_1+p_2-p_1p_2}$ است. در نتیجه کلاً ۳ حالت داریم:

۱) A دو شیر متوالی اول را بیاورد، که احتمال آن برابر زیر است:

$$\frac{p_1}{(p_1+p_2-p_1p_2)}\times\frac{p_1}{(p_1+p_2-p_1p_2)}$$

۲) A اولین و سومین شیر را بیاورد و B دومین شیر را، که احتمال آن برابر است با:

$$\frac{p_1}{(p_1+p_2-p_1p_2)}\times\frac{p_2(1-p_1)}{(p_1+p_2-p_1p_2)}\times\frac{p_1(1-p_2)}{(p_1+p_2-p_1p_2)}$$

۳) A دومین و سومین شیر را بیاورد و B اولین شیر، که احتمال آن برابر است با:

$$\frac{p_2(1-p_1)}{(p_1+p_2-p_1p_2)}\times\frac{p_1(1-p_2)}{(p_1+p_2-p_1p_2)}\times\frac{p_1}{(p_1+p_2-p_1p_2)}$$

که احتمال موفقیت A جمع کل حالات بالا است.

ج)

$$P(\text{برنده } A)=P(\text{سه شیر متوالی})$$

$$=p_1^3+\left[1-p_1^3\right]\left[1-p_2^3\right]P(A)\ \Rightarrow\ P(A)=\frac{p_1^3}{1-(1-p_1^3)(1-p_2^3)}$$

د) مشابه قسمت ب افراز کنید.

۷۸- تاس A دارای ۴ وجه قرمز و ۲ وجه سفید و تاس B دارای ۲ وجه قرمز و ۴ وجه سفید است. یک سکه را پرتاب می کنیم، اگر شیر ظاهر شود بازی را با تاس A و اگر خط ظاهر شود با تاس B بازی را انجام می دهیم.

الف) نشان دهید که احتمال قرمز آمدن در هر پرتاب $\frac{1}{2}$ است.

ب) اگر دو پرتاب اولیه قرمز باشد احتمال اینکه نتیجه سومین پرتاب قرمز باشد چقدر است؟

ج) اگر در دو پرتاب اولیه قرمز ظاهر شود. احتمال اینکه تاس A پرتاب شده باشد را بدست آورید.

حل: الف)
$$P(\text{قرمز})=P(\text{قرمز}\,|\,\text{شیر})P(\text{شیر})+P(\text{قرمز}\,|\,\text{خط})P(\text{خط})=\left(\frac{4}{6}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{6}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

ب)
$$P(\text{پرتاب سوم قرمز}\,|\,\text{دو پرتاب اول قرمز})=P(R_3\,|\,R_1R_2)$$
$$=P(R_3\,|\,AR_1R_2)P(A\,|\,R_1R_2)+P(R_3\,|\,BR_1R_2)P(B\,|\,R_1R_2)$$
$$=\frac{4}{6}\times\frac{\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{1}{2}}{\left(\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{2}\right)}+\frac{2}{6}\times\frac{\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{2}}{\left(\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{1}{2}\right)}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$$

ج)
$$P(\text{تاس }A\,|\,\text{دو پرتاب اول قرمز})=P(A\,|\,R_1R_2)=\frac{P(R_1R_2\,|\,A)}{P(R_1R_2)}$$
$$=\frac{\left(\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}\right)\times\frac{1}{2}}{\left(\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{2}\right)}=\frac{4}{5}$$

۷۹- در ظرفی ۱۲ توپ داریم که ۴ تای آن سفید است. سه بازیکن A، B و C بطور متوالی بصورت ابتدا A سپس B و آنگاه C و دوباره A، B و C ... از ظرف یک توپ انتخاب می کنند. برنده کسی است که برای اولین بار توپ سفید بیرون آورد. احتمال برد برای هر بازیکن را در حالات زیر بدست آورید.

الف) هر توپ پس از انتخاب به ظرف برگردانده شود.

ب) توپهای انتخاب شده به ظرف برگردانده نشود.

حل: الف)
$$P(A)=\frac{4}{12}+\left(\frac{8}{12}\times\frac{8}{12}\times\frac{8}{12}\right)P(A)\ \Rightarrow\ \frac{\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^3}=\frac{9}{19}$$

$$P(B)=\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۴}{۱۲}+\left(\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۸}{۱۲}\right)P(B)\ \Rightarrow\ \frac{\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۳}}{۱-\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۳}}=\frac{۶}{۱۹}$$

$$P(C)=\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۴}{۱۲}+\left(\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۸}{۱۲}\right)P(C)\ \Rightarrow\ \frac{\frac{۲}{۳}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۳}}{۱-\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۳}}=\frac{۴}{۱۹}$$

می بینیم که احتمال برد به ترتیب کم می شود، ضمن اینکه مجموع احتمالات برابر یک است.

ب)

$$P(A)=\left(\frac{۴}{۱۲}\right)+\left(\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۷}{۱۱}\times\frac{۶}{۱۰}\times\frac{۴}{۹}\right)+\left(\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۷}{۱۱}\times\frac{۶}{۱۰}\times\frac{۵}{۹}\times\frac{۴}{۸}\times\frac{۳}{۷}\times\frac{۴}{۶}\right)=\frac{۷۷}{۱۶۵}$$

$$P(B)=\left(\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۴}{۱۱}\right)+\left(\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۷}{۱۱}\times\frac{۶}{۱۰}\times\frac{۵}{۹}\times\frac{۴}{۸}\right)+\left(\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۷}{۱۱}\times\frac{۶}{۱۰}\times\frac{۵}{۹}\times\frac{۴}{۸}\times\frac{۳}{۷}\times\frac{۲}{۶}\times\frac{۴}{۵}\right)=\frac{۵۳}{۱۶۵}$$

$$P(C)=\left(\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۷}{۱۱}\times\frac{۴}{۱۰}\right)+\left(\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۷}{۱۱}\times\frac{۶}{۱۰}\times\frac{۵}{۹}\times\frac{۴}{۸}\times\frac{۴}{۷}\right)+\left(\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۷}{۱۱}\times\frac{۶}{۱۰}\times\frac{۵}{۹}\times\frac{۴}{۸}\times\frac{۳}{۷}\times\frac{۲}{۶}\times\frac{۱}{۵}\times\frac{۴}{۴}\right)=\frac{۳۵}{۱۶۵}$$

۸۰- مسأله ۷۹ را بدین صورت تکرار کنید که هر بازیکن از ظرف متعلق به خود با ۱۲ توپ که ۴ تای آن سفید هستند انتخاب کند.

حل: الف) جواب برابر قسمت الف سوال ۷۹ است.

ب)

$$P(A)=\left(\frac{۴}{۱۲}\right)+\left[\left(\frac{۸}{۱۲}\right)^{۳}\times\frac{۴}{۱۱}\right]+\left[\left(\frac{۸}{۱۲}\right)^{۳}\left(\frac{۷}{۱۱}\right)^{۳}\times\frac{۴}{۱۰}\right]$$
$$+\cdots+\left[\left(\frac{۸\times۷\times۶\times\cdots\times۱}{۱۲\times۱۱\times\cdots\times۵}\right)^{۳}\times\frac{۴}{۴}\right]$$

۸۱- فرض کنید A و B دو زیر مجموعه مستقل و هم شانس از هر یک از ۲^n زیر مجموعه $S=\{۱,۲,\ldots,n\}$ باشند. نشان دهید که:

$$P=\{A\subset B\}=\left(\frac{۳}{۴}\right)^{n}$$

راهنمایی: اگر $N(B)$ نشان دهنده تعداد عضوهای B باشد. از رابطه زیر استفاده کنید.

$$P\{A\subset B\}=\sum_{i=۰}^{n}P\{A\subset B|N(B)=i\}P\{N(B)=i\}$$

حل:

$$P(A\subset B)=\sum_{i=0}^{n}P(A\subset B|N(B)=i)\,P(N(B)=i)$$

$$=\frac{\sum_{i=0}^{n}2^i\binom{n}{i}}{2^n\times 2^n}=\frac{\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}2^i\times 1^{n-i}}{4^n}=\frac{3^n}{4^n}=\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

۸۲- در مثال۵-۴ احتمال شرطی پیشامد اینکه i امین سکه انتخاب شده باشد به شرط اینکه همه n پرتاب اولیه شیر ظاهر شده است را بدست آورید.

حل:

$$P(\text{امین سکه انتخاب } i \,|\, \text{پرتاب اول شیر } n)=P(E_i|F_n)$$

$$=\frac{\frac{1}{k+1}\left(\frac{i}{k}\right)^n}{\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{j}{k}\right)^n}=\frac{\left(\frac{i}{k}\right)^n}{\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{j}{k}\right)^n}$$

۸۳- در قاعده توالی لاپلاس (مثال ۵-۴) آیا نتیجه پرتابهای متوالی مستقل هستند؟شرح دهید.

حل: خیر، بصورت کلی مستقل نیستند و فقط بصورت شرطی و با توجه به سکه انتخابی مستقل هستند.

۸۴- متهمی که توسط سه قاضی محاکمه می شود، گناهکار اعلام می شود اگر حداقل ۲ نفر رأی به گناهکاری او بدهند. فرض کنید وقتی که متهم واقعاً گناهکار باشد هریک از قضات بطور مستقل با احتمال ۰/۷ رأی به گناهکاری او بدهند و هرگاه متهم واقعاً بی گناه باشد احتمال رأی به گناهکاری توسط هر قاضی به ۰/۲ کاهش یابد. اگر ۷۰ درصد از متهمان گناهکار باشند، احتمال شرطی اینکه قاضی سوم رأی به گناهکاری بدهد را به شرط هر یک از حالات زیر بدست آورید.

الف) قاضی اول و دوم رأی به گناهکاری داده اند.

ب) یکی از قاضی اول و دوم رأی به گناهکاری و دیگری رأی به بی گناهی داده اند.

ج) قاضی اول و دوم هردو رأی به بی گناهی داده اند.

اگر E_i $(i=۱,۲,۳)$ نشان دهنده پیشامدی باشد که قاضی i ام رأی به گناهکاری بدهد. آیا این پیشامدها مستقلند؟ آیا پیشامدها بصورت مشروط مستقلند؟(شرح دهید).

حل: A_i = قاضی i ام رأی به گناهکاری بدهد؛ B =گناهکار بودن.

الف)

$$P(A_۳|A_۱A_۲)=$$

$$P(A_۳|BA_۱A_۲)P(B|A_۱A_۲)+P(A_۳|B^cA_۱A_۲)P(B^c|A_۱A_۲)$$

$$=۰/۷\times\frac{(۰/۷)^۲\times۰/۷}{(۰/۷)^۲\times۰/۷+(۰/۲)^۲\times۰/۳}+۰/۲\times\frac{(۰/۲)^۲\times۰/۳}{(۰/۲)^۲\times۰/۳+(۰/۷)^۲\times۰/۷}=\frac{۹۷}{۱۴۲}$$

ب)مشابه الف

$$P(A_۳|A_۱A_۲^c)=\frac{(۰/۷\times۰/۷\times۰/۳\times۰/۷)+(۰/۲\times۰/۲\times۰/۸\times۰/۳)}{(۰/۷\times۰/۳\times۰/۷)+(۰/۲\times۰/۸\times۰/۳)}=\frac{۱۵}{۲۶}$$

البته $P(A_۳|A_۲^cA_۱)$ نیز برابر همین خواهد شد.

ج)مشابه الف

$$P(A_۳|A_۱^cA_۲^c)=\frac{(۰/۷\times۰/۳\times۰/۳\times۰/۷)+(۰/۲\times۰/۸\times۰/۸\times۰/۳)}{(۰/۳\times۰/۳\times۰/۷)+(۰/۸\times۰/۸\times۰/۳)}=\frac{۳۳}{۱۰۲}$$

خیر این پیشامدها مستقل نیستند و فقط بصورت مشروط و با توجه به اینکه متهم واقعاً گناهکار یا بیگناه باشد مستقلند.

۸۵- فرض کنید n آزمایش مستقل که نتیجه هر کدام یکی از اعداد ۰، ۱ یا ۲ با احتمالهای $p_۰$ ، $p_۱$ و $p_۲$ می باشد $\left(\sum_{i=۰}^{۲}p_i=۱\right)$ را انجام می‌دهیم. احتمال اینکه دو نتیجه ۱ و ۲ حداقل یک بار ظاهر شوند را بدست آورید.

P(E) =P(حداقل یک بار ظاهر شود ۱ و ۲) = ۱-P (حداقل یکی از دو نتیجه ۱ و ۲ ظاهر نشود)

A_i: نتیجه i نباشد

$$\Rightarrow P(E)=۱-P(A_۱\cup A_۲)=۱-P(A_۱)-P(A_۲)+P(A_۱\cap A_۲)$$

$$=۱-(۱-p_۱)^n-(۱-p_۲)^n+(۱-p_۱-p_۲)^n$$

$$=۱-(p_۲+p_۳)^n-(p_۱+p_۳)^n+p_۳^n$$

فصل ٤
متغیرهای تصادفی

۱- دو توپ را به تصادف از ظرفی با ۸ توپ سفید، ۴ توپ سیاه و ۲ توپ نارنجی انتخاب می کنیم. فرض کنید برای هر توپ سیاه ۲ ریال جایزه و برای هر توپ سفید انتخاب شده ۱ ریال جریمه شویم. اگر X نشان دهنده میزان برد باشد مقادیر ممکن X و احتمال مربوط به هر مقدار را بدست آورید.

حل:

$$X=-2,-1,0,1,2,4$$

۱ سفید، ۱ نارنجی
$$P(X=-1)=\frac{\binom{8}{1}\binom{4}{0}\binom{2}{1}}{\binom{14}{2}}=\frac{16}{91}$$

۲ سفید
$$P(X=-2)=\frac{\binom{8}{2}\binom{4}{0}\binom{2}{0}}{\binom{14}{2}}=\frac{28}{91}$$

۱ سفید، ۱سیاه
$$P(X=1)=\frac{\binom{8}{1}\binom{4}{1}\binom{2}{0}}{\binom{14}{2}}=\frac{32}{91}$$

۲ نارنجی
$$P(X=0)=\frac{\binom{8}{0}\binom{4}{0}\binom{2}{2}}{\binom{14}{2}}=\frac{1}{91}$$

۲ سیاه
$$P(X=4)=\frac{\binom{8}{0}\binom{4}{2}\binom{2}{0}}{\binom{14}{2}}=\frac{6}{91}$$

۱ سیاه، ۱ نارنجی
$$P(X=2)=\frac{\binom{8}{0}\binom{4}{1}\binom{2}{1}}{\binom{14}{2}}=\frac{8}{91}$$

۲- دو تاس منظم را پرتاب می کنیم. اگر X نشان دهنده حاصل ضرب نتیجه دو تاس باشد مطلوب است محاسبه $P\{X=i\}$ برای $i=1,2,\ldots$.

حل:

$P(X=i)=?\qquad i=۱,۲,۳,۴,۵,۶,۸,۹,۱۰,۱۲,۱۵,۱۶,۱۸,۲۰,۲۴,۲۵,۳۰,۳۶$

$P(X=۱)=\frac{۱}{۳۶}\quad P(X=۲)=\frac{۲}{۳۶}\quad P(X=۳)=\frac{۲}{۳۶}\quad P(X=۴)=\frac{۳}{۳۶}$

$P(X=۵)=\frac{۲}{۳۶}\quad P(X=۶)=\frac{۴}{۳۶}\quad P(X=۸)=\frac{۲}{۳۶}\quad P(X=۹)=\frac{۱}{۳۶}$

$P(X=۱۰)=\frac{۲}{۳۶}\quad P(X=۱۲)=\frac{۴}{۳۶}\quad P(X=۱۵)=\frac{۲}{۳۶}\quad P(X=۱۶)=\frac{۱}{۳۶}$

$P(X=۱۸)=\frac{۲}{۳۶}\quad P(X=۲۰)=\frac{۲}{۳۶}\quad P(X=۲۴)=\frac{۲}{۳۶}\quad P(X=۲۵)=\frac{۱}{۳۶}$

$P(X=۳۰)=\frac{۲}{۳۶}\quad P(X=۳۶)=\frac{۱}{۳۶}$

برای مثال، حاصل ضرب ۴ زمانی مشاهده می شود که یکی از نتایج (۱،۴)، (۴،۱) و یا (۲،۲) حاصل شود و حاصل ضرب ۶ زمانی مشاهده می شود که یکی از نتایج (۶،۱)، (۱،۶)، (۳،۲) و یا (۲،۳) حاصل شود.

۳- سه تاس را پرتاب می کنیم، فرض کنید تمامی $۲۱۶=۶^۳$ نتایج ممکن هم شانس باشند. اگر X نشان دهنده جمع سه عدد حاصل شده در هر پرتاب باشد، احتمال مقادیری که X انتخاب می کند را بدست آورید.

حل:

$$P(X=۳)=\left(\frac{۱}{۶}\right)^۳\qquad (۱,۱,۱)$$

$$P(X=۴)=\binom{۳}{۱}\left(\frac{۱}{۶}\right)^۳\qquad (۱,۱,۲),(۱,۲,۱),(۲,۱,۱)$$

$$P(X=۵)=\binom{۳}{۱}\left(\frac{۱}{۶}\right)^۳+\binom{۳}{۱}\left(\frac{۱}{۶}\right)^۳\qquad (۱,۱,۳),(۱,۳,۱),(۳,۱,۱),(۱,۲,۲),(۲,۱,۲),(۲,۲,۱)$$

$$P(X=۶)=\left(\frac{۱}{۶}\right)^۳+\frac{۳!}{(۱!)^۳}\left(\frac{۱}{۶}\right)^۳+\frac{۳!}{۲!۱!}\left(\frac{۱}{۶}\right)^۳$$

$$\ldots,\ (X=۱۷)=\binom{۳}{۱}\left(\frac{۱}{۶}\right)^۳,\ P(X=۱۸)=\left(\frac{۱}{۶}\right)^۳$$

۴- ۵ مرد و ۵ زن را بر اساس امتیازی که در یک امتحان کسب می کنند، رتبه بندی می کنیم. فرض کنید هیچ دو امتیازی یکسان نباشد و تمامی !۱۰ حالت مختلف رتبه بندی هم شانس باشند. اگر X نشان دهنده بالاترین رتبه کسب شده توسط یک زن باشد (مثلاً $X=۱$ یعنی اینکه رتبه اول زن است) مطلوب است:

$$P\{X=i\}\qquad i=۱,۲,\ldots,۱۰$$

حل:

$$P(X=۲)=\frac{\binom{۵}{۱}\binom{۵}{۱}۸!}{۱۰!}=\frac{۵}{۱۸}\ ,\qquad P(X=۱)=\frac{\binom{۵}{۱}\times ۹!}{۱۰!}=\frac{۱}{۲}$$

$$P(X=۴)=\frac{\binom{۵}{۳}\binom{۵}{۱}۳!۶!}{۱۰!}=\frac{۵}{۸۴}\ ,\qquad P(X=۳)=\frac{\binom{۵}{۲}\binom{۵}{۱}۲!۷!}{۱۰!}=\frac{۵}{۳۶}$$

$$P(X=۶)=\frac{\binom{۵}{۵}\binom{۵}{۱}۵!۴!}{۱۰!}=\frac{۱}{۲۵۲}\ ,\qquad P(X=۵)=\frac{\binom{۵}{۴}\binom{۵}{۱}۴!۵!}{۱۰!}=\frac{۵}{۲۵۲}$$

۵- سکه ای را n مرتبه پرتاب می کنیم، اگر اختلاف بین تعداد شیرها و تعداد خطهای ظاهر شده را با X نشان دهیم. مقادیر ممکن X چه هستند؟

حل: اگر n زوج باشد، X هم زوج است و اگر n فرد باشد، X فرد است. با فرض اینکه A تعداد شیرها و B تعداد خطها باشد، داریم:

$$X=|A-B| \Rightarrow A>B \text{ فرض } \Rightarrow \begin{cases} A+B=n \\ A-B=X \end{cases} \Rightarrow A=\frac{X+n}{۲}$$

$$\Rightarrow P(X=x)=۲\binom{n}{A}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{A}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-A}=۲\binom{n}{\frac{n+x}{۲}}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n}$$

توجه داشته باشید که ضریب ۲ به این دلیل است که علاوه بر $A>B$، احتمال $A<B$ هم داریم.

در حالتی که A و B با هم برابر باشد، یعنی $A-B=۰$، داریم:

$$P(X=۰)=\binom{n}{\frac{n}{۲}}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n}$$

در کل، مقادیر ممکن برای X عبارتند از:

$$x=n-۲i \quad , \quad i=۰,۱,۲,\ldots,\left[\frac{n}{۲}\right]$$

البته اگر X بتواند مقادیر منفی را بگیرد (قدر مطلق نداشته باشیم)، تابع احتمال و مقادیر ممکن برای آن بصورت زیر است:

$$P(X=n)=\binom{n}{\frac{x+n}{۲}}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n} \quad x=n-۲i \quad i=۰,۱,\ldots,n$$

۶- در مسأله ۵ اگر سکه سالم باشد، برای n=۳ احتمالهای مربوط به مقادیر ممکن X را بدست آورید.

حل: با توجه به حل مسأله ۵ داریم:

$$X=|A-B|$$
$$P(X=۱)=۲\binom{۳}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}=\frac{۶}{۸} \quad , \quad P(X=۳)=۲\binom{۳}{۳}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}=\frac{۲}{۸}$$

ولی اگر $X=A-B$ تعریف شود، آنگاه X مقادیر ۳، ۱، ۱-، ۳- را می گیرد که تابع احتمال آن بصورت زیر است:

$$P(-۱)=P(۱)=\binom{۳}{۱}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}=\frac{۳}{۸} \qquad P(-۳)=P(۳)=\binom{۳}{۰}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}=\frac{۱}{۸}$$

۷- فرض کنید تاسی را دو مرتبه پرتاب می کنیم. متغیرهای تصادفی زیر چه مقادیری را می توانند اختیار کنند.

الف) بیشترین عددی که در دو پرتاب حاصل می شود.

ب) کمترین عددی که در دو پرتاب حاصل می شود.

ج) مجموع دو عدد حاصل شده.

د) عدد ظاهر شده اولین پرتاب منهای عدد ظاهر شده دومین پرتاب.

حل: الف) X=۱,۲,...,۶ ب) X=۱,۲,...,۶

ج) X=۲,۳,...,۱۲ د) X= -۵,-۴,...,۴, ۵

۸- اگر تاس مسأله ۷ سالم باشد، احتمالهای مربوط به متغیرهای تصادفی قسمت های (الف) تا (د) را بدست آورید.

حل: الف)

$$P(X=۱)=\frac{۱}{۳۶}\,,\ P(X=۲)=\frac{۳}{۳۶}\,,\ P(X=۳)=\frac{۵}{۳۶}\,,$$
$$P(X=۴)=\frac{۷}{۳۶}\,,\ P(X=۵)=\frac{۹}{۳۶}\,,\ P(X=۶)=\frac{۱۱}{۳۶}$$
$$P(X=i)=\frac{۲i-۱}{۳۶}$$

ب)

$$P(X=1)=\frac{11}{36},\ P(X=2)=\frac{9}{36},\ P(X=3)=\frac{7}{36},$$
$$P(X=4)=\frac{5}{36},\ P(X=5)=\frac{3}{36},\ P(X=6)=\frac{1}{36}$$
$$P(X=i)=\frac{13-2i}{36}$$

ج)

$$P(X=2)=\frac{1}{36},\ P(X=3)=\frac{2}{36},\ P(X=4)=\frac{3}{36},$$
$$P(X=5)=\frac{4}{36},\ \dots,\ P(X=10)=\frac{3}{36},\ P(X=11)=\frac{2}{36},$$
$$P(X=12)=\frac{1}{36}$$
$$P(X=i)=\frac{6-|i-7|}{36}$$

د)

$$P(X=+5)=\frac{1}{36},\ P(X=+4)=\frac{2}{36},\ P(X=+3)=\frac{3}{36},$$
$$P(X=+2)=\frac{4}{36},\ P(X=+1)=\frac{5}{36},\ P(X=0)=\frac{6}{36},$$
$$P(X=i)=P(X=-i)=\frac{6-|i|}{36}$$

۹- مثال ۱-۲ را وقتی که توپها با جایگذاری انتخاب می شوند حل کنید.

حل:

P(حداقل یکی از توپها بزرگتر از ۱۶) = ۱ − P(هیچکدام بزرگتر از ۱۶ نباشند)

$=1-$ P(هر سه کوچکتر از ۱۷) $=1-\left(\frac{16}{20}\right)^3=0/488$

۱۰- در مثال ۱-۴ ، احتمال شرطی اینکه مبلغ i ریال برنده شویم به شرط اینکه مبلغی برنده شده باشیم را بدست آورید. (برای ... ,i=۱,۲,۳).

حل:

P P(X=i) = (مبلغی برنده شده باشیم | i ریال برنده شویم) $=P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$$P(X=3)=\frac{\frac{1}{165}}{\frac{55}{165}}=\frac{1}{55},\ P(X=2)=\frac{\frac{15}{165}}{\frac{55}{165}}=\frac{15}{55},\ P(X=1)=\frac{\frac{39}{165}}{\frac{55}{165}}=\frac{39}{55}$$

۱۱- الف) یک عدد صحیح N را از مجموعه $\{۱,۲,\dots,۱۰^{۳}\}$ به تصادف انتخاب می کنیم بطوریکه هر عدد شانس مساوی انتخاب شدن داشته باشد. احتمال اینکه عدد N بر ۳ قابل قسمت باشد چقدر است؟ چنانچه بجای $۱۰^{۳}$، عدد ۱۰^{k} جایگزین شود و k بزرگ و بزرگتر شود. آنگاه پاسخ ها چگونه تغییر می‌یابند.

ب) تابعی مهم در نظریه اعداد وجود دارد که خصوصیات آن در ارتباط با احتمالاً مهمترین مسأله حل نشده ریاضیات، یعنی فرضیه- ریمان مطرح است. این تابع به نام تابع موبیوس $\mu(n)$ معروف است که برای همه مقادیر صحیح مثبت n بصورت زیر تعریف می شود: n را به فاکتورهای اول تجزیه می کنیم اگر یکی از فاکتورهای اول در تجزیه تکرار شود (مانند $۱۲ = ۲\times۲\times۳$ یا $۴۹ = ۷\times۷$) آنگاه $\mu(n)$ برابر صفر تعریف می شود. حال فرض کنید عدد N را به تصادف از مجموعه اعداد $\{۱,۲,\dots,۱۰^{k}\}$ وقتی که k بزرگ باشد انتخاب می کنیم، مطلوب است محاسبه $P\{\mu(N)=۰\}$ وقتی که $k \to \infty$.

راهنمایی: برای محاسبه $P\{\mu(N)\neq۰\}$ *از رابطه زیر استفاده کنید.*

$$\prod_{i=۱}^{\infty} \frac{P_i^{۲}-۱}{P_i} = \left(\frac{۳}{۴}\right)\left(\frac{۸}{۹}\right)\left(\frac{۲۴}{۲۵}\right)\dots = \frac{۶}{\pi^{۲}}$$

وقتی که P_i، عدد اول i ام است. (عدد ۱ را عدد اول در نظر نمی گیریم).

حل: الف)

$$P(\text{بخش پذیری بر ۳}) = \frac{\left[\frac{۱۰۰۰}{۳}\right]}{۱۰۰۰} = \frac{۳۳۳}{۱۰۰۰} = ۰/۳۳۳$$

$$\lim_{k\to\infty} P(A) = \frac{\left[\frac{۱۰^{k}}{۳}\right]}{۱۰^{k}} = \frac{۱}{۳}$$

ب)با توجه به حل الف داریم:

$$P(\text{بر ۴ بخش پذیر نباشد}) = ۱-\frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

$$P(\mu(N)=۰) = ۱-P(\mu(N)\neq۰)$$

$$=۱-P(\text{بر ۴ بخش پذیر نباشد} \cap \text{بر ۹ بخش پذیر نباشد} \cap \dots)$$

$$=۱-\left(\frac{۳}{۴}\times\frac{۸}{۹}\times\frac{۲۴}{۲۵}\times\dots\right) = ۱-\frac{۶}{\pi^{۲}}$$

۱۲- در بازی ((دو انگشت مورا)) دو بازیکن یک یا دو انگشت خود را همزمان نشان داده و در همان حال حدس می زنند که طرف مقابل چند انگشت نشان می دهد. اگر فقط یکی از بازیکن ها درست حدس بزند او به اندازه جمع انگشتهایی که نشان داده شده جایزه می گیرد. اگر هر دو بازیکن درست حدس بزنند و یا هیچکدام حدس صحیح نزنند آنگاه هیچ جایزه ای داده نمی شود. یکی از بازیکن ها را در نظر گرفته و میزان جایزه ای که در یک بازی به او تعلق می گیرد را با X نشان دهید.

الف) اگر بازیکن ها بطور مستقل حدس بزنند و هر یک از چهار حالت نشان دادن انگشتها هم شانس باشند، مقادیر مختلف X و احتمال های مربوطه را بدست آورید.

ب) اگر بازیکن ها بطور مستقل حدس بزنند و هر بازیکن تعداد انگشتانی را نشان بدهد که حدس می زند طرف مقابل نشان خواهد داد و بعلاوه نشان دادن یک انگشت یا دو انگشت هم شانس باشد، مقادیر X و احتمال های مربوطه را بدست آورید.

حل: دقت کنید که یکی از بازیکن ها را در نظر گرفته و احتمالات را برای او حساب می کنیم.

الف) $X=۴$ ؛ یعنی اولی دو انگشت، دومی دو انگشت، اولی درست بگوید، دومی غلط:

$$P(X=۴)=P(X=-۴)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۱۶}$$

$$P(X=۳)=P(X=-۳)=\left[\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\right]\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۸} \quad ؛$$

$$P(X=۲)=P(X=-۲)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۱۶}$$

$$P(X=۱)=P(X=-۱)=۰$$

$$P(X=۰)=\left[\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\right]=\frac{۱}{۲}$$

($P(X=۰)$ یعنی یا هر دو درست گفته اند یا هر دو غلط که پاسخ برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

ب) در این حالت امکان ندارد که شخصی جایزه بگیرد، چون یا هر دو درست حدس می زنند یا هر دو غلط. نتایج(۱و۱) و (۲و۲) وقتی حاصل می شود که هر دو درست حدس زده باشند و نتایج (۲و۱) و (۱و۲) هنگامیکه هر دو غلط حدس بزنند. پس تنها مقدار برای X، صفر است و $P(X=۰)=۱$.

۱۳- یک بازار یاب برای فروش کتاب با دو نفر وعده ملاقات دارد. در ملاقات اول با احتمال ۰/۳ می تواند کتاب را بفروشد و در ملاقات دوم مستقل از نتیجه ملاقات اول با احتمال۰/۶ قادر خواهد بود که کتاب را

بفروش برساند. هر فروش با شانس برابر می تواند نوع با جلد شومیز و با قیمت ۱۰۰۰ ریال و یا نوع معمولی با قیمت ۵۰۰ ریال باشد. تابع احتمال میزان کل فروش (X) بر حسب ریال را بدست آورید.

حل:

$$X=0,500,1000,1500,2000$$

$$P(X=0)=(1-0/3)(1-0/6)=0/7\times 0/4=0/28$$

$$P(X=500)=(0/7\times 0/6+0/3\times 0/4)\frac{1}{2}=0/27$$

$$P(X=1000)=(0/7\times 0/6+0/3\times 0/4)\times\frac{1}{2}+(0/3\times 0/6\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})=0/315$$

$$P(X=1500)=0/3\times 0/6\times\left[\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right]=0/09$$

$$P(X=2000)=/3\times 0/6\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=0/045$$

دقت کنید که مجموع احتمالات برابر ۱ خواهد بود.

۱۴- ۵ عدد متفاوت را به تصادف بین بازیکن های ۱ تا ۵ تقسیم می کنیم. وقتی که دو بازیکن اعداد خود را مقایسه می کنند کسی که عدد بزرگتری دارد برنده محسوب می شود. ابتدا بازیکن ۱ و ۲، اعداد خود را مقایسه می کنند، سپس برنده آنها با بازیکن شماره ۳ و به همین ترتیب بازی ادامه می یابد . اگر X نشان دهنده تعداد دفعاتی باشد که بازیکن ۱ برنده است. مطلوب است محاسبه :

$$P\{X=i\}\qquad i=0,1,2,3,4$$

حل:

$$P(X=0)=\frac{1\times 4!}{5!}+\frac{1\times 3\times 3!}{5!}+\frac{1\times 2\times 3!}{5!}+\frac{1\times 1\times 3!}{5!}=\frac{1}{2}$$

توضیح: احتمال صفر برد، یعنی: نفر اول عدد ۱ داشته باشد، بقیه !۴ حالت دارند، یا نفر اول عدد ۲ داشته باشد، نفر دوم عدد ۳ یا ۴ یا ۵ (۳ حالت) و ۳ نفر بقیه، !۳ حالت دارند؛ یا نفر اول عدد ۳ داشته باشد و ... .

$$P(X=1)=\frac{1\times 1\times 3!}{5!}+\frac{1\times 2\times 2\times 2!}{5!}+\frac{1\times 3\times 1\times 2!}{5!}=\frac{1}{6}$$

$$P(X=2)=\frac{1\times 2\times 1\times 2\times 1}{5!}+\frac{1\times 3\times 2\times 1\times 1}{5!}=\frac{1}{12}\ ;$$

$$P(X=3)=\frac{1\times 3\times 2\times 1\times 1}{5!}=\frac{1}{20}\ ;\ \ P(X=4)=\frac{1\times 4!}{5!}=\frac{1}{5}$$

۱۵- مؤسسه ملی بسکتبال (NBA) که شامل ۱۱ تیم است، بدترین رکوردهای برد و باخت در شرط بندی‌های سال گذشته را را منتشر کرده است. ۶۶ توپ را در یک ظرف قرار داده هر یک از این توپها با

نام یکی از تیم ها نامگذاری شده، بطوریکه ۱۱ توپ به نام تیمی است که بدترین رکورد را داشته، ۱۰ توپ به نام تیمی که دومین رکورد بد را داشته، ۹ توپ به نام تیمی که سومین رکورد بد را داشته، و به همین ترتیب یک توپ به نام تیمی که که یازدهمین رکورد بد را بدست آورده نامگذاری شده اند. یک توپ را به تصادف انتخاب می کنیم، تیمی که نامش روی توپ است اولین حق انتخاب را برای ورود به مسابقات دارد. توپ دیگری را انتخاب می کنیم واگر متعلق به تیم متفاوتی باشد آنگاه دومین حق انتخاب به او داده می شود (اگر توپ انتخاب شده متعلق به تیم اولی باشد آن را نادیده گرفته و توپ دیگری انتخاب می‌کنیم این عمل آنقدر ادامه می یابد تا تیم دوم انتخاب شود). بالاخره توپ دیگری را انتخاب نموده و چنانچه متفاوت با دو تیم قبلی باشد حق انتخاب سوم به او داده می شود. بقیه حق انتخاب های ۴ تا ۱۱ را به ۸ تیمی که انتخاب نشدند به ترتیب عکس رکورد برد و باخت آنها می دهند. بطور مثال اگر تیم با بدترین رکورد در سه انتخاب اول نباشد آنگاه آن تیم حق انتخاب چهارم را دریافت می دارد. اگر X نشان دهنده حق انتخاب تیمی با بدترین رکورد باشد، تابع احتمال X را بدست آورید.

حل: $P(X=۱)=P$ (بدترین تیم انتخاب اول را کسب کند) $=\frac{۱۱}{۶۶}=\frac{۱}{۶}$

F: اولین حق انتخاب

$$P(X=۲)=\sum_{i=۱}^{۱۰} P(X=۲|F=i)P(F=i)$$

$$\sum_{i=۱}^{۱۰} \frac{۱۱}{۶۶-i}\times\frac{i}{۶۶}$$

باید توجه داشت که مقدار $\frac{۱۱}{۶۶-i}$ به سادگی بدست نمی آید و باید روی تعداد توپهای از نوع i که قبل از توپ بدترین تیم بیرون آمده، افراز می کنیم. البته با توجه به اینکه درهر مرحله از برداشتن توپها، انتخاب ۱۱ توپ بدترین تیم و $(۵۵-i)$ توپ دیگر هم شانس است، احتمال اینکه یکی از ۱۱ توپ بدترین تیم از $(۵۵-i)$ توپ دیگر زودتر انتخاب شود، $\frac{۱۱}{۶۶-i}$ است.

S: دومین انتخاب

$$P(X=۳)=\sum_{i=۱}^{۱۰}\sum_{\substack{j=۱\\ i\neq j}}^{۱۰} P(X=۳|F=i,S=j)P(F=i,S=j)$$

$$\sum_{i=۱}^{۱۰}\sum_{\substack{j=۱\\ i\neq j}}^{۱۰} \frac{۱۱}{۶۶-i-j}\times\left(\frac{i}{۶۶}\times\frac{j}{۶۶-i}\right)$$

$$P(X=۴)=۱-P(X=۱)-P(X=۲)-P(X=۳)$$

۱۶- در مسأله ۱۵، فرض کنید تیم شماره ۱، تیمی با بدترین رکورد باشد و تیم شماره ۲، بدترین رکورد دوم را داشته باشد و ... اگر Y_i نشان دهنده تیمی باشد که حق انتخاب i ام را دریافت می دارد. یعنی اگر اولین توپ انتخاب شده متعلق به تیم شماره ۳ باشد، آنگاه $Y_1 = ۳$ است. تابع احتمال الف) Y_1 ، ب) Y_2 ، ج) Y_3 را بدست آورید.

حل:

$$P(Y_1 = i) = \frac{i}{۶۶}$$

$$P(Y_2 = i) = \sum_{i \neq j} P(Y_2 = i | F = j)\, P(F = j) = \sum_{i \neq j} \frac{j}{۶۶}\, \frac{i}{۶۶ - j}$$

$$P(Y_3 = i) = \sum\sum_{i \neq j \neq k} P(Y_3 = i | F = j, S = k) P(F = j, S = k)$$

$$= \sum\sum_{i \neq j \neq k} \frac{j}{۶۶} \times \frac{k}{۶۶ - j} \times \frac{i}{۶۶ - k - j}$$

۱۷- فرض کنید که تابع توزیع تجمعی X بصورت زیر باشد:

$$F(b) = \begin{cases} ۰ & b < ۰ \\ \frac{b}{۴} & ۰ \leq b < ۱ \\ \frac{۱}{۲} + \frac{b - ۱}{۴} & ۱ \leq b < ۲ \\ \frac{۱۱}{۱۲} & ۲ \leq b < ۳ \\ ۱ & b \geq ۳ \end{cases}$$

الف) $P\{X = i\}$، $(i = ۱, ۲, ۳)$، را بدست آورید.

ب) $P\left\{\frac{۱}{۲} < X < \frac{۳}{۲}\right\}$ را محاسبه کنید.

حل: الف)

$$P(X = b) = P(X \leq b) - P(X < b) = F(b) - \lim_{n \to \infty} (F(b - \frac{۱}{n}))$$

$$P(X = ۱) = F(۱) - \lim_{n \to \infty} F(۱ - \frac{۱}{n}) = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۴} \text{ ؛}$$

$$P(X=۲)=F(۲)-\lim_{n\to\infty}F(۲-\frac{۱}{n})=\frac{۱۱}{۱۲}-\frac{۱}{۲}-\frac{۲-۱}{۴}=\frac{۱}{۶}$$

$$P(X=۳)=F(۳)-\lim_{n\to\infty}F(۳-\frac{۱}{n})=۱-\frac{۱۱}{۱۲}=\frac{۱}{۱۲}$$

ب)

$$P(\frac{۱}{۲}<X<\frac{۳}{۲})=\lim_{n\to\infty}F\left(\frac{۳}{۲}-\frac{۱}{n}\right)-F\left(\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۱}{۲}+\frac{\frac{۳}{۲}-۱}{۴}-\frac{۱}{۸}=\frac{۱}{۲}$$

۱۸- سکه ای منظم را ۴ مرتبه بطور مستقل پرتاب می کنیم. اگر X نشان دهنده تعداد شیرهای ظاهر شده باشد. تابع احتمال متغیر تصادفی X-۲ را رسم کنید.

حل:

$$Y=X-۲:-۲,-۱,۰,۱,۲\ ؛$$

$$Y=X-۲ \Rightarrow P(Y=i)=P(X-۲=i)=P(X=i+۲)=\binom{۴}{i+۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)^۴$$

$$P(Y=-۲)=P(X=۰)=\frac{۱}{۱۶}$$

$$P(Y=-۱)=P(X=۱)=\frac{۴}{۱۶}$$

$$P(Y=۰)=P(X=۲)=\frac{۶}{۱۶}$$

$$P(Y=۱)=P(X=۳)=\frac{۴}{۱۶}$$

$$P(Y=۲)=P(X=۴)=\frac{۱}{۱۶}$$

۱۹-اگر تابع توزیع تجمعی X بصورت زیر داده شود:

$$F(b)=\begin{cases} ۰ & b<۰ \\ \frac{۱}{۲} & ۰\le b<۱ \\ \frac{۳}{۵} & ۱\le b<۲ \\ \frac{۴}{۵} & ۲\le b<۳ \\ \frac{۹}{۱۰} & ۳\le b<۳/۵ \\ ۱ & b\ge ۳/۵ \end{cases}$$

تابع احتمال X را بدست آورید.

حل: با توجه به رابطه روبرو:

$$P(X=i)=P(X\le i)-P(X<i)=F(i)-\lim_{n\to\infty}F\left(i-\frac{۱}{n}\right)$$

$$P(X)=\begin{cases}\frac{۱}{۲} & x=۰ \quad P(X=۰)=\frac{۱}{۲}-۰=\frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۱۰} & x=۱ \quad P(X=۱)=\frac{۳}{۵}-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۱۰}\\ \frac{۱}{۵} & x=۲\\ \frac{۱}{۱۰} & x=۳\\ \frac{۱}{۱۰} & x=۳/۵\end{cases}$$

۲۰- یک کتاب بازی های برد و باخت، استراتژی برد را در یک بازی بصورت زیر تجویز می کند. این کتاب پیشنهاد می دهد که یک بازیکن ۱ ریال روی رنگ قرمز شرط بندی کند، اگر رنگ قرمز ظاهر شود، (که احتمال $\frac{۱۸}{۳۸}$ دارد). آنگاه وی ۱ ریال جایزه اش را بردارد و متوقف شود. اگر او بازنده شد (که احتمال $\frac{۲۰}{۳۸}$ دارد) بایستی یک ریال دیگر روی رنگ قرمز در دور بعدی شرط بندی نموده و سپس بازی را متوقف نماید. اگر X نشان دهنده میزان برد وی باشد،

الف) $P\{X>۰\}$ را بدست آورید.

ب) آیا قانع هستید که استراتژی مطرح شده یک استراتژی برد است؟ پاسخ خود را شرح دهید.

ج) $E\{X\}$ را بدست آورید.

حل: الف) $P(X>۰)=P(X=۱)=\frac{۱۸}{۳۸}$

ب) خیر، چون امید ریاضی میزان برد، منفی است. (مقدار قسمت ج)

ج) $X=۱,۰,-۲ \Rightarrow E(X)=\sum xp(x)$

$$=\left(۱\times\frac{۱۸}{۳۸}\right)+\left(۰\times\frac{۱۸}{۳۸}\times\frac{۲۰}{۳۸}\right)+\left(-۲\times\left(\frac{۲۰}{۳۸}\right)^۲\right)=-۰/۰۸$$

۲۱- چهار اتوبوس که حامل ۱۴۸ دانش آموز از یک مدرسه هستند به یک استادیوم فوتبال وارد می شوند. اتوبوسها به ترتیب حامل ۴۰، ۳۳، ۲۵ و ۵۰ دانش آموز هستند. یک دانش آموز را به تصادف انتخاب نموده، فرض کنید X نشان دهنده تعداد دانش آموزانی باشد که در اتوبوسی بوده اند که این دانش‌آموز انتخاب شده است. یکی از چهار راننده را نیز به تصادف انتخاب می کنیم، فرض کنید Y نشان دهنده تعداد دانش‌آموزان اتوبوس آن راننده باشد.

الف) کدامیک از مقادیر $E[X]$ و $E[Y]$ را فکر می کنید بزرگتر هستند؟ چرا؟

ب) مقادیر $E[X]$ و $E[Y]$ را محاسبه کنید.

حل: الف) قاعدتاً باید $E(X)$ بزرگتر باشد، چرا که وزن بیشتری از احتمال، به اتوبوس های با سرنشین بیشتر اختصاص داده است.

ب)
$$E(X)=\sum xp(x)=\left(۴۰\times\frac{۴۰}{۱۴۸}\right)+\left(۳۳\times\frac{۳۳}{۱۴۸}\right)+\left(۲۵\times\frac{۲۵}{۱۴۸}\right)+\left(۵۰\times\frac{۵۰}{۱۴۸}\right)=۳۹/۲۸$$
$$E(Y)=\frac{۱}{۴}(۵۰+۲۵+۳۳+۴۰)=۳۷$$

۲۲- فرض کنید، ۲ تیم یک سری مسابقه با یکدیگر بدهند و وقتی که یکی از تیم ها i مرتبه برنده شد بازی متوقف گردد. اگر در هر بازی، تیم A با احتمال p برنده شود، امید ریاضی تعداد بازیها را در حالات الف)$i=۲$ و ب)$i=۳$ بدست آورید. همچنین در هر دو حالت نشان دهید که مقادیر امید ریاضی وقتی حداکثر می شوند که $p=\frac{۱}{۲}$ باشد.

حل: الف)
$$i=۲ \Rightarrow X=۲,۳؛$$
$$E(X)=۲\times\left[p^{۲}+(۱-p)^{۲}\right]+۳\times\binom{۲}{۱}\left[p^{۲}(۱-p)+p(۱-p)^{۲}\right]$$
$$=-۲p^{۲}+۲p+۲$$

توجه کنید که در حالتی که ۳ بازی انجام شود، بازی سوم را یکی از دو تیم می برد و لذا تعداد $\binom{۲}{۱}$ حالت برای دو بازی قبل می ماند. برای امید ریاضی بیشینه داریم:

$$\frac{dE(X)}{dp}=۰ \Rightarrow -۴p+۲=۰ \Rightarrow p=\frac{۱}{۲}$$

ب)

$$i=3 \Rightarrow X=3,4,5 \Rightarrow$$

$$E(X)=3\times\left[p^{3}+(1-p)^{3}\right]+4\times\binom{3}{1}\left[(1-p)^{3}p+p^{3}(1-p)\right]$$

$$+5\times\binom{4}{2}\left[(1-p)^{3}p^{2}+p^{3}(1-p)^{2}\right]=A$$

$$\frac{dE(X)}{dp}=0 \Rightarrow \frac{dA}{dp}=0 \Rightarrow p=\frac{1}{2}$$

تذکر: همانطور که از راه حل پیداست، مسأله با استفاده از یک متغیر تصادفی ((بینم منفی)) حل می شود.

۲۳- فرض کنید ۱۰۰۰ دلار سرمایه دارید و فروشنده ای محصول خود را به ازای هر اونس ۲ دلار به فروش می رساند. در نظر بگیرید که بعد از یک هفته فروشنه محصول خود را برای هر اونس با شانس برابر به مبلغ یک دلار یا ۴ دلار به فروش رساند.

الف) اگر هدف شما حداکثر نمودن متوسط پولی باشد که در آخر هفته دارید، چه راهبردی را باید به کار ببرید؟

ب) اگر هدف شما حداکثر نمودن میزان محصولی باشد که در آخر هفته صاحب آن هستید چه راهبردی را باید انتخاب کنید؟

حل: دو راهبرد اصلی در پیش روی ماست.

۱- در ابتدای هفته همه ۱۰۰۰ دلار را از محصول بخریم که در اینصورت ۵۰۰ محصول خریده ایم.

۲- انتهای هفته محصول مورد نظر را بخریم که در اینصورت با احتمال $\frac{1}{2}$ ، تعداد ۲۵۰ محصول ۴ دلاری و با احتمال $\frac{1}{2}$ ، تعداد ۱۰۰۰ محصول یک دلاری می خریم.

اگر بخواهیم میزان سرمایه در دسترس را حداکثر کنیم روش اول بهتر است چون اگر در انتهای هفته محصولی بخریم، مطمئناً ارزش پول ما در پایان هفته همان ۱۰۰۰ دلار است. زیرا چه محصول پایان هفته ۱ دلار باشد و چه ۴ دلار، ما به اندازه ۱۰۰۰ دلار در آخر هفته می توانیم خرید کنیم. ولی اگر در ابتدای هفته بخریم، امید ریاضی پول در دسترس ما برابر با ۱۲۵۰ است. (توجه کنید که اگر در ابتدای هفته بخریم، ۵۰۰ محصول خریده ایم).

روش اول

$$E(X_1)=[500\times4]\times\frac{1}{2}+[500\times1]\times\frac{1}{2}=1250$$

روش دوم　$E(X_{۲})=[۲۵۰\times۴]\times\frac{۱}{۲}+[۱۰۰۰\times۱]\times\frac{۱}{۲}=۱۰۰۰$

اگر بخواهیم تعداد محصول در دسترس را حداکثر کنیم روش دوم بهتر است. زیرا اگر از روش اول استفاده کنیم تعداد محصولات ما در پایان هفته دقیقاً ۵۰۰ عدد است ولی اگر از روش دوم استفاده کنیم، امید ریاضی میزان محصولات ما برابر با ۶۲۵ می باشد.

$E(Y_{۱})=۵۰۰$

$E(Y_{۲})=۱۰۰۰\times\frac{۱}{۲}+۲۵۰\times\frac{۱}{۲}=۶۲۵$

البته می توان راهبردهای دیگری از ترکیب راهبردهای ۱و۲ ایجاد نمود که در تمامی آنها متوسط سود و تعداد محصولات بین مقادیر این دو روش خواهد بود.

۲۴- A و B بازی زیر را انجام می دهند: A یکی از دو عدد ۱ یا ۲ را می نویسد و B بایستی حدس بزند که کدام عدد نوشته شده است. اگر عددی را که A می نویسد i (i=۱,۲) باشد و B صحیح حدس بزند، آنگاه B ، i امتیاز از A می گیرد. اگر B غلط حدس بزند او $\frac{۳}{۴}$ امتیاز به A می دهد. هرگاه B با احتمال p حدس بزند که ۱ نوشته شده و با احتمال (p-۱) حدس بزند که ۲ نوشته شده است. امید ریاضی امتیازهای او را در حالات زیر بدست آورید.

الف) A عدد ۱ را نوشته است.

ب) A عدد ۲ را نوشته است.

چه مقداری از p حداقل میزان امتیاز B را حداکثر می کند؟ و این حداکثر مقدار چقدر است؟ (توجه کنید که امید ریاضی امتیاز B نه تنها بستگی به p دارد بلکه بستگی به اینکه A چه عددی را می نویسد نیز دارد).
حال فرض کنید بازیکن A نیز با احتمال q عدد ۱ را بنویسد. امید ریاضی میزان امتیازی که وی از دست می دهد را در حالات زیر بدست آورید.

ج) B عدد ۱ را انتخاب کند.

د) B عدد ۲ را انتخاب کند.

چه مقداری از q حداکثر امتیاز از دست داده A را حداقل می کند. نشان دهید که حداقل مقدار بیشترین امتیاز از دست داده A با حداکثر مقدار کمترین امتیاز بدست آمده توسط B برابر هستند. این نتیجه بعنوان ((قضیه مینماکس)) شناخته می شود که ابتدا توسط ریاضیدان مشهور جان- ون- نیومن بعنوان نتیجه اساسی نظریه بازیها بنیانگذاری شد و مقدار فوق، ارزش بازی برای بازیکن B نامیده می شود.

حل: الف) $E(X)=\sum x\,p(x)=(1\times p)+\left(-\frac{3}{4}\right)(1-p)$

ب) $E(X)=\sum x\,p(x)=2\times(1-p)+p\times\left(-\frac{3}{4}\right)$

ج) $E(X)=\sum x\,p(x)=q(-1)+\left(\frac{3}{4}\right)(1-q)$

د) $E(X)=\sum x\,p(x)=(-2)(1-q)+q\left(\frac{3}{4}\right)$

برای محاسبه مقداری از p که حداقل امتیاز B را حداکثر می کند، داریم:

$$E(X|A=1)=E(X|A=2)\ \Rightarrow\ \frac{7}{4}p-\frac{3}{4}=2-\frac{11}{4}p\Rightarrow \frac{18}{4}p=\frac{11}{4}\ \Rightarrow\ p=\frac{11}{18}$$

برای فهم بهتر، دو خط $\frac{7}{4}p-\frac{3}{4}$, $2-\frac{11}{4}p$ را در نموداری با محور افقی p رسم کنید.

با قرار دادن مقدار p در معادله ((الف)) یا ((ب)) داریم:

$$E(X)=p-\frac{3}{4}(1-p)=\frac{7}{4}p-\frac{3}{4}=\frac{7}{4}\left(\frac{11}{18}\right)-\frac{3}{4}=\frac{23}{72}$$

حداقل مقدار حداکثر امتیاز از دست داده A هم به همین صورت محاسبه می شود.

۲۵- یک ماشین سرگرمی دارای سه گردونه است که روی هر کدام ۲۰ علامت بصورت شکل های پرتقال، لیمو، آلو، آلبالو، زنگوله و شمش قرار دارد که تعداد آنها بصورت زیر تنظیم شده است:

	گردونه ۱	گردونه ۲	گردونه ۳
آلبالو	۷	۷	۰
پرتقال	۳	۷	۶
لیمو	۳	۰	۴
آلو	۴	۱	۶
زنگوله	۲	۲	۳
شمش	۱	۳	۱
جمع	۲۰	۲۰	۲۰

بر اساس جدول فوق مثلاً در گردونه ۱، ۷ علامت آلبالو، ۳ علامت پرتقال و ... قرار دارد. میزان بر دو باخت در یک شرط بندی این بازی نیز بر اساس جدول زیر تعیین گردیده است.

گردونه ۱	گردونه ۲	گردونه ۳	میزان برد و باخت
شمش	شمش	شمش	۶۰
زنگوله	زنگوله	زنگوله	۲۰
زنگوله	زنگوله	شمش	۱۸
آلو	آلو	آلو	۱۴
پرتقال	پرتقال	پرتقال	۱۰
پرتقال	پرتقال	شمش	۸
آلبالو	آلبالو	هر شکل دیگر	۴
آلبالو	غیر ازآلبالو	هر شکل دیگر	۲
غیر از حالات فوق			۱-

اگر بازیکنی یک مرتبه بازی را انجام دهد و هر گردونه بطور مستقل گردش کند امید ریاضی میزان برد را بدست آورید.

حل:

$$E(X)=\sum x\,p(x)=\left(60\times\frac{1}{20}\times\frac{3}{20}\times\frac{1}{20}\right)+\left(20\times\frac{2}{20}\times\frac{2}{20}\times\frac{3}{20}\right)$$
$$+\left(18\times\frac{2}{20}\times\frac{2}{20}\times\frac{1}{20}\right)+\left(14\times\frac{4}{20}\times\frac{1}{20}\times\frac{6}{20}\right)+\left(10\times\frac{3}{20}\times\frac{7}{20}\times\frac{6}{20}\right)$$
$$+\left(8\times\frac{3}{20}\times\frac{7}{20}\times\frac{1}{20}\right)+\left(4\times\frac{7}{20}\times\frac{7}{20}\times\frac{20}{20}\right)+\left(2\times\frac{7}{20}\times\frac{13}{20}\times\frac{20}{20}\right)$$
$$+\left[(-1)\times\left(1-\text{مجموع احتمالات بالا}\right)\right]$$

۲۶- عددی از ۱ تا ۱۰ را به تصادف انتخاب می کنیم. شما مجاز هستید که با سؤالاتی که پاسخ آنها بله یا خیر است عدد انتخاب شده را حدس بزنید. امید ریاضی تعداد سؤالاتی که لازم است تا حدس صحیح زده شود را در هر یک از حالات زیر بدست آورید.

الف) i امین سوال شما این باشد که ((آیا عدد نوشته شده i است)).($i=1, 2, \ldots, 10$)

ب) در هر سوال سعی کنید که نصف بقیه اعداد را که نزدیک هستند حذف کنید.

حل: الف)

$$E(X)=\sum x\,p(x)=\left(1\times\frac{1}{10}\right)+\left(2\times\frac{1}{10}\right)+\left(3\times\frac{1}{10}\right)+\dots+\left(10\times\frac{1}{10}\right)=\frac{11}{2}$$

ب) با اولین سوال، ۱۰ عدد را به دو گروه ۵ تایی تقسیم می کنیم که در جواب، گروه ۵ تایی که جواب در آن است را به ما می دهند. حال با سؤال دوم، دسته ۵ تایی را به یک گروه ۲ تایی و یک گروه ۳ تایی تقسیم می کنیم که اگر عدد انتخابی در گروه ۲ تایی بود (با احتمال $\frac{2}{5}$)، با یک سؤال دیگر به جواب می‌رسیم (کلاً ۳ سؤال) و اگر در دسته ۳ تایی بود (با احتمال $\frac{3}{5}$) دسته را به یک گروه دو تایی و یک گروه تکی تقسیم می کنیم، که اگر در گروه تکی بود (با احتمال $\frac{1}{3}$) باز هم با سه سؤال به جواب رسیده‌ایم و اگر در گروه ۲ تایی بود (با احتمال $\frac{2}{3}$) باید یک سؤال دیگر هم بپرسیم. پس داریم:

$$E(X)=\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}\right)\times 3+\left(\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}\right)\times 4=\frac{17}{5}$$

۲۷- یک مؤسسه بیمه، بیمه نامه ای را می نویسد که اگر در طول یکسال حادثه E اتفاق افتد بایستی مبلغ A پرداخت نماید. اگر شرکت بیمه برآورد کند که پیشامد E با احتمال p در طول یکسال اتفاق می افتد چه مقدار بایستی حق بیمه را تنظیم نماید تا متوسط سود شرکت ۱۰ درصد مبلغ A باشد؟

حل: $Ap=$ متوسط هزینه هر قرار داد $\Rightarrow$ حق بیمه $=Ap+\frac{A}{10}=A\left(p+\frac{1}{10}\right)$

۲۸- یک نمونه ۳ تایی از قطعات داخل جعبه ای که شامل ۲۰ قطعه است و ۴ تای آنها معیوب هستند انتخاب می کنیم. امید ریاضی تعداد قطعات معیوب داخل نمونه را بدست آورید.

حل: با توجه به اینکه متغیر تصادفی ذکر شده، یک متغیر فوق هندسی است، داریم:

$$E(X)=\frac{mn}{N}=\frac{4\times 3}{20}=\frac{3}{5}$$

۲۹- برای خرابی یک دستگاه دو عامل تعیین شده است. برای تشخیص عامل اول C_1 ریال هزینه می‌شود و اگر عامل خرابی همان عامل اول باشد با هزینه R_1 ریال رفع می گردد. بطور مشابه این هزینه ها برای عامل

دوم $C_۲$ و $R_۲$ ریال هستند. اگر p و(۱-p) نشان دهنده احتمالهای خرابی توسط عاملهای ۱و۲ باشند. با اعمال چه شرایطی روی p، R_i و C_i (i=۱,۲) بایستی ابتدا عامل اول و سپس عامل دوم را کنترل نمود (در مقابل کنترل عامل دوم و سپس عامل اول) تا اینکه میزان هزینه برگشت دستگاه به حالت عادی کارکردن حداقل شود.

تذکر: اگر اولین کنترل منفی باشد، بایستی دومین کنترل نیز انجام گیرد.

حل: اگر ابتدا عامل اول و سپس عامل دوم را بررسی کنیم:

$$E(X_۱)=(C_۱+R_۱)\,p+(C_۱+C_۲+R_۲)\,(۱-p)$$

اگر ابتدا عامل دوم و سپس عامل اول را بررسی کنیم:

$$E(X_۲)=(C_۲+R_۲)\,(۱-p)+(C_۲+C_۱+R_۱)p$$

با مقایسه $E(X_۱)$ و $E(X_۲)$، تصمیم می گیریم که ابتدا عامل اول بررسی شود یا دوم؛ و جواب مسأله هنگامی است که:

$$(۱-p)\,C_۱<pC_۲$$

۳۰- شخصی یک سکه سالم را آنقدر پرتاب می کند تا برای اولین مرتبه خط ظاهر شود. اگر در n امین پرتاب خط ظاهر شود وی ۲^n ریال جایزه می برد. فرض کنید X نشان دهنده میزان جایزه شخص باشد نشان دهید که $E(X)=\infty$ است، این مسأله به ((پارادوکس سنت پترزبورگ)) مشهور است.

الف) آیا مایل هستید که مبلغ یک میلیون ریال برای یک مرتبه انجام این بازی بپردازید؟

ب) آیا مایل هستید که مبلغ یک میلیون ریال را برای هر مرتبه بازی بپردازید. در صورتیکه تا زمانی که مایل باشید بتوانید بازی را ادامه دهید و فقط زمان توقف را تعیین نمایید.

حل:

$$E(X)=\sum x\,p\,(x)=\sum_{i=۱}^{\infty}۲^i\,P(i)=\sum_{i=۰}^{\infty}۲^i\,p(۱-p)^{i-۱}$$

$$=\sum_{i=۱}^{\infty}۲^i\times\left(\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)^{i-۱}=\sum_{i=۱}^{\infty}۲^i\times\left(\frac{۱}{۲}\right)^{i}=\sum_{i=۱}^{\infty}۱^{i}=\infty$$

الف) خیر، زیرا به احتمال بسیار زیاد، جایزه کمتر از مبلغ پرداختی می شود. یعنی برای اینکه ضرر نکنیم باید حداقل n بار ببریم که n در شرایط $n\geq\frac{\log ۱۰۰۰۰۰۰}{\log ۲}$ صدق کند. لذا $n\geq ۲۰$، یعنی تنها با احتمال $\frac{۱}{۲^{۲۰}}$ جایزه ما بیشتر از ۱۰۰۰۰۰۰ ریال می شود.

ب) بله، زیرا

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}(۲^i-۱۰۰۰۰۰۰)\ P_i=\sum_{i=1}^{\infty}P_i\times ۲^i-\sum_{i=1}^{\infty}۱۰۰۰۰۰۰\ P_i$$
$$=\infty-۱۰۰۰۰۰۰=\infty$$

لذا چون امید ریاضی برد بی نهایت است، آنقدر بازی را ادامه می دهیم تا میزان برد ما بیش از ضرر شود.

۳۱- هر شب هواشناس های متفاوت احتمال اینکه روز بعد باران بیاید را اعلام می کنند. برای قضاوت میزان صحت پیش بینی آنها به هر یک از آنها امتیازهایی بشرح زیر اختصاص می دهیم. اگر هواشناسی بگوید که فردا با احتمال p باران می آید آنگاه امتیاز او عبارت است از:

اگر باران ببارد $۱-(۱-p)^۲$

اگر باران نبارد $۱-p^۲$

سپس امتیازهای او را برای یک مدت معین جمع آوری نموده و فردی که بالاترین امتیاز را کسب کرده باشد، بهترین هواشناس شناخته می شود. فرض کنید یک هواشناس از این مطلب اطلاع دارد و بنابراین می‌خواهد امید ریاضی امتیاز خود را حداکثر نماید. اگر این فرد واقعاً معتقد باشد که فردا با احتمال p^* باران می بارد، p را چه مقدار بایستی اعلام کند تا امید ریاضی امتیاز او حداکثر شود؟

حل:

$$E(X)=\sum x\,p(x)=[۱-(۱-p)^۲]p^*+[۱-p^۲](۱-p^*)=۲pp^*-p^۲-p^*+۱$$
$$\frac{d\,E(X)}{dp}=۲p^*-۲p=۰\Rightarrow p=p^*$$

جالب است اگر اضافه شود جریان راستگویی و دروغگویی.

پاسخ این سؤال نشان می دهد، برای اینکه امید ریاضی امتیاز هواشناسی حداکثر شود، وقتی او واقعاً معتقد است که احتمال باران p^* است بهتر است در گفتن مقدار p دروغ نگوید و آنچه را که واقعاً باور دارد یعنی p^* را اعلام کند.

۳۲- برای بررسی اینکه یک گروه ۱۰۰ نفری دارای بیماری معینی هستند یا خیر، آنها را مورد آزمایش خون قرار می دهیم بدین ترتیب که آنها را در گروه های ۱۰ نفری تقسیم نموده و نمونه خون هر ۱۰ نفر را با یکدیگر آزمایش می‌کنیم. اگر نتیجه آزمایش منفی باشد یک آزمایش برای این نفر ۱۰ نفر کافی بوده است در حالیکه اگر نتیجه مثبت باشد هرکدام از افراد بطور جداگانه نیز آزمایش می شوند و جمعاً ۱۱ آزمایش انجام می گیرد.

فرض کنید احتمال اینکه فردی این بیماری را داشته باشد برای همه افراد بطور مستقل برابر ۰/۱ است. امید ریاضی تعداد آزمایشهای لازم برای هر گروه را بدست آورید. (توجه کنید که فرض بر این است که وقتی نتیجه آزمایش مثبت است، حداقل یک نفر دارای بیماری است).

حل: برای یک گروه $E(X)=\sum x\,p(x)=۱\times(۰/۹)^{۱۰}+۱۱\times(۱-(۰/۹)^{۱۰})=۱۱-۱۰\,(۰/۹)^{۱۰}=۷/۵۱$

برای همه گروهها $E(X)=\left[۱۱-۱۰(۰/۹)^{۱۰}\right]\times۱۰=۱۱۰-۱۰۰(۰/۹)^{۱۰}=۷۵/۱$

۳۳- یک پسربچه روزنامه فروش روزنامه ها را ۱۰ ریال خریداری می کند. ۱۵ ریال بفروش می رساند و مجاز نیست که روزنامه های بفروش نرسیده را برگشت دهد. اگر تقاضای روزانه مشتریان دارای توزیع دو جمله ای با پارامترهای n=۱۰ و $p=\frac{۱}{۳}$ باشد. تقریباً چه تعداد روزنامه بایستی خریداری کند تا سود او حداکثر گردد؟

حل: با توجه به رابطه ای که از مثال ۴-۲ فصل ۴ بدست آمد، داریم:

$$\sum_{i=۰}^{s}P(i)<\frac{b}{b+l}$$
$$\Rightarrow \sum_{i=۰}^{s}P(i)<\frac{۵}{۵+۱۰}\Rightarrow \sum_{i=۰}^{s}\binom{۱۰}{i}\left(\frac{۱}{۳}\right)^{i}\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۱۰-i}<\frac{۵}{۱۵}$$
$$\Rightarrow ۰/۰۱۷+۰/۰۸۷+۰/۱۹۵=۰/۲۹۹<۰/۳۳۳\Rightarrow s^{*}=۲+۱=۳$$

۳۴- در مثال۴-۲ فرض کنید که فروشگاه بزرگ برای هر واحد کالایی که متقاضی دارد و نتواند تأمین کند نیز متحمل هزینه ای برابر با c گردد. (این هزینه را معمولاً هزینه ترغیب کردن می نامند زیرا فروشگاه رغبت مشتریانی که متقاضی هستند و نمی تواند پاسخ بدهد را از دست می دهد). امید ریاضی میزان سود وقتی که فروشگاه به اندازه s کالا ذخیره می کند را بدست آورده و s را چنان تعیین کنید که امید ریاضی سود حداکثر شود.

حل: با فرض b= سود خالص هر کالای فروش رفته؛

l= زیان خالص هر کالای به فروش نرسیده؛

X= میزان تقاضای کالا و

s= میزان کالای ذخیره شده، تابع سود P(s) را محاسبه می کنیم:

$$P(s)=\begin{cases} Xb-(s-X)l & s\geq X \\ sb-(X-s)c & s<X \end{cases}$$

سپس $E(P(s))$ و $E(P(s+1))$ را محاسبه کرده و مقدار تفاضل آنها را به ازای مقادیر مختلف s بدست می‌آوریم. نقطه بهینه جایی است که مقدار تفاضل، از مثبت به منفی تغییر علامت دهد. اگر این کار را انجام دهیم، جواب $F(s^*)\geq\frac{b+c}{b+l+c}$ می شود. یعنی نقطه بهینه اولین مقدار s می باشد که تابع $F(s)$ در آن از مقدار $\frac{b+c}{b+l+c}$ بیشتر شود.

۳۵- جعبه ای شامل ۵ مهره قرمز و ۵ مهره آبی است، دو مهره را به تصادف خارج می کنیم. اگر مهره ها از یک رنگ باشند آنگاه ۱/۱ ریال جایزه می گیریم و اگر از رنگهای متفاوت باشند ۱ ریال جریمه می شویم مطلوب است:

الف) امید ریاضی مبلغی که برنده می شویم.

ب) واریانس مبلغی که برنده می شویم.

حل: الف)
$$E(X)=\sum x\,p(x)=1/1\times\frac{2\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}}+(-1)\times\frac{\binom{5}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{2}}=-\frac{1}{15}=-0/067$$

ب)
$$E(X^2)=\sum x^2\,p(x)=(1/21\times 0/444)+(1\times 0/556)=1/093$$
$$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=1/093-(-0/067)^2=1/089$$

۳۶- مسأله ۲۲ را با ۲=i در نظر بگیرید. واریانس تعداد بازیهایی که بایدانجام شود را بدست آورید و نشان دهید که این عدد وقتی که $p=\frac{1}{2}$ باشد حداکثر می شود.

حل:
$$E(X^2)=4\times[p^2+(1-p)^2]+9\times\binom{2}{1}\times[p^2(1-p)+p(1-p)^2]=-10p^2+10p+4$$

$$(E(X))^{2} = (-2p^{2}+2p+2)^{2} = 4p^{4}-8p^{3}-4p^{2}+8p+4$$

$$\Rightarrow Var(X) = E(X^{2}) - (E(X))^{2} = -4p^{4}+8p^{3}-6p^{2}+2p$$

$$\Rightarrow \frac{d\,Var(X)}{dp} = -16p^{3}+24p^{2}-12p+2=0 \Rightarrow p=\frac{1}{2}$$

۳۷- مقدار $Var(X)$ و $Var(Y)$ را برای متغیرهای X و Y داده شده در مسأله ۲۱ بدست آورید.

حل:

$$E(X^{2}) = \frac{50^{3}+25^{3}+33^{3}+40^{3}}{148} = 1625/42 \text{ ؛}$$

$$(E(X))^{2} = (39/28)^{2} = 1542/92$$

$$\Rightarrow Var(X) = 1625/42 - 1542/92 = 82/5$$

$$E(Y^{2}) = \frac{1}{4}(50^{2}+25^{2}+33^{2}+40^{2}) = 1453/5 \text{ ؛}$$

$$(E(Y))^{2} = (37)^{2} = 1369$$

$$\Rightarrow Var(Y) = 1453/5 - 1369 = 84/5$$

۳۸- اگر $E[X]=1$ و $Var(X)=5$ باشد مطلوب است:

الف) $E[(2+X)^{2}]$

ب) $Var(4+3X)$

حل: الف)

$$\Rightarrow Var(X) = E(X^{2}) - (E(X))^{2} \Rightarrow 5 = E(X^{2}) - 1 \Rightarrow E(X^{2}) = 6$$

$$E[(2+X)^{2}] = E(4+4X+X^{2}) = E(4)+4E(X)+E(X^{2}) = 4+4(1)+6 = 14$$

ب)

$$Var(4+3X) = 9\,Var(X) = 9\times 5 = 45$$

۳۹- توپی را به تصادف از ظرفی که شامل ۳ توپ سفید و ۳ توپ سیاه است انتخاب می کنیم. بعد از انتخاب توپ آن را به ظرف برگردانده و توپ دیگری را انتخاب می کنیم، این کار را بطور نامحدود تکرار می کنیم. احتمال اینکه از ۴ توپ انتخاب شده اول ۲ توپ سفید باشد را بدست آورید.

حل: متغیر تصادفی فوق دارای توزیع بینم است.

$$P(X=2) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{3}{8}$$

۴۰- در یک امتحان تستی ۳ جوابی با ۵ سؤال، احتمال اینکه دانشجویی با حدس زدن تصادفی پاسخ ها، حداقل ۴ سؤال را درست پاسخ دهد چقدر است؟

حل:

$$P(X\geq ۴)=\sum_{i=۴}^{۵}\binom{۵}{i}\left(\frac{۱}{۳}\right)^{i}\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۵-i}$$
$$=\binom{۵}{۴}\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۴}\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۱}+\binom{۵}{۵}\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۵}\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۰}=\frac{۱۱}{۲۴۳}$$

۴۱- مردی مدعی است که تیزهوشی خارق العاده ای دارد. برای آزمایش کردن او یک سکه منظم را ۱۰ مرتبه پرتاب می کنیم و از او می خواهیم نتایج را قبل از آزمایش پیش بینی کند. او ۷ نتیجه از ۱۰ نتیجه را درست حدس می زند. احتمال اینکه وی بدون داشتن خصوصیت تیزهوشی بتواند چنین پیش بینی را انجام دهد، چقدر است؟

حل:

$$P(X=۷)=\binom{۱۰}{۷}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۷}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}=\binom{۱۰}{۷}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۰}=۰/۱۱۷$$

۴۲- فرض کنید موتورهای هواپیما در حال پرواز با احتمال(p-۱) مستقل از یکدیگر خراب می شوند. اگر در یک پرواز موفقیت آمیز لازم باشد اکثریت موتورهای هواپیما سالم باشند برای چه مقداری از p، یک هواپیمای ۵ موتوره مطمئن تر از یک هواپیمای سه موتوره است؟

حل:

$$P(\text{کارکردن هواپیمای ۵ موتوره})\geq P(\text{کارکردن هواپیمای ۳ موتوره})$$
$$\Rightarrow\binom{۵}{۵}p^{۵}(۱-p)^{۰}+\binom{۵}{۴}p^{۴}(۱-p)^{۱}+\binom{۵}{۳}p^{۳}(۱-p)^{۲}$$
$$\geq\binom{۳}{۳}p^{۳}(۱-p)^{۰}+\binom{۳}{۲}p^{۲}(۱-p)^{۱}$$
$$\Rightarrow ۱۰p^{۳}-۲۰p^{۴}+۱۰p^{۵}+۵p^{۴}-۵p^{۵}+p^{۵}\geq p^{۳}-۳p^{۳}+۳p^{۲}$$
$$\Rightarrow ۲p-۱\geq ۰\Rightarrow p\geq\frac{۱}{۲}$$

۴۳- یک کانال ارتباطی که اعداد ۰ و ۱ را انتقال می دهد، به دلیل اشکالات موجود با احتمال ۰/۲ عدد انتقال داده شده اشتباه می شود. فرض کنید می خواهیم یک پیام مهم که شامل یک عدد دودویی است را

ارسال داریم و برای کاهش شانس اشتباه بجای ۰ و ۰۰۰۰۰ و بجای ۱ عدد ۱۱۱۱۱ ارسال گردد. اگر دریافت کننده پیام با استفاده از اکثریت اعداد رسیده آن را بخواند احتمال اینکه پیام اشتباه خوانده شود چقدر است؟ چه فرض استقلالی را در نظر می گیرید؟

حل:
$$P(\text{اشتباه}) = P(X\geq ۳) = P(\text{اشتباه}|۰۰۰۰۰)\,P(۰۰۰۰۰) + P(\text{اشتباه}|۱۱۱۱۱)\,P(۱۱۱۱۱)$$

$$P(X\geq ۳) = \left[\sum_{i=۳}^{۵}\binom{۵}{i}(۰/۲)^{i}(۰/۸)^{۵-i}\right]\times\frac{۱}{۲} + \left[\sum_{i=۳}^{۵}\binom{۵}{i}(۰/۲)^{i}(۰/۸)^{۵-i}\right]\times\frac{۱}{۲}$$

فرض بر این است که هر یک از ۵ عدد مخابره شده، مستقل از یکدیگر می توانند درست یا اشتباه دریافت شوند. و همچنین عدد اصلی با احتمال $\frac{۱}{۲}$ برابر ۰ یا ۱ است (که این فرض تأثیری در جواب نهایی ندارد).

۴۴- یک سیستم ماهواره ای از n جزء ساخته شده که اگر حداقل k جزء از آنها کار کند آنگاه سیستم فعال خواهد بود. در یک روز بارانی هر یک از اجزاء مستقل از یکدیگر با احتمال $p_۱$ کار می کنند در حالیکه در یک روز غیر بارانی هرکدام مستقل از یکدیگر با احتمال $p_۲$ کار خواهند کرد. اگر احتمال باران آمدن فردا برابر با α باشد احتمال اینکه ماهواره کارکند چقدر است؟

حل:
$$P(\text{ماهواره کارکند}) = P(\text{کارکند}|\text{فردا باران بیاید})\,P(\text{فردا باران بیاید}) + P(\text{کارکند}|\text{فردا باران نیاید})\,P(\text{فردا باران نیاید})$$

$$=\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}p_۱^{i}(۱-p_۱)^{n-i}\times\alpha+\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}p_۲^{i}(۱-p_۲)^{n-i}\times(۱-\alpha)$$

۴۵- دانشجویی در حال آماده شدن برای شرکت در یک امتحان شفاهی است و اینکه روز امتحان ((خوش‌شانس)) و یا ((بدشانس)) باشد برایش اهمیت دارد. او محاسبه کرده است که در روز خوش شانسی هر یک از امتحان کنندگان بطور مستقل با احتمال ۰/۸ او را قبول می کنند و در روز بدشانسی این احتمال به ۰/۴ کاهش می یابد. فرض کنید که برای قبول شدن بایستی اکثریت ممتحنین او را قبول کنند. اگر دانشجو احساس کند که روز امتحان، امکان بدشانس بودن او دو برابر خوش شانس بودنش است، آیا بایستی تقاضای امتحانی با ۳ ممتحن و یا تقاضای با ۵ ممتحن را داشته باشد؟

حل:
$$P(\text{قبولی با ۳ ممتحن})=P(X\geq ۲)=P(X\geq ۲\mid \text{بدشانس})P(\text{بدشانس})$$
$$+P(X\geq ۲\mid \text{خوش شانس})P(\text{خوش شانس})$$
$$=\sum_{i=۲}^{۳}\binom{۳}{i}(۰/۴)^{i}(۰/۶)^{۳-i}\times\frac{۲}{۳}+\sum_{i=۲}^{۳}\binom{۳}{i}(۰/۸)^{i}(۰/۲)^{۳-i}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱/۶}{۳}$$
$$P(\text{قبولی با ۵ ممتحن})=P(X\geq ۳)=P(X\geq ۳\mid \text{بدشانس})P(\text{بدشانس})$$
$$+P(X\geq ۳\mid \text{خوش شانس})P(\text{خوش شانس})$$
$$=\sum_{i=۳}^{۵}\binom{۵}{i}(۰/۴)^{i}(۰/۶)^{۵-i}\times\frac{۲}{۳}+\sum_{i=۳}^{۵}\binom{۵}{i}(۰/۸)^{i}(۰/۲)^{۵-i}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱/۵۷۶۵}{۳}$$
مشاهده می شود که احتمال قبولی با ۳ ممتحن، بیش از احتمال قبولی با ۵ ممتحن است.

۴۶- فرض کنید برای محکوم کردن یک متهم لازم است که حداقل ۹ نفر از ۱۲ نفر اعضاء هیئت منصفه رأی به مجرم بودن او بدهند. همچنین فرض کنید احتمال اینکه یک عضو هیئت منصفه متهم گناهکاری را بی گناه تشخیص دهد برابر با ۰/۲ و احتمال اینکه متهم بی گناهی را گناهکار تشخیص دهد برابر با ۰/۱ باشد. اگر هر عضو بطور مستقل رأی بدهد و ۶۵ درصد از متهمین گناهکار باشند، احتمال اینکه هیئت‌منصفه رأی صحیح بدهد را بدست آورید. چه درصدی از متهمین مجرم شناخته می شوند؟

حل: الف)
$$P(\text{رأی صحیح})=P(\text{صحیح}\mid\text{گناهکار})P(\text{گناهکار})$$
$$+P(\text{صحیح}\mid\text{بی گناه})P(\text{بی گناه})$$
$$=\sum_{i=۹}^{۱۲}\binom{۱۲}{i}(۰/۸)^{i}(۰/۲)^{۱۲-i}\times(۰/۶۵)+\sum_{i=۴}^{۱۲}\binom{۱۲}{i}(۰/۹)^{i}(۰/۱)^{۱۲-i}\times(۰/۳۵)$$
توجه داشته باشید که برای اینکه متهمی بیگناه تشخیص داده شود باید حداقل ۴ نفر به بیگناهی او رأی دهند. ولی برای اینکه گناهکار تشخیص داده شود باید حداقل ۹ نفر به گناهکاری او رأی دهند.
$$P(\text{مجرم شناخته شود})=P(\text{مجرم شناخته شود}\mid\text{گناهکار})P(\text{گناهکار})$$
$$+P(\text{مجرم شناخته شود}\mid\text{بی گناه})P(\text{بی گناه})$$
ب)
$$P(\text{مجرم شناخته شود})=\sum_{i=۹}^{۱۲}\binom{۱۲}{i}(۰/۸)^{i}(۰/۲)^{۱۲-i}\times(۰/۶۵)+\sum_{i=۹}^{۱۲}\binom{۱۲}{i}(۰/۱)^{i}(۰/۹)^{۱۲-i}\times(۰/۳۵)$$

۴۷- در بعضی از محاکمه های نظامی ۹ قاضی را دعوت می کنند، وکلای مدافع متهم و شاکی می توانند با هر قاضی مبارزه نموده و درصورتیکه موفق شوند او از جمع قضاوت کم شده و کسی جایگزین وی نمی‌شود. در پایان متهمی را مجرم می شناسند که اکثریت قضات رأی به مجرم بودن او بدهند و درغیراینصورت متهم بی گناه شناخته می شود. فرض کنید وقتی که متهم واقعاً مجرم است هر قاضی بطور مستقل با احتمال ۰/۷ رأی به گناهکاری او بدهد و این احتمال برای متهمی که بی گناه است به ۰/۳ کاهش یابد.

الف) احتمال اینکه یک متهم مجرم، گناهکار تشخیص داده شود را در حالات ۹ قاضی، ۸ قاضی و ۷ قاضی بدست آورید.

ب) قسمت (الف) را برای یک متهم بی گناه محاسبه کنید.

ج) اگر وکیل مدافع شاکی مجاز به مبارزه با قضاوت نباشد و وکیل مدافع متهم حداکثر بتواند با ۲ قاضی مبارزه کند، چه تعداد مبارزه بایستی بین وکیل مدافع متهم و قضات صورت پذیرد در صورتیکه او ۶۰ درصداطمینان داشته باشد که متهم گناهکار است؟

حل: الف)

۹ قاضی $\Rightarrow \; P=\sum_{i=5}^{9}\binom{9}{i}(0/7)^{i}(0/3)^{9-i}$ ؛

۸ قاضی $\Rightarrow \; P=\sum_{i=5}^{8}\binom{8}{i}(0/7)^{i}(0/3)^{8-i}$ ؛

۷ قاضی $\Rightarrow \; P=\sum_{i=4}^{7}\binom{7}{i}(0/7)^{i}(0/3)^{7-i}$

ب)

۹ قاضی $\Rightarrow \; P=\sum_{i=5}^{9}\binom{9}{i}(0/3)^{i}(0/7)^{9-i}$ ؛

۸ قاضی $\Rightarrow \; P=\sum_{i=5}^{8}\binom{8}{i}(0/3)^{i}(0/7)^{8-i}$ ؛

۷ قاضی $\Rightarrow \; P=\sum_{i=4}^{7}\binom{7}{i}(0/3)^{i}(0/7)^{7-i}$

ج) برای هرمورد بالا (۷ قاضی، ۸ قاضی و ۹ قاضی)، مقدار (ب) P ۰/۴ + (الف) P ۰/۶ را محاسبه می کنیم. هرکدام کمتر شد، تعداد قاضی ها همان باید باشد وتعداد مبارزه= (تعداد قاضیان − ۹).

۴۸- تجربه نشان داده است که دیسکت های کامپیوتری تولید شده توسط یک شرکت با احتمال ۰/۰۱ مستقل از یکدیگر معیوب هستند. شرکت دیسکت ها را در بسته های ۱۰ تایی به فروش می رساند و پیشنهاد باز پرداخت پول را با شرط مشاهده حداکثر یک معیوب در هر بسته ارائه می دهد. اگر فردی سه بسته از این دیسکت ها را خریداری کند احتمال اینکه او یک بسته را برگرداند چقدر است؟

حل: الف) با فرض برگشت در صورت مشاهده یک معیوب یا بیشتر:

$$P(\text{بازگشت هر بسته}) = P(\text{حداکثر یک معیوب}) = ۱ - P(\text{همه سالم باشند})$$

$$= ۱ - (۰/۹۹)^{۱۰} = ۰/۱$$

$$P(\text{بازگشت یکی از سه بسته}) = \binom{۳}{۱}(۰/۱)^{۱}(۰/۹)^{۲} = ۰/۲۴۳$$

ب) با فرض برگشت در صورت مشاهده بیش از یک معیوب:

$$P(\text{بازگشت}) = P(X > ۱) = ۱ - P(X = ۰) - P(X = ۱)$$

$$= ۱ - \left[\binom{۱۰}{۰}(۰/۹۹)^{۱۰} + \binom{۱۰}{۱}(۰/۰۱)(۰/۹۹)^{۹}\right] = ۱ - ۰/۹۹۵۸ = ۰/۰۰۴۲$$

$$P(\text{بازگشت یکی از سه بسته}) = \binom{۳}{۱}(۰/۰۰۴۲)(۰/۹۹۵۸)^{۲} = ۰/۰۱۲۵$$

۴۹- فرض کنید که ۱۰ درصد از تراشه های کامپیوتری تولید شده توسط یک شرکت تولید کننده سخت افزار معیوب باشند. اگر ۱۰۰ تراشه سفارش بدهیم، آیا تعداد تراشه های معیوبی را که دریافت می داریم یک متغیر تصادفی دو جمله ای است؟

حل: اگر تعداد تراشه های تولیدی بسیار زیاد باشد و بتوانیم بگوییم که هر تراشه بطور مستقل با احتمال ۰/۱ معیوب است، داریم:

$$P(X = x) = \binom{۱۰۰}{x}(۰/۱)^{x}(۰/۹)^{۱۰۰-x}$$

۵۰- فرض کنید یک سکه اریب با احتمال p شیر ظاهر می شود. این سکه را ۱۰ مرتبه پرتاب می کنیم اگر بدانیم که ۶ شیر ظاهر شده است. احتمال شرطی اینکه نتیجه سه پرتاب اول به صورتهای زیر باشد را بدست آورید.

الف) H، T و T باشد (یعنی اولین پرتاب شیر، و دو تا پرتاب بعدی خط باشند).

ب) T، H و T باشد.

حل: الف)

$P(T\text{و}T\text{،}H \mid \text{۶ شیر}) =$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\binom{۷}{۵}p^{۵}(۱-p)^{۲}\times p(۱-p)^{۲}}{\binom{۱۰}{۶}p^{۶}(۱-p)^{۴}}=\frac{\binom{۷}{۵}}{\binom{۱۰}{۶}}=\frac{۱}{۱۰}$$

ب)

$P(T\text{ و }H\text{ ،}T \mid \text{۶ شیر}) =$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\binom{۷}{۵}p^{۵}(۱-p)^{۲}\times p(۱-p)^{۲}}{\binom{۱۰}{۶}p^{۶}(۱-p)^{۴}}=\frac{\binom{۷}{۵}}{\binom{۱۰}{۶}}=\frac{۱}{۱۰}$$

۵۱- متوسط تعداد اشتباهات تایپی در یک صفحه از یک مجله برابر با ۲ است. احتمال اینکه صفحه بعدی این مجله را که مطالعه می کنید شامل:

الف) صفر اشتباه تایپی باشد،

ب) ۲ یا بیش از ۲ اشتباه تایپی باشد،

را بدست آورده، دلیل خود را شرح دهید!

حل: الف)

$$P(X=i)=e^{-\lambda}\times\frac{\lambda^{i}}{i!}\Rightarrow P(X=۰)=e^{-۲}\times\frac{(+۲)^{۰}}{۰!}=e^{-۲}$$

ب)

$$P(X\geq ۲)=۱-P(X<۲)=۱-P(X=۰)-P(X=۱)$$
$$=۱-e^{-۲}-۲e^{-۲}=۱-۳e^{-۲}$$

فرض کرده ایم که متغیر تصادفی تعداد اشتباهات هر صفحه تقریباً توزیع پواسون دارند.

۵۲- متوسط تعداد هواپیماهای مسافربری که در ماه دچار حادثه می شوند در سطح جهان برابر با ۳/۵ هواپیما است. احتمال پیشامدهای زیر را بدست آورید.

الف) درماه آینده حداقل دو حادثه اتفاق افتد.

ب) حداکثر یک حادثه در ماه آینده اتفاق افتد.

دلیل خود را شرح دهید!

حل: الف) $P(\text{حداقل ۲ حادثه}) = P(X \geq ۲) = ۱ - P(X \leq ۱)$

$$= ۱ - P(X = ۰) - P(X = ۱) = ۱ - e^{-۳/۵} - ۳/۵ e^{-۳/۵} = ۱ - ۴/۵ e^{-۳/۵}$$

ب) $P(\text{حداکثر یک حادثه}) = P(X \leq ۱) = P(X = ۰) + P(X = ۱)$

$$= e^{-۳/۵} + ۳/۵ e^{-۳/۵} = ۴/۵ e^{-۳/۵}$$

فرض کرده ایم که متغیر تصادفی تعداد هواپیماهایی که دچار حادثه می شوند تقریباً توزیع پواسون دارند.

۵۳- در ایالت نیویورک تقریباً ۸۰۰۰۰ ازدواج در سال گذشته انجام گرفته است. احتمال پیشامدهای زیر را برای حداقل یک زوج برآورد نمایید.

الف) هر دو در روز ۳۰ آوریل بدنیا آمده باشند؟

ب) هر دو در یک روز از سال بدنیا آمده باشند؟ فرض های خود را بیان کنید.

حل: چون $n=۸۰۰۰۰$ بزرگ است و p کوچک، می توانیم از تقریب پوآسون استفاده کنیم، لذا:

$$\lambda = np = ۸۰۰۰۰ \times \frac{۱}{(۳۶۵)^۲} = ۰/۶$$

الف) $P(\text{حداقل یک زوج}) = ۱ - P(\text{هیچ زوجی}) = ۱ - P(\text{هیچ موفقیت})$

$$= ۱ - e^{-\lambda} = ۱ - e^{-۰/۶} \cong ۰/۴۵۱۱$$

ب) $\lambda = np = ۸۰۰۰۰ \times \frac{۱}{۳۶۵} = ۲۱۹/۲$

$$\Rightarrow P(\text{حداقل یک زوج}) = ۱ - e^{-\lambda} = ۱ - e^{-۲۱۹/۲} = ۱ - ۶/۳ \times ۱۰^{-۹۶} \cong ۱$$

فرض بر این است که تمام روزهای سال هم شانس و مستقل از هم هستند. جوابهای اصلی این مسأله از طریق توزیع بینم بصورت زیر می باشد:

الف) $۱ - \binom{۸۰۰۰۰}{۰} \left(\frac{۱}{۳۶۵^۲}\right)^۰ \left(۱ - \frac{۱}{۳۶۵^۲}\right)^{۸۰۰۰۰} \cong ۰/۴۵۱۴$

ب) $۱ - \binom{۸۰۰۰۰}{۰} \left(\frac{۱}{۳۶۵}\right)^۰ \left(۱ - \frac{۱}{۳۶۵}\right)^{۸۰۰۰۰} = ۱ - ۴/۸ \times ۱۰^{-۹۶} \cong ۱$

۵۴- فرض کنید متوسط تعداد خودروهایی که در هفته در یک بزرگراه متوقف می شوند برابر با ۲/۲ باشد. احتمال پیشامدهای زیر را تقریب بزنید.

الف) هیچ اتومبیلی در هفته آینده متوقف نشود.

ب) حداقل ۲ اتومبیل در هفته آینده متوقف شوند.

حل: الف)

$$P(X=i)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \Rightarrow P(X=۰)=e^{-۲/۲}$$

ب)

$$P(\text{حداقل ۲ تا})=P(X\ge ۲)=۱-P(X\le ۱)=۱-P(X=۰)-P(X=۱)$$
$$=۱-e^{-۲/۲}-۲/۲e^{-۲/۲}=۱-۳/۲e^{-۲/۲}$$

۵۵- یک مؤسسه انتشاراتی ۲ ماشین نویس جدید استخدام می کند. ماشین نویس اول بطور متوسط در هر مقاله ۳ اشتباه و ماشین نویس دوم بطور متوسط ۴/۲ اشتباه تایپی دارند. اگر مقاله شما با شانس برابر توسط یکی از این دو ماشین نویس تهیه شود. احتمال اینکه مقاله هیچ غلط تایپی نداشته باشد را بدست آورید.

حل:

$$P(\text{هیچ غلط})=P(\text{هیچ غلط}|\text{ماشین نویس ۱})P(\text{ماشین نویس ۱})$$
$$+P(\text{هیچ غلط}|\text{ماشین نویس ۲})P(\text{ماشین نویس ۲})$$
$$=\left(e^{-۳}\times\frac{۱}{۲}\right)+\left(e^{-۴/۲}\times\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۱}{۲}\left(e^{-۳}+e^{-۴/۲}\right)$$

۵۶- چند نفر لازم است تا احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در روز تولد شما بدنیا آمده باشد بیش از $\frac{۱}{۲}$ گردد؟

حل: با استفاده از تقریب پوآسون داریم:

$$\lambda=np=n\times\frac{۱}{۳۶۵}=\frac{n}{۳۶۵}$$
$$P(\text{حداقل یکی})=۱-P(\text{هیچکدام})$$
$$=۱-e^{-\frac{n}{۳۶۵}}\ge\frac{۱}{۲}\Rightarrow e^{-\frac{n}{۳۶۵}}\le\frac{۱}{۲}\Rightarrow -\frac{n}{۳۶۵}\le Ln\left(\frac{۱}{۲}\right)$$
$$\Rightarrow\frac{n}{۳۶۵}>Ln(۲)\Rightarrow n>۳۶۵\,Ln(۲)=۲۵۲/۹۹\cong ۲۵۳$$

۵۷- فرض کنید تعداد حوادثی که در یک بزرگراه در روز اتفاق می افتد یک متغیر تصادفی پوآسون با پارامتر $\lambda=۳$ باشد.

الف) احتمال اینکه امروز حداقل ۳ حادثه اتفاق افتد را بدست آورید.

ب) قسمت (الف) را با این فرض که امروز حداقل یک حادثه اتفاق افتاده است تکرار کنید.

حل:الف)

$$P(\text{حداقل ۳ تا}) = P(X \geq ۳) = ۱ - P(X \leq ۲)$$

$$۱ - P(X=۰) - P(X=۱) - P(X=۲) = ۱ - e^{-۳} - ۳e^{-۳} - \frac{۹}{۲}e^{-۳} = ۱ - ۸/۵e^{-۳} = ۰/۵۷۶۸$$

ب)

$$P(X \geq ۳ \mid \text{امروز حداقل یکی}) = P(A|B) = \frac{۱ - e^{-۳} - ۳e^{-۳} - ۴/۵\,e^{-۳}}{۱ - e^{-۳}} = ۰/۶۰۷۰$$

۵۸- تقریب پوآسون را با مقدار صحیح احتمال دو جمله ای در حالات زیر مقایسه کنید.

الف) $p=۰/۱$　　$n = ۸$،　و　$P\{X=۲\}$

ب) $p=۰/۹۵$　　$n = ۱۰$،　و　$P\{X=۹\}$

ج) $p=۰/۱$　　$n = ۱۰$،　و　$P\{X=۰\}$

د) $p=۰/۲$　　$n = ۹$،　و　$P\{X=۴\}$

حل: الف)

$$P(X=۲) = \binom{۸}{۲}(۰/۱)^{۲}(۰/۹)^{۶} = ۰/۱۴۸۸ \,؛$$

$$P(X=۲) = \frac{e^{-۰/۸} \times (۰/۸)^{۲}}{۲!} = ۰/۱۴۳۷$$

ب)

$$P(X=۹) = \binom{۱۰}{۹}(۰/۹۵)^{۹}(۰/۰۵)^{۱} = ۰/۳۱۵ \,؛$$

$$P(X=۹) = \frac{e^{-۹/۵} \times (۹/۵)^{۹}}{۹!} = ۰/۱۳$$

ج)

$$P(X=۰) = \binom{۱۰}{۰}(۰/۱)^{۰}(۰/۹)^{۱۰} = ۰/۳۴۸۶ \,؛$$

$$P(X=۰) = \frac{e^{-۱} \times (۱)^{۰}}{۰!} = ۰/۳۶۷۸$$

د)

$$P(X=۴) = \binom{۹}{۴}(۰/۲)^{۴}(۰/۸)^{۵} = ۰/۰۶۶ \,؛$$

$$P(X=۴) = \frac{e^{-۱/۸} \times (۱/۸)^{۴}}{۴!} = ۰/۰۷۲$$

می بینیم که در حالت ((ب)) که p مقدار بزرگی دارد، تقریب خوبی بدست نیامده است.

۵۹- اگر بلیت شرکت در یک بازی را برای انجام ۵۰ بازی خریداری کنید و در هر بازی، شانس برنده شدن شما $\frac{1}{100}$ باشد. احتمال تقریبی برنده شدن را در حالات زیر بدست آورید.

الف)حداقل یک مرتبه　　ب)یک مرتبه　　ج)حداقل دو مرتبه

حل: الف) $P(\text{حداقل ۱ برد})=P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-e^{-0/5}=0/3935$

ب) $P(\text{۱ برد})=P(X=1)=0/5e^{-0/5}=0/3033$

ج) $P(\text{حداقل ۲ برد})=1-P(X=0)-P(X=1)=1-e^{-0/5}-0/5e^{-0/5}$

$=0/3935-0/3033=0/0902$

۶۰- تعداد دفعاتی که یک فرد در سال دچار سرماخوردگی می شود یک متغیر تصادفی پوآسون با پارامتر $\lambda=5$ است. فرض کنید داروی جدیدی که مقدار زیادی ویتامین C دارد تهیه شده طوریکه پارامتر پوآسون را برای ۷۵ درصد جامعه به $\lambda=3$ کاهش می دهد و برای بقیه ۲۵ درصد هیچ تاثیری ندارد. اگر فردی دارو را استفاده کرده و ۲ مرتبه سرماخوردگی داشته باشد با چه احتمالی دارو برای او مؤثر بوده است؟

حل:

$$P(\text{دارو مؤثر} \mid \text{۲ بار سرماخوردگی})=P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|A^c)P(A^c)}$$

$$=\frac{\frac{e^{-3}\times 3^2}{2!}\times 0/75}{\frac{e^{-3}\times 3^2}{2!}\times 0/75+\frac{e^{-5}\times 5^2}{2!}\times 0/25}=0/8886$$

۶۱-*

۶۲- اگر n زوج به تصادف دور یک میز گرد نشسته باشند، احتمال اینکه هیچ مردی پهلوی همسرش نباشد را بدست آورید. وقتی که $n=10$ است، تقریب خود را با مقدار دقیق احتمال مربوط در مثال ۵-۱۴ فصل ۲ مقایسه کنید.

حل:

$$P(\text{زوج } i \text{ کنار هم})=\frac{2\times(2n-2)!}{(2n-1)!}=\frac{2}{2n-1}$$

$$\lambda=np=n\times\frac{2}{2n-1}=\frac{2n}{2n-1},$$

$$P(\text{هیچ زوج}) = P(\text{هیچ موفقیت}) = e^{-\lambda} = e^{-\frac{۲۰}{۱۹}} = ۰/۳۴۹۰$$

مقدار دقیق احتمال ۰/۳۳۹۵ می باشد که حدود ۰/۰۱ با مقدار تقریبی فرق دارد.

۶۳- افراد با نرخ ۱ نفر در هر دو دقیقه وارد یک فروشگاه می شوند.

الف) احتمال اینکه هیچ کس در فاصله ساعت ۱۲:۰۰ تا ۱۲:۰۵ وارد نشود را بدست آورید.

ب) احتمال اینکه حداقل ۴ نفر درآن زمان وارد فروشگاه شوند را بدست آورید.

حل: الف)

$$\lambda t = \frac{۵}{۲} \Rightarrow P(\text{هیچ ورود})$$

$$= P\left(N\left(\frac{۵}{۲}\right) = ۰\right) = e^{-\lambda t} = e^{-۲/۵} = ۰/۰۸۲۱$$

ب)

$$P(\text{حداقل ۴ نفر}) = ۱ - P(N(t) \le ۳) =$$

$$= ۱ - e^{-۲/۵} - ۲/۵ e^{-۲/۵} - \frac{(۲/۵)^۲}{۲!} e^{-۲/۵} - \frac{(۲/۵)^۳}{۳!} e^{-۲/۵} = ۰/۲۴۲۴$$

۶۴- نرخ خودکشی در یک ایالت آمریکا برابر با ۱ خودکشی درهر ۱۰۰۰۰۰ نفر در ماه گزارش شده است.

الف) احتمال اینکه در یک شهر ۴۰۰۰۰۰ نفری آن ایالت حداقل ۸ خودکشی در ماه اتفاق افتد را بدست آورید.

ب) احتمال اینکه برای حداقل دو ماه در سال، در هر ماه حداقل ۸ خودکشی باشد را بدست آورید.

ج) اگر ماه فعلی را شماره ۱ بنامیم احتمال اینکه اولین ماهی که حداقل n خودکشی وجود دارد ماه شماره i ($i \ge ۱$) ، باشد را بدست آورید. چه فرض هایی را در نظر گرفته اید؟

حل: الف)

$$\lambda = np = ۴$$

$$\Rightarrow P(X \ge ۸) = ۱ - P(X \le ۷) = ۱ - \sum_{i=۰}^{۷} \frac{e^{-۴} \times ۴^i}{i!} = ۱ - e^{-۴} - ۴e^{-۴} - \ldots - \frac{e^{-۴} \times ۴^۷}{۷!} = A$$

ب) با توجه به الف

$$P(\text{حداقل ۲ ماه}) = ۱ - P(\text{یک ماه}) - P(\text{هیچ ماه})$$

$$= ۱ - \binom{۱۲}{۱} A^۱ (۱-A)^{۱۱} - \binom{۱۲}{۰} A^۰ (۱-A)^{۱۲}$$

ج) متغیر تصادفی مورد نظر، هندسی است:

$$P(\text{حداقل n خودکشی}) = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^i}{i!} = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{e^{-۴} \times ۴^i}{i!} = p$$

$$P(\text{اولین ماه با حداقل n خودکشی، i باشد}) = p(۱-p)^{i-۱}$$

فرض بر این است که ماهها، مستقل از یکدیگر هستند.

۶۵- هر یک از ۵۰۰ سرباز یک پادگان، مستقل از یکدیگر با احتمال ۰/۰۰۱ دارای بیماری خاصی هستند. این بیماری را می توان با آزمایش خون تشخیص داد و لذا برای سهولت نمونه خون ۵۰۰ سرباز را مخلوط نموده و آزمایش کرده اند.

الف) احتمال تقریبی اینکه نتیجه آزمایش مثبت باشد، یعنی حداقل یک نفر دارای بیماری باشد را بدست آورید.

حال فرض کنید که نتیجه آزمایش مثبت است.

ب) با این شرط احتمال اینکه بیش از یک نفر بیمار باشند چقدر است؟

فرض کنید یکی از سربازها می داند بیمار است.

ج) بیمار مورد نظر در مورد احتمال اینکه بیش از یک نفر بیمار باشند چه ایده ای دارد؟

چون نتیجه آزمایش خونهای مخلوط شده مثبت است، مسئولین تصمیم می گیرند که افراد را بطور جداگانه مورد آزمایش قرار دهند. نتیجه اولین (i-۱) آزمایش منفی و i امین آزمایش که روی فرد مورد نظر انجام گرفت نتیجه اش مثبت بود.

د) با اطلاعات فوق احتمال اینکه هر یک از افراد باقیمانده دارای بیماری باشند را بصورت تابعی از i بدست آورید.

حل: متغیر تصادفی بینم است که با پواسون تخمین زده می شود:

$$\lambda = np = ۵۰۰ \times ۰/۰۰۱ = ۰/۵$$

الف) $P \Rightarrow (\text{حداقل یک نفر}) = ۱ - P(\text{هیچکس}) = ۱ - e^{-\lambda} = ۱ - e^{-۰/۵} = ۰/۳۹۳۵$

ب) $P(\text{بیش از یک نفر}) = ۱ - P(X \le ۱) = ۱ - P(X=۰) - P(X=۱)$

$$= ۱ - e^{-۰/۵} - ۰/۵e^{-۰/۵} = ۰/۰۹$$

$$P(\text{حداقل یک نفر | بیش از یک نفر}) = \frac{P(\text{بیش از یک نفر | حداقل یک نفر})P(\text{بیش از یک نفر})}{P(\text{حداقل یک نفر})}$$

$$=\frac{۱\times ۰/۰۹}{۰/۳۹۳۵}=۰/۲۲۹$$

ج) یعنی احتمال اینکه به جز او، یک نفر دیگر هم (حداقل) بیمار باشد، مانند قسمت الف است، با این تفاوت که مقدار λ برابر با ۰/۴۹۹=۰/۰۰۱× ۴۹۹ است.

$$P=۱-e^{-۰/۴۹۹}=۰/۳۹۳۵$$

د) احتمال بیماری برای (i-۱) نفر اول برابر صفر است ولی برای نفرات بعد از نفر i ام برابر با ۰/۰۰۱ است.

۶۶- یک گردونه بازی که شامل ۳۸ عدد بصورت اعداد ۰ تا ۳۶ و عدد ۰۰(دو صفر) است را در نظر بگیرید. اگر فردی همواره روی یکی از نتایج ۱ تا ۱۲ شرط بندی کند، احتمال پیشامدهای زیر را بدست آورید.

الف) ۵ شرط اولیه را ببازد.

ب) اولین برد او در چهارمین شرط بندی اتفاق افتد.

حل: الف)

$$P(\text{۵ شرط اول را ببازد})=\left(\frac{۲۶}{۳۸}\right)^{۵}=۰/۱۵$$

ب) متغیر تصادفی هندسی است.

$$P=p(۱-p)^{۳}=\frac{۱۲}{۳۸}\times\left(\frac{۲۶}{۳۸}\right)^{۳}=۰/۱۰۱۲$$

۶۷- دو تیم ورزشی یک سری بازی انجام می دهند و اولین تیمی که ۴ مرتبه برنده شود بعنوان برنده نهایی انتخاب می شود. فرض کنید یکی از تیم ها قوی تر از دیگری است بطوریکه احتمال برد آن در هر بازی مستقل از بازی های دیگر برابر با ۰/۶ است. احتمال اینکه تیم قوی تر i بازی را ببرد را بدست آورید. این احتمال را برای i=۴،۵،۶،۷ محاسبه کنید. احتمال برنده نهایی شدن تیم قوی تر را با احتمال اینکه آن تیم ۲ بازی از ۳ بازی را ببرد مقایسه کنید.

حل: الف) اگر i تعداد بردهای تیم قویتر باشد مقادیر ممکن برای i برابر با ۰،۱،۲،۳،۴ است.

$$P(i=۰)=(۰/۴)^{۴}\quad;\quad p(i=۱)=\binom{۴}{۱}(۰/۶)^{۱}(۰/۴)^{۴}\;;$$

$$P(i=۲)=\binom{۵}{۲}(۰/۶)^{۲}(۰/۴)^{۴}\;;\quad p(i=۳)=\binom{۶}{۳}(۰/۶)^{۳}(۰/۴)^{۴}\;;$$

توجه کنید که اگر تیم قویتر بین ۰ تا ۳ برد داشته باشد $(i=0,1,2,3)$ آنگاه تعداد بردهای تیم ضعیفتر حتماً برابر ۴ است ولی اگر تیم قویتر ۴ بازی ببرد، تیم ضعیفتر می تواند بین ۰ تا ۳ برد داشته باشد بنابراین:

$$P(i=4)=\sum_{n=4}^{7}\binom{n-1}{3}(0/6)^{4}(0/4)^{n-4}$$

ب)

$$P(\text{۲ بازی از ۳ تا ببرد})=\binom{3}{2}(0/6)^{2}(0/4)^{1}$$

۶۸- در مسأله ۶۷ فرض کنید که دو تیم با هم بازی کرده و احتمال برد هـر تـیم $\frac{1}{2}$ باشـد. در ایـن صـورت امید ریاضی تعداد بازیها را بدست آورید.

حل:

$$E(X)=\sum x\,p(x)=4\times\binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}+5\times\binom{2}{1}\binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$+6\times\binom{2}{1}\binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+7\times\binom{2}{1}\binom{6}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=5/8125$$

۶۹- به خبرنگاری لیست افراد بانفوذی را داده اندکه بایستی با آنها مصاحبه کند اگر خبرنگار لازم باشد که با ۵ نفر مصاحبه کند و هر فرد بطور مستقل با احتمال $\frac{2}{3}$ موافقت نماید که با او مصاحبه شود. احتمال اینکه لیست وی قادر به تامین تعداد افراد مورد نیاز باشد را در هر یک از حالات زیر بدست آورید.

الف) لیست شامل ۵ نفر باشد.

ب) لیست شامل ۸ نفر باشد.

برای قسمت (ب) احتمال اینکه خبرنگار بتواند با ج)۶نفر، د)۷ نفر از افراد لیست مصاحبه کند چقدر است؟

حل: الف)

$$P(\text{موفقیت})=\binom{5}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}=\frac{32}{243}$$

ب) می توانیم جواب را از بینم یا بینم منفی بدست آوریم. اگر از بینم منفی برویم، پنجمین موفقیت باید در دفعات پنجم، ششم، هفتم یا هشتم باشد.

$$P_1(\text{موفقیت})=\sum_{n=5}^{8}\binom{n-1}{5-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-5}=\frac{4864}{6561}$$

اگر از بینم برویم داریم:

$$P_{۲}(\text{موفقیت}) = \sum_{n=۵}^{۸} \binom{۸}{n} \left(\frac{۲}{۳}\right)^{n} \left(\frac{۱}{۳}\right)^{۸-n} = \frac{۴۸۶۴}{۶۵۶۱}$$

ج)

$$P(C) = \binom{۸}{۶} \left(\frac{۲}{۳}\right)^{۶} \left(\frac{۱}{۳}\right)^{۲} = \frac{۱۷۹۲}{۶۵۶۱}$$

د)

$$P(D) = \binom{۸}{۷} \left(\frac{۲}{۳}\right)^{۷} \left(\frac{۱}{۳}\right)^{۱} = \frac{۱۰۲۴}{۶۵۶۱}$$

۷۰- یک سکه منظم را بطور متوالی پرتاب می کنیم تا شیر برای دهمین مرتبه ظاهر شود. اگر X نشاندهنده تعداد خط های ظاهر شده باشد. تابع احتمال X را بدست آورید.

حل:

$$P(X=i) = \binom{۹+i}{i} \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۰} \left(\frac{۱}{۲}\right)^{i} \qquad i \geq ۰$$

۷۱- مسأله کبریت باناخ (مثال۸-۵) را وقتی که قوطی کبریت طرف چپ او از ابتدا شامل $N_۱$ چوب کبریت و قوطی کبریت سمت راست او $N_۲$ چوب کبریت داشته باشد حل کنید.

حل:

$$P(\text{اول سمت راست تمام شود}) = \binom{N_۲+N_۱-K}{N_۲} \left(\frac{۱}{۲}\right)^{N_۲+۱} \left(\frac{۱}{۲}\right)^{N_۱-K} = \binom{N_۱+N_۲-K}{N_۲} \left(\frac{۱}{۲}\right)^{N_۲+N_۱+۱-K}$$

$$P(\text{اول سمت چپ تمام شود}) = \binom{N_۲+N_۱-K}{N_۱} \left(\frac{۱}{۲}\right)^{N_۱+N_۲+۱-K}$$

$$P(\text{تمام شدن}) = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{N_۱+N_۲+۱-K} \left[\binom{N_۲+N_۱-K}{N_۲} + \binom{N_۲+N_۱-K}{N_۱}\right]$$

۷۲- در مسأله کبریت باناخ احتمال اینکه در لحظه ای که قوطی اول خالی می شود (در مقابل کشف خالی بودن آن)، قوطی دیگر k چوب کبریت داشته باشد را بدست آورید.

حل:

$$P(\text{ابتدا سمت چپ}) = \binom{N-۱+N-K}{N-۱} \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲N-K}$$

$$P(\text{ابتدا سمت راست}) = \binom{N-1+N-K}{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-K}$$

با فاکتورگیری داریم:

$$\Rightarrow P = \left(\frac{1}{2}\right)^{2N-K-1}\binom{2N-K-1}{N-1}$$

۷۳- ظرفی شامل ۴ توپ سفید و ۴ توپ سیاه است. به تصادف ۴ توپ ازظرف انتخاب می کنیم اگر ۲ توپ سفید و ۲ توپ سیاه باشد، آزمایش را متوقف می کنیم در غیر اینصورت توپها را به ظرف برگردانده و دوباره ۴ توپ به تصادف انتخاب می کنیم. این آزمایش آنقدر تکرار می شود، تا ۲ توپ از ۴ توپ سفید باشد. احتمال اینکه n مرتبه انتخاب توپها صورت پذیرد را بدست آورید.

حل: متغیر تصادفی؛ هندسی است:

$$P(\text{موفقیت}) = \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{36}{70} = \frac{18}{35} = 0/514$$

$$\Rightarrow P(X=n) = \left(\frac{36}{70}\right)\left(\frac{34}{70}\right)^{n-1} = \frac{18(17)^{n-1}}{(35)^n}$$

۷۴- فرض کنید یک محموله ۱۰۰ تایی کالا شامل ۶ کالای معیوب و ۹۴ کالای سالم باشد. اگر X نشان دهنده تعداد کالای معیوب در یک نمونه ۱۰ تایی از محموله باشد مطلوب است.

الف) $P\{X=0]$

ب) $P\{X\geq 2]$

حل: الف)

$$P(X=0) = \frac{\binom{6}{0}\binom{94}{10}}{\binom{100}{10}} = 0/5223$$

ب)

$$P(X\geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - \frac{\binom{6}{0}\binom{94}{10}}{\binom{100}{10}} - \frac{\binom{6}{1}\binom{94}{9}}{\binom{100}{10}} = 1 - 0/5223 - 0/3686 = 0/109$$

۷۵-*

۷۶- در مثال ۸-۹ چه درصدی از i محموله معیوب توسط خریدار رد می شود؟ آن را بـرای i=۱،۴ بدست آورید. اگر محموله ای رد شده باشد احتمال شرطی اینکه این محموله ۴ قطعه معیوب داشته باشد را بدست آورید.

حل:

$$i=۱ \Rightarrow P(B)=۱-\frac{\binom{۱}{۰}\binom{۹}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}}=\frac{۳}{۱۰}=۰/۳$$

$$i=۴ \Rightarrow P(A)=۱-\frac{\binom{۴}{۰}\binom{۶}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}}=\frac{۵}{۶}$$

$$P(\text{معیوب ۴}\,|\,\text{رد}) = P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|A^c)P(A^c)}$$

$$=\frac{\frac{۳}{۱۰}\times\frac{۵}{۶}}{\frac{۳}{۱۰}\times\frac{۵}{۶}+\frac{۷}{۱۰}\times\frac{۳}{۱۰}}=\frac{۷۵}{۱۳۸}=\frac{۲۵}{۴۶}$$

۷۷- یک خریدار قطعات ترانزیستور، آنها را در محموله های ۲۰ تایی خریداری می کنـد. سیاسـت او ایـن است که در هر محموله ۴ قطعه را به تصادف انتخاب کرده و اگر همه آنها سالم باشند محموله را می‌پذیرد. اگر هر قطعه در محموله مستقل از سایر قطعات با احتمـال ۰/۱ معیـوب باشـد چـه نسـبتی از محمولـه هـا رد می‌شوند.

حل: $P(\text{سالم})=(۰/۹)^۴ \Rightarrow P(\text{رد شدن})=۱-(۰/۹)^۴=۰/۳۴۳۹$

فصل ۵
متغیرهای تصادفی پیوسته

۱- اگر X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی زیر باشد.

$$f(x)=\begin{cases} c(1-x^2) & -1<x<1 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

الف) مقدار c را بدست آورید.

ب) تابع توزیع تجمعی X چیست؟

حل: الف)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1 \Rightarrow \int_{-1}^{1} c(1-x^2)\,dx=1 \Rightarrow c\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=1$$

$$\Rightarrow c\times\frac{4}{3}=1 \Rightarrow c=\frac{3}{4}$$

ب)

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\int_{-1}^{x}\frac{3}{4}(1-x^2)\,dx=\frac{3}{4}\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{x}$$

$$=\frac{3}{4}\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}\right) \qquad -1<x<1$$

تابع $F_X(x)$ برای مقادیر x که کمتر از ۱- هستند برابر با صفر و برای مقادیر x که بیشتر از ۱ هستند برابر با یک می باشد.

۲- سیستمی شامل یک واحد اصلی به اضافه یک واحد پشتیبان است که می تواند برای یک مدت زمان تصادفی X کار کند. اگر تابع چگالی X (بر حسب ماه) بصورت زیر باشد،

$$f(x)=\begin{cases} c\,x\,e^{-x/۲} & x>۰ \\ ۰ & x\leq ۰ \end{cases}$$

احتمال اینکه سیستم حداقل ۵ ماه کار کند چقدر است؟

حل:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=۱ \Rightarrow \int_{۰}^{\infty} c\,x\,e^{-\frac{x}{۲}}\,dx=۱ \Rightarrow \begin{cases} x=u & \to dx=du \\ e^{-\frac{x}{۲}}dx=dv & \to -۲e^{-\frac{x}{۲}}=v \end{cases}$$

$$\Rightarrow c\left(uv-\int vdu\right)=c\times\left[\left(-۲xe^{-\frac{x}{۲}}\right)_{۰}^{\infty}+\int_{۰}^{\infty}۲e^{-\frac{x}{۲}}\,dx\right]$$

$$=c\times\left[-۲xe^{-\frac{x}{۲}}-۴e^{-\frac{x}{۲}}\right]_{۰}^{\infty}=۱ \Rightarrow c=\frac{۱}{۴}$$

$$P(\text{سیستم حداقل ۵ ماه کار کند})=P(X\geq ۵)=\int_{۵}^{\infty}f(x)\,dx=\int_{۵}^{\infty}\frac{۱}{۴}xe^{-\frac{x}{۲}}\,dx$$

$$=\frac{۱}{۴}\left[-e^{-\frac{x}{۲}}(۲x+۴)\right]_{۵}^{\infty}=۳/۵\,e^{-\frac{۵}{۲}}$$

۳- تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f(x)=\begin{cases} c(۲x-x^{۳}) & ۰<x<\frac{۵}{۲} \\ ۰ & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

آیا f می تواند یک تابع چگالی باشد؟ در این صورت، c را تعریف کنید. مسأله را برای حالتی که f(x) بصورت زیر است، تکرار کنید.

$$f(x)=\begin{cases} c(۲x-x^{۲}) & ۰<x<\frac{۵}{۲} \\ ۰ & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

الف) شرط اولیه اینکه f(x) تابع چگالی باشد، این است که f(x) غیر منفی باشد، ولی داریم:

$$c>۰ \Rightarrow x\in(\sqrt{۲},\frac{۵}{۲}) \Rightarrow f(x)<۰$$

$$c<۰ \Rightarrow x\in(۰,\sqrt{۲}) \Rightarrow f(x)<۰$$

لذا f(x) نمی تواند یک تابع چگالی باشد.

ب) با توجه به قسمت ((الف)) داریم:

$$c>۰ \Rightarrow x\in(۲,\frac{۵}{۲}) \Rightarrow f(x)<۰$$
$$c<۰ \Rightarrow x\in(۰,۲) \Rightarrow f(x)<۰$$

پس در اینجا نیز $f(x)$ نمی تواند تابع چگالی باشد.

۴- تابع چگالی طول عمر یک قطعه الکترونیکی (بر حسب ساعت) بصورت زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۱۰}{x^۲} & x>۱۰\\ ۰ & x\le ۱۰\end{cases}$$

الف) $P\{X>۲۰\}$ را پیدا کنید.

ب) تابع توزیعی تجمعی X را بدست آورید.

ج) احتمال اینکه از ۶ قطعه الکترونیکی لااقل ۳ تا برای حداقل ۱۵ ساعت کار کنند چقدر است؟ چه فرض هایی را در نظر می گیرید؟

الف)
$$P(X>۲۰)=\int_{۲۰}^{\infty}\frac{۱۰}{x^۲}dx=-\frac{۱۰}{x}\Big|_{۲۰}^{\infty}=-\frac{۱۰}{\infty}+\frac{۱۰}{۲۰}=\frac{۱}{۲}$$

ب)
$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\,dx=\int_{۱۰}^{x}\frac{۱۰}{x^۲}dx=-\frac{۱۰}{x}\Big|_{۱۰}^{x}=-\frac{۱۰}{x}+۱ \qquad x>۱۰$$

$$\Rightarrow F_X(x)=\begin{cases}۱-\frac{۱۰}{x} & x>۱۰\\ ۰ & x\le ۱۰\end{cases}$$

ج)
$$P(X>۱۵)=\int_{۱۵}^{\infty}\frac{۱۰}{x^۲}dx=-\frac{۱۰}{x}\Big|_{۱۵}^{\infty}=\frac{۱۰}{۱۵}=\frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow P(A)=\sum_{i=۳}^{۶}\binom{۶}{i}\left(\frac{۲}{۳}\right)^{i}\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۶-i}\cong ۰/۹$$

فرض می کنیم که هر قطعه مستقل از دیگری عمر می کند.

۵- یک ایستگاه پمپ بنزین، دو هفته یک بار بنزین دریافت می کند. اگر حجم فروش هفتگی بر حسب هزار گالن یک متغیر تصادفی با تابع چگالی زیر باشد:

$$f(x)=\begin{cases}۵(۱-x)^۴ & ۰<x<۱\\ ۰ & \text{سایر مقادیر}\end{cases}$$

حجم مخزن پمپ بنزین چقدر باشد، تا احتمال تمام شدن بنزین در یک هفته معین ۰/۰۱ گردد؟

حل:
$$P(X>V)=\int_{V}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{V}^{۱} ۵(۱-x)^{۴}\,dx=-(۱-x)^{۵}\Big|_{V}^{۱}=۰/۰۱$$
$$\Rightarrow (۱-V)^{۵}=۰/۰۱ \Rightarrow V=۱-(۰/۰۱)^{\frac{۱}{۵}}$$
(توجه داشته باشید که احتمال تمام شدن بنزین در یک هفته خواسته شده است)

۶- اگر تابع چگالی X بصورت های زیر باشد، $E[X]$ را محاسبه کنید.

الف)
$$f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۴}xe^{-x/۲} & x>۰\\ ۰ & \text{سایر مقادیر}\end{cases}$$

ب)
$$f(x)=\begin{cases}c(۱-x^{۲}) & -۱<x<۱\\ ۰ & \text{سایر مقادیر}\end{cases}$$

ج)
$$f(x)=\begin{cases}\frac{۵}{x^{۲}} & x>۵\\ ۰ & x\le ۵\end{cases}$$

حل: الف) با دو بار انتگرال جزء به جزء داریم:
$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx=\int_{۰}^{\infty}\frac{۱}{۴}x^{۲}e^{-\frac{x}{۲}}dx$$
$$=-\frac{۱}{۲}x^{۲}e^{-\frac{x}{۲}}\Big|_{۰}^{\infty}+\int_{۰}^{\infty}xe^{-\frac{x}{۲}}dx$$
$$=۰+\left(-۲xe^{-\frac{x}{۲}}\Big|_{۰}^{\infty}\right)+\int_{۰}^{\infty}۲e^{-\frac{x}{۲}}dx=-۴e^{-\frac{x}{۲}}\Big|_{۰}^{\infty}=۴$$

ب)
$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx\ ;\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{-۱}^{۱}c(۱-x^{۲})dx=۱$$
$$\Rightarrow c\left[x-\frac{x^{۳}}{۳}\right]_{-۱}^{۱}=۱\Rightarrow c=\frac{۳}{۴}\Rightarrow E(X)=\int_{-۱}^{۱}\frac{۳}{۴}(x-x^{۳})dx=\frac{۳}{۴}\left[\frac{x^{۲}}{۲}-\frac{x^{۴}}{۴}\right]_{-۱}^{۱}=۰$$

ج)
$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx=\int_{۵}^{\infty}x\frac{۵}{x^{۲}}dx=۵\,\mathrm{Ln}(x)\Big|_{۵}^{\infty}=\infty$$

۷- تابع چگالی x بصورت زیر است:
$$f(x)=\begin{cases}a+bx^{۲} & ۰\le x\le ۱\\ ۰ & \text{سایر مقادیر}\end{cases}$$

اگر $E[X]=\frac{۳}{۵}$ باشد، مقادیر a و b را بدست آورید.

حل: چون f تابع چگالی است:

$$\text{رابطه ۱}: \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{۰}^{۱} (a+bx^{۲})\,dx$$

$$=\left[ax+\frac{bx^{۳}}{۳}\right]_{۰}^{۱} = ۱ \Rightarrow a+\frac{b}{۳}=۱$$

$$\text{رابطه ۲}: E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx=\frac{۳}{۵} \Rightarrow \int_{۰}^{۱}(ax+bx^{۳})\,dx=\frac{۳}{۵}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{ax^{۲}}{۲}+\frac{bx^{۴}}{۴}\right]_{۰}^{۱}=\frac{۳}{۵} \Rightarrow ۲a+b=\frac{۱۲}{۵}$$

$$۱,۲ \Rightarrow \begin{cases} ۳a+b=۳ \\ ۲a+b=\frac{۱۲}{۵} \end{cases} \Rightarrow a=\frac{۳}{۵}\ ,\ b=\frac{۶}{۵}$$

۸- طول عمر یک لامپ الکترونیکی (بر حسب ساعت) یک متغیر تصادفی با تابع چگالی زیر است:

$$f(x)=xe^{-x} \qquad x\geq ۰$$

متوسط طول عمر چنین لامپی را محاسبه کنید.

حل: به کمک روش جزء به جزء داریم:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx=\int_{۰}^{\infty} x^{۲}e^{-x}dx=-x^{۲}e^{-x}\Big|_{۰}^{\infty}-\int_{۰}^{\infty}-۲xe^{-x}dx$$

$$=۰+\int_{۰}^{\infty}۲xe^{-x}dx=-۲xe^{-x}\Big|_{۰}^{\infty}-\int_{۰}^{\infty}-۲e^{-x}dx$$

$$=۰+۲\int_{۰}^{\infty}e^{-x}dx=-۲e^{-x}\Big|_{۰}^{\infty}=۲$$

۹- مثال ۵-۲ فصل ۴ را در نظر گرفته، فرض کنید که تقاضای فصلی، یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی f باشد. نشان دهید که اندازه بهینه ذخیره سازی (s^*) از رابطه زیر بدست می آید:

$$F(s*)=\frac{b}{b+l}$$

که b سود خالص در هر واحد فروش، l زیان خالص در هر واحد فروش نرفته، و F تابع توزیع تجمعی تقاضای فصلی است.

حل:

$$\text{میزان سود}=\begin{cases} bX-(s-X)l & X<s \\ sb & X\geq s \end{cases}$$

$$E_s(X)=\int_{۰}^{s}(bx-(s-x)l)\,f_x(x)\,dx+\int_{s}^{\infty}(sb)\,f_x(x)\,dx$$

$$=(b+l)\int_{۰}^{s}x\,f_x(x)\,dx-sl\int_{۰}^{s}f_x(x)\,dx+sb\left[۱-F(s)\right]$$

$$=(b+l)\int_{۰}^{s}x\,f_x(x)\,dx-(sl+sb)\,F(s)+sb$$

$$\frac{dE_s(X)}{ds}=(b+l)\left[F(s)+sf(s)-F(s)\right]-(l+b)\left[sf(s)+F(s)\right]+b=۰$$

$$\Rightarrow\ b-F(s)(l+b)=0\ \Rightarrow\ F(s*)=\frac{b}{b+l}$$

۱۰- قطارهایی که عازم مقصد A هستند از ساعت ۷ صبح به فاصله ۱۵ دقیقه به ایستگاه می رسند. درحالیکه قطارهای عازم مقصد B از ساعت ۷:۰۵ به فاصله ۱۵ دقیقه وارد ایستگاه می شوند.

الف) اگر مسافری در زمانیکه بطور یکنواخت بین ۷ و ۸ صبح توزیع شده است به ایستگاه برسد و سوار اولین قطاری که وارد ایستگاه می گردد بشود، به چه نسبتی وی به مقصد A می رود؟

ب) پاسخ قسمت (الف) را اگر مسافر در زمانی به ایستگاه برسد که بطور یکنواخت بین ۷:۱۰ و ۸:۱۰ صبح توزیع شده است بدست آورید.

حل:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{۱}{۶۰} & ۰\leq x\leq ۶۰ \\ ۰ & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

الف)

$$P(A)=P(۵\leq X\leq ۱۵)+P(۲۰\leq X\leq ۳۰)+P(۳۵\leq X\leq ۴۵)+P(۵۰\leq X\leq ۶۰)$$

$$=\int_{۵}^{۱۵}\frac{۱}{۶۰}dx+\int_{۲۰}^{۳۰}\frac{۱}{۶۰}dx+\int_{۳۵}^{۴۵}\frac{۱}{۶۰}dx+\int_{۵۰}^{۶۰}\frac{۱}{۶۰}dx=\frac{۴۰}{۶۰}=\frac{۲}{۳}$$

ب)همانند قسمت ((الف))

$$P(A)=P(۱۰\leq X\leq ۱۵)+P(۲۰\leq X\leq ۳۰)$$

$$+P(۳۵\leq X\leq ۴۵)+P(۵۰\leq X\leq ۶۰)+P(۵\leq X\leq ۱۰)=\frac{۴۰}{۶۰}=\frac{۲}{۳}$$

۱۱- یک نقطه به تصادف روی پاره خطی به طول L انتخاب می کنیم. منظور ازاین عبارت چیست؟ احتمال اینکه نسبت پاره خط کوتاهتر به پاره خط بزرگتر کمتر از $\frac{۱}{۴}$ باشد را بدست آورید.

حل: منظور از یک نقطه به تصادف این است که توزیع نقطه بروی خط یکنواخت می باشد.

نقطه i ، نقطه ای است که پاره خط را به ۲ قسمت تقسیم می کند:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{L} & ۰\le x\le L\\ ۰ & \text{سایر مقادیر}\end{cases}$$

$$۰\quad \frac{۱}{۵}L\quad \frac{۲}{۵}L\quad \frac{۳}{۵}L\quad \frac{۴}{۵}L\quad \frac{۵}{۵}L$$

$$P\left(\text{نسبت کوچکتر به بزرگتر کمتر از } \frac{۱}{۴}\right)=P(۰<i<\frac{۱}{۵}L)+P(\frac{۴}{۵}L<i<\frac{۵}{۵}L)$$

$$=\int_{۰}^{\frac{L}{۵}}\frac{۱}{L}dx+\int_{\frac{۴}{۵}L}^{L}\frac{۱}{L}dx=\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۵}=\frac{۲}{۵}$$

توجه کنید که نسبت باید از $\frac{۱}{۴}$ کوچکتر باشد، یعنی ۱ به ۴، پس کل تعداد قسمت ها ۵=۱+۴ می باشد.

۱۲- اتوبوسی بین دو شهر A و B که ۱۰۰ مایل از هم فاصله دارند در حرکت است. اتوبوس در محلی خراب می شود که فاصله آن تا شهر A دارای توزیع یکنواخت روی فاصله (۰،۱۰۰) است. اگر یک مرکز تعمیر اتوبوس در شهر A ، یکی در شهر B و یکی در نقطه وسط راه بین دو شهر A و B باشد، پیشنهاد شده است که هرگاه این مراکز تعمیر به ترتیب در ۲۵، ۵۰ و ۷۵ مایلی از A باشند کارایی بیشتری خواهند داشت. آیا موافق هستید؟ چرا؟

حل: امید ریاضی را برای دو حالت ذکر شده، حساب می کنیم؛ توجه کنید که اتوبوس هرجا خراب شود، فاصله اش را با تعمیرگاه نزدیکتر می سنجیم:

حالت اول:

$$E(X)=\sum E(X|i)P(i)$$

$$=E(X|\text{اتوبوس بین فاصله ۰ تا ۲۵})\,P(\text{۰ تا ۲۵})+E(X|\text{۲۵ تا ۵۰})\,P(\text{۲۵ تا ۵۰})$$

$$+E(X|\text{۵۰ تا ۷۵})\,P(\text{۵۰ تا ۷۵})+E(X|\text{۷۵ تا ۱۰۰})\,P(\text{۷۵ تا ۱۰۰})$$

$$=\frac{۱}{۴}\left(\frac{۲۵}{۲}\right)+\frac{۱}{۴}\left(\frac{۲۵}{۲}\right)+\frac{۱}{۴}\left(\frac{۲۵}{۲}\right)+\frac{۱}{۴}\left(\frac{۲۵}{۲}\right)=۱۲/۵$$

توجه کنید که اگر در فاصله ۰ تا ۲۵ باشد به تعمیرگاه اول و اگر در فاصله ۲۵ تا ۵۰ باشد به تعمیرگاه دوم می رود.

حالت دوم:

$$E(X)=E(X|\text{۰ تا ۲۵})P(\text{۰ تا ۲۵})+E(X|\text{۲۵ تا ۳۷/۵})$$
$$\times P(\text{۲۵ تا ۳۷/۵})+E(X|\text{۳۷/۵ تا ۵۰})P(\text{۳۷/۵ تا ۵۰})$$
$$+E(X|\text{۵۰ تا ۶۲/۵})P(\text{۵۰ تا ۶۲/۵})+E(X|\text{۶۲/۵ تا ۷۵})P(\text{۶۲/۵ تا ۷۵})$$
$$+E(X|\text{۷۵ تا ۱۰۰})P(\text{۷۵ تا ۱۰۰})$$
$$=\left(\frac{۱}{۴}\times ۱۲/۵\right)+\left(\frac{۱}{۸}\times\frac{۲۵}{۴}\right)+\left(\frac{۱}{۸}\times\frac{۲۵}{۴}\right)+\left(\frac{۱}{۸}\times\frac{۲۵}{۴}\right)+\left(\frac{۱}{۸}\times\frac{۲۵}{۴}\right)+\left(\frac{۱}{۴}\times ۱۲/۵\right)=\frac{۷۵}{۸}=۹/۳۷۵$$

پس حالت دوم بهتر است.

البته باید در نظر داشت که این مساله را با اطلاعات فصل ۷ می توان ساده تر حل نمود.

۱۳- شما ساعت ۱۰ صبح به یک ایستگاه اتوبوس می رسید و می دانید که اتوبوس در زمانی که بطور یکنواخت بین ۱۰ و ۱۰:۳۰ است به ایستگاه خواهد رسید.

الف) احتمال اینکه بیش از ۱۰ دقیقه منتظر بمانید چقدر است؟

ب) اگر در ساعت ۱۰:۱۵ هنوز اتوبوس به ایستگاه نرسید باشد، احتمال اینکه شما حداقل ۱۰ دقیقه دیگر نیز منتظر بمانید چقدر است؟

حل: الف) X= زمان انتظار

$$P(X>۱۰)=\int_{۱۰}^{\infty}f(x)\,dx=\int_{۱۰}^{۳۰}\frac{۱}{۳۰}dx=\frac{۲۰}{۳۰}=\frac{۲}{۳}$$

ب)

$$P(X>۲۵|X>۱۵)=P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$=\frac{P(X>۲۵)}{P(X>۱۵)}=\frac{\int_{۲۵}^{۳۰}\frac{۱}{۳۰}dx}{\int_{۱۵}^{۳۰}\frac{۱}{۳۰}dx}=\frac{\frac{۱}{۶}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۳}$$

۱۴- فرض کنید X یک متغیر تصادفی یکنواخت روی فاصله (۰ و۱) باشد. $E[X^n]$ را با استفاده از گزاره (۲-۱) محاسبه کرده و نتیجه را با تعریف امید ریاضی مقایسه کنید.

حل:

$$E(X^n)=\int_{-\infty}^{\infty}x^n f(x)\,dx=\int_{۰}^{۱}x^n\times ۱\times dx=\int_{۰}^{۱}x^n dx=\frac{x^{n+۱}}{n+۱}\Big|_{۰}^{۱}=\frac{۱}{n+۱}$$

این فرمول با تعریف امید ریاضی X هم سازگار است.

$$E(X)=\frac{۱}{۱+۱}=\frac{۱}{۲}$$

۱۵- اگر X یک متغیر تصادفی نرمال با پارامترهای $\mu=10$ و $\sigma^2=36$ باشد، احتمالات زیر را محاسبه کنید.

الف) $P\{X>5\}$ ، ب) $P\{4<X<16\}$ ، ج) $P\{X<8\}$

د) $P\{X<20\}$ ، ه) $P\{X>16\}$

حل: الف) $P(X>5)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{5-10}{6}\right)=\left(Z>-\frac{5}{6}\right)=P\left(Z<\frac{5}{6}\right)=0/7967$

ب) $P(4<X<16)=P\left(\frac{4-10}{6}<\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{16-10}{6}\right)=P(-1<Z<1)=2P(Z<1)-1=0/6826$

ج) $P(X<8)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{8-10}{6}\right)=P\left(Z<-\frac{1}{3}\right)=1-P\left(Z<\frac{1}{3}\right)=1-0/6293=0/3707$

د) $P(X<20)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{20-10}{6}\right)=P\left(Z<\frac{10}{6}\right)=P(Z<1/67)=0/9525$

ه) $P(X>16)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{16-10}{6}\right)=P(Z>1)=1-P(Z<1)=1-0/8413=0/1587$

۱۶- میزان باران سالانه (بر حسب اینچ) در یک ناحیه معین دارای توزیع نرمال با $\mu=40$ و $\sigma=4$ است. احتمال اینکه از امسال برای مدت ۱۰ سال منتظر بمانیم تا میزان بارندگی در سال بیش از ۵۰ اینچ باشد را بدست آورید. چه فرض هایی را در نظر می گیرید؟

حل: X= میزان بارندگی

$$P(X>50)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{50-40}{4}\right)=P(Z>2/5)$$
$$=1-P(Z\le 2/5)=1-0/9938=0/0062$$
$$\Rightarrow P(X\le 50)=P(Z\le 2/5)=0/9938$$

فرض می کنیم هر سال مستقل از سایر سالهاست.

$\Rightarrow$ P (۱۰ سال منتظر بمانیم) $=(0/9938)^{10}\cong 0/94$

اما اگر منظور این باشد که در سال دهم بیش از ۵۰ اینچ باران ببارد:

$$P=(0/9938)^9\times 0/0062$$

۱۷- مردی تلاش در زدن هدفی دارد که اگر پرتاب او در محدوده یک اینچی از هدف باشد ۱۰ امتیاز کسب می کند، اگر بین ۱ و ۳ اینچ از هدف باشد ۵ امتیاز و اگر بین ۳ و ۵ اینچ از هدف باشد ۳ امتیاز

کسب خواهد کرد. اگر فاصله پرتاب از هدف بطور یکنواخت بین ۰ و ۱۰ توزیع شده باشد، متوسط تعداد امتیازها را بدست آورید.

حل: X= فاصله پرتاب از هدف

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{10} & 0<x<10\\ 0 & \text{سایر مقادیر}\end{cases}$$

$$E(X)=\int_0^1 10\frac{1}{10}dx+\int_1^3 5\frac{1}{10}dx+\int_3^5 3\frac{1}{10}dx+\int_5^{10} 0\frac{1}{10}dx\Rightarrow$$

$$E(X)=10\times\frac{1}{10}+5\times\frac{2}{10}+3\times\frac{2}{10}+0\times\frac{5}{10}=1+1+0/6=2/6$$

۱۸- فرض کنید که X یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین ۵ است. اگر $P\{X>9\}=0/2$ باشد، $Var(X)$ را با تقریب بدست آورید.

حل:

$$P(X>9)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{9-5}{\sigma}\right)=P\left(Z>\frac{4}{\sigma}\right)=0/2\Rightarrow 1-P\left(Z<\frac{4}{\sigma}\right)=0/2$$

$$\Rightarrow P\left(Z<\frac{4}{\sigma}\right)=0/8\Rightarrow\frac{4}{\sigma}=0/84\Rightarrow\sigma=\frac{4}{0/84}=4/762$$

$$\Rightarrow\sigma^2=(4/762)^2\Rightarrow Var(X)=22/67$$

۱۹- اگر X یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین ۱۲ و واریانس ۴ باشد. مقدار c را چنان پیدا کنید که $P\{X>c\}=0/1$ گردد.

حل:

$$P(X>c)=0/1\Rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{c-12}{2}\right)=P\left(Z>\frac{c-12}{2}\right)=0/1$$

$$\Rightarrow P\left(Z<\frac{c-12}{2}\right)=0/9\Rightarrow\frac{c-12}{2}=1/28\Rightarrow c=14/56$$

۲۰- اگر ۶۵ درصد از جمعیت یک جامعه بزرگ موافق پیشنهاد افزایش مالیات مدرسه باشند، احتمال تقریبی اینکه یک نمونه تصادفی ۱۰۰ نفری شامل موارد زیر باشد چقدر است؟

الف) حداقل ۵۰ نفر موافق پیشنهاد باشند.

ب) بین ۶۰ و ۷۰ نفر موافق پیشنهاد باشند.

ج) کمتر از ۷۵ نفر موافق پیشنهاد باشند.

حل: الف)
$$P(X\geq ۵۰)=P\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(۱-p)}}\geq\frac{۴۹/۵-(۱۰۰)(۰/۶۵)}{\sqrt{(۱۰۰)(۰/۶۵)(۰/۳۵)}}\right)=$$
$$=P\left(Z\geq\frac{-۱۵/۵}{۴/۷۶}\right)=P(Z\geq -۳/۲۶)=P(Z\leq ۳/۲۶)=۰/۹۹۹۴$$

ب)
$$P(۵۹/۵\leq X\leq ۷۰/۵)=P\left(\frac{۵۹/۵-۶۵}{۴/۷۶}\leq Z\leq\frac{۷۰/۵-۶۵}{۴/۷۶}\right)=P(-۱/۱۵\leq Z\leq ۱/۱۵)$$
$$=۲\times(۰/۸۷۴۹)-۱=۰/۷۴۹۸$$

ج)
$$P(X<۷۵)=P\left(Z\leq\frac{۷۴/۵-۶۵}{۴/۷۶}\right)=P(Z\leq ۱/۹۹۶)=۰/۹۷۷۰$$

۲۱- فرض کنید طول قد (بر حسب اینچ) مردان ۲۵ ساله یک متغیر تصادفی نرمال با پارامترهای ۷۱= μ و ۶/۲۵= σ^2 است. چه درصدی از مردان ۲۵ ساله بیشتر از ۶ فوت و ۲ اینچ قد دارند؟ چند درصد از مردان بلندتر از ۶ فوت بیش از ۶ فوت، و ۵ اینچ قد دارند؟

هر فوت، ۱۲ اینچ است، لذا داریم:

حل: الف)
$$P(X>۷۴)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{۷۴-۷۱}{۲/۵}\right)=P(Z>۱/۲)=۱-P(Z<۱/۲)$$
$$=۱-۰/۸۸۴۹=۰/۱۱۵۱\Rightarrow ۱۱/۵٪$$

ب)
$$P(X>۷۷|X>۷۲)=P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(X>۷۷)}{P(X>۷۲)}$$
$$=\frac{P(Z>۲/۴)}{P(Z>۰/۴)}=\frac{۱-۰/۹۹۱۸}{۱-۰/۶۵۵۴}=۰/۰۲۴\Rightarrow ۲/۴٪$$

۲۲- پهنای قالب های میله های آلومینیومی (بر حسب اینچ) دارای توزیع نرمال با ۰/۹۰۰۰= μ و ۰/۰۰۳۰= σ است. اگر حد مجاز تعیین شده برای پهنای قالب ها برابر با ۰/۰۰۵۰ $\pm$ ۰/۹۰۰۰ باشد.

الف) چه درصدی از قالب ها معیوب هستند؟

ب) حداکثر مقدار مجاز σ که باعث نمی شود بیشتر از ۱ معیوب در ۱۰۰ قالب داشته باشیم چقدر است؟

حل: الف)
$$P(\text{سالم})=P(۰/۸۹۵۰<X<۰/۹۰۵۰)$$
$$=P\left(\frac{۰/۸۹۵۰-۰/۹}{۰/۰۰۳۰}<Z<\frac{۰/۹۰۵۰-۰/۹}{۰/۰۰۳۰}\right)=P(-۱/۶۷<Z<۱/۶۷)=۰/۹۰۵$$
$$P(\text{معیوب})=۱-P(\text{سالم})=۱-۰/۹۰۵=۰/۰۹۵\quad\Rightarrow\quad ۹/۵٪$$

ب)
$$P(\text{معیوب})=۱\div ۱۰۰=۰/۰۱\quad\Rightarrow\quad P(\text{سالم})=۰/۹۹$$

$$\Rightarrow P(\text{سالم}) = P(0/895 < X < 0/905) = 0/99$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{-0/005}{\sigma} < Z < \frac{0/005}{\sigma}\right) = 0/99 \Rightarrow 2P\left(Z < \frac{0/005}{\sigma}\right) - 1 = 0/99$$

$$\Rightarrow P\left(Z < \frac{0/005}{\sigma}\right) = 0/995 \Rightarrow \frac{0/005}{\sigma} = 2/575 \Rightarrow \sigma = 0/00194$$

۲۳- یک تاس سالم هزار بار پرتاب می شود. احتمال اینکه عدد ۶ بین ۱۵۰ تا ۲۰۰ مرتبه مشاهده شود را با تقریب بدست آورید. اگر عدد ۶ دقیقاً ۲۰۰ مرتبه مشاهده شود، احتمال اینکه عدد ۵ کمتر از ۱۵۰ مرتبه مشاهده گردد را بدست آورید.

الف) با فرض اینکه ۱۵۰ و ۲۰۰ هم جزء فاصله باشد، داریم:

$$P(150 \le X \le 200) = P\left(\frac{149/5 - (1000)(\frac{1}{6})}{\sqrt{(1000)(\frac{1}{6})(\frac{5}{6})}} < Z \le \frac{200/5 - (1000)(\frac{1}{6})}{\sqrt{(1000)(\frac{1}{6})(\frac{5}{6})}}\right)$$

$$= P(-1/46 \le Z \le 2/87) = 0/9258$$

ب)
$$P(X < 150) = P\left(\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{149/5 - (800)(\frac{1}{5})}{\sqrt{800(\frac{1}{5})(\frac{4}{5})}}\right) = P(Z \le -0/93) = 0/1762$$

۲۴- طول عمر تراشه های تولید شده توسط یک کارخانه تولید قطعات الکترونیکی دارای توزیع نرمال با پارامترهای $\mu = 1/4 \times 10^6$ و $\sigma = 3 \times 10^5$ (بر حسب ساعت) است. احتمال تقریبی اینکه یک بسته ۱۰۰ تایی از این تراشه ها شامل ۲۰ تراشه که طول عمرشان کمتر از $1/8 \times 10^6$ است را بدست آورید.

حل:

$$P(X < 1/8 \times 10^6) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{1/8 \times 10^6 - 1/4 \times 10^6}{3 \times 10^5}\right) = P(Z < 1/33) = 0/9082$$

$$P(19/5 \le y \le 20/5)$$

$$= P\left(\frac{19/5 - 90/82}{\sqrt{100 \times 0/9082 \times 0/0918}} \le \frac{y - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{20/5 - 90/82}{\sqrt{100 \times 0/9082 \times 0/0918}}\right)$$

$$= P(-24/68 \le Z \le -24/33) \cong 0$$

۲۵- هر قطعه ای که توسط یک کارخانه تولید می شود مستقل از یکدیگر با احتمال ۰/۹۵ دارای کیفیت قابل قبول می باشد. احتمال تقریبی اینکه از ۱۵۰ قطعه تولید شده حداکثر ۱۰ قطعه غیر قابل قبول باشد را بدست آورید.

حل: X : تعداد قطعات غیر قابل قبول

احتمال معیوب بودن هر قطعه ۰/۰۵ است.

$$P(X\leq ۱۰)=P\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(۱-p)}}\leq\frac{۱۰+\frac{۱}{۲}-np}{\sqrt{np(۱-p)}}\right)=P\left(Z\leq\frac{۱۰+\frac{۱}{۲}-۱۵۰\times ۰/۰۵}{\sqrt{۱۵۰\times ۰/۰۵\times ۰/۹۵}}\right)=P\left(Z\leq\frac{۳}{۲/۶۷}\right)$$

$$=P(Z\leq ۱/۱۲)=۰/۸۶۸۶$$

۲۶- دو نوع سکه در کارخانه ای تولید می شود. یکی سالم و دیگری اریب که ۵۵ درصد از مواقع شیر می‌آید. یکی از این سکه ها در اختیار ما است اما نمی دانیم که سکه سالم یا اریب است. برای تحقیق اینکه کدامیک از دو سکه را در اختیار داریم، آزمون آماری زیر را انجام می دهیم: سکه را ۱۰۰۰ مرتبه پرتاب کرده اگر حداقل ۵۲۵ مرتبه شیر مشاهده شود، آنگاه نتیجه می گیریم که سکه اریب است، ولی اگر کمتر از ۵۲۵ مرتبه شیر مشاهده شود، آنگاه نتیجه می گیریم که سکه سالم است. اگر سکه واقعاً سالم باشد، احتمال اینکه به نتیجه غلط برسیم چقدر است؟ اگر سکه اریب باشد پاسخ چیست؟

حل: الف)

$$P(\text{نتیجه غلط} \mid \text{سکه سالم})=P(X\geq ۵۲۵)$$

$$=P\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(۱-p)}}\geq\frac{۵۲۴/۵-(۱۰۰۰)(۰/۵)}{۱۵/۸۱}\right)=P(Z\geq ۱/۵۵)=۰/۰۶۰۶$$

ب)

$$P(\text{نتیجه غلط} \mid \text{سکه اریب})=P(X<۵۲۵)$$

$$=P\left(Z\leq\frac{۵۲۴/۵-(۱۰۰۰)(۰/۵۵)}{\sqrt{(۱۰۰۰)(۰/۵۵)(۰/۴۵)}}\right)=P(Z\leq -/۶۲)=۰/۰۵۲۶$$

۲۷- در ۱۰۰۰۰ مرتبه پرتاب مستقل یک سکه، ۵۸۰۰ مرتبه شیر مشاهده شد. آیا منطقی است که فرض کنیم سکه سالم نیست؟ توضیح دهید.

حل: برای جواب دادن به این سوال، از مبحثی از درس آمار به نام آزمون فرض استفاده می کنند. اما با نگاهی ساده به مسأله می توان چنین در نظر گرفت که اگر سکه سالم باشد آنگاه با احتمال ۰/۹۹ تعداد شیرهای ظاهر شده در ۱۰۰۰۰ بار پرتاب باید در بازه $(۵۰۰۰\pm Z_{۰/۹۹۵}\times\sqrt{۲۵۰۰})$ باشد.

$$P\left(-z_{۰/۹۹۵}<\frac{X-۱۰۰۰۰\times\frac{۱}{۲}}{\sqrt{۱۰۰۰۰\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}}}<z_{۰/۹۹۵}\right)=۰/۹۹$$

در نتیجه اگر سکه سالم باشد با احتمال ۰/۹۹ باید تعداد شیرهای ظاهر شده در بازه (۵۱۲۹ و ۴۷۸۱) باشد، حال از آنجاییکه تعداد شیرهای ظاهر شده (۵۸۰۰ بار) فاصله بسیار زیادی با بازه بالا دارد نتیجه می گیریم که منطقی نیست که سکه را سالم در نظر بگیریم.

۲۸- ۱۲ درصد از مردم چپ دست هستند. احتمال تقریبی این پیشامد که حداقل ۲۰ چپ دست در مدرسه ای که ۲۰۰ دانش آموز دارد وجود داشته باشد را بدست آورید. فرض های خود را بیان کنید.

حل: X: تعداد چپ دست ها در مدرسه ۲۰۰ نفره

$$P(X\ge ۲۰)=P\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(۱-p)}}\ge\frac{۲۰-\frac{۱}{۲}-np}{\sqrt{np(۱-p)}}\right)$$

$$=P\left(Z\ge\frac{۱۹/۵-۲۰۰\times۰/۱۲}{\sqrt{۲۰۰\times۰/۱۲\times۰/۸۸}}\right)=P\left(Z\ge\frac{-۴/۵}{۴/۵۹}\right)=P(Z\ge -۰/۹۸)=۰/۸۳۶۵$$

۲۹-در مدلی که برای تغییرات قیمت سهام بکار می رود فرض می شود که اگر قیمت جاری یک سهام s باشد آنگاه پس از یک دوره قیمت آن با احتمال p برابر us است یا با احتمال $۱-p$ برابر با ds می شود. با فرض، اینکه تغییرات متوالی مستقل از یکدیگر می باشند احتمال تقریبی این پیشامد که قیمت سهام حداقل ۳۰ درصد پس از هزار دوره زمانی افزایش می یابد را با فرض $u=۱/۰۱۲$, $d=۰/۹۹$ و $p=۰/۵۲$ به دست آورید.

حل: X تعداد دفعاتی است که افزایش نرخ داشته ایم:

$$P(S\times(۱/۰۱۲)^{x}(۰/۹۹)^{۱۰۰۰-x}\ge ۱/۳S)=P(۱/۰۱۲^{x}\times۰/۹۹^{۱۰۰۰-x}\ge ۱/۳)$$

$$=P(x\ln ۱/۰۱۲+(۱۰۰۰-x)\ln ۰/۹۹\ge\ln ۱/۳)$$

$$=P(x(\ln 1/012-\ln 0/99)+1000\ln 0/99\geq \ln 1/3)=P\left(x\geq \frac{\ln 1/3-1000\ln 0/99}{\ln 1/012-\ln 0/99}\right)$$

$$=P(x\geq 469/2)=P(x\geq 470)$$

$$P(x\geq 470)=P\left(z>\frac{470-\frac{1}{2}-0/52\times 1000}{\sqrt{1000\times 0/52\times 0/48}}\right)\cong P\left(z>\frac{-50/5}{15/8}\right)=P(z>-3/19)=0/9993$$

۳۰- نقشه ای اندازه گذاری شده به دو ناحیه سیاه و سفید تقسیم شده است. اگر نقطه ای به تصادف در ناحیه سفید انتخاب شود اندازه ای را می دهد که دارای توزیع نرمال با میانگین $\mu=4$ و واریانس $\sigma^2=4$ است، در حالیکه اگر نقطه ای به تصادف از ناحیه سیاه انتخاب شود اندازه ای که دارای توزیع نرمال با پارامترهای (۹, ۶) است را خواهد داد. نقطه ای را به تصادف از نقشه انتخاب نموده و مقدار ۵ مشاهده می‌شود، اگر نسبت ناحیه سیاه α باشد برای چه مقداری از α احتمال های نتیجه گیری اشتباه در مورد ناحیه انتخاب شده یکسان می شود.

حل: از آنجاییکه احتمال نقطه در فضای پیوسته صفر است، باید از یک بازه بجای نقطه استفاده نمود. برای این کار دقت نقشه را عدد ۱ در نظر می گیریم که در نتیجه اندازه هر بازه نیز ۱ می شود.

$$P(4/5<X<5/5 \mid \text{سفید})=P\left(\frac{4/5-4}{2}<\frac{X-4}{2}<\frac{5/5-4}{2}\right)=0/174$$

$$P(4/5<X<5/5 \mid \text{سیاه})=P\left(\frac{4/5-6}{3}<\frac{X-6}{3}<\frac{5/5-6}{3}\right)=0/124$$

$$P(\text{سیاه})=\alpha \qquad P(\text{سفید})=(1-\alpha)$$

$$P(\text{سیاه} \mid 4/5<X<5/5)=\frac{0/124\alpha}{0/124\alpha+0/174(1-\alpha)}$$

$$P(\text{سفید} \mid 4/5<X<5/5)=\frac{0/174(1-\alpha)}{0/124\alpha+0/174(1-\alpha)}$$

$$\Rightarrow 0/124\alpha=0/174(1-\alpha)\Rightarrow \alpha=0/585$$

۳۱- الف) قرار است یک ایستگاه آتش نشانی در محلی کنار جاده ای به طول A مستقر شود. اگر حریق در نقطه ای که بطور یکنواخت روی فاصله $(0, A)$ است رخ دهد، ایستگاه آتش نشانی را بایستی در چه محلی مستقر نمود، تا متوسط فاصله از حریق حداقل شود؟ یعنی، a را طوری انتخاب کنید که $E[|X-a|]$ وقتی که X دارای توزیع یکنواخت روی فاصله $(0,A)$ است حداقل گردد.

ب) حال فرض کنید که طول جاده نامحدود است اگر فاصله حریق از نقطه ۰ دارای توزیع نمایی با نرخ λ باشد آنگاه ایستگاه آتش نشانی بایستی در چه محلی مستقر شود؟ یعنی، می خواهیم $E[|X-a|]$ را وقتی که X دارای توزیع نمایی با نرخ λ است، حداقل کنیم.

حل: الف) $E(|X-a|)=E(Y)=E(Y \mid$ فاصله از ۰ تا a$)P($فاصله ۰ تا a$)$
$+E(Y \mid$ فاصله a تا A$)P($فاصله a تا A$)$

$$=\left(\frac{a}{۲}\times\frac{a}{A}+\frac{A-a}{۲}\times\frac{A-a}{A}\right)=\frac{a^{۲}+(A-a)^{۲}}{۲A}$$

$$\frac{dE_a(Y)}{da}=۰\Rightarrow\frac{۲a-۲(A-a)}{۲A}=\frac{۴a-۲A}{۲A}=۰\Rightarrow\frac{۴a}{۲A}=۱\Rightarrow a=\frac{A}{۲}$$

ب)

$$E(|X-a|)=\int_{۰}^{a}(a-x)\lambda e^{-\lambda x}dx+\int_{a}^{\infty}(x-a)\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$\Rightarrow E(|X-a|)=a+\frac{۲e^{-\lambda a}}{\lambda}-\frac{۱}{\lambda}$$

$$\frac{dE(|X-a|)}{da}=۱-۲e^{-\lambda a}=۰\Rightarrow -\lambda a=-\ln ۲\Rightarrow a=\frac{\ln ۲}{\lambda}$$

نکته: اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی f باشد، مقدار $E(|X-a|)$ زمانی حداقل می شود که a میانه توزیع X باشد.

میانه: $a\Rightarrow P(X\le a)=\frac{۱}{۲}$

۳۲- مدت زمانی که لازم است تا یک ماشین را تعمیر کنیم (بر حسب ساعت)، دارای توزیع نمایی با پارامتر $\lambda=\frac{۱}{۲}$ است.

الف) احتمال اینکه مدت تعمیر بیش از ۲ ساعت طول کشد را بدست آورید.

ب) احتمال شرطی اینکه مدت زمان تعمیر حداقل ۱۰ ساعت طول بکشد بشرط اینکه بیش از ۹ ساعت از زمان تعمیر گذشته باشد را بدست آورید.

حل: الف)

$$P(X>۲)=\int_{۲}^{\infty}\frac{۱}{۲}e^{-\frac{۱}{۲}x}dx=-e^{-\frac{۱}{۲}x}\Big|_{۲}^{\infty}=e^{-۱}$$

ب) متغیر تصادفی نمائی، بدون حافظه است، لذا:

$$P(X\ge ۱۰|X>۹)=P(X\ge ۱)=\int_{۱}^{\infty}\frac{۱}{۲}e^{-\frac{۱}{۲}x}dx=e^{-\frac{۱}{۲}}$$

۳۳- طول عمر یک رادیو بر حسب سال دارای توزیع نمایی با پارامتر $\lambda=\frac{۱}{۸}$ است. اگر فردی یک رادیو دست دوم خریداری کند، احتمال اینکه ۸ سال دیگر کار کند چقدر است؟

حل: متغیر تصادفی نمائی، بدون حافظه است. بنابراین:

$$P(X>۸)=\int_{۸}^{\infty}\frac{۱}{۸}e^{-\frac{۱}{۸}x}dx=e^{-۱}$$

۳۴- فردی ادعا می کند، کل مسافتی که (بر حسب هزار مایل) می تواند یک اتومبیل طی کند قبل از اینکه نیاز به تعمیر داشته باشد یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر $\lambda=\frac{۱}{۲۰}$ است. فرد دیگری ماشین دست دومی دارد که ادعا می کند فقط ۱۰۰۰۰ مایل کار کرده است. اگر فرد اول ماشین را خریداری کند، احتمال اینکه او حداقل ۲۰۰۰۰ مایل دیگر بتواند استفاده کند چقدر است؟

مسأله را با فرض اینکه طول عمر ماشین بر اساس مسافت طی شده دارای توزیع نمایی نبوده بلکه دارای توزیع یکنواخت (بر حسب هزار مایل) روی فاصله (۰ ,۴۰) باشد تکرار کنید.

حل: الف) X بر حسب هزار مایل

$$P(X\geq ۳۰|X\geq ۱۰)=P(X\geq ۲۰)=\int_{۲۰}^{\infty}\frac{۱}{۲۰}e^{-\frac{۱}{۲۰}x}dx=-e^{-\frac{۱}{۲۰}}\Big|_{۲۰}^{\infty}=e^{-۱}$$

ب)

$$P(X\geq ۳۰|X\geq ۱۰)=P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\int_{۳۰}^{۴۰}\frac{۱}{۴۰}dx}{\int_{۱۰}^{۴۰}\frac{۱}{۴۰}dx}=\frac{\frac{۱۰}{۴۰}}{\frac{۳۰}{۴۰}}=\frac{۱}{۳}$$

۳۵- نرخ ابتلا به بیماری سرطان ریه برای یک مرد سیگاری t ساله بصورت زیر است.

$$\lambda(t)=۰/۰۲۷+۰/۰۰۰۲۵(t-۴۰)^{۲}\qquad t\geq ۴۰$$

با فرض اینکه یک مرد ۴۰ ساله سیگاری از سایر خطرات دیگر مصون باشد. احتمال اینکه او تا سن الف) ۵۰ سالگی، ب) ۶۰ سالگی بدون ابتلا به سرطان ریه زنده بماند چقدر است؟

حل: الف) $P(\text{عمر فرد بدون سرطان} > ۵۰ \mid \text{عمر فرد بدون سرطان} > ۴۰)=\frac{۱-F_n(۵۰)}{۱-F_n(۴۰)}$

$$=\frac{e^{-\int_{0}^{50} 0/027+0/00025\,(t-40)^2 dt}}{e^{-\int_{0}^{40} 0/027+0/00025\,(t-40)^2 dt}}=e^{-\int_{40}^{50} 0/027+0/00025(t-40)^2 dt}$$

$$= e^{-\left[0/027\ t+\frac{0/00025}{3}(t-40)^3\right]\Big|_{40}^{50}} \cong 0/70$$

ب) $P(\text{عمر فرد} > 60 \mid \text{عمر فرد} > 40)$

$$=e^{-\int_{40}^{60} 0/027+0/00025(t-40)^2 dt}=e^{-\left[0/027t+\frac{0/00025}{3}(t-40)^3\right]\Big|_{40}^{60}}\cong 0/3$$

۳۶- فرض کنید توزیع طول عمر قطعه ای دارای تابع نرخ خرابی $\lambda(t)=t^3$ $(t>0)$ است(برحسب سال). احتمال پیشامدهای زیر را بدست آورید.

الف) طول عمر قطعه ۲ سال باشد.

ب) طول عمر قطعه بین ۰/۴ تا ۱/۴ سال باشد.

ج) قطعه یک سال کارکرده با چه احتمالی تا ۲ سال کار می کند.

حل: الف) اگر منظور حداکثر دو سال باشد، داریم:

$$P(0<t\leq 2)=F_n(2)=1-e^{-\int_0^2 t^3 dt}=1-e^{-\frac{t^4}{4}\Big|_0^2}=1-0/018=0/982$$

ب)
$$P(0/4\leq t\leq 1/4)=F_n(1/4)-F_n(0/4)=e^{-\frac{t^4}{4}\Big|_0^{0/4}}-e^{-\frac{t^4}{4}\Big|_0^{1/4}}=0/61$$

ج)
$$P(t>2|t>1)=e^{-\int_1^2 t^3 dt}=e^{-\frac{t^4}{4}\Big|_1^2}=0/023$$

۳۷- اگر X بطور یکنواخت روی فاصله (۱،۱-) توزیع شده باشد، مطلوب است:

الف) $P\left\{|X|>\frac{1}{2}\right\}$

ب) تابع چگالی متغیر تصادفی $|X|$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & -1<x<1\\ 0 & \text{سایر مقادیر}\end{cases}$$

حل: الف)
$$P\left[|X|>\frac{1}{2}\right]=1-P\left[|X|<\frac{1}{2}\right]=1-P\left[-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2}\right]=1-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}$$

ب)
$$Y=|X| \Rightarrow F_Y(y)=P(Y\le y)=P(|X|\le y)=P(-y\le X\le y)$$
$$=P(X\le y)-P(X\le -y)=F_X(y)-F_X(-y)$$
$$\Rightarrow f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=f_X(y)+f_X(-y)=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱ \qquad ۰\le y\le ۱$$
$$\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases} ۱ & ۰\le y\le ۱ \\ ۰ & \text{سایرمقادیر} \end{cases}$$

۳۸- اگر Y بطور یکنواخت روی فاصله (۵،۰) توزیع شده باشد، احتمال اینکه هر دو ریشه معادله $۴x^۲+۴xY+Y+۲=۰$ حقیقی باشند چقدر است؟

حل: برای اینکه دو ریشه حقیقی داشته باشد، باید $\Delta>۰$ باشد. لذا داریم:
$$\Delta=b^۲-۴ac=(۴Y)^۲-۴(۴)(Y+۲)=۱۶(Y-۲)(Y+۱)>۰$$
$$\Rightarrow Y>۲ \quad \text{یا} \quad Y<-۱$$
$$P(\text{ریشه حقیقی})=P(Y>۲)+P(Y<-۱)=\int_۲^۵\frac{۱}{۵}dy+\int_{-\infty}^{-۱}۰\,dy=\frac{۳}{۵}$$

۳۹- اگر X یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر $\lambda=۱$ باشد، تابع چگالی متغیر تصادفی $Y=\log X$ را محاسبه کنید.

حل:
$$Y=\log X\Rightarrow F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\log X\le y)=P(X\le ۱۰^y)=F_X(۱۰^y)$$
$$\Rightarrow f_Y(y)=\frac{dF(y)}{dy}=(۱۰^y)(Ln۱۰)f_X(۱۰^y)=۱۰^y\times In۱۰\times e^{-۱۰^y}$$

۴۰- اگر X بطور یکنواخت روی فاصله (۱،۰) توزیع شده باشد، تابع چگالی $Y=e^x$ را بدست آورید.

حل:
$$Y=e^X\Rightarrow F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^X\le y)=P(X\le Lny)=F_X(Lny)$$
$$\Rightarrow f_Y(y)=\frac{dF(y)}{dy}=\frac{۱}{y}f_X(Lny)=\frac{۱}{y}\Rightarrow f_y(y)=\begin{cases}\frac{۱}{y} & ۱\le y=e^X\le e\\ ۰ & \text{سایر مقادیر}\end{cases}$$

۴۱- توزیع $R=A\ \sin\theta$ که A یک عدد ثابت معین و θ بطور یکنواخت روی فاصله $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ توزیع شده است، را بدست آورید. متغیر تصادفی R در نظریه پرتاب ها مطرح است. اگر موشکی از مرکز پرتاب با زاویه α از سطح زمین و با سرعت v پرتاب شود. آنگاه نقطه R که موشک به زمین برمی گردد را می‌توان بصورت $R=\frac{c^2}{g}\sin 2\alpha$ بیان نمود که g مقدار ثابت نیروی جاذبه و برابر با ۹۸۰ سانتیمتر بر مجذور ثانیه است.

حل:

$$R=A\sin\theta,\ F_R(r)=P(R\le r)=P(A\sin\theta\le r)=P(\sin\theta\le\frac{r}{A})$$

$$=P(\theta\le \mathrm{Arc\,Sin}\frac{r}{A})=F_\theta(\mathrm{Arc\,Sin}\frac{r}{A})$$

$$\Rightarrow f_R(r)=\frac{dF_R(r)}{dr}=\frac{1}{\pi}\times\frac{\frac{1}{A}}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{A}\right)^2}}\qquad -A\le r=A\sin\theta\le A$$

فصل ٦
متغیرهای تصادفی با توزیع توأم

۱- دو تاس سالم پرتاب می شوند. تابع احتمال توام X و Y را در هر یک از حالات زیر بدست آورید.

الف) X عدد بزرگتر روی دو تاس و Y مجموع مقادیر دو تاس باشد.

ب) X عدد روی تاس اول و Y عدد بزرگتر باشد.

ج) X عدد کوچکتر و Y عدد بزرگتر باشد.

حل: الف)

X \ Y	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
۱	۰	۱/۳۶	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۲	۰	۰	۲/۳۶	۱/۳۶	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۳	۰	۰	۰	۲/۳۶	۲/۳۶	۱/۳۶	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۴	۰	۰	۰	۰	۲/۳۶	۲/۳۶	۲/۳۶	۱/۳۶	۰	۰	۰	۰
۵	۰	۰	۰	۰	۰	۲/۳۶	۲/۳۶	۲/۳۶	۲/۳۶	۱/۳۶	۰	۰
۶	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۲/۳۶	۲/۳۶	۲/۳۶	۲/۳۶	۲/۳۶	۱/۳۶

ب)

X \ Y	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$
۲	۰	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$
۳	۰	۰	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$
۴	۰	۰	۰	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$
۵	۰	۰	۰	۰	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$
۶	۰	۰	۰	۰	۰	$\frac{۶}{۳۶}$

ج)

X \ Y	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$
۲	۰	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$
۳	۰	۰	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$
۴	۰	۰	۰	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$
۵	۰	۰	۰	۰	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$
۶	۰	۰	۰	۰	۰	$\frac{۱}{۳۶}$

۲- فرض کنید ۳ توپ به تصادف و بدون جایگذاری از جعبه ای که شامل ۵ توپ سفید و ۸ توپ قرمز است انتخاب می شود. با تعریف،

$$X_i=\begin{cases}۱ & \text{اگر توپ } i \text{ ام انتخابی سفید باشد}\\ ۰ & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

تابع احتمال توأم الف) $X_۱,X_۲$، ب) $X_۱,X_۲,X_۳$ را پیدا کنید.

حل: الف)

$$P(x_۱,x_۲):P(۰,۰)=\frac{۸}{۱۳}\times\frac{۷}{۱۲}=\frac{۱۴}{۳۹};P(۰,۱)=\frac{۸}{۱۳}\times\frac{۵}{۱۲}=\frac{۱۰}{۳۹}$$
$$P(۱,۰)=\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۸}{۱۲}=\frac{۱۰}{۳۹};P(۱,۱)=\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۴}{۱۲}=\frac{۵}{۳۹}$$

ب)

$$P(x_۱,x_۲,x_۳):P(۰,۰,۰)=\frac{۸}{۱۳}\times\frac{۷}{۱۲}\times\frac{۶}{۱۱}=\frac{۸۴}{۴۲۹};$$
$$P(۰,۰,۱)=\frac{۸}{۱۳}\times\frac{۷}{۱۲}\times\frac{۵}{۱۱}=\frac{۷۰}{۴۲۹}$$
$$P(۰,۱,۰)=\frac{۸}{۱۳}\times\frac{۵}{۱۲}\times\frac{۷}{۱۱}=\frac{۷۰}{۴۲۹};$$
$$P(۰,۱,۱)=\frac{۸}{۱۳}\times\frac{۵}{۱۲}\times\frac{۴}{۱۱}=\frac{۴۰}{۴۲۹}$$

$$P(۱,۱,۰)=\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۴}{۱۲}\times\frac{۸}{۱۱}=\frac{۴۰}{۴۲۹}؛$$
$$P(۱,۱,۱)=\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۴}{۱۲}\times\frac{۳}{۱۱}=\frac{۱۵}{۴۲۹}$$
$$P(۱,۰,۰)=\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۷}{۱۱}=\frac{۷۰}{۴۲۹}؛$$
$$P(۱,۰,۱)=\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۴}{۱۱}=\frac{۴۰}{۴۲۹}$$

۳- در مسأله ۲، فرض کنید که توپ های سفید شماره گذاری شده اند. با تعریف،

$$Y_i=\begin{cases}۱ & \text{اگر } i \text{ امین توپ سفید انتخاب شود}\\ ۰ & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

تابع احتمال توأم الف) $Y_۱,Y_۲$، ب) $Y_۱,Y_۲,Y_۳$ را پیدا کنید.

حل: الف)

$$P(y_۱,y_۲):P(۰,۰)=\frac{\binom{۱۱}{۳}}{\binom{۱۳}{۳}}=\frac{۱۱\times۱۰\times۹}{۱۳\times۱۲\times۱۱}=\frac{۱۵}{۲۶}\ ؛\ P(۰,۱)=\frac{\binom{۱۱}{۲}}{\binom{۱۳}{۳}}=\frac{۳\times۱۱\times۱۰}{۱۳\times۱۲\times۱۱}=\frac{۵}{۲۶}$$

$$P(۱,۰)=\frac{\binom{۱۱}{۲}}{\binom{۱۳}{۳}}=\frac{۳\times۱۱\times۱۰}{۱۳\times۱۲\times۱۱}=\frac{۵}{۲۶}\ ؛\ P(۱,۱)=\frac{\binom{۱۱}{۱}}{\binom{۱۳}{۳}}=\frac{۶\times۱۱}{۱۳\times۱۲\times۱۱}=\frac{۱}{۲۶}$$

ب)

$$P(y_۱,y_۲,y_۳):P(۰,۰,۰)=\frac{\binom{۱۰}{۳}}{\binom{۱۳}{۳}}=\frac{۱۰\times۹\times۸}{۱۳\times۱۲\times۱۱}=\frac{۱۲۰}{۲۸۶}\ ؛P(۰,۰,۱)=\frac{\binom{۱۰}{۲}}{\binom{۱۳}{۳}}=\frac{۴۵}{۲۸۶}$$

$$P(۰,۱,۰)=\frac{\binom{۱۰}{۲}}{\binom{۱۳}{۳}}=\frac{۴۵}{۲۸۶}\ ؛P(۰,۱,۱)=\frac{\binom{۱۰}{۱}}{\binom{۱۳}{۳}}=\frac{۱۰}{۲۸۶}$$

$$P(۱,۰,۰)=\frac{\binom{۱۰}{۲}}{\binom{۱۳}{۳}}=\frac{۴۵}{۲۸۶}؛P(۱,۰,۱)=\frac{\binom{۱۰}{۱}}{\binom{۱۳}{۳}}=\frac{۱۰}{۲۸۶}$$

$$P(۱,۱,۰)=\frac{\binom{۱۰}{۱}}{\binom{۱۳}{۳}}=\frac{۱۰}{۲۸۶}؛P(۱,۱,۱)=\frac{۱}{\binom{۱۳}{۳}}=\frac{۱}{۲۸۶}$$

۴- مسأله ۲ را در حالت با جایگذاری تکرار کنید.

حل: الف)

$$P(x_۱,x_۲):P(۰,۰)=\frac{۸}{۱۳}\times\frac{۸}{۱۳}\times=\frac{۶۴}{۱۶۹}؛P(۰,۱)=\frac{۸}{۱۳}\times\frac{۵}{۱۳}=\frac{۴۰}{۱۶۹}$$

$$P(۱,۰)=\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۸}{۱۳}=\frac{۴۰}{۱۶۹}\ ؛\ P(۱,۱)=\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۵}{۱۳}=\frac{۲۵}{۱۶۹}$$

ب)

$$P(x_۱,x_۲,x_۳):P(۰,۰,۰)=\frac{۸\times۸\times۸}{۱۳\times۱۳\times۱۳}=\frac{۵۱۲}{۲۱۹۷}\ ؛P(۰,۰,۱)=\frac{۸\times۸\times۵}{(۱۳)^۳}=\frac{۳۲۰}{۲۱۹۷}$$

$$P(۰,۱,۰)=\frac{۸\times۵\times۸}{(۱۳)^۳}=\frac{۳۲۰}{۲۱۹۷}\quad ؛\ P(۰,۱,۱)=\frac{۸\times۵\times۵}{(۱۳)^۳}=\frac{۲۰۰}{۲۱۹۷}$$

$$P(۱,۰,۰)=\frac{۵\times۸\times۸}{(۱۳)^۳}=\frac{۳۲۰}{۲۱۹۷}\quad ؛\ P(۱,۰,۱)=\frac{۵\times۸\times۵}{(۱۳)^۳}=\frac{۲۰۰}{۲۱۹۷}$$

$$P(۱,۱,۰)=\frac{۵\times۵\times۸}{(۱۳)^۳}=\frac{۲۰۰}{۲۱۹۷}\quad ؛\ P(۱,۱,۱)=\frac{۵\times۵\times۵}{(۱۳)^۳}=\frac{۱۲۵}{۲۱۹۷}$$

۵- مسأله ۳- الف را در حالت با جایگذاری تکرار کنید.

حل:

$$P(y_۱,y_۲):P(۰,۰)=\frac{۱۱\times۱۱\times۱۱}{۱۳\times۱۳\times۱۳}=\left(\frac{۱۱}{۱۳}\right)^۳ ؛$$

$$P(۰,۱)=\frac{(۱\times۱۲\times۱۲)+(۱۱\times۱\times۱۲)+(۱۱\times۱۱\times۱)}{(۱۳)^۳}=\left(\frac{۱۲}{۱۳}\right)^۳-\left(\frac{۱۱}{۱۳}\right)^۳$$

$$P(۱,۰)=\frac{(۱\times۱۲\times۱۲)+(۱۱\times۱\times۱۲)+(۱۱\times۱۱\times۱)}{(۱۳)^۳}=\left(\frac{۱۲}{۱۳}\right)^۳-\left(\frac{۱۱}{۱۳}\right)^۳$$

$$P(۱,۱)=\frac{۲[(۱\times۱\times۱۳)+(۱۱\times۱\times۱)+(۱\times۱۲\times۱)]}{(۱۳)^۳}$$

۶- جعبه ای شامل ۵ ترانزیستور است و می دانیم ۲ عدد آنها معیوب هستند. ترانزیستورها را یک به یک آزمایش نموده تا معیوبها مشخص شوند. تعداد آزمایش هایی که لازم است تا اولین ترانزیستور معیوب معلوم شود را با N_1 و تعداد آزمایشهای اضافی تا معلوم شدن دومین ترانزیستور معیوب را با N_2 نشان می‌دهیم. تابع احتمال توأم N_1 و N_2 را بدست آورید.

حل: $(N_1,N_2):(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,2);(2,3);(3,1);(3,2);(4,1)$

تابع احتمال برای تمام حالات بالا برابر است با:

$$P(N_1,N_2)=P(1,1)=\frac{2\times1\times3\times2\times1}{5!}=\frac{1}{10}$$

زیرا تمامی ۱۰ حالت ذکر شده، هم شانس هستند و مجموعشان برابر یک می باشد.

۷- دنباله ای از آزمایش های مستقل برنولی را که احتمال موفقیت هر کدام برابر P است، در نظر می گیریم. اگر X_1 تعداد شکست ها قبل از اولین موفقیت بوده و X_2 شکست های بین دو موفقیت باشد، تابع احتمال توأم X_1 و X_2 را بدست آورید.

حل: هر بخش از ۲ قسمت، یک متغیر تصادفی هندسی نوع دو (تعداد شکستها قبل از رسیدن به اولین موفقیت) است.

$$P(i,j)=(1-p)^i\times p\times(1-p)^j\times p=(1-p)^{i+j}\times p^2$$

۸- تابع چگالی توأم X و Y بصورت زیر داده شده است:

$$f(x,y)=c(y^2-x^2)e^{-y}\qquad -y\le x\le y\qquad 0<y<\infty$$

الف) c را پیدا کنید.

ب) توابع چگالی کناری X و Y را بدست آورید.　　　ج) $E[X]$ را بدست آورید.

حل: الف)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dxdy=1\Rightarrow\int_0^{\infty}\int_{-y}^{y}c(y^2-x^2)e^{-y}dxdy=1$$

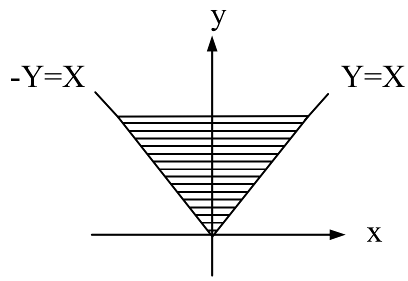
$$\Rightarrow\int_0^{\infty}c\left(y^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-y}^{y}e^{-y}dy=\int_0^{\infty}2c\left(y^3-\frac{y^3}{3}\right)e^{-y}dy$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{4}{3}cy^3e^{-y}dy=8c=1\Rightarrow c=\frac{1}{8}$$

(توجه: اگر تابع چگالی Y بصورت $f_Y(y)=\frac{y^3}{3!}e^{-y}$ باشد، Y توزیع گاما $(t=4,\lambda=1)$ دارد که $(\int_0^{\infty}\frac{y^3}{3!}e^{-y}dy=1$

ب)
$$f_Y(y)=\int_{-y}^{y}\frac{1}{8}\ e^{-y}(y^2-x^2)\,dx=\frac{1}{8}\times\frac{4}{3}\times y^3e^{-y}=\frac{1}{6}y^3e^{-y}\qquad y>0$$

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_{x}^{\infty}\frac{1}{8}e^{-y}(y^2-x^2)dy & x>0\\ \int_{-x}^{\infty}\frac{1}{8}e^{-y}(y^2-x^2)dy & x<0\end{cases}$$



ج) نیازی به انتگرالگیری نیست زیرا با کمی دقت متوجه می شویم که تابع چگالی توام X و Y حول محور y متقارن است و امید ریاضی X صفر است. $E(X)=\int_0^{\infty}\int_{-y}^{y}x\frac{1}{8}(y^2-x^2)\,e^{-y}dxdy=0$

۹- تابع چگالی توأم X و Y بصورت زیر داده شده است.

$$f(x,y)=\frac{6}{7}(x^2+\frac{xy}{2})\qquad 0<x<1\qquad 0<y<2$$

الف) تحقیق کنید که این تابع چگالی توأم است.

ب) تابع چگالی کناری X را محاسبه کنید.

ج) $P\{X>Y\}$ را بدست آورید. د) $P\left\{Y>\frac{1}{2}|X<\frac{1}{2}\right\}$ را محاسبه کنید.

ه) $E[X]$ را بدست آورید. و) $E[Y]$ را بدست آورید.

حل: تابع مذکور، غیر منفی است. حال شرط اینکه مجموع احتمال برابر ۱ شود را بررسی می کنیم.

الف)
$$\int_0^1\int_0^2\frac{6}{7}(x^2+\frac{xy}{2})\,dydx=\int_0^1\frac{6}{7}(2x^2+x)\,dx=\frac{6}{7}\times\frac{7}{6}=1$$

ب)
$$f_X(x)=\int_0^2\frac{6}{7}(x^2+\frac{xy}{2})\,dy=\frac{6}{7}(x^2y+\frac{xy^2}{4})\Big|_0^2=\frac{6}{7}(2x^2+x)$$

ج)
$$P(X>y)=\int_0^1\int_0^x\frac{6}{7}(x^2+\frac{xy}{2})\,dydx=\frac{6}{7}\int_0^1(x^3+\frac{x^3}{4})\,dx=\frac{6}{7}\times\frac{5}{16}=\frac{15}{56}$$

د)
$$P\left(Y>\frac{1}{2}|X<\frac{1}{2}\right)=P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$=\frac{\int_{\frac{1}{2}}^{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{6}{7}(x^2+\frac{xy}{2})\,dxdy}{\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^2\frac{6}{7}(x^2+\frac{xy}{2})\,dydx}=\frac{\frac{23}{128}}{\frac{5}{24}}=0/8625$$

ه) $$E(X)=\int_{0}^{1} x f_X(x)dx=\int_{0}^{1} x\frac{6}{7}(2x^2+x)dx=\frac{5}{7}$$

و) $$E(Y)=\int_{0}^{1}\int_{0}^{2} y\, f(x,y)\,dydx=\int_{0}^{1}\int_{0}^{2} y\frac{6}{7}(x^2+\frac{xy}{2})\,dydx=\frac{8}{7}$$

۱۰- تابع چگالی توأم X و Y بصورت زیر داده شده است.

$$f(x,y)=e^{-(x+y)} \quad x\geq 0 \quad y\geq 0$$

الف) $P\{X<Y\}$ را محاسبه کنید.

ب) $P\{X<a\}$ را بدست آورید.

حل: الف) $$P(X<Y)=\int_{0}^{\infty}\int_{x}^{\infty} e^{-(x+y)}dydx=\int_{0}^{\infty} e^{-2x}dx=\frac{1}{2}$$

ب) $$P(X<a)=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{a} e^{-(x+y)}dxdy=\int_{0}^{\infty}(1-e^{-a})\,e^{-y}dy=1-e^{-a}$$

۱۱- یک فروشنده تلویزیون حساب کرده است که ۴۵ درصد از افرادی که وارد مغازه او می شوند یک دستگاه تلوزیون سیاه و سفید خریداری می کنند، ۱۵ درصد یک دستگاه تلویزیون رنگی خریداری می‌کنند و ۴۰ درصد برای وقت تلف کردن وارد مغازه می شوند. اگر در یک روز معین، ۵ مشتری وارد مغازه او شوند. احتمال اینکه او ۲ دستگاه تلوزیون سیاه وسفید و یک دستگاه تلویزیون رنگی بفروشد چقدر است؟

حل: توزیع چند جمله ای است.

$$P(A)=\frac{5!}{2!\times 1!\times 2!}\times(0/45)^2\times(0/15)\times(0/40)^2=0/1458$$

۱۲- تعداد افرادی که در ساعت معینی وارد یک فروشگاه بزرگ می شوند یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر $\lambda=10$ است. احتمال شرطی اینکه حداکثر ۳ مرد وارد فروشگاه شوند به شرط اینکه ۱۰ زن در آن ساعت وارد شده باشند را محاسبه کنید.

چه فرض هایی را در نظر گرفتید.

حل: فرض بر این است که هر فرد، با احتمال مساوی، مرد یا زن است و تعداد مردان و زنانی که وارد می‌شوند، مستقل از یکدیگر است. لذا داریم:

$$\lambda(\text{مرد}) = \lambda(\text{زن}) = \frac{۱۰}{۲} = ۵$$

$$P\,(\text{حداکثر ۳ مرد} \mid \text{۱۰ زن}) = P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

$$P(A) = P(X \le ۳) = e^{-۵} + ۵e^{-۵} + \frac{۲۵}{۲}e^{-۵} + \frac{۵^۳}{۳!}e^{-۵} = ۳۹/۳e^{-۵}$$

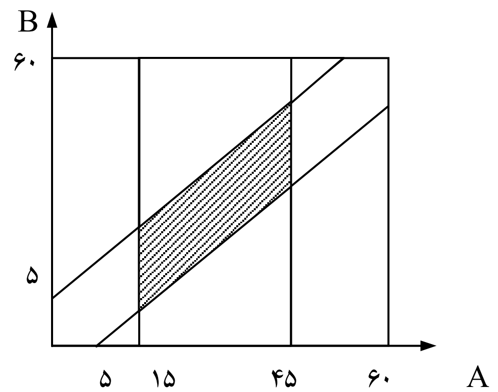
۱۳- A و B موافقت کردند در ساعت ۱۲:۳۰ بعدازظهر در محل معینی با هم ملاقات کنند. اگر A در ساعتی که بطور یکنواخت بین ۱۲:۱۵ و ۱۲:۴۵ توزیع شده است به محل ملاقات برسد و B بطور مستقل در ساعتی که بطور یکنواخت بین ۱۲:۰۰ و ۱۳ توزیع شده است به محل ملاقات برسد، احتمال اینکه فردی که اول رسیده است بیشتر از ۵ دقیقه منتظر نماند را پیدا کنید. احتمال اینکه A اول برسد چقدر است؟

حل: الف) احتمال انتظار کمتر از ۵ دقیقه $P(|Y-X|<۵) = P(-۵<X-Y<۵)$

$$\Rightarrow P(\text{منتظر نماندن بیش از ۵ دقیقه}) = ۱-۲\int_{۱۵}^{۴۵}\int_{۰}^{x-۵}\frac{۱}{۶۰}\times\frac{۱}{۳۰}dydx$$

$$= ۱-۲\int_{۱۵}^{۴۵}\frac{۱}{۱۸۰۰}(x-۵)\,dx = ۱-\frac{۲}{۱۸۰۰}\left(\frac{x^۲}{۲}-۵x\right)\Big|_{۱۵}^{۴۵}$$

$$= ۱-\frac{۲\times ۷۵۰}{۱۸۰۰} = ۱-\frac{۵}{۶} = \frac{۱}{۶}$$



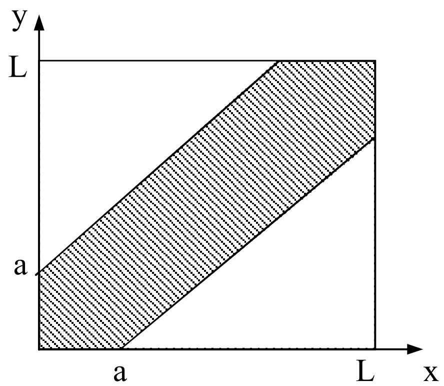
ب) $$P(X<Y) = \int_{۱۵}^{۴۵}\int_{x}^{۶۰}\frac{۱}{۱۸۰۰}dydx = \int_{۱۵}^{۴۵}\frac{۶۰-x}{۱۸۰۰}dx = \left(\frac{۶۰x-\frac{x^۲}{۲}}{۱۸۰۰}\right)\Bigg|_{۱۵}^{۴۵} = \frac{۹۰۰}{۱۸۰۰} = \frac{۱}{۲}$$

۱۴- آمبولانسی با سرعت ثابت و در طول جاده ای به طول L حرکت می کند. در یک لحظه معین از زمان حادثه ای در نقطه ای که به تصادف روی جاده توزیع شده است رخ می دهد. [یعنی، فاصله اش از یک انتهای ثابت جاده توزیع یکنواخت روی فاصله $(0, L)$ دارد]. همچنین فرض کنید که محل آمبولانس در لحظه حادثه نیز دارای توزیع یکنواخت است. توزیع فاصله آمبولانس از محل حادثه را با فرض استقلال حساب کنید.

حل: $Z=|X-Y|$ $\quad a\le L \quad$ $P(|X-Y|<a)=P($ناحیه هاشور خورده$)$

$$F_Z(a)=1-2\int_a^L\int_0^{x-a}\frac{1}{L^2}dydx=1-\frac{2}{L^2}\left(\frac{x^2}{2}-ax\right)\Big|_a^L=1-\frac{2}{L^2}\left(\frac{L^2}{2}-aL+\frac{a^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f_z(a)=\frac{dF_z(a)}{da}=\frac{2}{L}-\frac{2a}{L}$$



۱۵- بردار تصادفی (X,Y) دارای توزیع یکنواخت روی ناحیه R در صفحه است. اگر برای یک ثابت c تابع چگالی توأم آن بصورت زیر باشد:

$$f(x,y)=\begin{cases} c & (x,y)\in R \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

الف) نشان دهید که مساحت ناحیه R برابر $\frac{1}{c}$ است.

با فرض اینکه (x,y) به طور یکنواخت روی مربعی به مرکز $(0,0)$ و طول ۲ توزیع شده باشد،

ب) نشان دهید که X و Y مستقل هستند و هر کدام دارای توزیع یکنواخت روی فاصله $(-1, 1)$ هستند.

ج) احتمال اینکه (x,y) متعلق به دایره ای به شعاع ۱ و مرکز $(0,0)$ باشد چقدر است؟ یعنی $P\{X^2+Y^2\le 1\}$ را پیدا کنید.

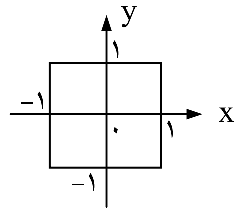
حل: الف) چگالی احتمال یکنواخت است، همچنین می دانیم که انتگرال دوگانه روی ناحیه، برابر مساحت ناحیه است. با توجه به اینکه $f(x,y)$ تابع چگالی می باشد داریم،

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy=1 \Rightarrow \iint_R c\,dx\,dy=1 \Rightarrow \iint_R dx\,dy=\frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow S_R=\frac{1}{c}$$

ب) $$\text{مساحت } R = S_R = 2\times 2=4 \Rightarrow c=\frac{1}{4} \qquad (x,y)\in R$$

$$f_{x,y}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4} & (x,y)\in R\\ 0 & \text{سایر مقادیر}\end{cases}$$



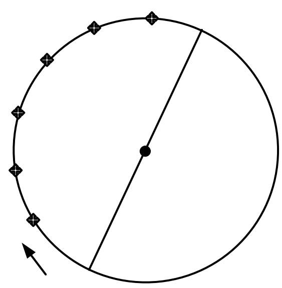
$$\Rightarrow f_X(x)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}dy=\frac{1}{4}y\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{2}\ :\ (x,y)\in R \Rightarrow -1<x<1$$

$$\Rightarrow f_Y(y)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}x\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{2}\ :\ (x,y)\in R \Rightarrow -1<y<1$$

$$f_X(x)\times f_Y(y)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}=f_{x,y}(x,y)\ :\ (x,y)\in R \ \Rightarrow \ \text{مستقل هستند}$$

ج) $$P(X^2+Y^2\le 1)=\iint_{x^2+y^2\le 1}\frac{1}{4}dxdy=\frac{1}{4}\iint_{x^2+y^2\le 1}dxdy=\frac{1}{4}\times\pi r^2=\frac{\pi}{4}$$

۱۶- فرض کنید که n نقطه به تصادف روی محیط دایره ای مستقلاً انتخاب شوند، احتمال اینکه همه آنها در یک نصف دایره قرار گیرند را بدست آورید. (یعنی، احتمال وجود خطی که از مرکز دایره می گذرد بطوریکه همه نقاط انتخابی در یک طرف خط قرار گیرند).



فرض کنید $P_1, P_2, \ldots, P_n$ نشان دهنده n نقطه بوده و A نشان دهنده پیشامد اینکه همه نقاط انتخابی روی یک نصف دایره باشند. اگر A_i پیشامد قرار گرفتن همه نقاط روی نیمدایره بر اساس حرکت از نقطه P_i به اندازه ۱۸۰ درجه در جهت عقربه های ساعت باشد. الف) A را بر حسب A_i ها بیان کنید. ب) آیا A_i ها دو به دو ناسازگار هستند. ج) $P(A)$ را بدست آورید.

حل: الف) A یعنی اینکه حداقل یکی از A_i ها برقرار باشد.

ب) بله، A_i ها دو به دو ناسازگارند. چرا که اگر A_i برقرار باشد، بدین معنی است که همه نقاط روی نیمدایره ای هستند که از نقطه P_i شروع شده و در جهت عقربه های ساعت چرخیده است و هر نقطه دیگری مثل P_j حتما روی این نیمدایره است. پس اگر بخواهیم از P_j شروع کنیم و ۱۸۰ درجه در جهت عقربه های ساعت حرکت کنیم باید بیش از ۱۸۰ درجه طی کنیم تا نقطه P_i را در برگیرد. و در نتیجه اگر A_i برقرار باشد و $i \neq j$، آنگاه A_j نمی تواند برقرار باشد.

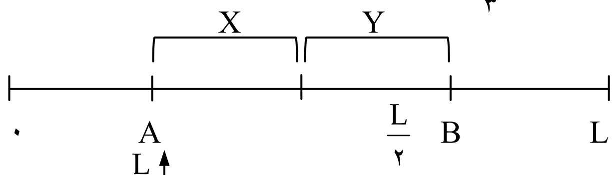
ج)
$$P(A)=P(\text{حداقل یکی از } A_i \text{ ها})=P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$$
$$=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)-P(A_1 \cap A_2)-\ldots$$
$$+P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)+\ldots-\ldots=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

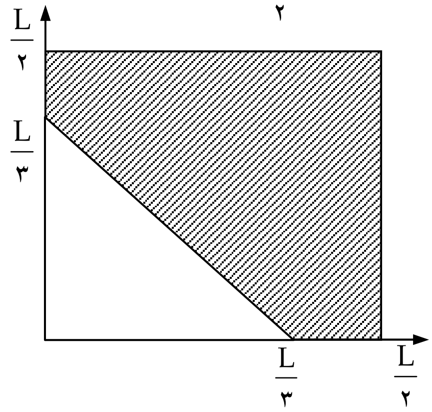
توجه داشته باشید که احتمال اینکه همه (n-1) نقطه دیگر در یک طرف نیم دایره حاصل از نقطه i باشند $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ است.

۱۷- سه نقطه X_1, X_2 و X_3 به تصادف روی خط L انتخاب می شوند. احتمال اینکه X_2 بین X_1 و X_3 قرار گیرد چقدر است؟

حل:
$$P(X_1<X_2<X_3)+P(X_3<X_2<X_1)=2P(X_1<X_2<X_3)$$
$$=2\int_0^L\int_{x_1}^L\int_{x_2}^L\frac{1}{L^3}dx_3dx_2dx_1=\frac{2}{L^3}\int_0^L\int_{x_1}^L(L-x_2)dx_2dx_1$$
$$=\frac{2}{L^3}\int_0^L\left(Lx_2-\frac{x_2^2}{2}\right)\Bigg|_{x_1}^{L}dx_1=\frac{2}{L^3}\int_0^L\left(L^2-\frac{L^2}{2}-Lx_1+\frac{x_1^2}{2}\right)dx_1$$
$$=\frac{2}{L^3}\int_0^L\left(\frac{L^2}{2}-Lx_1+\frac{x_1^2}{2}\right)dx_1=\frac{2}{L^3}\left(\frac{L^2}{2}x_1-\frac{Lx_1^2}{2}+\frac{x_1^3}{6}\right)\Bigg|_0^L=\frac{2L^3}{6L^3}=\frac{1}{3}$$

۱۸- دو نقطه به تصادف روی طنابی بطول L انتخاب می کنیم بطوریکه دو نقطه در دو طرف از نقطه وسط طناب قرار گیرند. [به بیان دیگر، دو نقطهXوY متغیرهای تصادفی مستقل هستند بطوریکه X دارای توزیع یکنواخت روی فاصله) $\frac{L}{۲}$و۰ (و Y دارای توزیع یکنواخت روی فاصله) Lو$\frac{L}{۲}$ (است]. احتمال اینکه طول بین دو نقطه انتخابی بیشتر از $\frac{L}{۳}$ باشد را پیدا کنید.





حل:

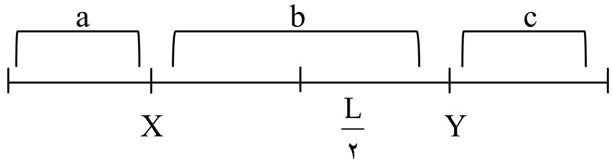
$$P\left(X+Y>\frac{L}{۳}\right)=۱-P\left(X+Y<\frac{L}{۳}\right)=۱-\int_۰^{\frac{L}{۳}}\int_۰^{\frac{L}{۳}-y}\frac{۴}{L^۲}dxdy$$

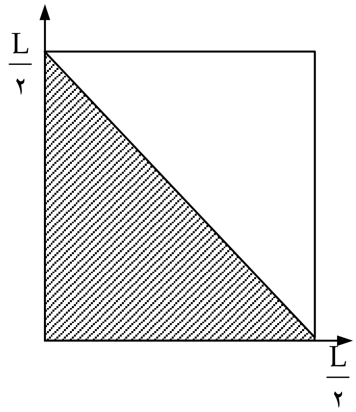
$$=۱-\frac{۴}{L^۲}\int_۰^{\frac{L}{۳}}\left(\frac{L}{۳}-y\right)dy=۱-\frac{۴}{L^۲}\left(\frac{L^۲}{۹}-\frac{L^۲}{۱۸}\right)=۱-\frac{۲}{۹}=\frac{۷}{۹}$$

توجه داشته باشید که اگر T متغیر تصادفی یکنواخت در فاصله (a و۰) باشد. آنگاه متغیر a-T نیز یکنواخت در فاصله (a و۰) می باشد.

۱۹- در مساله ۱۸، احتمال اینکه ۳ پاره خط از ۰ تاX، از X تا Y و از Y تا L بتوانند تشکیل اضلاع یک مثلث بدهند را پیدا کنید. (توجه کنید که ۳ پاره خط می توانند تشکیل اضلاع یک مثلث را بدهند اگر طول هر کدام از آنها کمتر از مجموع طول دوتای دیگر باشد).

حل:





$$\begin{cases} a+b \ge \frac{L}{۲} \ge c & \text{برقرار است} \\ b+c \ge \frac{L}{۲} \ge a & \text{برقرار است} \end{cases}$$

$a+c \ge b:?$

$a+c=u \Rightarrow u+b=L$

$\Rightarrow a+c>b \Leftrightarrow u>b \Leftrightarrow L-b>b \Leftrightarrow b<\frac{L}{۲}$

$\Rightarrow P(a+c \ge b)=P(b \le \frac{L}{۲})=\int_{۰}^{\frac{L}{۲}}\int_{۰}^{\frac{L}{۲}} \frac{۴}{L^۲}dx\,dy=\frac{۱}{۲}$

۲۰- تابع چگالی توأم X و Y بصورت زیر داده شده است.

$$f(x,y)=\begin{cases} xe^{-(x+y)} & x>۰ \quad , \quad y>۰ \\ ۰ & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

آیا X و Y مستقل هستند؟ اگر $f(x,y)$ بصورت زیر باشد پاسخ چیست؟

$$f(x,y)=\begin{cases} ۲ & ۰<x<y \quad ۰<y<۱ \\ ۰ & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

حل: الف)

$f_X(x)=\int_{۰}^{\infty} xe^{-(+y)}dy=xe^{-x}$

$f_Y(y)=\int_{۰}^{\infty} xe^{-(x+y)}dx=e^{-y}\left(xe^{-x}\big|_{۰}^{\infty}+\int_{۰}^{\infty}e^{-x}dx\right)=e^{-y}$

$\Rightarrow f_X(x).f_Y(y)=(xe^{-x})(e^{-y})=xe^{-(x+y)}=f(x,y) \Rightarrow$ مستقل هستند

ب)

$f_x(x)=\int_{x}^{۱}۲dy=۲-۲x$

$f_Y(y)=\int_{۰}^{y}۲dx=۲y$

$\Rightarrow f_X(x).f_Y(y)=۲y(۲-۲x)\ne ۲$ مستقل نیستند

۲۱- اگر

$$f(x,y)=\begin{cases} ۲۴xy & ۰\le x\le ۱ \, , \; ۰\le y\le ۱ \, , \; ۰\le x+y\le ۱ \\ ۰ & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

الف) نشان دهید که $f(x,y)$ یک تابع چگالی احتمال است.

ب) $E[X]$ را پیدا کنید.

ج) $E[Y]$ را پیدا کنید.

حل: الف)

$$\int_0^1\int_0^{1-y} 24xy\,dx\,dy=\int_0^1 12(1-y)^2 y\,dy=12\left(\frac{y^4}{4}-\frac{2y^3}{3}+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=12\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)=1$$

ب)

$$E(X)=\int_0^1\int_0^{1-x} x24xy\,dy\,dx=\int_0^1 12x^2(1-x)^2\,dx=12\left(\frac{x^5}{5}-\frac{2x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{5}$$

ج)

$$E(y)=\int_0^1\int_0^{1-y} y24xy\,dx\,dy=\int_0^1 12y^2(1-y)^2\,dy=\frac{2}{5}$$

۲۲- تابع چگالی احتمال X و Y بصورت زیر داده شده است:

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y & 0<x<1\,,\quad 0<y<1 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

الف) آیا X و Y مستقل از هم هستند؟

ب) تابع چگالی X را پیدا کنید.

ج) $P\{X+Y<1\}$ را بدست آورید.

حل: الف) خیر

$$f_X(x)=\int_0^1 f(x,y)\,dy=\int_0^1 (x+y)\,dy=\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=x+\frac{1}{2}$$

$$f_Y(y)=\int_0^1 f(x,y)\,dx=\int_0^1 (x+y)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}+xy\right)\Bigg|_0^1=y+\frac{1}{2}$$

$$(x+\frac{1}{2})(y+\frac{1}{2})\neq(x+y)\Rightarrow f_x(x)\,f_y(y)\neq f(x,y)$$

واضح است که X و Y مستقل نیستند.

ب)

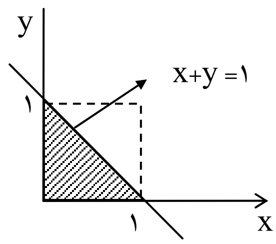
$$f_X(x)=x+\frac{1}{2}$$

ج)

$$P(X+Y<1)=\int_0^1\int_0^{1-y}(x+y)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1\left(\frac{(1-y)^2}{2}+y(1-y)\right)dy=\int_0^1\frac{1}{2}(y^2-2y+1+2y-2y^2)\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 (1-y^2)dy=\frac{1}{2}\left(y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$



۲۳–متغیر های تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر هستند:

$$f(x,y)=\begin{cases}12xy(1-x) & 0<x<1\ ,\ \ 0<y<1\\ 0 & \text{سایر مقادیر}\end{cases}$$

الف) آیا X و Y مستقل از هم هستند؟

ب) $E[X]$ را پیدا کنید.

ج) $E[Y]$ را پیدا کنید.

د) $Var(X)$ را پیدا کنید.

ه) $Var(Y)$ را پیدا کنید.

حل: الف) بله

$$f_X(x)=\int_0^1 12xy(1-x)\,dy=12x(1-x)\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^1=6x(1-x)$$

$$f_Y(y)=\int_0^1 12xy(1-x)\,dx=12y\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=12y\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=2y$$

$$f_X(x)\,f_Y(y)=6x(1-x)\,2y=12xy(1-x)=f(x,y)$$

ب)

$$E(X)=\int_0^1 x\,6x(1-x)\,dx=6\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}$$

ج)

$$E(Y)=\int_0^1 y\,2y\,dy=2\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}$$

د)

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\int_0^1 x^2\,6x(1-x)\,dx-\left(\frac{1}{2}\right)^2=6\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1-\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=\frac{6}{20}-\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$$

ه) $$\mathrm{Var}(Y)=E(Y^{۲})-[E(Y)]^{۲}=\int_{۰}^{۱} y^{۲}\,۲y\,dy-\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۲}=۲\left(\frac{y^{۴}}{۴}\right)\Bigg|_{۰}^{۱}-\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۲}=\frac{۲}{۴}-\frac{۴}{۹}=\frac{۱}{۱۸}$$

۲۴- آزمایشهای مستقلی را در نظر بگیرید که نتیجه آن منجر به i $(i=۰,۱,\ldots,k)$ با احتمال P_i می شود، $\sum_{i=۰}^{k} P_i=۱$. اگر N نمایانگر تعداد آزمایشهای لازم تا حصول نتیجه ای غیر از صفر و X نشاندهنده آن نتیجه باشد،

الف) $P\{N=n\}$ $(n\geq ۱)$ را پیدا کنید.

ب) $P\{X=j\}$ $(j=۱,\ldots,k)$ را پیدا کنید.

ج) نشان دهید $P\{N=n,X=j\}=P\{N=n\}P\{X=j\}$.

د) آیا استقلال N از X برای شما مشهود است؟

ه) آیا استقلال X از N برای شما مشهود است؟

حل: الف)
$$P(N=n)=p_{۰}^{n-۱}(۱-p_{۰})$$

ب)
$$P(X=j)=\sum_{n=۱}^{\infty} p_{۰}^{n-۱}\,p_j=\frac{p_j}{۱-p_{۰}}$$

ج)
$$P(N=n,X=j)=p_{۰}^{n-۱}\,p_j$$

$$P(N=n)=p_{۰}^{n-۱}(۱-p_{۰})$$

$$P(X=j)=\frac{p_j}{۱-p_{۰}}$$

$$\Rightarrow P(N=n)\,P(X=j)=p_{۰}^{n-۱}(۱-p_{۰})\frac{p_j}{۱-p_{۰}}=p_{۰}^{n-۱}\,p_j=P(N=n,X=j)$$

د) بله زیرا دانستن اینکه کدام نتیجه غیر صفر ظاهر شده تأثیری روی اینکه این نتیجه در کدام آزمایش ظاهر شده است، ندارد.

ه) بله زیرا دانستن اینکه اولین نتیجه غیر صفر در کدام آزمایش رخ داده است، تأثیری روی نتیجه غیر صفری که ظاهر شده ندارد.

۲۵- فرض کنید که زمان های رسیدن $۱۰^۶$ نفر به یک محل سرویس دهی متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت روی فاصله ($۱۰^۶$و۰) باشند. اگر N نشان دهنده تعداد افرادی باشد که در ساعت اول می رسند. مقدار تقریبی $P\{N=i\}$ را پیدا کنید.

حل: یک توزیع بینم داریم که احتمال موفقیت آن را با استفاده از یک توزیع یکنواخت بدست می‌آوریم $\left(\frac{۱}{۱۰^۶}\right)$. چون p کوچک و n بزرگ است؛ از تقریب پوآسون استفاده می کنیم.

$$P(N=i)=\binom{۱۰^۶}{i}\left(\frac{۱}{۱۰^۶}\right)^i\left(\frac{۱۰^۶-۱}{۱۰^۶}\right)^{۱۰^۶-i}$$

$$\lambda=np=۱۰^۶\times\frac{۱}{۱۰^۶}=۱\ \Rightarrow P(N=i)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}=\frac{e^{-۱}}{i!}$$

۲۶- فرض کنید که A، B و C متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان یکنواخت روی فاصله (۱و۰) باشند.

الف) تابع توزیع تجمعی توأم A، B و C را بدست آورید.

ب) احتمال اینکه هر دو ریشه معادله $Ax^۲+Bx+C=۰$ حقیقی باشند، چقدر است؟

حل: الف)

$$F_{A,B,C}(a,b,c)=\int_۰^a\int_۰^b\int_۰^c dc\ db\ da=abc\quad ۰\le a,b,c\le ۱$$

$$f(a,b,c)=۱$$

ب)

$$P(\text{دو ریشه حقیقی})=P(B^۲-۴AC\ge۰)=P(B^۲\ge۴AC)$$

$$\int_۰^۱\int_۰^۱\int_{۲\sqrt{ac}}^۱ d_b d_a d_c=\int_۰^۱\int_۰^۱(۱-۲\sqrt{ac})\,dadc$$

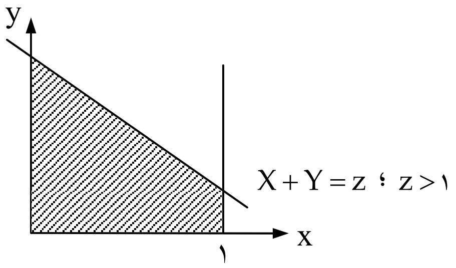
$$=\int_۰^۱\left(a-\frac{۴}{۳}a\sqrt{ac}\right)\Big|_۰^۱dc=\int_۰^۱\left(۱-\frac{۴}{۳}\sqrt{c}\right)dc=\left(c-\frac{۸}{۹}c\sqrt{c}\right)\Big|_۰^۱=۱-\frac{۸}{۹}=\frac{۱}{۹}$$

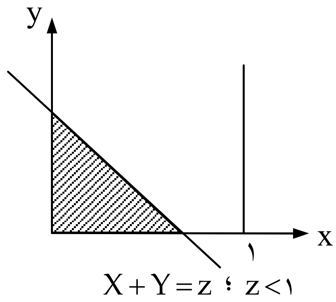
۲۷- اگر متغیر تصادفی X بطور یکنواخت روی فاصله (۱و۰) توزیع شده باشد و متغیر تصادفی Y بطور نمایی با پارامتر $\lambda=۱$ توزیع شده باشد، توزیع (الف) $Z=X+Y$ و $Z=\frac{X}{Y}$ را پیدا کنید. فرض کنیدX و Y مستقل هستند.

حل:

$$f_X(x)=\begin{cases}۱ & ۰\le x\le ۱\\ ۰ & \text{سایر مقادیر}\end{cases}\ ;\ f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & y\ge۰\\ ۰ & y<۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y)=e^{-y}$$





واضح است که به ازای مقادیر مختلف z، شکل ناحیه انتگرالگیری تغییر می کند. پس تابع چگالی دو ضابطه‌ای است.

$$۰\le z\le ۱\Rightarrow F_Z(z)=\int_۰^{z}\int_۰^{z-x}e^{-y}dy\,dx=z-۱+e^{-z}$$

$$z>۱\Rightarrow F_Z(z)=\int_۰^{۱}\int_۰^{z-x}e^{-y}dy\,dx=۱-e^{۱-z}+e^{-z}$$

$$f_Z(z)=\frac{dF_Z(z)}{dz}=\begin{cases}۱-e^{-z} & ۰<z<۱\\ e^{۱-z}-e^{-z} & ۱\le z\end{cases}$$

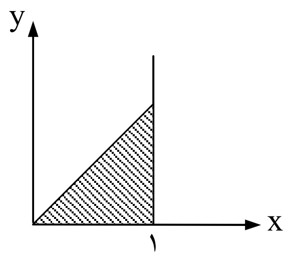
ب)

$$Z=\frac{X}{Y}$$

$$F_Z(a)=P\left(\frac{X}{Y}\le a\right)=P(X\le Ya)=۱-P(X\ge Ya)$$

$$=۱-\int_۰^{۱}\int_۰^{\frac{x}{a}}e^{-y}dy\,dx=۱-(x+a\,e^{-\frac{x}{a}})\Big|_۰^{۱}=a-ae^{-\frac{۱}{a}}$$

$$\Rightarrow f_z(a)=۱-e^{-\frac{۱}{a}}-\frac{a}{a^۲}e^{-\frac{۱}{a}}=۱-e^{-\frac{۱}{a}}-\frac{۱}{a}e^{-\frac{۱}{a}}$$



۲۸- اگر $X_۱$ و $X_۲$ متغیرهای تصادفی مستقل نمایی با پارامترهای به ترتیب $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ باشند، توزیع $Z=X_۱/X_۲$ را پیدا کنید. همچنین $P=\{X_۱<X_۲\}$ را محاسبه کنید.

حل:

$$F_Z(z)=P\left(\frac{X_۱}{X_۲}<z\right)=P(X_۱<zX_۲)$$

$$=\int_۰^{\infty}\int_۰^{zx_۲}\lambda_۱e^{-\lambda_۱x_۱}\times\lambda_۲e^{-\lambda_۲x_۲}dx_۱dx_۲=\int_۰^{\infty}(۱-e^{-\lambda_۱zx_۲})\lambda_۲e^{-\lambda_۲x_۲}dx_۲$$

$$=\int_{0}^{\infty}\lambda_{2}e^{-\lambda_{2}x_{2}}dx_{2}-\int_{0}^{\infty}\lambda_{2}e^{-(\lambda_{1}z+\lambda_{2})x_{2}}dx_{2}$$

$$=1-\frac{\lambda_{2}}{\lambda_{1}z+\lambda_{2}}\int_{0}^{\infty}(\lambda_{2}+\lambda_{1}z)\,e^{-(\lambda_{1}z+\lambda_{2})x_{2}}dx_{2}=\frac{\lambda_{1}z}{\lambda_{1}z+\lambda_{2}}\Rightarrow f_{z}(z)=\frac{\lambda_{1}\lambda_{2}}{(\lambda_{1}z+\lambda_{2})^{2}}$$

ب)کافیست z را برابر یک قرار دهیم.

$$P(X_{1}<X_{2})=\frac{\lambda_{1}}{\lambda_{1}+\lambda_{2}}$$

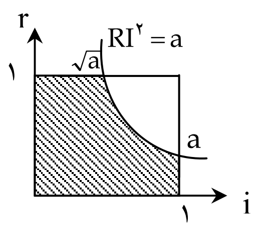
۲۹- وقتی جریان I (بر حسب آمپر) در یک مقاومت R(بر حسب اهم) جاری می شود، توانی به اندازه $W=I^{2}R$ (برحسب وات) ایجاد می کند. فرض کنید که I , R متغیرهای تصادفی مستقل با توابع چگالی زیر باشند.

$$f_{I}(x)=6x(1-x)\qquad 0\le x\le 1$$

$$f_{R}(x)=2x\qquad 0\le x\le 1$$

تابع چگالی W را تعیین کنید.

حل: توجه داشته باشید که جنس جریان و مقاومت فرق می کند بنابراین برای نوشتن تابع چگالی توأم آنها باید از حروف متفاوتی استفاده نمود.



$$f_{I,R}(i,r)=f_{I}(i)\,f_{R}(r)=6i(1-i)\times 2r$$

$$F_{w}(a)=P(RI^{2}\le a)=P\left(I<\sqrt{\frac{a}{R}}\right)$$

$$=\int_{0}^{a}\int_{0}^{1}6i(1-i)\,2r\,di\,dr+\int_{a}^{1}\int_{0}^{\sqrt{\frac{a}{r}}}6i(1-i)\,2r\,di\,dr$$

$$=a^{2}+\int_{a}^{1}2a\left(3-2\sqrt{\frac{a}{r}}\right)dr$$

$$=a^{2}+6a(1-a)-8a\sqrt{a}(1-\sqrt{a})=3a^{2}+6a-8a\sqrt{a}$$

$$f_{w}(a)=\frac{d\,F_{w}(a)}{da}$$

از آنجاییکه تابع چگالی R و I بر حسب x بیان شده اند، دانشجویان در بعضی مواقع برای بدست آوردن تابع چگالی $W=RI^{2}$، به اشتباه تابع چگالی R را در توان دوم تابع چگالی I ضرب می کنند.

۳۰- تعداد متوسط غلط های تایپی در یک صفحه از مجله ای ۰/۲ است. احتمال اینکه یک مقاله ۱۰ صفحه ای شامل الف) ۰، ب) بیشتر از ۲ غلط تایپی باشد چقدر است؟ استدلال خود را بیان کنید.

حل: جمع متغیرهای تصادفی مستقل پوآسون با پارامتر λ_i ، متغیر تصادفی پوآسون با پارامتر $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ می‌باشد. پس:

الف) $\lambda = n\lambda_1 = 10 \times 0/2 = 2$

$P(X=0) = e^{-\lambda} = e^{-2}$

ب) $P(X>2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) = 1 - e^{-2} - 2e^{-2} - \frac{2^2}{2!}e^{-2} = 1 - 5e^{-2}$

البته احتمالاً منظور از سوال بیشتر یا مساوی دو غلط تایپی بوده است که در اینصورت جواب برابر است با:

$= 1 - e^{-2} - 2e^{-2} = 1 - 3e^{-2}$

۳۱- متوسط تعداد سوانح هواپیماهای شرکت های هوایی تجاری در دنیا ۲/۲ هواپیما در ماه است. احتمال پیشامدهای زیر را بدست آورید. (با استدلال)

الف) بیشتر از ۲ سانحه در ماه آینده باشد.

ب) بیشتر از ۴ سانحه در دو ماه آینده باشد.

ج) بیشتر از ۵ سانحه در سه ماه آینده باشد.

حل: الف) $\lambda = 2/2 \Rightarrow P(X_1 > 2) = 1 - P(X_1 \le 2) =$

$= 1 - e^{-2/2} - 2/2e^{-2/2} - \frac{(2/2)^2}{2!}e^{-2/2}$

ب) $\lambda = 2 \times (2/2) = 4/4 \Rightarrow P(X_2 > 4) = 1 - \sum_{i=0}^{4}\frac{e^{-4/4}(4/4)^i}{i!}$

ج) $\lambda = 3 \times (2/2) = 6/6 \Rightarrow P(X_3 > 5) = 1 - \sum_{i=0}^{5}\frac{e^{-6/6}(6/6)^i}{i!}$

۳۲- میزان فروش ناخالص هفتگی روزنامه فروشی متغیر تصادفی نرمال با میانگین ۲۲۰۰ ریال و انحراف معیار ۲۳۰ ریال است. مطلوب است احتمال:

الف) کل فروش ناخالص او در دو ماه آینده از ۵۰۰۰ ریال تجاوز کند؟

ب) فروش هفتگی حداقل در ۲ هفته از ۳ هفته آینده از ۲۰۰۰ ریال تجاوز کند؟ چه فرض هایی از استقلال را در نظر گرفتید.

حل: با فرض اینکه دو ماه، برابر ۸ هفته است، داریم:

$$X_i \sim N(۲۲۰۰,۲۳۰^۲) \Rightarrow X=\sum_{i=۱}^{۸} X_i \sim N(۸\times ۲۲۰,۸\times ۲۳۰^۲)$$

الف)
$$\Rightarrow P(X>۵۰۰۰)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{۵۰۰۰-(۸\times ۲۲۰۰)}{\sqrt{۸}\times ۲۳۰}\right)=P(Z>-۱۹/۳۵)\cong ۱$$

ب)
$$P(X_i>۲۰۰۰)=P\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}>\frac{۲۰۰۰-۲۲۰۰}{۲۳۰}\right)=P(Z>-۰/۸۷)$$

$$=P(Z<۰/۸۷)=۰/۸۰۷۸$$

$$P\Rightarrow (\text{حداقل ۲ هفته از ۳ هفته}) = \sum_{i=۲}^{۳}\binom{۳}{i}p^i(۱-p)^{۳-i}\cong ۰/۸۹ \qquad (p=۰/۸۰۷۸)$$

۳۳- رکورد بولینگ فرد A دارای توزیع تقریبی نرمال با میانگین ۱۷۰ و انحراف معیار ۲۰ است. در حالیکه رکورد بولینگ فرد B دارای توزیع تقریبی نرمال با میانگین ۱۶۰ و انحراف معیار ۱۵ است. اگر A و B هر کدام یک بازی کنند، با فرض اینکه رکوردهای حاصل متغیرهای تصادفی مستقل از هم هستند، احتمالهای زیر را با تقریب به دست آورید:

الف) رکورد A بالاتر باشد.

ب) مجموع رکوردشان بیشتر از ۳۵۰ باشد.

حل: الف)
$$P(A>B)=P(A-B>۰)$$

رکورد بولینگ گسسته است که با توزیع نرمال تقریب زده شده پس باید از تصحیح پیوستگی استفاده نمود. همچنین توزیع A-B، نرمال با میانگین ۱۶۰-۱۷۰ و واریانس $۱۵^۲+۲۰^۲$ می باشد.

$$(A-B)\approx \text{Normal}(۱۷۰-۱۶۰,۲۰^۲+۱۵^۲)=\text{Normal}(۱۰,۶۲۵)$$

$$\Rightarrow P(A-B>۰)=P\left(Z>\frac{۰+۰/۵-۱۰}{۲۵}\right)=P(Z>-۰/۴۲)=۰/۶۶۲۸$$

البته در متن اصلی احتمال کمتر بودن رکورد A مدنظر بوده که برابر با ۰/۳۳۷۲ =۱-۰/۶۶۲۸ می باشد.

ب)
$$(A+B)\approx \text{Normal}(۱۷۰+۱۶۰,۱۵^۲+۲۰^۲)=\text{Normal}(۳۳۰,۶۲۵)$$

$$\Rightarrow P(A+B>۳۵۰)=P\left(Z>\frac{۳۵۰+۰/۵-۳۳۰}{۲۵}\right)=P(Z>۰/۸۲)=۰/۲۰۶۱$$

۳۴- بر اساس اطلاعات مرکز ملی برای آمارهای بهداشتی آمریکا، ۲۵/۲ درصد مردان و ۲۳/۶ درصد زنان صبحانه نمی خورند. اگر نمونه های تصادفی ۲۰۰ تایی از مردان و ۲۰۰ تایی از زنان انتخاب شوند، احتمالهای زیر را با تقریب به دست آورید.

الف) حداقل ۱۱۰ نفر از ۴۰۰ نفر صبحانه نخورند.

ب) تعداد زنانی که صبحانه نمی خورند حداقل به تعداد مردانی باشد که صبحانه نمی خورند.

حل: الف) $X_۱$: تعداد زنانی که صبحانه نمی خورند.

$X_۲$: تعداد مردانی که صبحانه نمی خورند.

$$X_۱ \approx \text{Binomial}(۰/۲۳۶, ۲۰۰) \cong \text{Normal}(\mu = ۰/۲۳۶ \times ۲۰۰, \sigma^۲ = ۰/۲۳۶ \times ۰/۷۶۴ \times ۲۰۰)$$

$$X_۲ \approx \text{Binomial}(۰/۲۵۲, ۲۰۰) \cong \text{Normal}(\mu = ۰/۲۵۲ \times ۲۰۰, \sigma^۲ = ۰/۲۵۲ \times ۰/۷۴۸ \times ۲۰۰)$$

$$X_۱ \cong \text{Normal}(۴۷/۲, ۳۶/۱)$$

$$X_۲ \cong \text{Normal}(۵۰/۴, ۳۷/۷)$$

$$\Rightarrow X_۱ + X_۲ \cong \text{Normal}(۴۷/۲ + ۵۰/۴, ۳۶/۱ + ۳۷/۷) \cong \text{Normal}(۹۷/۶, ۷۳/۸)$$

$$P(X_۱ + X_۲ \geq ۱۱۰) \cong P\left(Z > \frac{۱۱۰ - ۰/۵ - ۹۷/۶}{\sqrt{۷۳/۸}}\right) = P(Z > ۱/۳۹) \cong ۰/۰۸۲$$

ب)

$$(X_۱ - X_۲) \cong \text{Normal}(-۳/۲, ۷۳/۸)$$

$$P(X_۱ \geq X_۲) = P(X_۱ - X_۲ \geq ۰) \cong P\left(Z \geq \frac{۰ - ۰/۵ - (-۳/۲)}{\sqrt{۷۳/۸}}\right) = P(Z > ۰/۳۱) = ۰/۳۷۸۳$$

۳۵- در مساله ۲، تابع احتمالی شرطی $X_۱$ بشرط الف) $X_۲ = ۱$، ب) $X_۲ = ۰$ را حساب کنید.

حل: الف)

$$P_{x_۱|x_۲}(x_۱ | x_۲ = ۱):$$

$$P(x_۱ = ۱ | x_۲ = ۱) = \frac{P(x_۱ = ۱ \cap x_۲ = ۱)}{P(x_۲ = ۱)} = \frac{\frac{۵}{۱۳} \times \frac{۴}{۱۲}}{\left(\frac{۵}{۱۳} \times \frac{۴}{۱۲}\right) + \left(\frac{۸}{۱۳} \times \frac{۵}{۱۲}\right)} = \frac{۲۰}{۶۰} = \frac{۱}{۳}$$

$$P(x_۱ = ۰ | x_۲ = ۱) = \frac{P(x_۱ = ۰ \cap x_۲ = ۱)}{P(x_۲ = ۱)} = \frac{\frac{۵}{۱۳} \times \frac{۸}{۱۲}}{\left(\frac{۵}{۱۳} \times \frac{۸}{۱۲}\right) + \left(\frac{۵}{۱۳} \times \frac{۴}{۱۲}\right)} = \frac{۴۰}{۶۰} = \frac{۲}{۳}$$

ب)

$$P_{x_۱|x_۲}(x_۱ | x_۲ = ۰):$$

$$P(x_۱ = ۱ | x_۲ = ۰) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{۵}{۱۳} \times \frac{۸}{۱۲}}{\frac{۵}{۱۳} \times \frac{۸}{۱۲} + \frac{۸}{۱۳} \times \frac{۷}{۱۲}} = \frac{۴۰}{۹۶} = \frac{۵}{۱۲}$$

$$P(x_۱ = ۰ | x_۲ = ۰) = ۱ - P(x_۱ = ۱ | x_۲ = ۰) = ۱ - \frac{۵}{۱۲} = \frac{۷}{۱۲}$$

۳۶- در مساله ۴، تابع احتمالی شرطی $X_۱$ بشرط الف) $X_۲=۱$، ب) $X_۲=۰$ را حساب کنید.

حل: الف)

$$P_{x_۱|x_۲}(x_۱|x_۲=۱):$$

$$P(x_۱=۱|x_۲=۱)=P(A|B)=\frac{\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۵}{۱۳}}{\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۵}{۱۳}+\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۸}{۱۳}}=\frac{۲۵}{۶۵}=\frac{۵}{۱۳}$$

$$P(x_۱=۰|x_۲=۱)=۱-P(x_۱=۱|x_۲=۱)=۱-\frac{۵}{۱۳}=\frac{۸}{۱۳}$$

ب)

$$P_{x_۱|x_۲}(x_۱|x_۲=۰)$$

$$P(x_۱=۱|x_۲=۰)=\frac{\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۸}{۱۳}}{\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۸}{۱۳}+\frac{۸}{۱۳}\times\frac{۸}{۱۳}}=\frac{۴۰}{۱۰۶}=\frac{۲۰}{۵۳}$$

$$P(x_۱=۰|x_۲=۰)=۱-P(x_۱=۱|x_۲=۰)=۱-\frac{۲۰}{۵۳}=\frac{۳۳}{۵۳}$$

۳۷- در مساله ۳، تابع احتمالی شرطی $Y_۱$ بشرط الف) $Y_۲=۱$، ب) $Y_۲=۰$ را حساب کنید.

حل: الف)

$$P_{Y_۱|Y_۲}(y_۱|y_۲=۱):$$

$$P(y_۱=۱|y_۲=۱)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\binom{۲}{۲}\binom{۱۱}{۱}}{\binom{۱}{۱}\binom{۱۲}{۲}}=\frac{۱}{۶}$$

$$P(y_۱=۰|y_۲=۱)=۱-P(y_۱=۱|y_۲=۱)=۱-\frac{۱}{۶}=\frac{۵}{۶}$$

ب)

$$P_{Y_۱|Y_۲}(y_۱|y_۲=۰):$$

$$P(y_۱=۱|y_۲=۰)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\binom{۱۱}{۲}}{\binom{۱۲}{۳}}=\frac{۱}{۴}\ ،\ P(y_۱=۰|y_۲=۰)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\binom{۱۱}{۳}}{\binom{۱۲}{۳}}=\frac{۳}{۴}$$

۳۸- در مساله ۵، تابع احتمالی شرطی Y_1 بشرط الف) $Y_2=1$، ب) $Y_2=0$ را حساب کنید.

حل: الف)

$$P_{Y_1|Y_2}(y_1|y_2=1):P(y_1=1|y_2=1)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(1,1)}{P(0,1)+P(1,1)}$$

$$=\frac{2\times(13+11+12)}{2\times(13+11+12)+12^2+11^2+(11\times12)}=\frac{72}{469}$$

$$P(y_1=0|y_2=1)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(0,1)}{P(0,1)+P(1,1)}=\frac{397}{469}$$

ب)

$$P_{Y_1|Y_2}(y_1|y_2=0):P(y_1=1|y_2=0)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(1,0)}{P(0,0)+P(1,0)}=\frac{397}{1728}$$

$$P(y_1=0|y_2=0)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(0,0)}{P(0,0)+P(1,0)}=\frac{1331}{1728}$$

۳۹- عدد X را به تصادف از مجموعه اعداد $\{1,2,3,4,5\}$ انتخاب می کنیم. حال اگر عددی را به تصادف از زیر مجموعه $\{1, 2, \ldots, X\}$ انتخاب و آنرا Y بنامیم.

الف) تابع احتمال توأم X و Y را پیدا کنید.

ب) تابع احتمال شرطی X بشرط $Y=i$ را برای $i=1, 2, 3, 4, 5$ بدست آورید.

ج) آیا X و Y مستقل از هم هستند؟ چرا؟

حل: الف)

$$P(x,y)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{X}$$

دقت کنید که X انتخابی از مجموعه اصلی هرچه باشد، مجموعه ثانوی تا آن عددمی تواند باشد.

X \ Y	۱	۲	۳	۴	۵
۱	$\frac{1}{5}\times1$	0	0	0	0
۲	$\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}$	0	0	0
۳	$\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}$	0	0
۴	$\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}$	0
۵	$\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}$

ب)　$P(x|y)=\frac{P(x,y)}{P(y)}$

X|Y ╲ Y	۱	۲	۳	۴	۵
۱	$\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}}$	۰	۰	۰	۰
۲	$\frac{\frac{۱}{۲}}{۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}}$	$\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}}$	۰	۰	۰
۳	$\frac{\frac{۱}{۳}}{۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}}$	$\frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}}$	$\frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}}$	۰	۰
۴	$\frac{\frac{۱}{۴}}{۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}}$	$\frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}}$	$\frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}}$	$\frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}}$	۰
۵	$\frac{\frac{۱}{۵}}{۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}}$	$\frac{\frac{۱}{۵}}{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}}$	$\frac{\frac{۱}{۵}}{\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}}$	$\frac{\frac{۱}{۵}}{\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}}$	$\frac{\frac{۱}{۵}}{\frac{۱}{۵}}=۱$

ج) خیر، چون مقدار y بستگی به مقدار x دارد و نیز　$P(X|Y)\neq P(X)$

۴۰- دو تاس را پرتاب می کنیم. اگر X، Y به ترتیب نشان دهنده عدد بزرگتر و کوچکتر مشاهده شده باشند. تابع احتمال شرطی Y بشرط X=i (۶, ... ,۱ =i) را حساب کنید. آیا Y,X مستقل از هم هستند؟ چرا؟

حل:

$$P(Y|X)=\frac{P(Y\cap X)}{P(X)}$$

مثال:

$$P(y=۱|x=۲)=\frac{P\{(۲,۱),(۱,۲)\}}{P\{(۲,۱),(۱,۲),(۲,۲)\}}=\frac{\frac{۲}{۳۶}}{\frac{۳}{۳۶}}=\frac{۲}{۳}$$

$Y \mid X$ \ X	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	۱	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۲}{۵}$	$\frac{۲}{۷}$	$\frac{۲}{۹}$	$\frac{۲}{۱۱}$
۲	۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۲}{۵}$	$\frac{۲}{۷}$	$\frac{۲}{۹}$	$\frac{۲}{۱۱}$
۳	۰	۰	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۲}{۷}$	$\frac{۲}{۹}$	$\frac{۲}{۱۱}$
۴	۰	۰	۰	$\frac{۱}{۷}$	$\frac{۲}{۹}$	$\frac{۲}{۱۱}$
۵	۰	۰	۰	۰	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۲}{۱۱}$
۶	۰	۰	۰	۰	۰	$\frac{۱}{۱۱}$

X و Y مستقل از هم نیستند، چون عدد بزرگتر همواره به عـدد کـوچکتر وابسـته اسـت و نمـی توانـد از آن کوچکتر شود. در واقع این دو (کوچکتر و بزرگتر)، با توجه به یکدیگر تعریف می شوند.

۴۱- تابع احتمال توأم X و Y به صورت زیر داده شده است.

$$P(۱,۱)=\frac{۱}{۸} \qquad P(۱,۲)=\frac{۱}{۴}$$
$$P(۲,۱)=\frac{۱}{۸} \qquad P(۲,۲)=\frac{۱}{۲}$$

الف) تابع احتمال شرطی X به شرط Y=i (i=۲،۱) را حساب کنید.

ب) آیا X و Y مستقل هستند؟

ج) مقادیر $P\{XY \le ۳\}, P\{X+Y>۲\}$ و $P\{\frac{X}{Y}>۱\}$ را حساب کنید.

حل: الف)

$P(X \mid Y=i)$:

$$P(x \mid y=۱)=\begin{cases} P(x=۱ \mid y=۱)=\dfrac{\frac{۱}{۸}}{\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}}=\dfrac{۱}{۲} \\ P(x=۲ \mid y=۱)=\dfrac{\frac{۱}{۸}}{\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}}=\dfrac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$P(x|y=۲)=\begin{cases} P(x=۱|y=۲)=\dfrac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}}=\dfrac{۱}{۳} \\ P(x=۲|y=۲)=\dfrac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}}=\dfrac{۲}{۳} \end{cases}$$

ب) خیر، بعنوان مثال:

$$P(x=۱)\times P(y=۱)=\frac{۳}{۸}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۳۲}\neq P(x=۱,y=۱)=\frac{۱}{۸}$$

ج)

$$P(XY\leq ۳)=P(۱,۱)+P(۱,۲)+P(۲,۱)=\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

$$P(X+Y>۲)=P(۱,۲)+P(۲,۱)+P(۲,۲)=\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}=\frac{۷}{۸}\ ,\ P\left(\frac{X}{Y}>۱\right)=P(۲,۱)=\frac{۱}{۸}$$

۴۲- تابع چگالی توأم X و Y بصورت زیر داده شده است:

$$f(x,y)=xe^{-x(y+۱)} \qquad x>۰ \quad y>۰$$

الف) تابع چگالی شرطی X بشرط $Y=y$ و Y بشرط $X=x$ را پیدا کنید.

ب) تابع چگالی $Z=XY$ را پیدا کنید.

حل: الف)

$$f_X(x)=\int_۰^\infty xe^{-xy}e^{-x}dy=e^{-x}(-e^{-xy})\Big|_۰^\infty=e^{-x}$$

$$f_Y(y)=\int_۰^\infty xe^{-x(y+۱)}dx=-x\frac{e^{-x(y+۱)}}{y+۱}\Big|_۰^\infty+\int_۰^\infty \frac{e^{-x(y+۱)}}{y+۱}dx$$

$$=۰+\frac{۱}{(y+۱)^۲}=\frac{۱}{(y+۱)^۲}$$

$$\Rightarrow f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{xe^{-x(y+۱)}}{(y+۱)^{-۲}}=xe^{-x(y+۱)}(y+۱)^۲$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{xe^{-x(y+۱)}}{e^{-x}}=xe^{-xy}$$

ب)

$$Z=XY\Rightarrow F_Z(z)=P(XY<z)=P\left(Y<\frac{z}{X}\right)=\int_۰^\infty\int_۰^{\frac{z}{x}} xe^{-x(y+۱)}dydx$$

$$\int_۰^\infty e^{-x}(۱-e^{-z})\,dx=(۱-e^{-z})\Rightarrow f_z(z)=\frac{dF_Z(z)}{dz}=e^{-z}$$

۴۳- تابع چگالی توأم X و Y برابر است با:

$$f(x,y)=c(x^{۲}-y^{۲})e^{-x} \quad ۰\le x\le\infty \quad -x\le y\le x$$

توزیع شرطی Y بشرط X=x را بدست آورید.

حل: با در نظر گرفتن مساله ۸ همین فصل داریم:

$$f_X(x)=\frac{۱}{۶}x^{۳}e^{-x}$$

$$\Rightarrow f_{Y|x}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\frac{۱}{۸}(x^{۲}-y^{۲})e^{-x}}{\frac{۱}{۶}x^{۳}e^{-x}}=\frac{۳}{۴}\left(\frac{۱}{x}-\frac{y^{۲}}{x^{۳}}\right)$$

$$\Rightarrow F_{Y|X}(y|x)=\int_{-x}^{y}\frac{۳}{۴}\left(\frac{۱}{x}-\frac{y^{۲}}{x^{۳}}\right)dy=\frac{۳}{۴}\left(\frac{y}{x}-\frac{y^{۳}}{۳x^{۳}}\right)+\frac{۱}{۲}$$

۴۴-یک شرکت بیمه فرض می کند که هر فرد دارای یک پارامتر تصادف باشد و تعداد تصادفات سالانه فردی که پارامتر تصادف او λ است دارای توزیع پواسون با میانگین λ می باشد. شرکت همچنین فرض می کند که مقدار پارامتر تصادف فردی که به تازگی بیمه شده یک متغیر تصادفی گاما با پارامترهای s و α است. اگر یک فرد تازه بیمه شده مرتکب n تصادف در طول سال اول بیمه خود شود، چگالی شرطی پارامتر تصادف وی را پیدا کنید. همچنین، متوسط تعداد تصادفات او را در سال جاری تعیین کنید.

(برای حل این سؤال می توان از مثال ۵-۳ فصل ششم مبانی احتمال نیز کمک گرفت).

حل:

$$f(\lambda|n)=\frac{P(N=n|\lambda)f_\lambda(\lambda)}{P(N=n)}=\frac{\frac{e^{-\lambda}\lambda^{n}}{n!}\frac{(\alpha e^{-\alpha\lambda}(\alpha\lambda)^{s-۱})}{\Gamma(s)}}{P(N=n)}$$

$$=ce^{-\lambda}\lambda^{n}e^{-\alpha\lambda}\lambda^{s-۱}=ce^{-\lambda(\alpha+۱)}\lambda^{n+s-۱}$$

توجه کنید که مخرج کسر بدست آمده به λ بستگی ندارد و در نتیجه واضح است که c به λ بستگی ندارد. بنابراین توزیع بدست آمده یک توزیع گاما با پارامترهای n+s و $\alpha+۱$ می باشد.

$$E(N)=\int_{۰}^{\infty}E(N|\lambda)f_\lambda(\lambda)\,d\lambda=\int_{۰}^{\infty}\lambda f_\lambda(\lambda)\,d\lambda=E(\lambda)=\frac{s}{\alpha}$$

۴۵- اگر $X_۱,X_۲$ و $X_۳$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت روی فاصله (a,b) باشند، احتمال اینکه بزرگترین آنها بزرگتر از مجموع دوتای دیگر باشد را بدست آورید.

حل: P(بزرگترین، از مجموع ۲ تای دیگر بزرگتر)$=3!(X_3>X_1+X_2)$

فرض می کنیم هر سه در بازه (۰ و L) هستند و $X_3>X_2>X_1$

$$P=\int_0^{\frac{L}{2}}\int_{x_1}^{L-x_1}\int_{x_1+x_2}^{L}3!\left(\frac{1}{L^3}\right)dx_3dx_2dx_1$$

$$=3!\int_0^{\frac{L}{2}}\int_{x_1}^{L-x_1}\frac{1}{L^3}(L-x_1-x_2)\,dx_2dx_1=\frac{3!}{L^3}\int_0^{\frac{L}{2}}\left(\frac{L^2}{2}-2Lx_1+x_1^2\right)dx=\frac{1}{4}$$

توجه داشته باشید که اگر X_2 بزرگتر از $L-X_1$ شود آنگاه مجموع X_1 ، X_2 بیشتر از L می شود و اگر X_1 بزرگتر از $\frac{L}{2}$ شود آنگاه X_2 هم بزرگتر از $\frac{L}{2}$ می شود و امکان اینکه X_3 از مجموع X_1 ، X_2 بیشتر شود وجود نخواهد داشت.

۴۶- یک ماشین پیچیده تا زمانی که حداقل ۳ تا از ۵ موتور آن کار کند می تواند فعال باشد. اگر هر موتور مستقل از دیگری برای مدت زمانی که یک متغیر تصادفی با تابع چگالی $f(x)=xe^{-x}$ $(x>0)$ است کار کند، تابع چگالی طول زمانی که ماشین فعال است را محاسبه کنید.

حل:

باید از آماره های ترتیبی استفاده کنیم: X= طول عمر هر موتور　Z= طول عمر ماشین

$F_Z(z)=P$ (ماشین کمتر از z عمر کند) $=P$ (۳ تا یا بیشتر از موتورها کمتر از z عمر کنند)

$$=\sum_{i=3}^{5}\binom{5}{i}[F_X(z)]^i[1-F_X(z)]^{5-i}$$

که $F_X(z)$ در رابطه بالا برابر است با:

$$F_X(z)=\int_0^z xe^{-x}dx=-xe^{-x}\Big|_0^z+e^{-x}\Big|_0^z$$

$$=e^{-z}-ze^{-z}-1$$

$$\Rightarrow f_z(z)=\frac{dF_z(z)}{dz}$$

راه دوم: از فرمول کتاب مبانی احتمال داریم:

$$f_{x_{(j)}}(x)=\frac{n!}{(n-j)!(j-1)}[F(x)]^{j-1}[1-F(x)]^{n-j}f(x)\Rightarrow$$

$$f_{x_{(3)}}(x)=\frac{5!}{2!2!}[e^{-x}-xe^{-x}-1]^2[xe^{-x}-e^{-x}]^2xe^{-x}$$

۴۷- اگر سه کامیون به تصادف در نقاطی از جاده ای به طول L خراب شوند، احتمال اینکه هیچ دو کامیونی در فاصله d از هم نباشند را پیدا کنید. $(d \le \frac{L}{۲})$

حل: مثال ۶-۱ همین فصل را ببینید.

$$P(A)=۳!\int_{۰}^{L-۲d}\int_{x_۱+d}^{L-d}\int_{x_۲+d}^{L}\frac{۱}{L^۳}dx_۳dx_۲dx_۱=\left(۱-\frac{۲d}{L}\right)^۳$$

۴۸- یک نمونه ۵ تایی از یک توزیع یکنواخت روی فاصله (۱و۰) را در نظر بگیرید. احتمال اینکه میانه نمونه در فاصله $\left(\frac{۳}{۴}و\frac{۱}{۴}\right)$ باشد را حساب کنید.

حل:

$$P\left(\frac{۱}{۴}<x_۳<\frac{۳}{۴}\right)=\int_{\frac{۱}{۴}}^{\frac{۳}{۴}}f_{X_۳}(x)\,dx=\int_{\frac{۱}{۴}}^{\frac{۳}{۴}}\frac{۵!}{۲!۲!}x^۲(۱-x)^۲dx$$

$$=\int_{\frac{۱}{۴}}^{\frac{۳}{۴}}۳۰(x^۴-۲x^۳+x^۲)dx=۳۰\left(\frac{x^۵}{۵}-\frac{x^۴}{۲}+\frac{x^۳}{۳}\right)\Bigg|_{\frac{۱}{۴}}^{\frac{۳}{۴}}=۰/۷۹۲۹۷$$

۴۹- اگر $X_۱,X_۲,X_۳,X_۴$ و $X_۵$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان نمایی با پارامتر λ باشند، الف) $P\{\min(X_۱,\dots,X_۵)\le a\}$، ب) $P\{\max(X_۱,\dots,X_۵)\le a\}$ را حساب کنید.

حل: الف)

$$P\{\min(X_۱,\dots,X_۵)\le a\}=۱-P\{\min(X_۱,\dots,X_۵)>a\}$$

$$=۱-[P(X_۱>a)\times P(X_۲>a)\dots P(X_۵>a)]$$

$$=۱-\left[\left(\int_a^{\infty}\lambda e^{-\lambda x_۱}dx_۱\right)\dots\left(\int_a^{\infty}\lambda e^{-\lambda x_۵}dx_۵\right)\right]=۱-[(e^{-\lambda a})\dots(e^{-\lambda a})]=۱-e^{-۵\lambda a}$$

ب)

$$P\{\max(X_۱,\dots,X_۵)\le a\}$$

$$=P(X_۱\le a)\,P(X_۲\le a)\dots P(x_۵\le a)=(۱-e^{-\lambda a})^۵$$

۵۰- توزیع برد نمونه ای با اندازه ۲ از توزیعی که دارای تابع چگالی زیر است را بدست آورید.

$$f(x)=۲x\qquad ۰<x<۱$$

حل:

$$P(R\le a)=n\int_{0}^{1}\left[F(x_1+a)-F(X_1)\right]^{n-1}f(x_1)dx_1$$
$$=2\int_{0}^{1-a}\left[(x+a)^2-x^2\right]2xdx-2\int_{1-a}^{1}\left[1-x^2\right]2xdx$$
$$=2\int_{0}^{1-a}\left[2a^2x-4x^2a\right]dx-2\int_{1-a}^{1}2(x-x^3)\,dx=4(1-a^2)\left(\frac{a^2}{12}+\frac{a}{6}-\frac{1}{4}\right)+1$$

حال اگر نسبت به a مشتق بگیریم، تابع چگالی بدست می آید.

۵۱- فرض کنید X و Y نشان دهنده مولفه های نقطه ای که به تصادف از دایره ای به شعاع ۱ و مرکز مبدأ مختصات انتخاب شده است، باشند. در این صورت تابع چگالی توأم آنها برابر است با:

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi}\qquad x^2+y^2\le 1$$

تابع چگالی توأم مولفه های مختصات قطبی $R=(X^2+Y^2)^{1/2}$ و $\theta=\tan^{-1}\frac{Y}{X}$ را بدست آورید.

حل: مثال ۷-۲ همین فصل را ببینید.

$$\left|J(x_1,x_2)\right|^{-1}=r$$
$$\Rightarrow f_{\theta,R}(\theta,r)=\left|J(x_1,x_2)\right|^{-1}f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=r\times\frac{1}{\pi}=\frac{r}{\pi}$$

۵۲- اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان یکنواخت روی فاصله (۰و۱) باشند تابع چگالی توأم $R=\sqrt{X^2+Y^2}$ و $\theta=\tan^{-1}\frac{Y}{X}$ را پیدا کنید.

$$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y)=1\times1=1\qquad 0<x,y<1$$
$$\Rightarrow f_{R,\theta}(r,\theta)=\left|J(x,y)\right|^{-1}f_{X,Y}(x,y)=r\times1=r$$

۵۳- اگر U دارای توزیع یکنواخت روی فاصله $(0,2\pi)$ و Z مستقل از U دارای توزیع نمایی با نرخ ۱ باشد، نشان دهید که (بدون استفاده از نتایج مثال ۷-۲) X و Y تعریف شده بصورت زیر:

$$X=\sqrt{2Z}\cos U$$

$$Y=\sqrt{2Z}\sin U$$

متغیرهای تصادفی مستقل نرمال استاندارد هستند.

$$J(z,u)=\begin{vmatrix}\dfrac{d\sqrt{۲z}\cos u}{dz} & \dfrac{d\sqrt{۲z}\cos u}{du}\\ \dfrac{d\sqrt{۲z}\sin u}{dz} & \dfrac{d\sqrt{۲z}\sin u}{du}\end{vmatrix}=\sin^{۲}u+\cos^{۲}=۱$$

$$f(z,u)=\frac{۱}{۲\pi}e^{-z}\Rightarrow f_{X,Y}(x,y)=|J(z,u)|^{-۱}f(z,u)=\frac{۱}{۲\pi}e^{-z}=\frac{۱}{۲\pi}e^{-\frac{x^{۲}+y^{۲}}{۲}}$$

$$\Rightarrow f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{۲\pi}e^{-\frac{x^{۲}+y^{۲}}{۲}}dy=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{x^{۲}}{۲}}$$

$$\Rightarrow f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{۲\pi}e^{-\frac{x^{۲}+y^{۲}}{۲}}dx=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{y^{۲}}{۲}}$$

پس X و Y متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد و مستقل از هم هستند. $(f(x,y)=f(x)f(y))$

۵۴- اگر X و Y دارای تابع چگالی توأم زیر باشند:

$$f(x,y)=\frac{۱}{x^{۲}y^{۲}}\qquad x\geq ۱\qquad y\geq ۱$$

الف) تابع چگالی توأم $U=XY$ و $V=\dfrac{X}{Y}$ را حساب کنید.

ب) توابع چگالی کناری U و V را بدست آورید.

حل: الف)

$$J(x,y)=\begin{vmatrix}y & x\\ \frac{۱}{y} & \frac{-x}{y^{۲}}\end{vmatrix}=-\frac{۲x}{y}\Rightarrow J^{-۱}=\frac{y}{۲x}=\frac{۱}{۲v}$$

$$f(x,y)=\frac{۱}{x^{۲}y^{۲}}=\frac{۱}{u^{۲}}$$

$$\Rightarrow f(u,v)=\frac{۱}{u^{۲}}\times\frac{۱}{۲v}=\frac{۱}{۲vu^{۲}}\qquad uv>۱\,,\ \frac{u}{v}>۱$$

ب)

$$f_U(u)=\int_{\frac{۱}{u}}^{u}\frac{۱}{۲vu^{۲}}dv=\frac{Ln(u)}{u^{۲}}$$

از آنجا که $u>v$ و $u>\dfrac{۱}{v}$ ، در اینصورت بسته به اینکه v بزرگتر باشد یا $\dfrac{۱}{v}$ ، ناحیه انتگرال‌گیری فرق می‌کند.

$$v>\frac{۱}{v}\Rightarrow v^{۲}>۱\Rightarrow v>۱\quad,\quad v<\frac{۱}{v}\Rightarrow v<۱$$

$$f_V(v)=\begin{cases}\int_v^{\infty}\frac{1}{2vu^2}du & v>1\\ \int_{\frac{1}{v}}^{\infty}\frac{1}{2vu^2}du & 0<v\le 1\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2v^2} & v>1\\ \frac{1}{2} & 0<v\le 1\end{cases}$$

۵۵- اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان یکنواخت روی فاصله (۱و۰) باشند، چگالی های توأم متغیرهای تصادفی زیر را حساب کنید.

الف) $U=X+Y \ , \ V=\frac{X}{Y}$

ب) $U=X \ , \ V=\frac{X}{Y}$

ج) $U=X+Y \ , \ V=X/(x+y)$

حل: الف)

$$J=\begin{vmatrix}1 & 1\\ \frac{1}{y} & \frac{x}{-y^2}\end{vmatrix}=\frac{-(x+y)}{y^2}$$

$$f(u,v)=f(x,y)|J|^{-1}=\frac{y^2}{x+y}$$

$$X=VY\Rightarrow U=VY+Y\Rightarrow Y(V+1)=U\Rightarrow Y=\frac{U}{V+1},X=\frac{UV}{V+1}$$

$$\Rightarrow f_{U,V}(u,v)=\frac{y^2}{x+y}=\frac{\frac{u^2}{(v+1)^2}}{u}=\frac{u}{(v+1)^2}\ ; \ 0\le\frac{uv}{v+1}\le 1\ ; \ 0\le\frac{u}{v+1}\le 1$$

ب)

$$J=\begin{vmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{y} & \frac{-x}{y^2}\end{vmatrix}=\frac{-x}{y^2} \qquad 0\le u\le 1 \quad ; \quad 0\le\frac{u}{v}\le 1$$

$$f(u,v)=f(x,y)|J|^{-1}=\frac{y^2}{x}\times 1=\frac{u^2}{uv^2}=\frac{u}{v^2}$$

ج)

$$V=\frac{X}{X+Y}\ ;\ U=X+Y\Rightarrow V=\frac{X}{U}\Rightarrow\begin{cases}X=UV\\ Y=U-UV\end{cases}$$

$$J=\begin{vmatrix}1 & 1\\ \frac{y}{(x+y)^2} & \frac{-x}{(x+y)^2}\end{vmatrix}=\frac{-1}{x+y}\quad\Rightarrow|J|^{-1}=x+y=u$$

$$\Rightarrow f(u,v)=u\times 1\times 1=u\ ;\ 0\le u-uv\le 1\ ;\ 0\le uv\le 1$$

۵۶- مساله ۵۵ را وقتی که X و Y متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان نمایی با پارامتر λ=۱ هستند، تکرار کنید.

حل: الف)
$$f(u,v)=e^{-x}e^{-y}\frac{u}{(v+۱)^۲}=e^{-(x+y)}\frac{u}{(v+۱)^۲}=e^{-u}\frac{u}{(v+۱)^۲}$$
$$۰\le\frac{uv}{v+۱}\le۱ \quad ; \quad ۰\le\frac{u}{v+۱}\le۱$$

ب)
$$f(u,v)=e^{-(x+y)}\times\frac{u}{v^۲}=e^{-u}\frac{u}{v^۲} \quad ; \quad ۰\le u\le۱ \quad ; \quad ۰\le\frac{u}{v}\le۱$$

ج)
$$f(u,v)=e^{-(x+y)}\times u=e^{-u}\times u \quad ; \quad ۰\le u-uv\le۱ \quad ; \quad ۰\le uv\le۱$$

۵۷- اگر $X_۱$ و $X_۲$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان نمایی با پارامتر λ باشند.
تابع چگالی توأم $Y_۱=X_۲+X_۱$ و $Y_۲=e^{X_۱}$ را پیدا کنید.

حل:
$$J=\begin{vmatrix}۱ & ۱\\ e^{x_۱} & ۰\end{vmatrix}=-e^{x_۱} \quad \Rightarrow |J|^{-۱}=\frac{۱}{e^{x_۱}}=\frac{۱}{y_۲}$$
$$f_{X_۱,X_۲}(x_۱,x_۲)=\lambda^۲e^{-\lambda x_۱}e^{-\lambda x_۲}=\lambda^۲e^{-\lambda(x_۱+x_۲)}=\lambda^۲e^{-\lambda y_۱}$$
$$\Rightarrow f_{U,V}(u,v)=|J|^{-۱}f_{X_۱,X_۲}(x_۱,x_۲)=\frac{۱}{y_۲}\lambda^۲e^{-\lambda y_۱}$$
$$\begin{cases}X_۱=LnY_۲ & \Rightarrow LnY_۲\ge۰\\ X_۲=Y_۱-LnY_۲ & \Rightarrow Y_۱-LnY_۲\ge۰\end{cases}$$

۵۸- اگر X و Y و Z متغیرهای تصادفی مستقل یکسان با تابع چگالی $f(x)=e^{-x}$ $(x>۰)$ باشند، تابع چگالی توأم $U=X+Y$, $V=X+Z$ و $W=Y+Z$ را بدست آورید.

$$J=\begin{vmatrix}۱ & ۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۱ & ۱\end{vmatrix}=-۲\Rightarrow|J|^{-۱}=\frac{۱}{۲}$$
$$X=\frac{u+v-w}{۲} \quad ; \quad Y=\frac{u+w-v}{۲} \quad ; \quad Z=\frac{w+v-u}{۲}$$
$$\Rightarrow f(u,v,w)=e^{-x}e^{-y}e^{-z}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}e^{-(x+y+z)}=\frac{۱}{۲}e^{-\left(\frac{u+v+w}{۲}\right)}$$
$$w+v-u\ge۰ \quad ; \quad w+u-v\ge۰ \quad ; \quad u+v-w\ge۰$$

۵۹- در مثال ۸-۲ اگر $Y_{k+1}=n+1-\sum_{i=1}^{k} Y_i$، نشان دهید $Y_1,Y_2,\ldots,Y_k$ و Y_{k+1} تعویض پذیر هستند.
توجه کنید که Y_{k+1} نشان دهنده تعداد توپهایی است که باید اختیار شود تا یک توپ ویژه مشاهده شود، اگر ترتیب انتخاب توپها به صورت عکس در نظر گرفته شود.

حل:

$$P=(Y_1=i_1,Y_2=i_2,\ldots,Y_k=i_k,Y_{k+1}=n+1-\sum_{i=1}^{k} Y_i)=$$

$$P=(X_{i_1}=X_{i_1+i_2}=\ldots=X_{i_1+\ldots+i_k}=1)=\frac{k!(n-k)!}{n!}$$

(توجه کنید که در احتمال بالا X_i ها برای سایر مقادیر صفر می باشند).
از نتیجه بدست آمده واضح است که $Y_1,\ldots,Y_k,Y_{k+1}$ تعویض پذیرند.

۶۰- جعبه ای شامل n توپ است که از ۱ تا n شماره گذاری شده است. فرض کنید k تا از این توپها به تصادف انتخاب شده باشد. اگر

$$X_i=\begin{cases} 1 & \text{اگر توپ } i \text{ ام مشاهده شود.} \\ 0 & \text{سایر موارد} \end{cases}$$

نشان دهید $X_1,X_2,\ldots,X_n$ تعویض پذیر هستند.

حل: برای درک بهتر مسأله نتیجه زیر را در نظر بگیرید:

$$(X_1=1,X_2=0,\ldots,X_n=1)$$

این نتیجه نشاندهنده این است که توپ ۱ انتخاب شود، توپ ۲ انتخاب نشود و ... و توپ n انتخاب شود.
واضح است که احتمال این نتیجه برابر با:

$$P(X_1=1,X_2=0,\ldots,X_n=1)=\frac{\binom{1}{1}\binom{1}{0}\cdots\binom{1}{1}}{\binom{n}{k}}=\frac{1}{\binom{n}{k}}$$

همچنین واضح است که احتمال هر نتیجه دیگری از X_i ها با نتیجه فوق فرق نمی کند.

$$P(X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n)=\frac{1}{\binom{n}{k}}$$

بنابراین $X_1,X_2,\ldots,X_n$ تعویض پذیرند.

فصل ۷
خواص امید ریاضی

۱- در یک بازی یک تاس سالم همزمان با یک سکه سالم پرتاب می شود. اگر نتیجه سکه شیر باشد، بازیکن دو برابر عدد مشاهده شده بر روی تاس و اگر نتیجه سکه خط باشد، نصف عدد مشاهده شده بر روی تاس برنده می شود. متوسط مقدار برد را حساب کنید.

حل: X را نتیجه پرتاب سکه (۲ نشاندهنده شیر و ۰/۵ نشاندهنده خط می باشد) و Y را نتیجه پرتاب تاس در نظر می گیریم.

$$E(XY)=\sum_{x,y}\sum xy\ p(x,y)$$
$$=\frac{۱}{۲}\times ۱\times\frac{۱}{۱۲}+۲\times ۱\times\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۲}\times ۲\times\frac{۱}{۱۲}+۲\times ۲\times\frac{۱}{۱۲}+\ldots+\frac{۱}{۲}\times ۶\times\frac{۱}{۱۲}+۲\times ۶\times\frac{۱}{۱۲}$$
$$=\frac{۱}{۱۲}(۲+\frac{۱}{۲})(۱+۲+۳+۴+۵+۶)=\frac{۵۲/۵}{۱۲}$$

۲- در یک بازی که شامل ۶ مظنون، ۶ اسلحه و ۹ اتاق است، بازیکن به تصادف از هر کدام یکی را انتخاب می کند و هدف بازی حدس سه تایی انتخاب شده است.

الف) چند راه حل (حالت) ممکن است؟

در یک نوع از این بازی، پس از انتخابی که بازیکن انجام می دهد، به تصادف سه تا از کارتهای مختلف باقیمانده به وی داده می شود اگر S ، W و R به ترتیب نمایانگر شماره مظنون، اسلحه و اتاق در مجموعه سه کارت داده شده به یک بازیکن و X نشاندهنده تعداد راه حلهای ممکن بازیکن پس از مشاهده سه کارت خود باشد مطلوب است،

ب) نمایش X، بر حسب S، W و R

ج) E[X] را پیدا کنید.

حل: الف) $6\times6\times9$

ب)

ج)

۳- اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل یکنواخت روی فاصله (۰و۱) باشند، نشان دهید که برای $a>0$ ،

$$E\left[|X-Y|^a\right]=\frac{2}{(a+1)(a+2)}$$

حل:

$$E\left[|X-Y|^a\right]=\int_0^1\int_0^x (x-y)^a\,dy\,dx+\int_0^1\int_x^1 (y-x)^a\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1\frac{x^{a+1}}{a+1}dx+\int_0^1\frac{(1-x)^{a+1}}{a+1}dx=\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}=\frac{2}{(a+1)(a+2)}$$

۴- اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل بوده، و هر کدام با شانس یکسان مقادیر ۱،۲،... و m را انتخاب نمایند. نشان دهید:

$$E\left[|X-Y|\right]=\frac{(m-1)(m+1)}{3m}$$

حل:

$$E\left[|X-Y|\right]=\sum_{x=1}^{m}\sum_{y=1}^{m}|x-y|\frac{1}{m^2}=\frac{2}{m^2}\sum_{y=x}^{m}\sum_{x=1}^{m}(y-x)$$

$$=\frac{2}{m^2}\left(\sum_{i=1}^{m-1}i+\sum_{i=1}^{m-2}i+\dots+\sum_{i=1}^{1}i\right)=\frac{2}{m^2}\frac{(m-1)(m)(m+1)}{6}=\frac{(m-1)(m+1)}{3m}$$

از فرمول روبرو استفاده کردیم:

$$\sum_{i=1}^{m}i+\sum_{i=1}^{m-1}i+\dots+\sum_{i=1}^{1}i=\frac{m(m+1)(m+2)}{6}$$

۵- بیمارستان شهری در مرکز مربعی با طول ضلع ۳ مایل قرار گرفته است. اگر حادثه ای در داخل این مربع رخ دهد و بیمارستان اقدام به ارسال آمبولانس کند، مسیر جاده مستطیل شکل است، یعنی مسیر طی شده ازبیمارستان، که مختصات آن (۰و۰) به محل حادثه که مختصات آن (x,y) است برابر با

$|X|+|Y|$ می‌باشد. اگر حادثه ای در یک نقطه از مربع که دارای توزیع یکنواخت است، رخ دهد، متوسط فاصله طی شده توسط آمبولانس را بدست آورید.

حل: $E[|X|+|Y|]=E[|X|]+E[|Y|]=\frac{۳}{۴}+\frac{۳}{۴}=\frac{۳}{۲}$

در مسائل فصل پنجم ثابت کردیم که: $E[|X|]=\frac{\frac{۳}{۲}}{۲}=\frac{۳}{۴}$

۶- تاس سالمی ۱۰ بار پرتاب می شود. امید ریاضی مجموع ۱۰ پرتاب را محاسبه کنید.

حل: $E\left(\sum_{i=۱}^{۱۰}X_i\right)=\sum_{i=۱}^{۱۰}E(X_i)=۱۰\times\frac{۷}{۲}=۳۵$

۷- فرض کنید A و B هر کدام به تصادف و به طور مستقل ۳ شیء از ۱۰ شیء را انتخاب می کنند. مطلوب است متوسط تعداد شیء هایی که

الف) توسط A و B انتخاب می شود.

ب) توسط A و B انتخاب نمی شود.

ج) فقط توسط یکی از افراد A و B انتخاب می شود.

حل: الف) X تعداد اشیایی که توسط دو نفر انتخاب می شوند.

$$X_i=\begin{cases}۱ & \text{شیء } i \text{ توسط A و B انتخاب شود}\\ ۰ & \text{در غیراینصورت}\end{cases}$$

$$E(X)=\sum_{i=۱}^{۱۰}E(X_i)$$

$$E(X_i)=P(X_i=۱)=\frac{\binom{۱}{۱}\binom{۹}{۲}\binom{۱}{۱}\binom{۹}{۲}}{\binom{۱۰}{۳}\binom{۱۰}{۳}}=۰/۰۹\Rightarrow E(X)=\sum_{i=۱}^{۱۰}۰/۰۹=۰/۹$$

ب) Y: تعداد اشیایی که توسط هیچ‌کس انتخاب نمی شود.

$$Y_i=\begin{cases}۱ & \text{شیء } i \text{ توسط هیچکدام انتخاب نشود}\\ ۰ & \text{در غیراین صورت}\end{cases}$$

$$E(Y_i)=P(Y_i=۱)=\frac{\binom{۱}{۰}\binom{۹}{۳}\binom{۱}{۰}\binom{۹}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}\binom{۱۰}{۳}}=۰/۴۹\Rightarrow E(Y)=\sum_{i=۱}^{۱۰}E(Y_i)=\sum_{i=۱}^{۱۰}۰/۴۹=۴/۹$$

ج) Z : تعداد اشیایی که دقیقاً توسط یک نفر انتخاب می شود

$$Z_i=\begin{cases}۱ & \text{شیء } i \text{ دقیقاً توسط یکی از افراد } A \text{ و } B \text{ انتخاب شود}\\ ۰ & \text{در غیراین صورت}\end{cases}$$

$$E(Z_i)=P(Z_i=۱)=\frac{۲\times\left[\binom{۱}{۰}\binom{۹}{۳}\binom{۱}{۱}\binom{۹}{۲}\right]}{\binom{۱۰}{۳}\binom{۱۰}{۳}}=۰/۴۲\Rightarrow E(Z)=\sum_{i=۱}^{۱۰}E(Z_i)=\sum_{i=۱}^{۱۰}۰/۴۲=۴/۲$$

۸- N نفر بطور جداگانه به یک شام دعوت شده اند. هر کدام به محض رسیدن بـه محـل دعـوت، بررسـی می‌کند تا ببیند آیا بین حاضرین دوستی وجود دارد؟ آنگاه آن فرد سر میزی که دوستش نشسـته اسـت مـی نشیند، یا اگر هیچ یک از افراد حاضر دوستش نباشند یک میز خالی را انتخاب می کند. فرض کنید که هـر یک از $\binom{N}{۲}$ جفت از افراد، مستقلا با احتمال P دوست همدیگر هستند، متوسط تعـداد میزهـای پرشـده را پیدا کنید.

راهنمایی: فرض کنید X_i مقادیر ۱ یا ۰ را بسته به اینکه فرد iام تازه رسیده سرمیزی که قبلاً پـر نشـده اسـت می‌نشیند یا نه اختیار کند.

حل:

$$X_i=\begin{cases}۱ & \text{فرد شماره } i \text{ میز جدا انتخاب کند}\\ ۰ & \text{در غیر این صورت}\end{cases}\qquad X=\sum_{i=۱}^{N}X_i$$

$$E(X_i)=P(X_i=۱)=(۱-p)^{i-۱}\Rightarrow E(X)=\sum_{i=۱}^{N}E(X_i)=\sum_{i=۱}^{N}(۱-p)^{i-۱}=\frac{۱-(۱-p)^N}{۱-(۱-p)}=\frac{۱-(۱-p)^N}{p}$$

توجه داشته باشید که نفر اول حتماً یک میز جدا انتخاب می کند و نفر دوم با احتمال $(۱-p)$ و نفر سـوم بـا احتمال $(۱-p)^۲$ و ... میز جدا انتخاب می کنند.

۹- n توپ که از ۱ تا n شماره گذاری شده است، در n جعبه که آنها نیز از ۱ تا n شماره گذاری شده‌اند قرار می‌گیرند، بطوریکه توپ i ام با شانس یکسان می توانـد در یکـی از جعبـه هـای ۱ تـا i قـرار گیـرد. مطلوب است،

الف) متوسط تعداد جعبه هایی که خالی می مانند.

ب) احتمال اینکه هیچ یک از جعبه ها خالی نباشد.

حل: الف)

$$X=\sum_{i=۱}^{n}X_i$$

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{جعبه شماره } i \text{ خالی بماند}\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

$$X=\sum_{i=۱}^{n}X_i \Rightarrow E(X)=\sum_{i=۱}^{n}E(X_i)$$

$$E(X_i)=P(X_i=۱)=\frac{i-۱}{i}\times\frac{i}{i+۱}\times\ldots\times\frac{n-۲}{n-۱}\times\frac{n-۱}{n}=\frac{i-۱}{n}$$

توجه داشته باشید که توپهای شماره i تا n می توانند در ظرف i قرار گیرند. احتمال اینکه توپ i در ظرف i ام قرار نگیرد $\frac{i-۱}{i}$ و احتمال اینکه توپ شماره $i+۱$ در ظرف i ام قرار نگیرد $\frac{i}{i+۱}$ می باشد و ...

$$\Rightarrow E(X)=\sum_{i=۱}^{n}E(X_i)=\sum_{i=۱}^{n}\frac{i-۱}{n}=\frac{۱}{n}\times\left(\frac{n(n+۱)}{۲}-n\right)=\frac{n+۱}{۲}-۱=\frac{n-۱}{۲}$$

ب) احتمال اینکه هیچ جعبه ای خالی نماند یعنی اینکه همه X_iها مقدار صفر را بگیرند.

$$P(X_۱=۰,X_۲=۰,\ldots,X_n=۰)=P(X_n=۰)P(X_{n-۱}=۰|X_n=۰)\ldots P(X_۱=۰|X_۲=۰,\ldots,X_n=۰)$$
$$=\frac{۱}{n}\times\frac{۱}{n-۱}\times\ldots\times\frac{۱}{۱}=\frac{۱}{n!}$$

۱۰- سه آزمایش را در نظر بگیرید که دارای شـانس موفقیـت یکسـان هسـتند. اگـر X نشـان دهنـده تعـداد موفقیت ها در این آزمایش ها باشد و $E[X]=۱/۸$ مطلوب است محاسبه،

الف) بیشترین مقدار $P\{X=۳\}$ ،

ب) کمترین مقدار $P\{X=۳\}$ ،

برای هر دو حالت، مسأله ای را بیان کنید که نتیجه آن برای $P\{X=۳\}$ مقدار محاسبه شده شما باشد.

راهنمایی: برای قسمت (ب) می توان متغیر تصادفی U کـه دارای توزیـع یکنواخـت روی فاصـله (۱و۰) است استفاده کرده و آزمایش ها را بر حسب مقادیر U تعریف کرد.

حل:

$$\text{تعداد موفقیت ها} = X = X_1 + X_2 + X_3 \,,\; X_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر آزمایش } i \text{ ام موفق باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{3} X_i\right) = \sum_{i=1}^{3} E(X_i) = 1/8 \Rightarrow E(X_i) = 0/6 \;؛$$

$$E(X_i) = P(X_i = 1) = 0/6$$

احتمال اشتراک ۳ واقعه با احتمال یکسان، کوچکتر یا مساوی احتمال هر یک از آنها و بزرگتر مساوی صفر است.

$$P(X=3) = P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1)$$

$$\Rightarrow 0 \le P(X=3) \le 0/6 \Rightarrow \max\{P(X=3)\} = 0/6 \,,\; \text{Min}\{P(X=3)\} = 0$$

برای مثال می توانیم یک متغیر تصادفی یکنواخت U را در نظر بگیریم که مثلاً در قسمت الف، X_iها منجر به موفقیت شوند، هرگاه U در فاصله ۰ تا ۰/۶ باشند و در قسمت ب، X_iها منجر به موفقیت شوند، هرگاه بصورت زیر باشند:

$$X_2 = \begin{cases} 1 & U \text{ در فاصله (۱و۰/۴) باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \qquad X_1 = \begin{cases} 1 & U \text{ در فاصله (۰/۶و۰) باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$X_3 = \begin{cases} 1 & U \text{ در فاصله (۱و۰/۷) یا (۰/۳و۰) باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

۱۱- یک سکه که شانس شیر آمدن آن p است، n بار بطور مستقل پرتاب می شود. گوییم تغییری رخ داده است اگر نتیجه آزمایش متفاوت از نتیجه قبلی باشد. برای مثال، اگر $n=5$ و نتیجه آزمایش $HHTHT$ باشد، آنگاه جمعا ۳ تغییر رخ داده است. متوسط تعداد تغییرها را بدست آورید.

راهنمایی: تعداد تغییرات را بر حسب مجموع $n-1$ متغیر تصادفی برنولی بنویسید.

حل:

$$X = \sum_{i=2}^{x} X_i \qquad X_i = \begin{cases} 1 & \text{در مکان } i \text{ ام تغییر صورت گیرد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

توجه کنید که تغییر می تواند از مکان دوم تا n ام صورت گیرد.

$$E(X_i) = P(X_i = 1) = p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p)$$

$$\Rightarrow E(X)=\sum_{i=۲}^{n}۲p(۱-p)=۲(n-۱)p(۱-p)$$

۱۲- یک گروه متشکل از n پسربچه و m دختربچه به تصادف در یک صف ایستاده اند.

الف) متوسط تعداد پسربچه هایی که حداقل یک دختربچه در یک طرفشان ایستاده باشد را تعیین کنید.

ب) بند الف را با فرض اینکه افراد دور یک میز نشسته اند، تکرار کنید.

حل: الف)

$$X_i=\begin{cases}۱ & \text{کنار پسر بچه } i \text{ ام دختری باشد}\\ ۰ & \text{در غیر این صورت}\end{cases} \qquad X=\sum_{i=۲}^{n}X_i$$

که i مقادیر ۱ تا n را می گیرد (توجه کنید که i بر اساس ترتیب قرار گرفتن پسرها می باشد). بنابراین برای $۲\le i\le n-۱$ مقدار $E(X_i)$ را جدا حساب می کنیم و برای نفرات اول و آخر هم $E(X_i)$ را جدا حساب می کنیم.

$$E(X_i)=P(X_i=۱)=۱-\frac{n-۱}{(m+n-۱)}\times\frac{n-۲}{(m+n-۲)} \qquad ۲\le i\le n-۱$$

برای پسر اول و آخر: برای اینکه این دو پسر کنار هیچ دختری نباشند حتما باید در بین $m+n$ نفر هم در مکان اول و آخر قرار گیرند و گرنه حتماً یک دختر کنار آنها قرار می گیرد. (مثلا اولین پسر اگر در مکان اول نباشد حتماً نفر قبل از او دختر است).

$E(X_۱)=P(X_۱=۱)=۱-P$ (اولین پسر در مکان اول قرار گیرد و مکان دوم هم پسر باشد)

$$\Rightarrow E(X_۱)=E(X_n)=۱-\frac{n}{m+n}\frac{n-۱}{m+n-۱}$$

$$\Rightarrow E(X)=\sum_{i=۱}^{n}E(X_i)$$

$$=۲\left(۱-\frac{n}{m+n}\times\frac{n-۱}{m+n-۱}\right)+(n-۲)\left[۱-\frac{(n-۱)}{m+n-۱}\frac{(n-۲)}{m+n-۲}\right]$$

ب)

$$X_i=\begin{cases}۱ & \text{کنار پسربچه } i \text{ ام دختربچه ای باشد}\\ ۰ & \text{در غیر این صورت}\end{cases} \qquad X=\sum_{i=۱}^{n}X_i$$

$$E(X_i)=۱-\frac{(n-۱)}{(m+n-۱)}\frac{(n-۲)}{(m+n-۲)}\Rightarrow E(X)=\sum_{i=۱}^{n}E(X_i)$$

$$=n\times\left[1-\frac{(n-1)(n-2)}{(m+n-1)(m+n-2)}\right]$$

۱۳- یک مجموعه ۱۰۰۰ کارتی که از ۱ تا ۱۰۰۰ شماره گذاری شده است بین ۱۰۰۰ نفر توزیع می شود. متوسط تعداد کارتهای داده شده به افراد که سن آنها با شماره کارت داده شده انطباق دارد را محاسبه کنید.

X : تعداد افرادیکه سن آنها با شماره کارت مطابقت دارد.

حل:

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{شماره کارت با سن شخص } i \text{ مطابقت دارد}\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

$$X=\sum_{i=1}^{1000}X_i$$

$$E(X_i)=P(X_i=1)=\frac{1}{1000}\Rightarrow E(X)=\sum_{i=1}^{1000}\frac{1}{1000}=1$$

توجه کنید که اگر سن فردی a باشد، احتمال اینکه کارت شماره a را دریافت کند $\frac{1}{1000}$ است.

۱۴- جعبه ای شامل m توپ سیاه است. در هر مرحله یک توپ سیاه از جعبه خارج و بجای آن یک توپ جدید که با احتمال p سیاه و با احتمال $1-p$ سفید است جایگزین می کنیم. متوسط تعداد مراحل مورد نیاز برای آنکه در جعبه هیچ توپ سیاه باقی نماند را پیدا کنید.

تذکر: مساله فوق برای فهم بیماری ایدز کاربرد دارد. قسمتی از سیستم مصون سازی بدن انسان شامل گروهی از سلول ها است که به سلول T شناخته می شوند. دو نوع سلول T که آنها را CD4 و CD8 می‌نامند وجود دارد. علیرغم اینکه تعداد کل سلول های T بیمار مبتلا به ایدز (حداقل در مراحل اولیه بیماری) برابر با تعداد سلول های T شخص سالم است، اخیرا کشف شده است که مخلوط CD8 , CD4 متفاوت هستند و تقریبا ۶۰ درصد از سلول های T شخص سالم از نوع CD4 است در حالیکه برای بیمار مبتلا به ایدز نسبت سلول‌های T از نوع CD4 بطور پیوسته در حال کاهش است. علم پزشکی ثابت نموده است که ویروس HIV (ویروسی که بیماری ایدز را سبب می شود) به سلول های CD4 حمله نموده و مکانیزم بدن برای جایگزین کردن سلول T معدوم شده، نمی تواند بین سلول های CD8 , CD4 تفاوتی قایل شود و با احتمال ۰/۶ سلول CD4 و با احتمال ۰/۴ سلول CD8 را تولید می کند.

اگرچه این روش به نظر می رسد که موثرترین روش جایگزینی است. اما مسلماً وقتی که هدف ویروس فقط سلول های CD4 باشد بسیار خطرناک است.

حل: برای آنکه m توپ سیاه را خارج و m توپ سفید جایگزین آن کنیم یک توزیع دو جمله ای منفی با پارامترهای m و $(1-p)$ داریم، لذا: $E(X)=\frac{m}{1-p}$

۱۵- در مثال ۲-۸، i و j $(i\neq j)$ تشکیل یک جفت انطباق را می دهند اگر i کلاه متعلق به j و j کلاه متعلق به i را انتخاب کنند. متوسط تعداد جفت انطباقها را پیدا کنید.

حل: X : تعداد جفت انطباقها

$$X_{ij}=\begin{cases}1 & \text{i کلاه j را بردارد و j کلاه i را بردارد.}\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

$$X=\sum\sum_{i<j} X_{ij} \Rightarrow E(X)=\sum\sum_{i<j} E(X_{ij})$$

$$E(X_{ij})=P(X_{ij})=\frac{1\times 1\times (n-2)}{n!}=\frac{1}{n(n-1)}$$

$$\Rightarrow E(X)=\sum\sum_{i<j}\frac{1}{n(n-1)}=\binom{n}{2}\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{2}$$

۱۶- اگر Z یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد باشد و برای یک مقدار ثابت x، تعریف کنیم.

$$X=\begin{cases}Z & Z>x\\ 0 & \text{سایر مقادیر}\end{cases}$$

نشان دهید که $E[X]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

حل:

$$E(X)=\int_x^{\infty}\frac{z}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\Big|_x^{\infty}$$

$$=0-\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

۱۷- یک دسته کارت n تایی که از ۱ تا n شماره گذاری شده است را مخلوط کرده بطوریکه می توان فرض کرد تمام حالات ممکن $n!$ ترتیب کارت ها دارای شانس یکسان هستند. فرض کنید که شما n حدس بدنبال هم انجام داده اید، بطوریکه i امین حدس شما یک حدس در مورد موقعیت i امین کارت باشد. در صورتیکه N نشان دهنده تعداد حدس های درست باشد،

الف) اگر هیچ اطلاعی از حدس های قبلی خود نداشته باشید، نشان دهید که برای هر استراتژی $E[N]=1$ است.

ب) فرض کنید که پس از هر حدس، کارت مورد سوال به شما نشان داده شود. درمورد بهترین استراتژی چه فکر می کنید؟ نشان دهید که تحت این استراتژی داریم:

$$E[N]=\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\ldots+1\approx\int_1^n\frac{1}{x}dx=\log n$$

ج) فرض کنید پس از هر حدس به شما گفته می شود که آیا صحیح گفته اید یا غلط. در این حالت می‌توان نشان داد روشی که $E[N]$ را حداکثر می کند، عبارت است از اینکه همان حدس را ادامه دهیم تا گفته شود که حدس درست است و آنگاه حدس شماره کارت جدید را تغییر دهیم. برای این استراتژی نشان دهید:

$$E[N]=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\approx e-1$$

راهنمایی: برای تمامی حالات، N را بر حسب مجموع متغیرهای تصادفی نشانگر (یعنی برنولی) بنویسید.

حل: الف) $N=\sum_{i=1}^{n}N_i$

$$N_i=\begin{cases}1 & \text{موقعیت کارت } i \text{ ام درست حدس زده شود}\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

$$\Rightarrow E(N_i)=P(N_i=1)=\frac{1}{n}\Rightarrow E(N)=n\times\frac{1}{n}=1$$

ب) $N=\sum_{i=1}^{n}N_i$

$$N_i=\begin{cases}1 & \text{موقعیت کارت } i \text{ ام درست حدس زده شود}\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

$$E(N_i)=P(N_i=1)=\frac{1}{n+1-i}\Rightarrow E(N)=\sum_{i=1}^{n}E(N_i)$$

$$=\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\ldots+\frac{1}{1}\cong\int_1^n\frac{1}{x}dx=\log n-\log 1=\log n$$

۱۸-*

۱۹- در ناحیه ای r نوع مختلف از یک حشره زندگی می کنند، هر دفعه که حشره ای به دام می افتد مستقل از نوع حشره قبلی با احتمال P_i $(i=1,\dots r)$ ، $\sum_{i=1}^{r} P_i = 1$ ، از نوع i ام است.

الف) متوسط تعداد حشراتی که قبل از حشره نوع ۱ به دام افتاده اند را بدست آورید.

ب) متوسط تعداد انواع حشراتی که قبل از بدام انداختن حشره نوع ۱ به دام افتاده اند را بدست آورید.

حل: الف) تعداد حشراتی که قبل از حشره نوع ۱ به دام می افتند برابر با تعداد شکست ها قبل از رسیدن به اولین پیروزی است، هرگاه احتمال موفقیت P_1 باشد. تعداد حشره های به دام افتاده برای رسیدن به اولین نوع (Y) هندسی با پارامتر P_1 است، حال اگر تعداد حشره های قبل از رسیدن به اولین نوع را Z بنامیم، داریم:

$$Y = Z + 1 \Rightarrow E(Z) = E(Y) - 1 = \frac{1}{P_1} - 1$$

ب) $X = \sum_{i=2}^{r} X_i$

$$X_i \begin{cases} 1 & \text{نوع } i \text{ قبل از نوع ۱ به دام افتاده باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$E(X_i) = P(X_i = 1) = \frac{P_i}{P_1 + P_i} \Rightarrow E(X) = \sum_{i=2}^{r} \frac{P_i}{P_1 + P_i}$$

توجه کنید که برای بدست آوردن احتمال $P(X_i = 1)$ از مسأله ۷۲ فصل ۳ کمک گرفتیم.

۲۰- جعبه ای شامل n توپ است. توپ i ام دارای وزن $W(i)$ $(i=1,\dots,n)$ است. توپها بدون جایگذاری و یک به یک بر اساس قاعده زیر از جعبه انتخاب می شوند: در هر مرحله از انتخاب، احتمال اینکه توپ مشخصی از جعبه انتخاب شود برابر با وزن آن تقسیم بر مجموع وزن توپهای باقیمانده در جعبه است. برای مثال، اگر توپهای باقیمانده در جعبه i_1 ، i_2 ، ...و i_r باشند آنگاه احتمال انتخاب توپ بعدی (i_j) برابر با $W(i_j)/\sum_{k=1}^{r} W(i_k)$ خواهد بود $(i=1,\dots,r)$. متوسط تعداد توپهای بیرون آورده شده قبل از توپ ۱ را محاسبه کنید.

حل: با توجه به اینکه در هر مرحله (فرقی نمی کند کدام مرحله باشد) اینکه توپ ۱ انتخاب شود یا توپ i دو به دو ناسازگارند، پس با کمک گرفتن از مسأله ۷۲ فصل ۳ داریم:

$X = \sum_{i=2}^{x} X_i$

$$X_i \begin{cases} 1 & \text{توپ } i \text{ قبل از توپ ۱ انتخاب شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$E(X_i)=P(X_i=1)=\frac{\frac{W_i}{\sum_{j=1}^{r}W_j}}{\frac{W_1+W_i}{\sum_{j=1}^{r}W_j}}=\frac{W_i}{W_1+W_i}\Rightarrow E(X)=\sum_{i=2}^{n}\frac{W_i}{W_1+W_i}$$

۲۱- برای یک گروه ۱۰۰ نفری،

الف) متوسط تعداد روزهای سال که روز تولد ۳ نفر است را محاسبه کنید.

ب) متوسط تعداد روزهای تولد متفاوت را محاسبه کنید.

حل: الف)

$$X_i\begin{cases}1 & \text{در روز } i \text{ ام ۳ نفر متولد شده باشند}\\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

$$E(X_i)=P(X_i=1)=\binom{100}{3}\left(\frac{1}{365}\right)^3\left(\frac{364}{365}\right)^{97},\ X=\sum_{i=1}^{365}X_i$$

$$\Rightarrow E(X)=E\left(\sum_{i=1}^{365}X_i\right)=\sum_{i=1}^{365}E(X_i)=365\binom{100}{3}\left(\frac{1}{365}\right)^3\left(\frac{364}{365}\right)^{97}$$

$$=\binom{100}{3}\left(\frac{1}{365}\right)^2\left(\frac{364}{365}\right)^{97}=0/9301$$

ب)

$$X_i\begin{cases}1 & \text{در روز } i \text{ ام حداقل ۱ نفر به دنیا آمده باشد}\\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

$$X=\sum_{i=1}^{365}X_i \qquad E(X_i)=P(X_i=1)=1-\left(\frac{364}{365}\right)^{100}$$

$$\Rightarrow E(X)=365\left(1-\left(\frac{364}{365}\right)^{100}\right)=87/57$$

و یا اگر از تخمین استفاده کنیم داریم:

$$\lambda=np=100\times\frac{1}{365}=\frac{100}{365}\qquad\Rightarrow E(X)=365\left(1-e^{-\frac{100}{365}}\right)=87/47$$

۲۲- چند بار انتظار دارید که یک تاس سالم را پرتاب کنید تا حداقل یکبار همه ۶ وجه آن ظاهر شود.

حل: این متغیر تصادفی مجموع ۶ متغیر تصادفی هندسی است که احتمال موفقیت اولی ۱ و دومی $\frac{۵}{۶}$ ، سومی $\frac{۴}{۶}$ ، چهارمی $\frac{۳}{۶}$ ، پنجمی $\frac{۲}{۶}$ و ششمی $\frac{۱}{۶}$ است. پس:

$$X = X_۱ + X_۲ + X_۳ + X_۴ + X_۵ + X_۶$$

$$\Rightarrow E(X) = \sum_{x=۱}^{۶} E(X_i) = \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{\frac{۵}{۶}} + \frac{۱}{\frac{۴}{۶}} + \frac{۱}{\frac{۳}{۶}} + \frac{۱}{\frac{۲}{۶}} + \frac{۱}{\frac{۱}{۶}} = ۱۴/۷$$

۲۳- فرض کنید جعبه ۱ شامل ۵ توپ سفید و ۶ توپ سیاه و جعبه ۲ شامل ۸ توپ سفید و ۱۰ توپ سیاه است. دو توپ به تصادف از جعبه ۱ انتخاب و در جعبه ۲ قرار داده می شود. آنگاه ۳ توپ به تصادف از جعبه ۲ انتخاب می شود، متوسط تعداد توپهای سفید در سه تایی انتخاب شده را محاسبه کنید.

راهنمایی: فرض کنید $X_i=۱$ ، اگر i امین توپ سفید که از ابتدا در جعبه ۱ بود یکی از سه توپ انتخابی باشد و $X_i=۰$ در غیر اینصورت. بطور مشابه، فرض می کنیم $Y_i=۱$، اگر i امین توپ سفید از جعبه ۲ یکی از سه توپ انتخابی باشد، و $Y_i=۰$ در غیر اینصورت. حال تعداد توپهای سفید در سه تایی را می توان بصورت $\sum_{i=۱}^{۵} X_i + \sum_{i=۱}^{۸} Y_i$ نوشت.

حل: راه اول:

$$E(X) = \sum_{i=۱}^{۵} E(X_i) + \sum_{j=۱}^{۸} E(Y_j) = \frac{۱۵}{۱۱۰} + \frac{۲۴}{۲۰} = \frac{۱۴۷}{۱۱۰}$$

$$E(X_i) = P(X_i = ۱) = \frac{\binom{۱}{۱}\binom{۱۰}{۱}\binom{۱}{۱}\binom{۱۹}{۲}}{\binom{۱۱}{۲}\binom{۲۰}{۳}} = \frac{۳}{۱۱۰} \qquad E(Y_j) = P(Y_j = ۱) = \frac{\binom{۱۹}{۲}}{\binom{۲۰}{۳}} = \frac{۳}{۲۰}$$

راه دوم: $b_۲$: از ظرف اول دو توپ سیاه انتخاب شود.

$w_۱b_۱$: از ظرف اول یک توپ سیاه و یک توپ سفید انتخاب شود.

$w_۲$: از ظرف اول دو توپ سفید انتخاب شود.

X: تعداد توپهای سفید انتخابی از ظرف دوم.

$$E(X)=E(X|w_۲)P(w_۲)+E(X|b_۱w_۱)P(b_۱w_۱)+E(X|b_۲)P(b_۲)$$
$$=\frac{۱۰\times ۳}{۲۰}\times\frac{۲}{۱۱}+\frac{۹\times ۳}{۲۰}\times\frac{۶}{۱۱}+\frac{۸\times ۳}{۲۰}\times\frac{۳}{۱۱}=\frac{۱۴۷}{۱۱۰}$$

توجه کنید که امید ریاضی متغیر تصادفی فوق هندسی $\frac{Mn}{M+N}$ است و همچنین توجه کنید که بعد از اینکه توپهای ظرف اول را به ظرف دوم ریختیم، تعداد توپهای سفید انتخابی از ظرف دوم یک متغیر تصادفی فوق هندسی است.

۲۴- شیشه ای در ابتدا شامل m قرص بزرگ و n قرص کوچک است. هر روز بیماری به تصادف یکی از قرص ها را انتخاب می کند. اگر قرص کوچک انتخاب شود، آن قرص خورده می شود. اگر قرص بزرگ انتخاب شود، آنگاه قرص دو نصف شده، نصف آنرا خورده و نصف دیگر به داخل شیشه برگردانده می شود و به عنوان یک قرص کوچک در نظر گرفته می شود.

الف) اگر X نشان دهنده تعداد قرص های کوچک پس از انتخاب آخرین قرص بزرگ انتخابی باشد که نصف آن به شیشه برگردانده شده است، $E[X]$ را بدست آورید. راهنمایی: $m+n$ متغیر نشانگر را تعریف کنید، یکی برای هر قرص کوچک که در ابتدا بوده و یکی برای هر m قرص کوچک بوجود آمده وقتی که قرص بزرگ به دو قسمت تقسیم شده است. حال استدلال مثال ۲-۱۳ را بکار برید.

ب) اگر Y نشان دهنده روزی که در آن آخرین قرص بزرگ انتخاب شده است باشد، آنگاه $E[Y]$ را پیدا کنید.

راهنمایی: رابطه بین X و Y چیست؟

حل: الف) برای n قرص کوچک اولیه $۱\le j\le n$

$$X_j=\begin{cases}۱ & \text{اگر بعد از آخرین قرص بزرگ باقی مانده باشد}\\ ۰ & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

$$E(X_j)=P(X_j=۱)=\frac{۱}{۱+m}$$

$P(X_j=۱)$ به سادگی بدست می آید. برای محاسبه آن کافیست احتمال این را بیابیم که از بین قرص کوچک jام و m قرص بزرگ، قرص کوچک jام بعنوان آخرین انتخاب باشد.

برای m قرص کوچک بوجود آمده $۱\le i\le m$

$$X_i=\begin{cases}۱ & \text{اگر بعد از آخرین قرص بزرگ باقی مانده باشد}\\ ۰ & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

چون در این مرحله i قرص بزرگ حذف شده

$$E(X_i)=P(X_i=1)=\frac{1}{(m-i)+1}$$

و

$$E(X)=E\left(\sum_{j=1}^{n}X_j+\sum_{i=1}^{m}X_i\right)=\frac{n}{1+m}+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{m-i+1}$$

ب) توجه کنید که کل قرصها در مدت زمان 2m+n روز تمام می شود.

$$\Rightarrow X+Y=2m+n\Rightarrow E(Y)=2m+n-E(X)$$

$$=2m+n-\frac{n}{1+m}-\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{m-i+1}$$

۲۵- فرض کنید X_1، X_2، ... دنباله ای از متغیرهای تصادفی پیوسته مستقل با توزیع یکسان بوده و برای $N\geq 2$ بصورتی باشند که ،

$$X_1\geq X_2\geq\ldots\geq X_{N-1}<X_N$$

یعنی، N نقطه ای است که در آن نزولی بودن دنبال متوقف می شود. نشان دهید $E[N]=e$ است.

راهنمایی: ابتدا $P\{N\geq n\}$ را بدست آورید.

حل: از آنجا که توزیعها یکسان هستند، داریم:

$$P(N\geq n)=P(X_1>X_2>\ldots>X_{n-1})=\frac{1}{(n-1)!}$$

$$P(X\geq n+1)=\frac{1}{n!}\Rightarrow P(X=n)=P(X\geq n)-P(X\geq n+1)=\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}$$

$$\Rightarrow E(X)=\sum_{i=2}^{\infty}i\left(\frac{1}{(i-1)!}-\frac{1}{i!}\right)=\sum_{i=2}^{\infty}\left[\frac{i}{(i-1)!}-\frac{1}{(i-1)!}\right]$$

$$=\sum_{i=2}^{\infty}\frac{(i-1)}{(i-1)!}=\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{(i-2)!}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}=e^1=e \qquad , \qquad j=i-2$$

که

۲۶- اگر X_1، X_2، ...و X_n متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان یکنواخت روی فاصله (۱و۰) باشند، مطلوب است محاسبه،

الف) $E[\max(X_1,\ldots,X_n)]$

ب) $E[\min(X_1,\ldots,X_n)]$

حل: الف)
$$Y:\max\{X_1,X_2,\dots,X_n\}\Rightarrow F_Y(y)=P(\max\{X_1,\dots,X_n\}\le y)$$
$$=P(X_1<y)P(X_2<y)\dots P(X_n<y)=y^n$$

توجه کنید که X_i ها توزیع یکنواخت مستقل دارند.

$$\Rightarrow f_Y(y)=\frac{\partial F_Y(y)}{\partial y}=ny^{n-1}\Rightarrow E(Y)=\int_0^1 yny^{n-1}dy$$
$$=\int_0^1 ny^n dy=\frac{n}{n+1}$$

ب)
$$Z:\min\{X_1,X_2,\dots,X_n\}\Rightarrow F_Z(z)=P(Z\le z)=1-P(Z>z)$$
$$=1-P(\min\{X_1,\dots,X_n\}>z)$$
$$=1-P(X_1>z)P(X_2>z)\dots P(X_n>z)=1-(1-z)^n$$
$$\Rightarrow f_Z(z)=n(1-z)^{n-1}\Rightarrow E(Z)=\int_0^1 zn(1-z)^{n-1}dz=\frac{1}{n+1}$$

۲۷- اگر ۱۰۱ قلم جنس بین ۱۰ جعبه توزیع شوند، آنگاه یک جعبه باید بیش از ۱۰ قلم جنس داشته باشد. با بکارگیری روش احتمالی این نتیجه را ثابت کنید.

m را برابر با ماکزیمم تعداد مهره های درون جعبه ها قرار می دهیم و سپس یک جعبه را به تصادف انتخاب می کنیم. و تعداد مهره های آن را X می نامیم.

حل:

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{اگر جنس } i \text{ درون جعبه مورد نظر قرار گیرد}\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

$$E(X_i)=P(X_i=1)=\frac{1}{10}$$
$$X=\sum_{i=1}^{101}X_i\Rightarrow E(X)=\sum_{i=1}^{101}\frac{1}{10}=\frac{101}{10}\Rightarrow m>\frac{101}{10}$$

پس حداقل یک جعبه وجود دارد که تعداد اجناس آن بیش از $\frac{101}{10}$ باشد.

۲۸- سیستم مدور n تایی k از r خروجی $(k\le r\le n)$ به سیستمی گفته می شود که دارای n مؤلفه به صورت مدور و r خروجی متوالی باشد. هر مؤلفه سالم یا خراب است و کل سیستم وقتی کار می کند که

هیچ بلوکی شامل r مؤلفه متوالی که k تای آن خراب است وجود نداشته باشد. نشان دهید هیچ راهی برای مرتب کردن ۴۷ مؤلفه که ۸ تای آنها خراب است در یک سیستم ۴۷ تایی ۳ از ۱۲ خروجی وجود ندارد.

حل: یکی از ۱۲ خروجی متوالی را در نظر می گیریم. واضح است که هر خروجی آن با احتمال $\frac{۸}{۴۷}$ خراب می‌باشد. لذا امید ریاضی تعداد خرابها در این ۱۲ خروجی $\frac{۱۲\times ۸}{۴۷}$ می باشد.

X: تعداد خرابها در ۱۲ خروجی

$$X_i\begin{cases} ۱ & \text{خروجی } i \text{ خراب باشد} \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$X=\sum_{i=۱}^{۱۲}X_i \Rightarrow E(X)=\sum_{i=۱}^{۱۲}E(X_i)$$

$$E(X_i)=P(X_i=۱)=\frac{۸}{۴۷}\Rightarrow E(X)=\sum_{i=۱}^{۱۲}\frac{۸}{۴۷}=\frac{۸\times ۱۲}{۴۷}=۲/۰۴$$

بنابراین برای حداقل یک سری از ۱۲ خروجی های متوالی، بیش از ۲/۰۴ مولفه خراب داریم. پس حداقل یکی از آنها ۳ مولفه خراب دارد و این سیستم هرگز نمی تواند کار کند.

۲۹- چهار نوع تمبر مختلف وجود دارد که دو نوع اول و دوم گروه ۱ و دو نوع سوم و چهارم گروه ۲ را تشکیل می دهند. هر تمبر جدید با احتمال p_i متعلق به نوع i است، بطوری که $p_۱=p_۲=\frac{۱}{۸}$ و $p_۳=p_۴=\frac{۳}{۸}$. متوسط تعداد تمبرهایی را پیدا کنید که یک شخص باید بدست آورد تا حداقل یکی از

الف) هر چهار نوع
ب) همه نوعهای گروه ۱
ج) همه نوعهای گروه ۲
د) همه نوعهای یکی از دو گروه

حل: الف) با استفاده از اتحاد ماکزیمم-مینیمم ها داریم:

$$\frac{۱}{\frac{۱}{۸}}+\frac{۱}{\frac{۱}{۸}}+\frac{۱}{\frac{۳}{۸}}+\frac{۱}{\frac{۳}{۸}}-\frac{۱}{\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}}-\frac{۱}{\frac{۱}{۸}+\frac{۳}{۸}}-\frac{۱}{\frac{۱}{۸}+\frac{۳}{۸}}-\frac{۱}{\frac{۱}{۸}+\frac{۳}{۸}}-\frac{۱}{\frac{۱}{۸}+\frac{۳}{۸}}-\frac{۱}{\frac{۳}{۸}+\frac{۳}{۸}}+\frac{۱}{\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}+\frac{۳}{۸}}+\frac{۱}{\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}+\frac{۳}{۸}}$$
$$+\frac{۱}{\frac{۱}{۸}+\frac{۳}{۸}+\frac{۳}{۸}}+\frac{۱}{\frac{۱}{۸}+\frac{۳}{۸}+\frac{۳}{۸}}-\frac{۱}{\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}+\frac{۳}{۸}+\frac{۳}{۸}}=$$
$$۸+۸+\frac{۸}{۳}+\frac{۸}{۳}-۴-۲-۲-۲-۲-\frac{۸}{۶}+\frac{۸}{۵}+\frac{۸}{۵}+\frac{۸}{۷}+\frac{۸}{۷}+-۱=\frac{۴۳۷}{۳۵}$$

ب) $\frac{۱}{\frac{۱}{۸}}+\frac{۱}{\frac{۱}{۸}}-\frac{۱}{\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}}=۸+۸-۴=۱۲$

ج) $\frac{۱}{\frac{۳}{۸}}+\frac{۱}{\frac{۳}{۸}}-\frac{۱}{\frac{۳}{۸}+\frac{۳}{۸}}=\frac{۸}{۳}+\frac{۸}{۳}-\frac{۸}{۶}=۴$

د) $۱۲+۴-\frac{۴۳۷}{۳۵}=\frac{۱۲۳}{۳۵}$

۳۰- اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ باشند، $E[(X-Y)^۲]$ را پیدا کنید.

حل:

$$E[(X-Y)^۲]=E(X^۲)+E(Y^۲)-۲E(XY)=(\sigma^۲+\mu^۲)+(\sigma^۲+\mu^۲)-۲\mu\times\mu=۲\sigma^۲$$

۳۱- در مسأله ۶، واریانس مجموع پرتاب ها را محاسبه کنید.

حل:

$$X=\sum_{i=۱}^{۱۰}X_i \Rightarrow Var(X)=\sum_{i=۱}^{۱۰}Var(X_i)+۲\sum_{i<j}cov(X_i,X_j)$$

ولی از آنجاییکه پرتاب تاسها مستقل از هم می باشند، برای $i\neq j$ داریم: $Cov(X_i,X_j)=۰$

$$E(X_i)=۳/۵ \qquad E(X_i^۲)=\sum_{i=۱}^{۱۰}\frac{۱}{۶}i^۲=\frac{۹۱}{۶}\Rightarrow Var(X_i)=E(X_i^۲)-[E(X_i)]^۲=\frac{۳۵}{۱۲}$$

$$\Rightarrow Var(X)=\sum_{i=۱}^{۱۰}Var(X_i)=\frac{۳۵۰}{۱۲}=\frac{۱۷۵}{۶}$$

۳۲- در مسأله ۹ واریانس تعداد جعبه های خالی را محاسبه کنید.

حل: اگر X_i ها را بصورت تمرین ۹ تعریف کنیم و با دانستن این موضوع که واریانس توزیع برنولی $P(۱-P)$ می باشد، داریم:

$$Var(X_i)=P(X_i=۱)(۱-P(X_i=۱))=\frac{i-۱}{n}\times\left(۱-\frac{i-۱}{n}\right)=\frac{i-۱}{n}-\frac{(i-۱)^۲}{n^۲}$$

با فرض $j<i$

$$Cov(X_i,X_j)=E(X_iX_j)-E(X_i)E(X_j)$$

$$E(X_iX_j)=P(X_i=۱,X_j=۱)=P(X_i=۱|X_j=۱)P(X_j=۱)=\frac{i-۲}{n-۱}\frac{j-۱}{n}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Cov}(X_i,X_j)=\frac{(i-۲)(j-۱)}{n(n-۱)}-\frac{(i-۱)(j-۱)}{n^۲}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}(X)=\sum_{i=۱}^{n}\left(\frac{i-۱}{n}-\frac{(i-۱)^۲}{n^۲}\right)+۲\sum_{j<i}\left(\frac{(i-۲)(j-۱)}{n(n-۱)}-\frac{(i-۱)(j-۱)}{n^۲}\right)$$

(برای محاسبه $P(X_i=۱,X_j=۱)$، روش محاسبه $P(X_i=۱)$ در مسأله ۹ را مرور کنید.)

۳۳- اگر $\mathrm{Var}(X)=۵, E[X]=۱$ باشد، مطلوب است محاسبه،

الف) $E[(۲+X)^۲]$　　　　ب) $\mathrm{Var}(۴+۳X)$

حل: الف)

$$E(X^۲)=\mathrm{Var}(X)+[E(X)]^۲=۵+۱=۶$$

$$\Rightarrow E[(۲+X)^۲]=E(۴+۴X+X^۲)=۴+۴E(X)+E(X^۲)=۴+۴+۶=۱۴$$

ب)

$$\mathrm{Var}(۴+۳X)=\mathrm{Var}(۳X)=۹\mathrm{Var}(X)=۹\times۵=۴۵$$

۳۴- اگر ۱۰ زوج به تصادف دور یک میزگرد نشسته باشند، مطلوب است متوسط و واریانس تعداد مردانی که کنار همسر خود نشسته اند.

حل: تعداد زوجهایی که کنار هم نشسته اند را X در نظر می گیریم.

$$X_i=\begin{cases}۱ & \text{اگر زوج } i \text{ کنار هم نشسته باشند.}\\ ۰ & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

$$X=\sum_{i=۱}^{۱۰}X_i\ ,\ E(X_i)=P(X_i=۱)=\frac{۲\times(۱۸)!}{(۱۹)!}=\frac{۲}{۱۹}$$

$$\Rightarrow E(X)=۱۰\times\frac{۲}{۱۹}=\frac{۲۰}{۱۹}$$

$$\mathrm{Var}(X_i)=[P(X_i=۱)][۱-P(X_i=۱)]=\frac{۲}{۱۹}-(\frac{۲}{۱۹})^۲=\frac{۳۴}{۱۹^۲}$$

و برای $i\neq j$ داریم:

$$\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=E(X_iX_j)-E(X_i)E(X_j)=\frac{۲\times۲\times۱۷!}{۱۹!}-\left(\frac{۲}{۱۹}\right)^۲$$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}(X)=\sum_{i=۱}^{۱۰}\mathrm{Var}(X_i)+۲\sum_{i<j}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$$

$$=10\times\frac{34}{19^2}+2\binom{10}{2}\left[\frac{2\times 2}{18\times 19}-\left(\frac{2}{19}\right)^2\right]=\frac{360}{361}$$

(از آنجاییکه X_i ها برنولی هستند $E(X_iX_j)=P(X_i=1,X_j=1)$)

۳۵-*

۳۶- فرض کنید X تعداد ۱ ها و Y تعداد ۲ ها در n مرتبه پرتاب یک تاس سالم باشند، $Cov(X,Y)$ را محاسبه کنید.

حل: در n مرتبه پرتاب یک تاس، تعداد ۱ ها و ۲ها و ... و ۶ ها دارای توزیع چند جمله ای هستند و با توجه به اینکه در متن کتاب مبانی احتمال (صفحه ۳۴۸) ثابت شده که در توزیع چند جمله ای برای $i\neq j$ داریم:

$$Cov\ (X_i, X_j)=-nP_iP_j$$

پس نتیجه می گیریم:

$$Cov\ (\text{تعداد ۱ها و تعداد ۲ها})=-n\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{-n}{36}$$

۳۷- تاسی را دوبار پرتاب می کنیم. اگر X برابر مجموع نتایج و Y برابر تفاضل نتیجه تاس دوم از تاس اول باشد، $Cov(X,Y)$ را محاسبه کنید.

حل:

نتیجه تاس اول: Z_1

نتیجه تاس دوم: Z_2

$$\Leftarrow \quad \begin{aligned} X&=Z_1+Z_2\\ Y&=Z_2-Z_1\end{aligned}$$

$$Cov\ (X,Y)=Cov\ (Z_2+Z_1, Z_2-Z_1)$$

$$=Var\ (Z_2)-Var\ (Z_1)+Cov\ (Z_2,Z_1)-Cov\ (Z_2,Z_1)$$

$$=Var\ (Z_2)-Var\ (Z_1)=\frac{35}{12}-\frac{35}{12}=0$$

۳۸- متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی توأم زیر هستند.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{x}e^{-2x} & 0<x<\infty \quad 0<y\le x\\ 0 & \text{سایر مقادیر}\end{cases}$$

$Cov(X, Y)$ را محاسبه کنید.

حل: $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

$$E(X)=\int_۰^{\infty}\int_۰^{x} x\frac{۲}{x}e^{-۲x}dydx=\int_۰^{\infty}۲xe^{-۲x}dx=-xe^{-۲x}\Big|_۰^{\infty}+\int_۰^{\infty}e^{-۲x}dx=۰+\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$E(Y)=\int_۰^{\infty}\int_۰^{x}\frac{۲y}{x}e^{-۲x}dydx=\int_۰^{\infty}xe^{-۲x}dx=\frac{۱}{۴}$$

$$E(XY)=\int_۰^{\infty}\int_۰^{x}۲ye^{-۲x}dydx=\int_۰^{\infty}x^۲e^{-۲x}dx=-\frac{x^۲}{۲}e^{-۲x}\Big]_۰^{\infty}+\int_۰^{\infty}xe^{-۲x}dy=۰+\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow Cov(X,Y)=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۸}$$

۳۹- اگر $X_۱$، $X_۲$، ... مستقل از هم با میانگین و واریانس یکسان μ و $\sigma^۲$ باشند، $Y_n=X_n+X_{n+۱}+X_{n+۲}$ تعریف شود. برای $j\geq ۰$ مقدار $Cov(Y_n,Y_{n+j})$ را بدست آورید.

حل: با توجه به اینکه X_i ها مستقل هستند، برای $i\neq j$ داریم: $Cov(X_i,X_j)=۰$

$$j=۰\ \Rightarrow Cov(Y_n,Y_{n+j})=Cov(Y_n,Y_n)$$
$$=Cov(X_n+X_{n+۱}+X_{n+۲},X_n+X_{n+۱}+X_{n+۲})=۳\sigma^۲$$
$$j=۱\ \Rightarrow Cov(Y_n,Y_{n+j})=Cov(Y_n,Y_{n+۱})$$
$$=Cov(X_n+X_{n+۱}+X_{n+۲},X_{n+۱}+X_{n+۲}+X_{n+۳})=۲\sigma^۲$$
$$j=۲\ \Rightarrow Cov(Y_n,Y_{n+j})=Cov(Y_n,Y_{n+۲})$$
$$=Cov(X_n+X_{n+۱}+X_{n+۲},X_{n+۲}+X_{n+۳}+X_{n+۴})=\sigma^۲$$
$$j>۲\ \Rightarrow Cov(Y_n,Y_{n+j})=۰$$

۴۰- تابع چگالی توأم X و Y بصورت زیر است:

$$f(x,y)=\frac{۱}{y}e^{-(y+x/y)}\qquad x>۰\quad ,\quad y>۰$$

$E[X]$, $E[Y]$ را بدست آورید و نشان دهید $Cov(X,Y)=۱$ است.

حل:

$$E(X)=\int_۰^{\infty}\int_۰^{\infty}x\frac{۱}{y}e^{-(y+\frac{x}{y})}dxdy=\int_۰^{\infty}\frac{y^۲e^{-y}}{y}dy=\int_۰^{\infty}ye^{-y}dy=۱$$

$$E(y)=\int_۰^{\infty}\int_۰^{\infty}y\frac{۱}{y}e^{-(y+\frac{x}{y})}dxdy=\int_۰^{\infty}ye^{-y}dy=۱$$

$$E(XY)=\int_{۰}^{\infty}\int_{۰}^{\infty}\frac{xy}{y}e^{-(y+\frac{x}{y})}dxdy=\int_{۰}^{\infty}y^{۲}e^{-y}dy=۲$$

توجه کنید که اگر $f_Y(y)=\frac{y^{۲}e^{-y}}{۲}$، آنگاه Y توزیع گاما با $\lambda=۱$ و t=۳ دارد و انتگرال کلیه مقادیر روی تابع چگالی آن برابر یک می شود.

$$\rightarrow Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=۲-۱\times۱=۱$$

۴۱- استخری شامل ۱۰۰ ماهی است که ۳۰ تا از آنها کپورند. اگر ۲۰ ماهی صید شود، میانگین و واریانس تعداد ماهی های کپور صید شده در بین ۲۰ ماهی چقدر است؟ چه فرضهایی را قبول کردید.

حل: تعداد ماهی های صید شده توزیع فوق هندسی دارند.

$$E(X)=\frac{mn}{N}=\frac{۲۰\times۳۰}{۱۰۰}=۶$$

$$Var(X)=\frac{nm}{N}\left[\frac{(n-۱)(m-۱)}{N-۱}+۱-\frac{nm}{N}\right]=\frac{۲۰\times۳۰}{۱۰۰}\times\left[\frac{۱۹\times۲۹}{۹۹}+۱-\frac{۲۰\times۳۰}{۱۰۰}\right]=\frac{۱۱۲}{۳۳}$$

فرض می کنیم که شانس انتخاب هر ماهی یکسان است.

۴۲- یک گروه ۲۰ نفری شامل ۱۰ مرد و ۱۰ زن به تصادف به ۱۰ زوج دوتایی تقسیم می شوند. امید ریاضی و واریانس تعداد زوج هایی که شامل یک مرد و یک زن هستند را محاسبه کنید. اگر گروه ۲۰ نفری شامل ۱۰ زوج متأهل باشد، امید ریاضی و واریانس تعداد زوج های متأهل در جفت ها را محاسبه کنید.

حل: الف)

$$X_i=\begin{cases}۱ & \text{زوج i ام شامل یک زن و یک مرد باشد}\\ ۰ & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

$$X=\sum_{i=۱}^{۱۰}X_i\ ,\ E(X_i)=\frac{\binom{۱۰}{۱}\binom{۱۰}{۱}}{\binom{۲۰}{۲}}=\frac{۱۰}{۱۹}\Rightarrow E(X)=\sum_{i=۱}^{۱۰}E(X_i)=\frac{۱۰\times۱۰}{۱۹}=\frac{۱۰۰}{۱۹}$$

و برای $i \neq j$ داریم:

$$Cov(X_i,X_j)=E(X_iX_j)-E(X_i)E(X_j)=\frac{\binom{10}{1}\binom{10}{1}}{\binom{20}{2}}\frac{\binom{9}{1}\binom{9}{1}}{\binom{18}{2}}-\left(\frac{10}{19}\right)^2$$

و چون X_i ها برنولی هستند، داریم:

$$Var(X_i)=\frac{10}{19}\left(1-\frac{10}{19}\right)$$

$$\Rightarrow Var(X)=\sum_{i=1}^{10}Var(X_i)+2\sum_{i>j}Cov(X_i,X_j)$$

$$=10\times\frac{10\times 9}{19^2}+2\binom{10}{2}\left[\frac{\binom{10}{1}\binom{10}{1}\binom{9}{1}\binom{9}{1}}{\binom{20}{2}\binom{18}{2}}-\left(\frac{10}{19}\right)^2\right]=\frac{16200}{6137}$$

ب)

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{زوج متاهل } i \text{ ام در یک گروه باشند}\\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

$$X=\sum_{i=1}^{10}X_i\ ,\ E(X_i)=P(X_i=1)=\frac{1}{19}$$

برای نفر اول گروه i، یکی از ۱۹ نفر باقیمانده همگروه خواهد شد که برای رخ دادن پیشامد مورد نظر باید همسرش با او همگروه شود.

$$\Rightarrow E(X)=\sum_{i=1}^{10}E(X_i)=\frac{10}{19}$$

$$Var(X_i)=\frac{1}{19}\left(1-\frac{1}{19}\right)=\frac{18}{19^2}$$

و برای $i \neq j$ داریم:

$$\rightarrow Cov(X_i\ ,\ X_j)=E(X_i\ X_j)-E(X_i)E(X_j)$$

$$=\frac{1}{19}\times\frac{1}{17}-\frac{1}{19^2}$$

$$\Rightarrow Var(X)=\sum_{i=1}^{10}Var(X_i)+2\binom{10}{2}Cov(X_i,X_j)$$

$$=10\times\frac{18}{19^2}+90\left[\frac{1}{19\times 17}-\frac{1}{19^2}\right]=\frac{3240}{6137}$$

۴۳- اگر X_1، X_2 ، ... و X_n متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع پیوسته و نامعلوم F باشند و Y_1، Y_2، ...و Y_m متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع پیوسته و نامعلوم G باشند. $n+m$ متغیر را مرتب کرده و تعریف می کنیم.

$$I_i=\begin{cases}1 & \text{اگر } i \text{ امین متغیر مرتب شده در } n+m \text{ متغیر از متغیر نوع } X \text{ باشد}\\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

متغیر تصادفی $R=\sum_{i=1}^{m+n} i\,I_i$ مجموع رتبه های نمونه X بوده و پایه و اساس یک روش استاندارد آماری (آزمون جمعی - رتبه ای ویلکاکسون) برای آزمون یکسان بودن توزیع های F، G است. این آزمون فرض $F=G$ را وقتی که R نه خیلی بزرگ و نه خیلی کوچک است می پذیرد. اگر فرض تساوی دو توزیع درست باشد، میانگین و واریانس R را محاسبه کنید.

راهنمایی: از نتایج مثال ۳-۵ استفاده کنید.

حل:

$$I_i=\begin{cases}1 & \text{اگر } i \text{ امین متغیر مرتب شده در } n+m \text{ متغیر از نوع } X \text{ باشد}\\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

و متغیر تصادفی R مجموع رتبه های X می باشد.

$$R=\sum_{i=1}^{m+n} i\,I_i$$

اگر فرض تساوی دو توزیع درست باشد هر کدام از $m+n$ متغیر تصادفی برای قرارگرفتن در مکان i دارای شانس مساوی می باشند $\left(\frac{1}{m+n}\right)$، پس احتمال اینکه درمکان i ام متغیر تصادفی X ظاهر می شود، $\left(\frac{n}{m+n}\right)$ است.

$$\Rightarrow E(R)=E\left(\sum_{i=1}^{n+m} i\,I_i\right)=\sum_{i=1}^{n+m} i\left(\frac{n}{n+m}\right)=\frac{n}{m+n}\left(\frac{(n+m+1)(n+m)}{2}\right)$$

$$=\frac{n(m+n+1)}{2}\quad,\ Var(I_i)=\frac{n}{m+n}\left(1-\frac{n}{m+n}\right)=\frac{mn}{(n+m)^2}$$

و برای $i\neq j$

$$Cov(I_i,I_j)=\left(\frac{n}{m+n}\right)\left(\frac{n-1}{m+n-1}\right)-\left(\frac{n}{m+n}\right)^2=\frac{-mn}{(m+n)^2(m+n-1)}$$

$$\operatorname{Var}(R)=\sum_{i=1}^{m+n} i^{2}\frac{mn}{(m+n)^{2}}+2\sum_{i<j}\frac{-nm}{(m+n)^{2}(m+n-1)}ij$$
$$=n\frac{m}{m+n-1}\frac{(m+n)^{2}-1}{12}=\frac{nm(m+n+1)}{12}$$

۴۴- دو روش متفاوت برای ساختن اجناس معین وجود دارد، کیفیت اجناس ساخته شده با روش i ($i=1,2$) یک متغیر تصادفی پیوسته است که دارای توزیع F_i ($i=1,2$) است. فرض کنید که n جنس به روش ۱ و m جنس به روش ۲ تولید شوند. $n+m$ جنس را بر اساس کیفیت آنها رتبه بندی کنید و تعریف کنید.

$$X_j=\begin{cases}1 & \text{اگر } j \text{ ام امین کالا توسط روش ۱ تولید شده باشد}\\ 2 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

برای بردار $X=(X_1,X_2,\dots,X_{n+m})$ که شامل n تا ۱ و m تا ۲ است، اگر R نشان دهنده تعداد دنباله های ۱ (مثلا برای $n=5$، $m=2$ و $X=(1,2,1,1,1,2,1)$، آنگاه $R=2$) و $F_1=F_2$ باشد (یعنی اگر دو روش اجناس با توزیع کیفیت یکسان تولید کنند) میانگین و واریانس R را بدست آورید.

حل: از آنجایی که توزیعها یکسان است. شانس قرار گرفتن هر کدام از این n تا ۱ و m تا ۲ در هر مکانی، یکسان می باشد.

$$R_i=\begin{cases}1 & \text{اگر مکان } i \text{ با دنباله ای از ۱ شروع شود.}\\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

$$R=\sum_{i=1}^{m+n}R_i\ ,\ E(R_1)=\frac{n}{m+n}\ ,\ E(R_i)=\frac{m}{m+n}\frac{n}{m+n-1}\qquad 2\le i\le m+n$$
$$\Rightarrow E(R)=\frac{n}{m+n}+(m+n-1)\frac{nm}{(m+n)(m+n-1)}=\frac{n}{m+n}+\frac{nm}{m+n}$$

برای محاسبه واریانس R داریم:

$$\operatorname{Var}(R)=\sum_{i=1}^{m+n}\operatorname{Var}(R_i)+2\sum\sum_{i<j}\operatorname{Cov}(R_i,R_j)$$
$$\operatorname{Var}(R_i)=E[R_i^{2}]-(E[R_i])^{2}\quad ;\quad E[R_i^{2}]=E[R_i]$$
$$i=1:\ \operatorname{Var}(R_1)=\frac{n}{m+n}-\frac{n^{2}}{(m+n)^{2}}=\frac{nm}{(m+n)^{2}}$$

$$2\le i\le m+n:\ \mathrm{Var}(R_i)=\frac{nm}{(m+n)(m+n-1)}-\frac{m^2n^2}{(m+n)^2(m+n-1)^2}$$

$$=\frac{nm}{(m+n)(m+n-1)}\times\left(1-\frac{nm}{(m+n)(m+n-1)}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{m+n}\mathrm{Var}(R_i)=\frac{mn}{(m+n)^2}+(m+n-1)\times\frac{nm}{(m+n)(m+n-1)}\left(1-\frac{nm}{(m+n)(m+n-1)}\right)$$

$$\mathrm{Cov}(R_i,R_j)=E[R_iR_j]-E[R_i]E[R_j]$$

$$E[R_iR_j]=\frac{n}{m+n}\times\frac{m}{m+n-1}\times\frac{n-1}{m+n-2}\qquad (i=1;2\le j\le m+n)$$

$$E[R_iR_j]=\frac{m}{m+n}\times\frac{n}{m+n-1}\times\frac{m-1}{m+n-2}\times\frac{n-1}{m+n-3}\qquad (2\le i,j\le m+n)$$

پس

$$\mathrm{Cov}(R_1,R_j)=\frac{mn(n-1)}{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}-\frac{n}{m+n}\times\frac{mn}{(m+n)(m+n-1)}$$

$$\mathrm{Cov}(R_i,R_j)=\frac{mn(m-1)(n-1)}{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)(m+n-3)}-\left[\frac{mn}{(m+n)(m+n-1)}\right]^2$$

$2\le i,j\le m+n$

بنابراین:

$$\sum\sum_{i<j}\mathrm{Cov}(R_i,R_j)=(m+n-1)\left[\frac{mn(n-1)}{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}-\frac{n^2m}{(m+n)^2(m+n-1)}\right]$$
$$+\binom{m+n}{2}\left[\frac{mn(m-1)(n-1)}{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)(m+n-3)}-\frac{m^2n^2}{(m+n)^2(m+n-1)^2}\right]$$

۴۵- اگر X_1، X_2، X_3، X_4 متغیرهای تصادفی دو به دو ناهمبسته و هر کدام با میانگین ۰ و واریانس ۱ باشند مطلوب است محاسبه ضریب همبستگی الف) X_1+X_2 و X_2+X_3 ب) X_3+X_4 و X_1+X_2.

حل: الف) با توجه به اینکه X_i ها دو به دو ناهمبسته هستند داریم:

$$\mathrm{Var}(X_1+X_2)=\mathrm{Var}(X_2+X_3)=1+1=2$$

$$\mathrm{Cov}(X_1+X_2,X_2+X_3)=\mathrm{Var}(X_2)=1\Rightarrow\rho=\frac{1}{\sqrt{2\times2}}=\frac{1}{2}$$

ب) $\mathrm{Cov}(X_1+X_2, X_3+X_4)=0\rightarrow\rho=0$

۴۶- بازی تاس را بصورت زیر در نظر بگیرید.

بازیکنان ۱ و ۲ به نوبت یک جفت تاس را پرتاب می کنند. آنگاه داور بازی نیز یک جفت تاس را پرتاب می‌کند تا بر اساس قرار زیر نتیجه را تعیین نماید: بازیکن i ($i=1,2$) برنده است اگر نتیجه پرتاب وی اکیداً بزرگ‌تر از نتایج پرتاب داور باشد. اگر I_i ($i=1,2$) بصورت زیر تعریف شود،

$$I_i=\begin{cases}1 & \text{بازیکن } i \text{ برنده شود}\\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

نشان دهید که I_1 و I_2 همبسته مثبت هستند. توضیح دهید چرا این نتیجه قابل انتظار بود.

حل:

$$I_i=\begin{cases}1 & \text{اگر بازیکن } i \text{ برنده شود}\\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

اگر نتیجه پرتاب داور را X بگیریم، X می تواند مقادیر ۲ تا ۱۲ را بگیرد. حال روی مقدار X مشروط می کنیم:

$$E(I_i)=\sum_{j=2}^{12}E(I_i\,|\,X=j)\,P(X=j)$$

$$=\sum_{j=2}^{12}P(I_i=1|\,X=j)\,P(X=j)$$

$$=\frac{1\times35+2\times33+3\times30+4\times26+5\times21+6\times15+5\times10+4\times6+3\times3+2\times1}{(36)^2}=\frac{575}{1296}$$

$$E(I_1\,I_2)$$

$$=\frac{1\times35^2+2\times33^2+3\times30^2+4\times26^2+5\times21^2+6\times15^2+5\times10^2+4\times6^2+3\times3^2+2\times1^2}{36^3}=\frac{13035}{36^3}$$

$$\text{Cov}\,(I_1,I_2)=E\,(I_1\,I_2)-E\,(I_1)\,E\,(I_2)=0/0825\rightarrow\rho>0$$

برای توضیح بیشتر می توان چنین در نظر گرفت مثلاً اگر نفر اول و داور تاسها را ریخته باشند و نفر اول مقدار بیشتری آورده باشد، به علت اینکه داور مقدار کمتری آورده، انتظار می رود که نتیجه پرتابهای آن خیلی بالا نباشد و در نتیجه مقدار حاصل از پرتاب تاس ها توسط نفر دوم هم بیشتر از داور باشد.

۴۷- گرافی با n رأس که از ۱ تا n شماره گذاری شده است را در نظر بگیرید و فرض کنید بین هر $\binom{n}{2}$ جفت رأس متمایز، با احتمال P به طور مستقل یالی وجود دارد. درجه رأس i، که D_i قلمداد می شود تعداد یالهایی است که i یکی از رئوس آن است.

الف) توزیع D_i چیست؟

ب) مقدار $\rho(D_i,D_j)$، ضریب همبستگی بین D_i و D_j را پیدا کنید.

حل: الف) توزیع دوجمله ای

$$P(D_i=j)=\binom{n-1}{j}P^j(1-P)^{n-1-j}\quad j=1,\ldots,n-1$$

ب)

$$\rho(D_i,D_j)=\frac{Cov(D_i,D_j)}{\sqrt{Var(D_i)\,Var(D_j)}}$$

$$Cov(D_i,D_j)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}Cov(X_i,Y_j)=P(1-P)$$

توجه داشته باشید که $Cov(X_i,X_j)$ همواره برابر با صفر می باشد ولی تنها در مورد یال مشترک رأس i و رأس j برابر با $P(1-P)$ می شود (واریانس برنولی).

$$\rho(D_i,D_j)=\frac{P(1-P)}{\sqrt{(n-1)P(1-P)(n-1)P(1-P)}}=\frac{1}{n-1}$$

۴۸- یک تاس سالم پی در پی پرتاب می شود. اگر X و Y به ترتیب نشان دهنده تعداد پرتاب های لازم تا مشاهده یک ۶ و یک ۵ باشند مطلوب است محاسبه،

الف) $E[X]$ ، ب) $E[X|Y=1]$ ، ج) $E[X|Y=5]$

حل: الف) متغیر تصادفی هندسی

$$E(X)=\frac{1}{6}\times1+\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times2+\left(\frac{5}{6}\right)^2\times\frac{1}{6}\times3+\ldots$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}i\left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}\left(\frac{1}{6}\right)=6$$

ب)

$$E(X|Y=1)=\sum_{i=1}^{\infty}(i+1)\left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}\frac{1}{6}=\sum_{i=1}^{\infty}i\left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}\frac{1}{6}+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}\left(\frac{1}{6}\right)=6+1=7$$

ج) توجه کنید که در ۴ پرتاب اول مقدار ۵ ظاهر نشده و در پرتاب پنجم هم مقدار ۵ ظاهر شده است.

$$\Rightarrow E(X|Y=5)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}+3\times\left(\frac{4}{5}\right)^2\times\frac{1}{5}+4\times\left(\frac{4}{5}\right)^3\times\frac{1}{5}+5\times 0$$

$$+6\times\left(\frac{4}{5}\right)^4\times\frac{1}{6}+7\times\left(\frac{4}{5}\right)^4\times\left(\frac{5}{6}\right)\times\left(\frac{1}{6}\right)+\ldots$$

$$=\sum_{i=1}^{4} i\left(\frac{4}{5}\right)^{i-1}\left(\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{4}{5}\right)^4\sum_{j=6}^{\infty} i\left(\frac{5}{6}\right)^{i-6}\left(\frac{1}{6}\right)$$

۴۹- جعبه ای شامل ۴ توپ سفید و ۶ توپ سیاه است. دو نمونه تصادفی به ترتیب با اندازه های ۳ و ۵ و بدنبال هم بدون جایگذاری از جعبه انتخاب می شوند. اگر X و Y نشان دهنده تعداد توپهای سفید در دو نمونه باشند، $E[X \mid Y=i]$ $(i=1،2،3،4)$ را محاسبه کنید.

$$E(X|Y=i)=\sum_x xP(X|Y=i)=\sum_x \frac{xP(X=x\cap Y=i)}{P(Y=i)}$$

حل: الف)

$$E(X|Y=1)=$$

$$1\times\frac{P(X=1,Y=1)}{P(Y=1)}+2\times\frac{P(X=2,Y=1)}{P(Y=1)}+3\times\frac{P(X=3,Y=1)}{P(Y=1)}$$

$$=1\times\frac{129600}{432000}+2\times\frac{259200}{432000}+3\times\frac{43200}{432000}=\frac{9}{5}$$

مقادیر احتمال این قسمت را خودتان می توانید با کمک گرفتن از فصل های قبل بدست آورید. یک نمونه برای مثال حل می شود:

$$\frac{P(X=1,Y=1)}{P(Y=1)}$$

$$=\frac{[3\times(4\times6\times5)]\times[5\times[4\times3\times2\times1\times3]]}{432000}=\frac{129600}{432000}$$

ب)

$$E(X|Y=2)=0\times\frac{P(X=0,Y=2)}{P(Y=2)}+1\times\frac{P(X=1,Y=2)}{P(Y=2)}+2\times\frac{P(X=2,Y=2)}{P(Y=2)}$$

$$=0\times\frac{86400}{864000}=1\times\frac{518400}{864000}+2\times\frac{259200}{864000}=\frac{6}{5}$$

ج)

$$E(X|Y=3)=0\times\frac{P(X=0,Y=3)}{P(Y=3)}+1\times\frac{P(X=1,Y=3)}{P(Y=3)}$$

$$=0\times\frac{172800}{432000}+1\times\frac{259200}{432000}=\frac{3}{5}$$

د) وقتی همه سفیدها در ۵ نمونه دوم بیایند امکان ندارد که یک سفید در ۳ نمونه اول بیاید، پس داریم:

$$E(X \mid Y=4)=0$$

۵۰- تابع چگالی توأم X و Y بصورت زیر داده شده است.

$$f(x,y)=\frac{e^{-x/y}e^{-y}}{y} \quad , \quad 0<x<\infty \quad , \quad 0<y<\infty$$

$E[X^2|Y=y]$ را محاسبه کنید.

حل:

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_y(y)}=\frac{\frac{e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{y}}{\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x}{y}}}{y}e^{-y}dx}=\frac{\frac{e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{y}}{e^{-y}}=\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}$$

بنابراین توزیع نمایی با پارامتر $\lambda=\frac{1}{y}$ داریم، پس داریم:

$$E(X^2|y)=\frac{2}{\lambda^2}=2y^2$$

۵۱- تابع چگالی توأم X و Y بصورت زیر داده شده است:

$$f(x,y)=\frac{e^{-y}}{y} \quad , \quad 0<x<y \quad , \quad 0<y<\infty$$

$E[X^3|Y=y]$ را محاسبه کنید.

حل:

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_y(y)}=\frac{\frac{e^{-y}}{y}}{\int_0^y \frac{e^{-y}}{y}dx}=\frac{\frac{e^{-y}}{y}}{e^{-y}}=\frac{1}{y}$$

پس توزیع یکنواخت در فاصله ۰ تا y داریم:

$$\Rightarrow f(X|y)=\frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow E(X^3|y)=\int_0^y \frac{x^3}{y}dx=\frac{y^4}{4y}=\frac{y^3}{4}$$

۵۲- جمعیتی به r زیر گروه جدا از هم تقسیم شده است. فرض کنید p_i نشان دهنده نسبت جمعیتی است که در زیر گروه i $(i=1,\dots,r)$ هستند. اگر میانگین وزنی اعضای زیر گروه i برابر w_i $(i=1,\dots,r)$ باشد، میانگین وزنی اعضای جمعیت کدام است؟

حل: $\sum_{i=1}^{r} W_i P_i$ = میانگین وزنی اعضای جمعیت

۵۳- یک زندانی در سلولی محبوس است که دارای سه درب است. درب اول وی را به تونلی هدایت می کند که وی را پس از ۲ روز راهپیمایی به سلول خود برمی گرداند. درب دوم وی را به تونلی هدایت می کند که وی را پس از ۴ روز راهپیمایی به سلول خود برمی گرداند. درب سوم وی را به تونلی هدایت می کند که پس از ۱ روز راهپیمایی به آزادی می رسد. اگر فرض شود که زندانی همیشه دربهای ۳،۲،۱ را با احتمالهای به ترتیب ۰/۵ ، ۰/۳ و ۰/۲ انتخاب می کند، متوسط تعداد روزها تا آزادی زندانی چقدر است؟

حل:

$$E(X)=0/5[2+E(X)]+0/3\,[4+E(X)]+0/2\times 1$$

$$\Rightarrow 0/2\,E(X)=2/4 \Rightarrow E(X)=12$$

۵۴- بازی با تاس زیر را در نظر بگیرید: یک جفت تاس پرتاب می شود، اگر مجموع ۷ مشاهده شود بازی خاتمه یافته و شما هیچ مقداری برنده نمی شوید. اگر مجموع غیر از ۷ باشد، شما این شانس را دارید که بازی را متوقف کنید و مقداری معادل مجموع مشاهده شده را دریافت کنید یا مجدداً بازی را شروع کنید. برای هر مقدار i $(i=2,\dots,12)$ متوسط دریافتی خود را حساب کنید اگر راهبرد «توقف در اولین باری که مجموعی حداقل به بزرگی i مشاهده می شود» را بکار ببرید. چه مقداری از i منجر به بیشترین متوسط دریافتی می شود؟

راهنمایی: فرض کنید X_i نشان دهنده میزان دریافتی به ازای انتخاب مقدار بحرانی i باشد. برای محاسبه $E[X_i]$ روی مجموع اولیه شرط کنید.

حل: A_i متوسط میزان دریافتی اگر مجموع مشاهده شده بیشتر از i باشد.

$i=2$

$$E(X|i=2)=\frac{30}{36}\left(2\times\frac{1}{30}+3\times\frac{2}{30}+4\times\frac{3}{30}+5\times\frac{4}{30}+6\times\frac{5}{30}+8\times\frac{5}{30}+9\times\frac{4}{30}+10\times\frac{3}{30}+11\times\frac{2}{30}+12\times\frac{1}{30}\right)$$

$$=\frac{210}{36}$$

$i=3$

$$A_3=3\times\frac{2}{29}+4\times\frac{3}{29}+5\times\frac{4}{29}+6\times\frac{5}{29}+8\times\frac{5}{29}+9\times\frac{4}{29}+10\times\frac{3}{29}+11\times\frac{2}{29}+12\times\frac{1}{29}=\frac{208}{29}$$

$$E(X|i=۳)=\frac{۲۹}{۳۶}\times A_۳+\frac{۱}{۳۶}\times\frac{۲۹}{۳۶}\times A_۳+\left(\frac{۱}{۳۶}\right)^۲\times\frac{۲۹}{۳۶}\times A_۳+\ldots=\frac{۲۹}{۳۶}\times\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۳۶}}\times\frac{۲۰۸}{۲۹}$$

$$=\frac{۲۹}{۳۶}\times\frac{۳۶}{۳۵}\times\frac{۲۰۸}{۲۹}=\frac{۲۰۸}{۳۵}$$

$$i=۴\quad,\quad A_۴=۴\times\frac{۳}{۲۷}\times\ldots+۱۲\times\frac{۱}{۲۷}=\frac{۲۰۲}{۲۷}$$

$$E(X|i=۴)=\frac{۲۷}{۳۶}\times\frac{۱}{۱-\frac{۳}{۳۶}}\times\frac{۲۰۲}{۲۷}=\frac{۲۰۲}{۳۳}$$

$$E(X|i=۵)=\frac{۱۹۰}{۳۰}$$

$$E(X|i=۶)=\frac{۱۷۰}{۲۶}$$

$$i=۸\quad,\quad A_۸=۸\times\frac{۵}{۱۵}+۹\times\frac{۴}{۱۵}+۱۰\times\frac{۳}{۱۵}+۱۱\times\frac{۲}{۱۵}+۱۲\times\frac{۱}{۱۵}=\frac{۱۴۰}{۱۵}$$

$$E(X|i=۸)=\frac{۱۵}{۳۶}\times A_۸+\frac{۱۵}{۳۶}\times\frac{۱۵}{۳۶}\times A_۸+\ldots=\frac{۱۵}{۳۶}\times\frac{۱}{۱-\frac{۱۵}{۳۶}}\times\frac{۱۴۰}{۱۵}=\frac{۱۵}{۳۶}\times\frac{۳۶}{۲۱}\times\frac{۱۴۰}{۱۵}=\frac{۱۴۰}{۲۱}$$

$$E(X|i=۹)=\frac{۱۰}{۳۶}\times\frac{۱}{۱-\frac{۲۰}{۳۶}}\times\frac{۱۰۰}{۱۰}=\frac{۱۰۰}{۱۶}$$

$$E(X|i=۱۰)=\frac{۶۴}{۱۲}$$

$$E(X|i=۱۱)=\frac{۳۴}{۹}$$

$$E(X|i=۱۲)=\frac{۱۲}{۷}$$

مشاهده می شود که $E(X|i=۸)$ از همه مقادیر بیشتر است.

۵۵- ده شکارچی منتظر پرواز مرغابی ها هستند. وقتی یک دسته مرغابی بالای سرشان به پرواز درآیند، شکارچی ها همزمان تیراندازی می کنند، اما هر کدام هدف خود را به تصادف و مستقل از دیگران اختیار می‌کند. اگر هر شکارچی بطور مستقل هدف خود را با احتمال ۰/۶ مورد اصابت قرار دهد، متوسط تعداد مرغابیهای مورد اصابت قرار گرفته را محاسبه کنید. فرض کنید که تعداد مرغابیها در یک دسته دارای توزیع پواسون با میانگین ۶ باشند.

حل: برای محاسبه $E(X)$ باید روی تعداد مرغابیها مشروط کنیم.

X: تعداد مرغابیهای مورد اصابت قرار گرفته

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}E(X|\text{باشد } i \text{ تعداد مرغابیها})P(\text{تعداد مرغابیها } i)$$

$$X_j=\begin{cases}1 & \text{مرغابی شماره } j \text{ مورد اصابت قرار گیرد}\\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

اگر تعداد مرغابیها i باشد، داریم:

$$X=X_1+X_2+\ldots+X_i$$

$$E(X_j)=1-\left(1-\frac{0/6}{i}\right)^{10}$$

(هر مرغابی با احتمال $0/6\times\frac{1}{i}$ توسط هر شکارچی مورد اصابت قرار می گیرد پس با احتمال $\left(1-\frac{0/6}{i}\right)^{10}$ توسط هیچ شکارچی مورد اصابت قرار نمی گیرد و درنتیجه با احتمال $1-\left(1-\frac{0/6}{10}\right)^{10}$ مورد اصابت قرار می‌گیرد).

$$\Rightarrow E(X|i)=i\left[1-\left(1-\frac{0/6}{i}\right)^{10}\right]$$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}i\left[1-\left(1-\frac{3}{5i}\right)^{10}\right]\frac{e^{-6}6^i}{i!}$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}i\frac{e^{-6}6^i}{i!}-\sum_{i=1}^{\infty}i\left(1-\frac{3}{5i}\right)^{10}\frac{e^{-6}6^i}{i!}=6-\sum_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{3}{5i}\right)\frac{e^{-6}6^i}{(i-1)!}$$

۵۶- تعداد افرادی که در طبقه همکف وارد آسانسور می شوند یک متغیر تصادفی پواسون با میانگین ۱۰ است. اگر N طبقه بالای طبقه همکف وجود داشته باشد و اگر هر شخص با احتمال یکسان و مستقل از افراد دیگر که از آسانسور پیاده شده اند در یکی از N طبقه از آسانسور پیاده شود، متوسط تعداد توقف های آسانسور تا تخلیه کامل مسافرین چقدر است؟

حل: باید روی تعداد افراد مشروط کنیم.

$$X_j\begin{cases}1 & \text{در طبقه } j \text{ توقف صورت گیرد}\\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

$$X=\sum_{j=1}^{N}X_j\Rightarrow E(X)=\sum_{j=1}^{N}E(X_j)$$

اگر i نفر باشند، احتمال اینکه هیچ کدام در طبقه j توقف نکنند $\left(\frac{N-1}{N}\right)^i$ است.

اگر i نفر باشند، داریم:

$$\Rightarrow E(X_j)=P(X_j=1)=1-\left(\frac{N-1}{N}\right)^i$$

$$\Rightarrow E(X|i)=N\left(1-\left(\frac{N-1}{N}\right)^i\right)$$

$$\Rightarrow E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}N\left[1-\left(\frac{N-1}{N}\right)^i\right]\frac{e^{-10}10^i}{i!}$$

$$=N-N\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{N-1}{N}\right)^i 10^i e^{-10}}{i!}=N-Ne^{-10}e^{10\left(\frac{N-1}{N}\right)}=N\left(1-e^{-\frac{10}{N}}\right)$$

(توجه داشته باشید که به ازای $i=0$، مقدار $E(X)$ صفر می شود.)

۵۷- فرض کنید که متوسط تعداد حوادث در هفته، در یک موسسه صنعتی ۵ باشد. همچنین فرض کنید که تعداد کارگران آسیب دیده در هر حادثه متغیرهای تصادفی مستقل با میانگین یکسان ۲/۵ است. اگر تعداد کارگران آسیب دیده در هر حادثه مستقل از تعداد حوادث رخ داده باشد، متوسط تعداد کارگران آسیب دیده در یک هفته را محاسبه کنید.

حل: در متن کتاب مبانی احتمال ثابت شده که امید ریاضی تعداد تصادفی از متغیرهای تصادفی برابر با $E(N)E(X)$ است که X متغیر تصادفی و N تعداد آن است.

N، تعداد حوادث و X، تعداد کارگران آسیب دیده $\qquad E(N)\,E(X)=5\times 2/5=12/5$

۵۸- سکه ای که شانس شیرآمدنش p است بطور مرتب پرتاب می شود تا هر دو روی سکه (خط و شیر) ظاهر شود. مطلوب است:

الف) متوسط تعداد پرتاب ها

ب) احتمال اینکه آخرین پرتاب شیر بیاید.

حل: الف) در پرتاب اول حتما یک شیر و یا یک خط می آید، لذا از پرتاب دوم به بعد باید آنقدر پرتاب کنیم تا پیشامدی که در پرتاب اول رخ نداده، رخ بدهد. و در نتیجه از این به بعد یک متغیر تصادفی هندسی خواهیم داشت.

=(بار اول خط) P (بار اول خط | E(X+ (بار اول شیر) P (بار اول شیر | E(X)+E(X

$$\left(۱+\frac{۱}{۱-p}\right)p+\left(۱+\frac{۱}{p}\right)(۱-p)=۱+\frac{p}{۱-p}+\frac{۱-p}{p}$$

ب) برای اینکه آخرین پرتاب شیر باشد، اولین پرتاب باید خط باشد پس جواب (p-۱) است.

۵۹- فردی یک سکه را مرتب پرتاب می کند تا یک دنباله ۳ تایی از شیرها ظاهر شود. فرض کنید که هر پرتاب بطور مستقل از پرتاب های دیگر با احتمال p شیر بیاید، متوسط تعداد پرتاب های لازم را تعیین کنید.

راهنمایی: فرض کنید T نشان دهنده اولین پرتابی باشد که خط ظاهر شود و T را برابر با صفر بگیرید اگر نتیجه همه پرتاب ها شیر باشد. آنگاه روی T مشروط کنید.

حل: روی تعداد پرتاب های لازم تا رسیدن به اولین خط افراز می کنیم.

$$E(X)=E(X|T=۱)P(T=۱)+E(X|T=۲)P(T=۲)+E(X|T=۳)P(T=۳)+E(X|T=۰)P(T=۰)$$

$$E(X)=(۱-p)[\,(E(X)+۱]+p\,(۱-p)[\,E(X)+۲]+p^{۲}(۱-p)[\,(E(X)+۳]+۳\times p^{۳}$$

$$\Rightarrow E(X)=(۱-p^{۳})\,E(X)+۱-p+۲p-۲p^{۲}+۳p^{۲}-۳p^{۳}+۳p^{۳}$$

$$\Rightarrow p^{۳}E(X)=۱+p+p^{۲}\Rightarrow E(X)=\frac{۱}{p^{۳}}+\frac{۱}{p^{۲}}+\frac{۱}{p}$$

۶۰- (n+۱) نفر در یک بازی شرکت می کنند. هر شرکت کننده مستقلا با احتمال p برنده است. برندگان در مجموع جایزه ای برابر ۱ واحد را شریک خواهند بود. (برای مثال، اگر ۴ نفر برنده شوند، هر کدام $\frac{۱}{۴}$ جایزه را دریافت خواهند کرد، در حالیکه اگر برنده ای نباشد، هیچکدام از شرکت کننده هاچیزی دریافت نخواهد کرد). اگر A نشان دهنده فرد مشخصی از شرکت کنندگان در بازی باشد و X نشان دهنده میزان جایزه ای باشد که توسط A دریافت می شود.

الف) متوسط کل جایزه داده شده به بازیکنان را محاسبه کنید.

ب) نشان دهید $E[X]=\frac{۱-(۱-p)^{n+۱}}{n+۱}$ است.

ج) $E[X]$ را با مشروط کردن روی برنده شدن A محاسبه کنید، و نتیجه بگیرید:

$$E[\,(۱+B)^{-۱}]=\frac{۱-(۱-p)^{n+۱}}{(n+۱)\,p}$$

بطوریکه B یک متغیر تصادفی دوجمله ای با پارامترهای p,n است.

حل: الف) اگر Y میزان جایزه ای باشد که به کل افراد داده می شود، داریم:

$$Y=\begin{cases}1 & \text{اگر حداقل یک نفر جایزه ببرد}\\ 0 & \text{اگر هیچ کس جایزه نبرد}\end{cases}$$

(توجه کنید که ۱ جایزه بین برندگان تقسیم می شود)

$$E(Y)=P(Y=1)=1-(1-p)^{n+1}$$

ب) برای بدست آوردن متوسط جایزه شخص A، باید روی تعداد برندگان مشروط کنیم (توجه کنید برای اینکه A جایزه ای ببرد، حتما باید برنده شود).

$$E(X)=\sum_{i=0}^{n}E(X|\text{i نفر دیگر برنده شوند})\,P(\text{i نفر دیگر برنده شوند})$$

$$=p\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}p^{i}(1-p)^{n-i}\times\frac{1}{i+1}=\sum_{i=0}^{n}\frac{\binom{n+1}{i+1}p^{i+1}(1-p)^{[(n+1)-(i+1)]}}{n+1}$$

$$=\sum_{j=1}^{n+1}\frac{\binom{n+1}{j}p^{j}(1-p)^{n+1-j}}{n+1}=\frac{1-(1-p)^{n+1}}{n+1}$$

ج)

$$E[(1+B)^{-1}]=E\left(\frac{1}{1+B}\right)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}\binom{n}{i}p^{i}(1-p)^{n-i}$$

در قسمت قبل ثابت شد که:

$$p\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}\binom{n}{i}p^{i}(1-p)^{n-i}=\frac{1-(1-p)^{n+1}}{n+1}$$

$$\Rightarrow E\left(\frac{1}{1+B}\right)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}\binom{n}{i}p^{i}(1-p)^{n-i}=\frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}$$

۶۱- هر کدام از $m+2$ نفر بازیکن ۱ واحد به مسئول بازی می پردازند تا بازی زیر را انجام دهند: یک سکه سالم متوالیا n مرتبه (n عدد فرد) پرتاب و نتایج پرتاب های متوالی یادداشت می شود. هر کدام از بازیکنان، قبل از پرتاب سکه، بعنوان پیشگویی نتیجه را یادداشت می کنند. (برای مثال، اگر $n=3$ باشد آنگاه یک بازیکن ممکن است نوشته باشد (H,H,T)، یعنی وی پیشگویی می کند که اولین پرتاب منجربه نتیجه شیر و دومین پرتاب شیر و سومین پرتاب خط خواهد بود). پس از پرتاب سکه ها، بازیکنان

تعداد پیشگویی های درست خود را می شمارند، مثلا، اگر همه نتایج شیر باشد، بازیکنی که (H,H,T) نوشته است دارای دو پیشگویی درست خواهد بود. آنگاه مجموع ۲ +m واحد بطور یکسان بین کسانی که بیشترین تعداد صحیح پیشگویی را انجام داده اند تقسیم می شود.

چون هر کدام از پرتاب های سکه شانس یکسان شیر یا خط آمدن را دارند، m تا از بازیکنان تصمیم گرفته اند که اساس پیشگویی خود را کاملا بطور تصادفی انجام دهند. یعنی هر کدام از آنها سکه سالمی را n بار پرتاب کرده و آنگاه نتایج پرتابهای خود را بعنوان پیشگویی خود بکار می گیرد. اما ۲ بازیکن دیگر شریک شده و استراتژی زیر را بکار خواهند گرفت. یکی از آنها پیشگویی خود را به همان نحوی که m بازیکن دیگر انجام داده اند عمل خواهد کرد، اما بازیکن دیگر عکس بازیکن اول پیشگویی می کند. یعنی وقتی که پیشگویی تصادفی یکی از آنها H باشد، دیگری T پیشگویی خواهد کرد. برای مثال، اگر عضو پیشگوکننده تصادفی نتایج (H,H,T) را ارائه کند، آنگاه عضو دیگر (T,T,H) را پیشگویی خواهد کرد.

الف) استدلال کنید که یکی از شرکا بیش از $\frac{n}{۲}$ پیشگویی صحیح خواهد داشت. (بخاطر داشته باشید که n فرد است).

ب) اگر X نشان دهنده تعداد افرادی از m بازیکن غیر شریک باشد که بیش از $\frac{n}{۲}$ پیشگویی صحیح دارند. توزیع X چیست؟

ج) با X تعریف شده در قسمت (ب)، استدلال کنید:

$$E\ [\text{دریافتی شرکا}] = (m+۲)\,E\left[\frac{۱}{X+۱}\right]$$

د) با بکاربردن قسمت (ج) مساله ۶۰ نتیجه بگیرید:

$$E\ [\text{دریافتی شرکا}] = \frac{۲(m+۲)}{m+۱}\left[۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^{m+۱}\right]$$

و مقدار آنرا برای m = ۱،۲،۳ محاسبه کنید.

چون می توان نشان داد $۲ < \frac{۲(m+۲)}{m+۱}\left(۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^{m+۱}\right)$، نتیجه می شود که استراتژی شرکا همیشه دارای متوسط برد مثبت است.

حل: الف) از آنجایی که جواب این دو نفر متمم همدیگر است، پس جمع جواب های درست این ۲ نفر n است و از آنجایی که n فرد است، یکی بیشتر از $\frac{n}{۲}$ پیشگویی درست دارد و یکی هم کمتر از $\frac{n}{۲}$.

ب) چون n فرد است داریم:

$$P\left(X<\frac{n}{2}\right)=P\left(X>\frac{n}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

هر نفر با احتمال $\frac{1}{2}$ بیش از $\frac{n}{2}$ پیشگویی صحیح دارد، پس توزیع تعداد افراد با بیش از $\frac{n}{2}$ پیشگویی درست، بینم با پارامترهای $m, p=\frac{1}{2}$ است (دو نفر شریک حساب نمی شوند).

ج) (m+۲) واحد پولی داریم. اگر X تعداد افرادی از m نفر باشند که بیش از $\frac{n}{2}$ پیشگویی صحیح دارند و با توجه به اینکه یکی از دو نفر هم حتما بیش از $\frac{n}{2}$ پیشگویی صحیح دارد، مقدار متوسط دریافتی هر کدام از این (X+۱) نفر از هر واحد پولی $\frac{1}{X+1}$ است. (هر کدام با شانس برابر می توانند بیشترین پیشگویی صحیح را داشته باشند).

$$E \Rightarrow (\text{دریافت شرکا}) = (m+2)\,E\left(\frac{1}{1+X}\right)=\frac{(m+2)\left[1-(1-p)^{m+1}\right]}{p(m+1)}$$

$$=\frac{\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}\right](m+2)}{\frac{1}{2}(m+1)}=\frac{2(m+2)}{m+1}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}\right]$$

$E(\text{دریافت شرکا} \mid m=1)=4$ $\qquad E(\text{دریافت شرکا} \mid m=2)=3/047$

$E(\text{دریافت شرکا} \mid m=3)=2/667$ $\qquad E(\text{دریافت شرکا} \mid m=4)=2/477$

۶۲- فرض کنید U_1، U_2، ... دنباله ای مستقل از متغیرهای تصادفی یکنواخت روی فاصله (۰،۱) باشند. در مثال ۴-۸ نشان دادیم که، برای $0\le x\le 1$، $E[N(x)]=e^x$ ، بطوریکه:

$$N(x)=\min\left\{n:\sum_{i=1}^{n}U_i>x\right\}$$

این مساله روش دیگری برای اثبات این نتیجه ارائه می دهد.

الف) بوسیله استقراء روی n نشان دهید که برای $0\le x\le 1$ و همه nهای بزرگتر یا مساوی صفر،

$$P\{N(x)\ge n+1\}=\frac{x^n}{n!}$$

راهنمایی: ابتدا با مشروط کردن روی U_1 و بکارگیری فرض استقراء عمل کنید.

ب) با بکارگیری قسمت الف) نتیجه گیری کنید:

$$E[N(x)]=e^x$$

حل: الف) از استقراء استفاده می کنیم:

توجه کنید که $P\{N(x)\geq n+1\}$، از نظر مفهومی یعنی جمع U_1 تا U_n کمتر از x شود.

$$n=1\Rightarrow P\{N(x)\geq 1+1\}=P\{U_1<x\}=x=\frac{x^1}{1!}$$

حال با فرض اینکه این رابطه برای n درست باشد، آن را برای $(n+1)$ ثابت می کنیم.

$$P\{N(x)\geq n+1\}=\frac{x^n}{n!}$$

$$\Rightarrow P\{U_1+\dots+U_n<x\}=\frac{x^n}{n!}\quad,\quad Y=U_1+\dots+U_n$$

$$\Rightarrow F_Y(x)=\frac{x^n}{n!}\Rightarrow F_Y(y)=\frac{y^n}{n!}\Rightarrow f_Y(y)=\frac{ny^{n-1}}{n!}=\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}$$

برای $n+1$ داریم: $P\{N(x)\geq (n+1)+1\}=P(U_1+\dots+U_n+U_{n+1}<x)$

$$=P(Y+U_{n+1}<x)=\int_0^x\int_0^{x-y}\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}\times 1\,du_{n+1}dy$$

$$=\int_0^x(x-y)\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}dy=x\frac{x^n}{n!}-n\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

ب)

$$P(N(x)=n)=P(N(x)\geq n)-P(N(x)\geq n+1)=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}-\frac{x^n}{n!}$$

$$\Rightarrow E(N(x))=\sum_{n=1}^{\infty}n\left[\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}-\frac{x^n}{n!}\right]=\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\frac{x^j}{j!}-\sum_{n=1}^{\infty}x\frac{x^n}{n!}$$

$$=xe^x+e^x-xe^x=e^x$$

۶۳- جعبه ای شامل ۳۰ توپ است، که ۱۰ تا قرمز و ۸ تا آبی هستند. از این جعبه ۱۲ توپ به تصادف بیرون آورده می‌شود. اگر X نشان دهنده تعداد توپهای قرمز و Y نشان دهنده تعداد توپهای آبی باشد. $Cov(X,Y)$ را در حالات زیر بدست آورید.

الف) با تعریف متغیرهای تصادفی مناسب نشانگر (یعنی، برنولی) Y_i,X_i بطوریکه $X=\sum_{i=1}^{10}X_i, Y=\sum_{i=1}^{8}Y_i$.

ب) با مشروط کردن (روی X یا Y) برای محاسبه $E[XY]$.

حل: الف) $X=X_1+X_2+\dots+X_{10}\qquad Y=Y_1+Y_2+\dots+Y_8$

$$X_i=\begin{cases}۱ & \text{توپ قرمز } i \text{ ام انتخاب شود}\\ ۰ & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}\qquad Y_j=\begin{cases}۱ & \text{توپ آبی } j \text{ ام انتخاب شود}\\ ۰ & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

$$\text{Cov}(X,Y)=\text{Cov}\left(\sum_{i=۱}^{۱۰}X_i,\sum_{j=۱}^{۸}Y_j\right)=۱۰\times۸\,\text{Cov}(X_i,Y_j)$$

$$E(X_i)=\frac{\binom{۱}{۱}\binom{۲۹}{۱۱}}{\binom{۳۰}{۱۲}}=\frac{۲}{۵}\qquad E(Y_j)=\frac{\binom{۱}{۱}\binom{۲۹}{۱۱}}{\binom{۳۰}{۱۲}}=\frac{۲}{۵}$$

$$E(X_iY_j)=\frac{\binom{۲}{۲}\binom{۲۸}{۱۰}}{\binom{۳۰}{۱۲}}=\frac{۲۲}{۱۴۵}\qquad\Rightarrow \text{Cov}(X,Y)=۸۰\ \text{Cov}(X_i,Y_j)$$

$$=۸۰\left(\frac{۲۲}{۱۴۵}-\frac{۴}{۲۵}\right)=-\frac{۹۶}{۱۴۵}$$

ب) توجه داشته باشید که $E(XY \mid Y=i)$ برابر با $i\,E(X)$ است، زیرا با شرط $Y=i$ ، مقدار i را ثابت فرض کرده ایم.

حال به حل مساله می پردازیم:

$$E(X)=\frac{۱۲\times۱۰}{۳۰}\qquad E(Y)=\frac{۱۲\times۸}{۳۰}$$

روی Y افراز می کنیم:

$$E(XY)=\sum_{i=۱}^{۸}E(XY|Y=i)\,P(Y=i)$$

$$=\sum_{i=۱}^{۸}\frac{i\times۱۰(۱۲-i)}{۲۲}\frac{\binom{۲۲}{۱۲-i}\binom{۸}{i}}{\binom{۳۰}{۱۲}}=\frac{۱۰\times۸\times۲۲\binom{۲۸}{۱۰}}{۲۲\times\binom{۳۰}{۱۲}}=\frac{۳۵۲}{۲۹}$$

$$\Rightarrow \text{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{۳۵۲}{۲۹}-\frac{۱۲\times۱۰}{۳۰}\times\frac{۱۲\times۸}{۳۰}=-\frac{۹۶}{۱۴۵}$$

۶۴- طول عمر لامپ روشنایی نوع i $(i=۱،۲)$ یک متغیر تصادفی با میانگین μ_i و انحراف استاندارد σ_i است. لامپی را به تصادف از صندوق لامپ ها انتخاب می کنیم. این لامپ با احتمال p از نوع ۱ و با

احتمال p-۱ از نوع ۲ است. اگر X نشان دهنده طول عمر این لامپ باشد. مطلوب است محاسبه الف) E[X] و ب) Var(X).

حل: E(X)=E(X | لامپ نوع اول) P(لامپ نوع اول) +E(X | لامپ نوع دوم) P(لامپ نوع دوم)

$$=\mu_1 p+\mu_2(1-p)$$

$$Var(X)=E(Var(X|i))+Var(E(X|i))$$

$$=\left[\sigma_1^2 p+\sigma_2^2(1-p)\right]+\left[p\mu_1^2+(1-p)\mu_2^2-(p\mu_1+(1-p)\mu_2)^2\right]$$

توجه
$$Var(E(X|i))=E[(E(X|i))^2]-[E(E(X|i))]^2$$

۶۵- تعداد طوفانهای زمستانی در یک سال خوب یک متغیر تصادفی پواسون با میانگین ۳ است. در حالی که این تعداد در یک سال بد یک متغیر تصادفی پواسون با میانگین ۵ است. اگر سال آینده سال خوبی با احتمال ۰/۴ و سال بدی با احتمال ۰/۶ باشد، میانگین و واریانس تعداد طوفانهایی که در سال آینده رخ می دهد را پیدا کنید.

حل: X : تعداد طوفانها

i=۰ سال بد i=۱ سال خوب

$$E(X)=E(X|i=0)P(i=0)+E(X|i=1)P(i=1)=5\times0/6+3\times0/4=4/2$$

$$Var(X)=E(Var(X|i))+Var(E(X|i))$$

$$=[5\times0/6+3\times0/4]+[5^2\times0/6+3^2\times0/4-(4/2)^2]=4/2+18/6-4/2^2=22/8-17/64=5/16$$

توجه
$$Var(E(X|i))=E[(E(X|i))^2]-[E(E(X|i))]^2$$

۶۶- در مثال ۴-۳ واریانس مدت زمان لازم تا رسیدن معدنچی به مکان امن را محاسبه کنید.

حل:
$$Var(X)=E(Var(X\mid Y))+Var(E(X\mid Y))$$

$$Var(E(X|Y))=\frac{1}{3}(3^2+20^2+22^2)-15^2=\frac{218}{3}$$

$$E(Var(X|Y))=\frac{1}{3}(Var(3)+Var(5+X)+Var(7+X))=\frac{2}{3}(Var(X))$$

$$\Rightarrow Var(X)=\frac{2}{3}Var(X)+\frac{218}{3}\Rightarrow Var(X)=218$$

۶۷- بازیکنی در یک بازی با احتمال های به ترتیب $p,1-p$ برنده یا بازنده است. اگر برای $p>\frac{1}{2}$ بازیکن همیشه روی نسبت $2p-1$ از دارایی خود شرط بندی کند، مطلوب است متوسط دارایی بازیکن پس از n بازی با دارایی اولیه x واحد.

حل: متوسط دارایی پس از ۱ مرحله $=x+x(2p-1)p-x(2p-1)(1-p)=x[1+(2p-1)^2]$

فرض می کنیم که در مرحله i دارایی برابر با Y باشد، در نتیجه متوسط دارایی در مرحله $i+1$ برابر است با:

$$=Y+Y(2p-1)p-Y(2p-1)(1-p)=Y[1+(2p-1)^2]$$

پس نتیجه می گیریم که در هر مرحله از بازی متوسط اموال در $[1+(2p-1)^2]$ ضرب می شود و در نتیجه بعد از n مرحله متوسط اموال برابر است با:

$$x[1+(2p-1)^2]^n$$

۶۸- تعداد تصادفاتی که برای یک نفر در یک سال بخصوص اتفاق می افتد، متغیر تصادفی پواسون با میانگین λ است. فرض کنید که مقدار λ از فردی به فرد دیگر تغییر می کند و مقدار آن برابر ۲ برای ۶۰ درصد جامعه و برای ۳ برای ۴۰ درصد بقیه افراد جامعه است. اگر شخصی به تصادف انتخاب شود، احتمال اینکه وی الف) هیچ حادثه، ب) دقیقا ۳ حادثه، در یک سال برایش اتفاق افتد چقدر است؟ احتمال شرطی اینکه وی ۳ حادثه در یک سال داشته باشد بشرط آنکه وی هیچ حادثه ای در سال گذشته نداشته، چقدر است؟

حل: الف)

$$P(\text{هیچ تصادف})=P(A)=$$

$$P(A|\lambda=2)P(\lambda=2)+P(A|\lambda=3)P(\lambda=3)=e^{-2}\times\frac{3}{5}+e^{-3}\times\frac{2}{5}$$

ب) مثل بالا افراز می کنیم.

$$P(\text{دقیقاً ۳ حادثه})=\frac{3}{5}\frac{e^{-2}2^3}{3!}+\frac{2}{5}\frac{e^{-3}3^3}{3!}=\frac{4}{5}e^{-2}+\frac{9}{5}e^{-3}$$

ج) این مسأله از نوع مسائل تابع احتمال در فصل ۳ می باشد.

$$P(\text{۳ حادثه در سال}\mid\text{هیچ حادثه ای در سال گذشته})=P(A_2\mid A_1)$$

$$=P(A_2|AA_1)P(A|A_1)+P(A_2|A^cA_1)P(A^c|A_1)$$

$$=\frac{2^3e^{-2}}{3!}\times\frac{\frac{3}{5}e^{-2}}{\frac{3}{5}e^{-2}+\frac{2}{5}e^{-3}}+\frac{3^3e^{-3}}{3!}\times\frac{\frac{2}{5}e^{-3}}{\frac{3}{5}e^{-2}+\frac{2}{5}e^{-3}}=\frac{4e^{-4}+9e^{-6}}{3e^{-2}+2e^{-3}}$$

۶۹- مسأله ۶۸ را با فرض اینکه احتمال λ کوچکتر یا مساوی x برابر با $1-e^{-x}$ باشد تکرار کنید.

حل: الف)
$$P(\lambda<x)=1-e^{-x}\Rightarrow F_\lambda(x)=1-e^{-x}\Rightarrow f_\lambda(x)=e^{-x}\quad x\geq 0$$
$$\Rightarrow P(\text{هیچ تصادف})=\int_0^\infty P(\text{هیچ تصادف})f_\lambda(x)\,dx=\int_0^\infty e^{-x}e^{-x}\,dx=\frac{1}{2}$$

ب)
$$P(\text{۳ تصادف})=\int_0^\infty P(\text{۳ تصادف})f_\lambda(x)\,dx=\int_0^\infty \frac{x^3}{3!}e^{-x}e^{-x}\,dx=\frac{1}{16}$$

(توجه: اگر برای X داشته باشیم: $f(x)=\dfrac{2^4x^3e^{-2x}}{3!}$، آنگاه X متغیر تصادفی گاما با پارامتر $\lambda=2$ و $t=4$ است که انتگرال آن روی فاصله ۰ تا بی نهایت برابر با ۱ می شود).

ج)
$$P(\text{هیچ تصادف در سال گذشته}\mid\text{۳ تصادف در سال})$$
$$P(A_2|A_1)=\int_0^\infty P(A_2|A_1,\lambda=x)\frac{P(A_1|x)f_\lambda(x)}{P(A_1)}dx$$
$$=\int_0^\infty \frac{x^3e^{-x}}{3!}\frac{e^{-x}e^{-x}}{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{81}$$

(توجه کنید که اگر $f(x)=\dfrac{3^4x^3e^{-3x}}{3!}$ باشد، آنگاه X توزیع گاما با $\lambda=3$ و $t=4$ دارد که انتگرال آن روی فاصله ۰ تا بی نهایت برابر با یک می شود).

۷۰- جعبه ای را در نظر بگیرید که شامل تعداد زیادی سکه است و فرض کنید که هر کدام از سکه ها وقتی که پرتاب می شوند دارای شانس شیرآمدن p باشند. می دانیم که مقدار p از سکه ای به سکه ای دیگر تغییر می‌کند و ترکیب جعبه به گونه ای است که اگر سکه ای به تصادف از جعبه انتخاب شود، آنگاه مقدار p را می‌توان بعنوان یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت روی (۰،۱) در نظر گرفت. اگر سکه ای به تصادف از جعبه انتخاب و دوبار پرتاب شود، مطلوب است محاسبه احتمال،

الف) نتیجه پرتاب اول شیر باشد.

ب) نتیجه هر دو پرتاب شیر باشد.

حل: الف)
$$P(\text{پرتاب اول شیر})=\int_0^1 p\,f_p(p)dp=\int_0^1 p\times\frac{1}{1}=\frac{1}{2}$$

ب)
$$P(\text{هر دو شیر})=\int_0^1 p^2\times\frac{1}{1}dp=\frac{1}{3}$$

۷۱- در مسأله ۷۰ فرض کنید که سکه n مرتبه پرتاب شود. اگر X نشان دهنده پیشامد تعداد شیرها باشد. نشان دهید:

$$P\{X=i\}=\frac{۱}{n+۱} \qquad i=۰,۱,۲,...,n$$

راهنمایی: تساوی زیر را در نظر بگیرید.

$$\int_۰^۱ x^{a-۱}(۱-x)^{b-۱}dx=\frac{(a-۱)!(b-۱)!}{(a+b-۱)!}$$

بطوریکه a و b اعداد صحیح مثبت هستند.

حل:

$$P(X=i)=\int_۰^۱\frac{n!}{(n-i)!(i)!}p^i(۱-p)^{n-i}f_p(P)dp$$

$$=\int_۰^۱\frac{n!}{(n-i)!(i)!}p^i(۱-p)^{n-i}dp=\frac{n!}{(n-i)!(i)!}\times\frac{i!(n-i)!}{(n-i+i+۱)}=\frac{۱}{n+۱}$$

۷۲- فرض کنید در مسأله ۷۰ پرتاب سکه را تا مشاهده یک شیر ادامه دهیم. اگر N نشان دهنده تعداد پرتاب‌های لازم باشد. مطلوب است،

الف) $P\{N\geq i\}$ $(i\geq ۰)$

ب) $P\{N=i\}$

ج) $E[N]$

حل: الف) اگر p ثابت باشد: $P(N\geq i)=(۱-p)^{i-۱}$

$$\Rightarrow P(N\geq i)=\int_۰^۱(۱-p)^{i-۱}f_p(p)\,dp=\int_۰^۱(۱-p)^{i-۱}dp=\frac{۰!(i-۱)!}{(i)!}=\frac{۱}{i}$$

ب)

$$P(N=i)=\int_۰^۱ P(N=i)\,f_p(p)\,dp=\int_۰^۱ p(۱-p)^{i-۱}dp=\frac{۱!(i-۱)!}{(i+۱)!}=\frac{۱}{i(i+۱)}$$

ج)

$$E(N)=\sum_{i=۱}^{\infty}i\frac{۱}{i(i+۱)}=\sum_{i=۱}^{\infty}\frac{۱}{i+۱}=\infty$$

برای اثبات رابطه اخیر می توان چنین بیان کرد که:

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+...+\frac{۱}{۱۰}\geq ۹\times\frac{۱}{۱۰}=۰/۹$$

$$\frac{۱}{۱۱}+\frac{۱}{۱۲}+...+\frac{۱}{۱۰۰}\geq ۹۰\times\frac{۱}{۱۰۰}=۰/۹,$$

$$\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\ldots+\frac{1}{1000}\geq 900\times\frac{1}{1000}=0/9,\ldots$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i+1}\geq 9\times\frac{1}{10}+90\times\frac{1}{100}+900\times\frac{1}{1000}+\ldots=\sum_{j=1}^{\infty}0/9=\infty\Rightarrow\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i+1}=\infty$$

۷۳- در مثال ۵-۲ اگر S نشان دهنده سیگنال ارسالی و R سیگنال دریافتی باشد.

الف $E[R]$ را محاسبه کنید.

ب) $Var(R)$ را محاسبه کنید.

ج) آیا R دارای توزیع نرمال است؟

د) $Cov(R,S)$ را محاسبه کنید.

حل: الف)

$$E(R)=\int_0^{\infty}E(R|s)\,f_s(s)\,ds=\int_0^{\infty}s\,f_s(s)\,ds=E(S)=\mu$$

ب)

$$Var(R)=E(Var(R\mid s))+Var(E(R\mid s))$$

$$=\int_0^{\infty}Var(R|s)\,f_s(s)\,ds+Var(S)=\int_0^{\infty}1\times f_s(s)\,ds+\sigma^2=1+\sigma^2$$

(توجه داشته باشید که $E(R\mid s)=s$ و $Var(R\mid s)=1$)

ج) بلی R توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $1+\sigma^2$ دارد.

$$f_R(r)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{R,S}(r,s)\,ds=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{R,S}(r,s)\,f_s(s)\,ds=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(r-s)^2}{2}}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,ds=\frac{e^{-\frac{(r-\mu)^2}{2(1+\sigma^2)}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1+\sigma^2}}$$

د)

$$Cov(R,S)=E(RS)-E(R)E(S)$$

$$E(RS)=\int_0^{\infty}E(RS|S=s)\,f_s(s)ds=\int_0^{\infty}s\,E(R|s)\,f_s(s)ds$$

$$E(S^2)=[E(S)]^2+Var(S)\Rightarrow$$

$$\int_0^{\infty}s^2\,f_s(s)\,ds=\mu^2+\sigma^2\Rightarrow Cov(R,S)=\mu^2+\sigma^2-\mu\times\mu=\sigma^2$$

۷۴- در مثال ۵-۳، فرض کنید که X دارای توزیع یکنواخت روی فاصله (۱و۰) باشد. اگر سطوح چندی کننده بوسیله $a_0=0$ ، $a_1=\frac{1}{2}$ و $a_2=1$ تعیین شوند، چندی کننده بهینه Y را بدست آورده و مقدار $E[(X-Y)^2]$ را محاسبه کنید.

حل:

$$y_0=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{xf(x)dx}{F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)}=\frac{\left.\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$$

$$y_1=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{xf(x)dx}{F(1)-F\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{\left.\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$$

$$P\left(Y=\frac{1}{4}\right)=F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)=\frac{1}{2},\ P\left(Y=\frac{3}{4}\right)=F(1)-F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

(X یکنواخت از ۰ تا ۱) $E(Y)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\ ,\ E(X)=\frac{1}{2}$

طبق مسأله ۳-۵ داریم: $E[(X-Y)^2]=Var(X)-Var(Y)$

$$Var(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{5}{16}-\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow E[(X-Y)^2]=Var(X)-Var(Y)=\frac{1}{12}-\frac{1}{16}=\frac{1}{48}$$

۷۵- تابع مولد گشتاور X برابر $M_X(t)=\exp\{2e^t-2\}$ و تابع مولد گشتاور Y برابر با $M_Y(t)=\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$ است. اگر X و Y مستقل باشند، مطلوب است محاسبه،

الف) $P\{X+Y=2\}$

ب) $E[XY]$

حل: الف) $M_X(t)=\exp\{2e^t-2\}\Rightarrow X\approx \text{Poisson}(\lambda=2)$

اگر به اصل کتاب انگلیسی راس رجوع کنید می بینید که $M_Y(t)$ برابر است با:

$$M_Y(t)=\left(\frac{1}{4}\right)^4(3e^t+1)^{10}$$

$$\Rightarrow M_Y(t)=\left(\frac{3}{4}e^t+\frac{1}{4}\right)^{10}\Rightarrow Y\sim \text{بینم}\ \left(n=10,\ p=\frac{3}{4}\right)$$

$$P(X+Y=2)=P(X=2,Y=0)+P(X=1,Y=1)+P(X=0,Y=2)$$

از آنجایی که X و Y مستقلند؛

$$P(X+Y=2)=\frac{2^2e^{-2}}{2!}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{10}+\frac{2^1e^{-2}}{1!}\times\binom{10}{1}\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{9}+e^{-2}\times\binom{10}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{8}$$

ب)
$$P(XY=0)=P(X=0)+P(Y=0)-P(X=0,Y=0)=e^{-2}+\left(\frac{1}{4}\right)^{10}-e^{-2}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$$

ج)
$$E(XY)=E(X)\,E(Y)=2\times\left(10\times\frac{3}{4}\right)=15$$

۷۶- اگر X نشان دهنده مقدار تاس اول و Y برابر مجموع مقادیر مشاهده شده در پرتاب دوتاس باشند. تابع مولد گشتاور توأم X و Y را محاسبه کنید.

حل: مقدار تاس دوم: $Y\text{-}X$ ، مقدار مجموع دو تاس : Y و مقدار تاس اول: X

$$X:1,2,\dots,6,\quad Y\text{-}X:1,2,\dots,6\quad ,P(X=x,Y=y)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

$$M(t_1,t_2)=\sum\sum e^{t_1x+t_2y}\times P(X=x,Y=y)=\frac{1}{36}\left[e^{t_1+2t_2}+e^{t_1+3t_2}+\dots+e^{6t_1+12t_2}\right]$$

$$=\frac{1}{36}\left(\frac{e^{7t_2}-e^{t_2}}{e^{t_2}-1}\right)\left(\frac{e^{7(t_1+t_2)}-e^{(t_1+t_2)}}{e^{t_1+t_2}-1}\right)$$

۷۷- تابع چگالی توأم X و Y بصورت زیر است:

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y}e^{-(x-y)^2/2}\qquad 0<y<\infty\qquad -\infty<x<\infty$$

الف) تابع مولد گشتاور توأم X و Y را محاسبه کنید.

ب) تابع مولد گشتاور هر کدام را محاسبه کنید.

حل:
$$M(t_1,t_2)=\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{t_1x+t_2y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y}e^{\frac{-(x-y)^2}{2}}dxdy$$

$$=\int_0^{\infty}e^{t_2y}e^{-y}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-y)^2}{2}}e^{t_1x}dxdy=\int_0^{\infty}e^{-y}e^{t_2y}e^{t_1y+\frac{t_1^2}{2}}dy$$

$$=e^{\frac{t_1^2}{2}}\int_0^{\infty}e^{-(1-t_1-t_2)y}dy=\frac{1}{(1-t_1-t_2)}e^{\frac{t_1^2}{2}}$$

(توجه کنید که در انتگرالگیری های بالا از این رابطه استفاده شد که اگر X یک متغیر تصادفی نرمال باشد تابع مولد گشتاور آن $e^{\mu t+\frac{t^2\sigma^2}{2}}$ می شود).

ب)

$$t_2=0 \ \Rightarrow M_X(t_1)=\left(\frac{1}{1-t_1}\right)e^{\frac{t_1^2}{2}}$$

$$t_1=0 \ \Rightarrow M_Y(t_2)=\left(\frac{1}{1-t_2}\right)$$

۷۸- دو پاکت، هر کدام محتوی یک چک با مبالغ متفاوت در جلوی شما قرار داده می شود. اگر شما مجاز به انتخاب، بازکردن و رؤیت یکی از پاکتها باشید و همچنین بتوانید پس از رؤیت آن با پاکت دیگر تعویض کنید، چه خواهید کرد؟ آیا ممکن است روشی را طرح نمود که بهتر از قبول پاکت اول باشد؟

فرض کنید B،A ،$(A<B)$ ، نشان دهنده مقادیر (نامعلوم) چک ها باشند، و توجه داشته باشید که استراتژی به تصادف انتخاب کردن یک پاکت و همیشه قبول کردن آن چک، دارای متوسط دریافتی $\frac{A+B}{2}$است.

استراتژی زیر را در نظر بگیرید: اگر $F(0)$ یک تابع توزیع تجمعی اکیداً صعودی (یعنی، پیوسته) باشد. به تصادف پاکتی را انتخاب و آنرا باز می کنیم. اگر چک محتوی پاکت دارای مقدار x بود آنگاه آنرا با احتمال $F(x)$ پذیرفته و با احتمال $1-F(x)$ آنرا عوض می کنیم.

الف) نشان دهید که اگر استراتژی اخیر را بکار ببرید، آنگاه متوسط دریافتی شما بزرگتر از $(A+B)/2$ است.

راهنمایی: مسأله را روی اینکه پاکت اول مقدار A و B دارد مشروط کنید.

حال این استراتژی را بکار ببریم که ابتدا مقدار x را مشخص کرده و چک اول را در صورتی قبول می کنیم که مقدار آن بزرگتر از x باشد و در غیر اینصورت آن را عوض می کنیم.

ب) نشان دهید که برای هر x، متوسط دریافتی تحت این استراتژی همیشه حداقل $(A+B)/2$ است و اگر بین B،A باشد اکیداً بیشتر از $(A+B)/2$ است.

ج) اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته روی همه اعداد حقیقی باشد و راهبرد زیر را در نظر بگیریم: مقدار X را تولید می کنیم، اگر $X=x$ ، آنگاه راهبرد بند (ب) را به کار می بریم. نشان دهید که متوسط دریافتی تحت این راهبرد بزرگتر از $(A+B)/2$ است.

حل: در استراتژی اول متوسط دریافتی $\frac{A+B}{2}$ است، اما در استراتژی دوم داریم:

$$E(\text{دریافتی})=\frac{1}{2}[\,AF(A)+B(1-F(A))\,]+\frac{1}{2}[\,BF(B)+A(1-F(B))\,]$$

$$=\frac{۱}{۲}[A+B]+\frac{۱}{۲}[(B-A)(F(B)-F(A))]$$

از آنجایی که (B-A)، ((F(B) - F(A)) هم علامت هستند، پس مقدار بالا از $\frac{۱}{۲}$ [A+B] بزرگتر است.

ب) متوسط مقداردریافتی تحت ۳ حالت بررسی می شود.

X از A و B کوچکتر
$$E(\text{دریافتی})=\frac{۱}{۲}A+\frac{۱}{۲}B=\frac{A+B}{۲}$$

X بین A و B
$$E(\text{دریافتی})=B>\frac{A+B}{۲}$$

X بزرگتراز A و B
$$E(\text{دریافتی})=\frac{۱}{۲}B+\frac{۱}{۲}A=\frac{A+B}{۲}$$

ج)
$$E(\text{دریافتی})=\frac{A+B}{۲}P(X\le A)+B\times P(A<X<B)+\frac{A+B}{۲}P(X\ge B)$$

$$E\Rightarrow(\text{دریافتی})>\frac{A+B}{۲}$$