بسمه تعالی

وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملّی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

مبارزه‌ی علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی(ره)»

سیزدهمین دوره‌ی المپیاد نجوم و اخترفیزیک

آزمون‌های پایان دوره

آزمون تحلیل داده ۳

(۱۹ شهریور ۱۳۹۶ - ساعت ۱۴:۰۰ تا ۱۹:۰۰)

توضیحات مهم:

۱. این آزمون ۳ سؤال دارد و زمان آن ۳۰۰ دقیقه است.
۲. به همراه سؤالات، دفترچه‌ی پاسخ‌نامه، ۳ کاغذ رسم نمودار و چرک‌نویس در اختیار شما قرار گرفته است. نام و نام خانوادگی خود را **تنها بر روی دفترچه‌ی پاسخ‌نامه** وارد کنید.
۳. در دفترچه‌ی پاسخ‌نامه، پاسخ هر سؤال را در برگه‌ی مربوط به همان سؤال بنویسید.
٤. استفاده از ماشین حساب CASIO $fx-82MS$ مجاز است.
٥. همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی مجاز نیست.

ثوابت فیزیکی و نجومی

کمیت		مقدار	
G	ثابت جهانی گرانش	$\mathrm{m^3\ s^{-2}\ kg^{-1}}$	$۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱}$
c	سرعت نور	$\mathrm{m\ s^{-1}}$	$۳/۰۰ \times ۱۰^{۸}$
h	ثابت پلانک	$\mathrm{J\ s}$	$۶/۶۳ \times ۱۰^{-۳۴}$
k	ثابت بولتزمن	$\mathrm{J\ K^{-1}}$	$۱/۳۸ \times ۱۰^{-۲۳}$
σ	ثابت استفان-بولتزمن	$\mathrm{W\ m^{-2}\ K^{-4}}$	$۵/۶۷ \times ۱۰^{-۸}$
m_H	جرم اتم هیدروژن	kg	$۱/۶۷ \times ۱۰^{-۲۷}$
pc	پارسک	m	$۳/۰۹ \times ۱۰^{۱۶}$
ly	سال نوری	m	$۹/۴۶ \times ۱۰^{۱۵}$
$L_\odot$	درخشندگی خورشید	W	$۳/۸۵ \times ۱۰^{۲۶}$
$M_\odot$	جرم خورشید	kg	$۱/۹۹ \times ۱۰^{۳۰}$
	ثابت خورشیدی	$\mathrm{W\ m^{-2}}$	۱۳۷۰
	قدر ظاهری خورشید		$-۲۶/۸۵$
	قدر مطلق خورشید		۴/۷۲
$M_\oplus$	جرم زمین	kg	$۵/۹۷ \times ۱۰^{۲۴}$
$R_\oplus$	شعاع زمین	km	۶۳۷۸
	تمایل محوری زمین		$۲۳/۵^\circ$

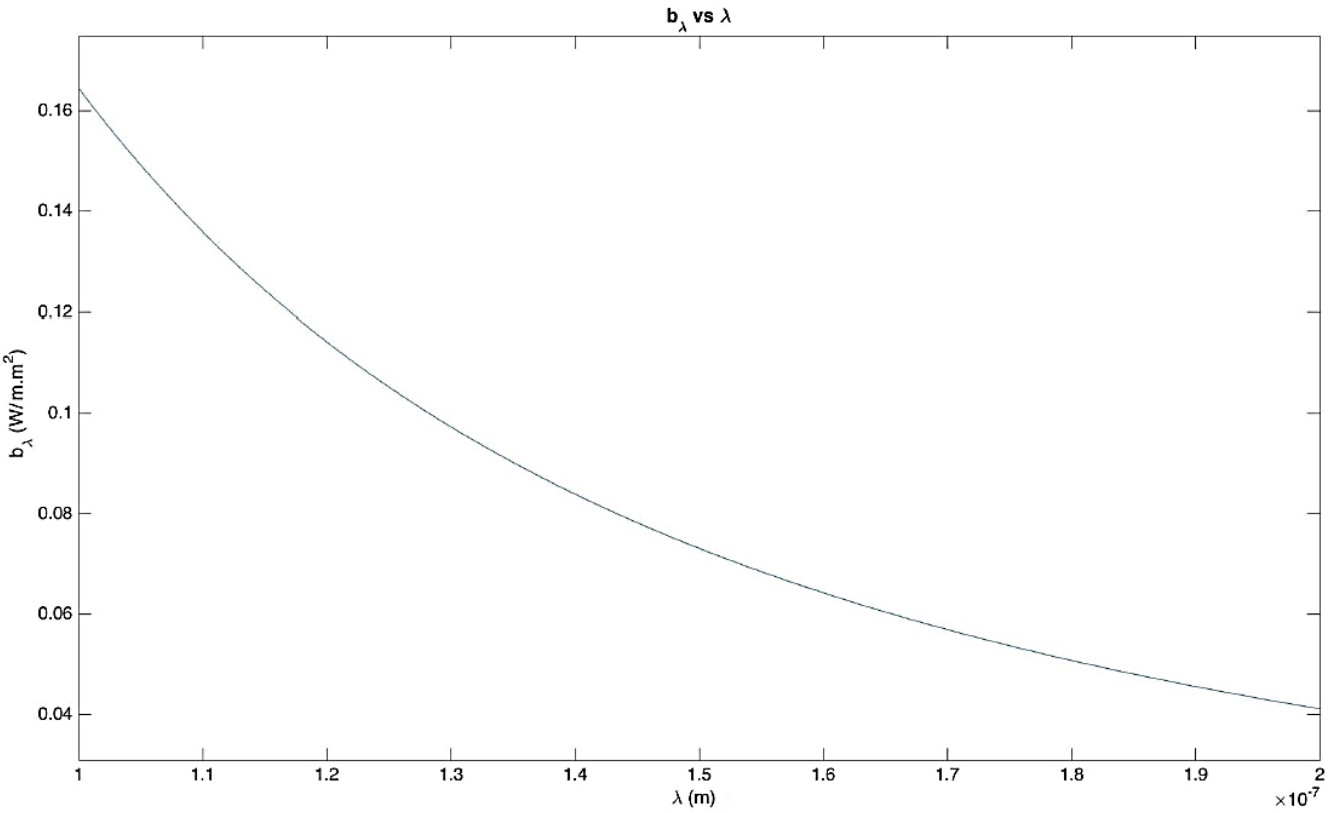
سؤال ۱: کهکشان‌های استاندارد گوبی (۱۵۰ نمره)

بررسی‌های اخیر دانشمندان منجر به کشف دسته‌ای از کهکشان‌ها شده است که درخشندگیشان در هر طول موج از رابطه‌ی زیر پیروی می‌کند

$$L_\lambda \propto \lambda^\alpha$$

به این کهکشان‌ها، **کهکشان‌های استاندارد گوبی** گفته می‌شود. گوبی‌ها در طول موج کمتر از ۱۰۰ nm تابش ندارند.

نمودار چگالی شار دریافتی (انرژی تابش شده در واحد طول موج، در واحد سطح، در واحد زمان) بر حسب طول موج از یک گوبیِ نسبتاً نزدیک را در شکل ۱ مشاهده می‌کنید.



شکل ۱ - نمودار چگالی شار دریافتی بر حسب طول موج

بخش اول:

الف) برای این گوبی رابطه‌ی چگالی شار دریافتی بر حسب طول موج به شکل زیر است.

$$b_\lambda \, d\lambda = c \, \lambda^\alpha \, d\lambda$$

با توجه به شکل ۱، ثوابت c و α را بدون استفاده از برازش به دست آورید.

ب) با توجه به رابطه‌ی بالا، شار دریافتی مجموع این کهکشان را محاسبه کنید.

گروهی از دانشمندان موفق به کشف یک ستاره‌ی متغیر قیفاووسی در این کهکشان شده‌اند. جدول ۱ قدر ظاهری این ستاره برحسب زمان را نشان می‌دهد.

جدول ۱ – قدر ظاهری یک ستاره‌ی قیفاووسی در کهکشان گوبی مورد بررسی

#	t (روز)	m_V
1	0.08	21.16
2	0.56	21.31
3	1.14	21.45
4	1.72	21.53
5	2.19	21.53
6	2.75	21.47
7	3.20	21.37
8	3.82	21.19
9	4.27	21.05
10	4.80	20.90
11	5.43	20.78
12	5.99	20.74
13	6.41	20.76
14	7.05	20.87
15	7.50	20.98
16	8.01	21.14

رابطه‌ی میانگین قدر مطلق مریی برحسب دوره‌ی تناوب نوسانات متغیرهای قیفاووسی به شکل زیر است

$$\langle M_V \rangle = -۲/۸۱ \log P - ۱/۴۳$$

در این رابطه $\boldsymbol{P}$ **برحسب روز** است.

ج) فاصله‌ی این گوبی را برحسب مگاپارسک تخمین بزنید.

د) درخشندگی این گوبی را به دست آورید.

بخش دوم:

با استفاده از اطلاعات به دست آمده در بخش اول قصد داریم تعدادی گوبی با فاصله‌ی نسبتاً زیاد را بررسی‌کنیم. تحقیقات نشان می‌دهد که کهکشان‌های گوبی شمع استاندارد هستند؛ یعنی درخشندگی همه‌ی آن‌ها با هم برابر است.

در جدول ۲ اطلاعات ۶ گوبی آورده شده است.

جدول ۲ - اطلاعات ۶ کهکشان گوبی دوردست

#	m_{bol}	m_P
1	13.62	17.48
2	14.79	18.58
3	15.55	19.30
4	16.65	20.29
5	17.13	20.71
6	17.55	21.08

m_{bol} قدر ظاهری بولومتریک و m_P قدر ظاهری مشاهده شده در فیلتر P است. مشخصات فیلتر P در جدول ۳ آورده شده است.

جدول ۳ - مشخصات فیلتر P

طول موج مرکزی	۴۰۰ nm
پهنای باند	۲۰ nm

ه) با توجه به جدول ۲، فاصله‌ی درخشندگی گوبی‌ها بر حسب مگاپارسک را **تا دو رقم اعشار** محاسبه کرده و در جدول I پاسخ‌نامه وارد کنید.

و) بدون استفاده از داده‌های جدول ۲، درخشندگی کهکشان‌های گوبی در فیلتر P را محاسبه کنید.

ز) قدر ظاهری هر یک از ۶ گوبی را در فیلتر P محاسبه کرده و در جدول I پاسخ‌نامه وارد کنید. شار دریافتی ستاره‌ای با قدر ظاهری صفر در فیلتر P برابر با $b_{P,0} = ۱/۲ \times ۱۰^{-۸}\ \mathrm{W\ m^{-۲}}$ است.

ح) همان طور که می‌بینید قدرهای ظاهری محاسبه شده با قدرهای ظاهری جدول ۲ تفاوت دارند. به نظر شما علت این تفاوت چیست؟ نشان دهید رابطه‌ی اختلاف قدر ظاهری محاسبه شده و قدر ظاهری مشاهده شده در فیلتر P بر حسب قرمزگرایی کهکشان‌های گوبی به شکل زیر است.

$$\Delta m_P = m_{P,\text{محاسبه شده}} - m_{P,\text{مشاهده شده}} = -۲/۵\,(\alpha + ۱)\log(۱+z)$$

ط) قرمزگرایی گوبی‌ها را **تا سه رقم اعشار** در جدول I پاسخ‌نامه گزارش کنید.

بخش سوم:

همان طور که می‌دانید رابطه‌ی بین فاصله‌ی درخشندگی و فاصله‌ی همراه به صورت $d_L = \chi(۱+z)$ است.

ی) فاصله‌ی همراه بر حسب مگاپارسک را برای این ۶ گوبی **تا دو رقم اعشار** به دست آورده و در جدول II پاسخ‌نامه یادداشت کنید.

ک) برای قرمزگرایی‌های کوچک، رابطه‌ی فاصله‌ی درخشندگی و قرمزگرایی با تقریب مرتبه‌ی دوم به شکل زیر است

$$d_L = \frac{cz}{H_۰}\left[۱ + \frac{۱-q_۰}{۲}z\right]$$

که در آن $H_۰$ ثابت هابل و $q_۰$ پارامتر کندشوندگی است. با برازش خط مناسب مقادیر $H_۰$ و $q_۰$ را به دست آورید.

ل) برای قرمزگرایی‌های کوچک، رابطه فاصله‌ی ویژه و قرمزگرایی با تقریب مرتبه‌ی دوم به شکل زیر است.

$$\mathrm{d}_{p,۰} = \frac{cz}{H_۰}\left[۱ - \frac{۱+q_۰}{۲}z\right]$$

با توجه به این رابطه و مقادیر $H_۰$ و $q_۰$، فاصله‌ی ویژه بر حسب مگاپارسک را **تا دو رقم اعشار** برای این گوبی‌ها به دست آورده و در جدول II پاسخ‌نامه یادداشت کنید.

م) نمودار فاصله‌ی ویژه بر حسب فاصله‌ی همراه ($\mathrm{d}_{p,۰}$ بر حسب χ) را برای این ۶ گوبی رسم کنید.

ن) رابطه‌ی فاصله‌ی ویژه و فاصله‌ی همراه برای ۳ نوع کیهان تخت، بسته و باز در ادامه آمده است.

$$d_{p,۰} = \chi \qquad (k = ۰)$$

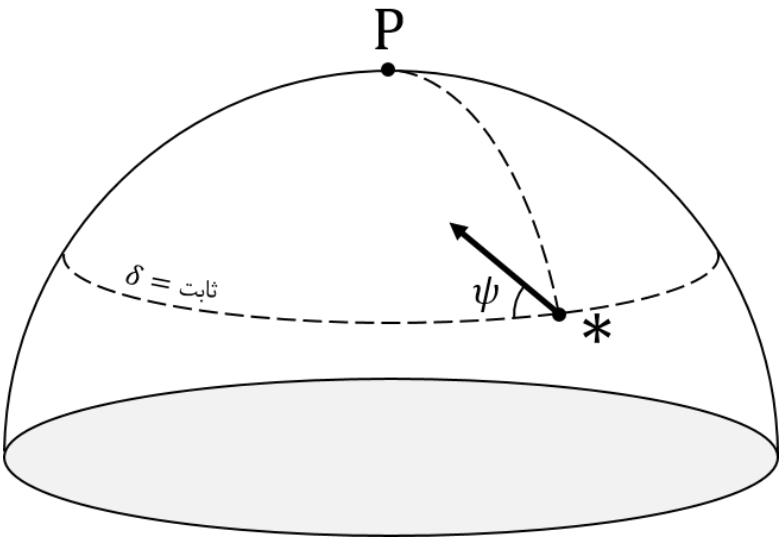
$$d_{p,۰} = \frac{۱}{\sqrt{k}}\sin^{-۱}\left(\chi\sqrt{k}\right) \qquad (k > ۰)$$

$$d_{p,۰} = \frac{۱}{\sqrt{|k|}}\sinh^{-۱}\left(\chi\sqrt{|k|}\right) \qquad (k < ۰)$$

آیا می‌توان نوع کیهان را با استفاده از نمودار بخش «م» تعیین کرد؟

سؤال ۲: ستاره‌ی بارنارد و مسابقه‌ی نجومی (۲۸۰ نمره)

در سال ۲۱۰۰، مسابقه‌ای با نام Elementary Astronomy Spark در کشور آمریکا برگزار خواهد شد که قرار است به بهترین ایده‌ی نجوم مقدماتی قرن ۲۱م، جایزه‌ای به ارزش ۱ میلیون دلار تعلق گیرد. یک منجم و عکاس اهل New York قصد دارد با استفاده از اطلاعات نجومی خود، حرکت خاصه‌ی ستاره‌ی بارنارد را محاسبه کند و برنده‌ی مسابقه شود. برای این کار، این منجم با توجه به عکس‌هایی که از ستاره‌ی بارنارد در اختیار دارد، بُعد آن را در تاریخ‌های مختلف اندازه گرفته و در جدول ۴ یادداشت می‌کند. تمامی عکس‌ها در یک روز مشخص از سال گرفته شده‌اند. در این سوال قصد داریم روش منجم برای محاسبه‌ی حرکت خاصه‌ی بارنارد را بررسی کنیم.



شکل ۲

منظور از حرکت خاصه در راستای بعد/میل، مؤلفه‌ی سرعت زاویه‌ای ستاره در راستای بعد/میل است. یعنی

$$\mu_\alpha = \mu \cos\psi \qquad \mu_\delta = \mu \sin\psi$$

محاسبات میانی را حداقل تا ۷ رقم اعشار انجام دهید.

الف) نشان دهید تغییر بعد ستاره **ناشی از حرکت خاصه** ($\Delta\alpha_p$) بر حسب زمان در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\Delta\alpha_p = \frac{\mu_\alpha}{\cos\delta_\circ}\Delta t + \mu_\delta \tan\delta_\circ \, \Delta t \, \Delta\alpha_p$$

که $\delta_\circ$ و $\alpha_\circ$ میل و بعد ستاره در سال ۲۰۰۰ هستند. Δt زمان سپری شده از سال ۲۰۰۰ میلادی است.

ب) تغییر بعد ستاره **<u>ناشی از حرکت تقدیمی زمین</u>** ($\Delta\alpha_{\text{تقدیمی}}$) را به دست آورده و در جدول III پاسخ‌نامه وارد کنید. رابطه‌ی تغییر بعد ناشی از حرکت تقدیمی در انتهای سؤال داده شده است. در صورت نیاز می‌توانید از شکل پیوست استفاده کنید.

ج) با بهره‌گیری از نتیجه‌ی قسمت «ب»، $\Delta\alpha_p$ را به دست آورده و در جدول III پاسخ‌نامه وارد کنید.

د) با برازش منحنی مناسب، حرکت خاصه‌ی ستاره بارنارد در راستای بعد را محاسبه کنید.

ه) استدلال کنید که چرا نمی‌توان حرکت خاصه‌ی بارنارد در راستای میل را به این روش حساب کرد.

این منجم بعد از رویارویی با این مشکل، روش تازه‌ای پیدا کرده که با استفاده از آن می‌تواند حرکت خاصه‌ی بارنارد را حساب کند. در نتیجه محاسبه‌ی حرکت خاصه در راستای میل ممکن می‌شود. در این روش، او فاصله‌ی زاویه‌ای بارنارد و یکی از ستاره‌های زمینه به نام TYC 425 را در هر عکس محاسبه کرده و در جدول ۴ ثبت می‌کند. سرعت خاصه‌ی TYC 425 به قدری اندک است که می‌توان از آن در مقابل سرعت خاصه‌ی بارنارد صرف نظر کرد.

و) ثابت کنید فاصله‌ی زاویه‌ای بارنارد و ستاره‌ی TYC 425 از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\theta^2 = (\theta_0^2 + \mu^2 t_0^2) - 2\mu^2 t_0 t + \mu^2 t^2$$

θ_0 فاصله‌ی زاویه‌ای کمینه‌ی ۲ ستاره، μ حرکت خاصه‌ی بارنارد و t_0 زمان کمینه شدن فاصله‌ی زاویه‌ای ۲ ستاره است.

ز) با توجه به این که رابطه‌ی قسمت «و» را نمی‌توان خطی کرد، باید با استفاده از روش کمترین مربعات، به داده‌ها منحنی درجه ۲ به فرم کلی زیر برازش کنیم.

$$y = a + bx + cx^2$$

با کمینه کردن پارامتر χ^2، معادله‌های مورد نیاز برای تعیین a، b و c را به دست آورید. نیازی به محاسبه‌ی رابطه‌ی صریح هر پارامتر نیست.

ح) با حل معادلات قسمت قبل، حرکت خاصه‌ی ستاره‌ی بارنارد را به دست آورده و به کمک آن، مؤلفه‌ی حرکت خاصه در راستای میل را تعیین کنید.

ط) مسیر حرکت ستاره‌ی بارنارد را در شکل پیوست رسم کنید. در صورت نیاز، می‌توانید از نتایج قسمت‌های قبل استفاده کنید. نیازی به مشخص کردن موقعیت ستاره‌ی بارنارد در هر تاریخ نیست.

رابطه‌ی تغییر بعد ناشی از حرکت تقدیمی:

$$\Delta\alpha_{\text{تقدیمی}} = M + N \sin\alpha_{\circ} \tan\delta_{\circ}$$

در رابطه‌ی بالا $\alpha_{\circ}$ و $\delta_{\circ}$، بعد و میل ستاره در سال ۲۰۰۰ هستند.

$$M\,(^{\circ}) = \text{۱/۲۸۱۲۳۲۳}\,T + \text{۰/۰۰۰۳۸۷۹}\,T^{۲} + \text{۰/۰۰۰۰۱۰۱}T^{۳}$$

$$N\,(^{\circ}) = \text{۰/۵۵۶۷۵۳۰}\,T - \text{۰/۰۰۰۱۱۸۵}\,T^{۲} - \text{۰/۰۰۰۰۱۱۶}\,T^{۳}$$

در روابط بالا، T به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$T \equiv \frac{t_{\text{yr}} - ۲۰۰۰}{۱۰۰}$$

t_{yr} سال میلادی است.

جدول ۴ - α و θ در زمان‌های مختلف

#	سال عکس‌برداری	α	θ
1	2000	17h 57.8250m	17’ 21”
2	2006	17h 58.1162m	16’ 48”
3	2011	17h 58.3588m	16’ 23”
4	2016	17h 58.6013m	15’ 59”
5	2024	17h 58.9891m	15’ 27”
6	2029	17h 59.2314m	15’ 10”
7	2036	17h 59.5706m	14’ 50”
8	2042	17h 59.8611m	14’ 38”
9	2050	18h 00.2483m	14’ 29”
10	2060	18h 00.7321m	14’ 28”
11	2069	18h 01.1672m	14’ 37”
12	2076	18h 01.5055m	14’ 52”
13	2085	18h 01.9401m	15’ 18”
14	2091	18h 02.2297m	15’ 40”
15	2100	18h 02.6639m	16’ 20”

سؤال ۳: تیر آخر (۳۶۰ نمره)

در خرداد ماه ۱۳۹۶ عوامل گروهک تکفیری داعش اقدام به انجام حملاتی تروریستی کردند که موجب به شهادت رسیدن تنی چند از هموطنان عزیزمان گردید. اندکی بعد، در پاسخ به حملات تروریستی این گروهک تکفیری، نیروهای نظامی کشورمان تعدادی موشک را به سمت یکی از پایگاه‌های مهم این گروهک در شهر دیرالزور سوریه پرتاب کردند. به تازگی نیروهای اطلاعاتی کشورمان تعدادی عملیاتِ در دست طراحی توسط این گروهک را کشف کرده‌اند و تمامی عناصر مربوط را از بین برده‌اند؛ اما از آن‌جا که فهمیده‌اند تکفیری‌ها عملیات‌های جدیدی در دست طراحی دارند، قصد دارند یکی از مقرهای مهم رهبری این گروهک را با شلیک موشکی منهدم کنند یا به عبارتی تیر آخر را روانه‌ی دشمن نمایند. این موشک قرار است از ایستگاه موشکی تهران (مختصات $\phi_T = ۳۵^\circ\ ۳۰'\ N$ و $l_T = ۵۱^\circ\ ۳۰'E$) به مقر تکفیری‌ها در شهر دیرالزور (مختصات $\phi_D = ۳۵^\circ\ ۲۰'\ N$ و $l_D = ۴۰^\circ\ ۰۹'\ E$) شلیک شود.

به علت تنگنای زمانی، نیروهای نظامی با دانستن این که فاصله‌ی مبدأ و مقصد کوتاه است، فقط نیروی گرانشی را در محاسبات خود در نظر گرفته‌اند. با این حال، ادعا شده که اثر نیروی اصطکاک قابل صرف نظر نیست و این امر موجب کشته یا زخمی شدن تعداد بسیار زیادی غیرنظامی می‌شود. بنابراین سازمان‌های امنیتی کشور از شما به عنوان کارشناس موشکی دعوت به عمل آورده‌اند تا در این عملیات حساس کمک کنید.

همان طور که می‌دانید برای پرتاب موفق یک موشک باید به نکات مختلف و گوناگونی توجه داشت؛ از جمله نیروی گرانش، نیروی اصطکاک، جریان باد، چرخش زمین و ...

در این مساله **فقط** به بررسی اثرات نیروی **گرانش و اصطکاک** می‌پردازیم.

بخش اول

در اولین قدم از بررسی‌های خود باید مدل مناسبی برای نیروی اصطکاک بیابید. یک مدل استاندارد برای نیروی اصطکاک جو به‌صورت زیر است.

$$F = \gamma m v^{\alpha}$$

در این رابطه γ ثابتی مثبت است و $۱ \ll \gamma$. طبق مدل‌های علمی پیشنهادی، $\alpha = ۱$ یا $\alpha = ۲$ است.

توجه کنید جهت نیروی اصطکاک در **خلاف** جهت سرعت است.

برای یافتن مدل مناسب، از آن جا که موشک وارد ارتفاع‌های زیاد نمی‌شود، باید ابتدا جسمی نورانی را در مدار دایره‌ای در ارتفاع پایین قرار داد و سپس با اندازه‌گیری فاصله و بررسی مسیر حرکت آن، مقدار مناسب α و γ را برگزید. مقادیر به دست آمده برای فاصله‌ی جسم تا مرکز زمین در زمان‌های مختلف در جدول ۵ آورده شده است.

جدول ۵ - فاصله‌ی جسم تا مرکز زمین در زمان‌های مختلف

#	t (s)	r (10^6 m)
1	40	9.26
2	80	8.96
3	120	8.66
4	160	8.37
5	200	8.08
6	240	7.80
7	270	7.59
8	300	7.38
9	330	7.18
10	360	6.98
11	400	6.72
12	440	6.46

معقول است مدار جسم در هر لحظه دایره‌ای فرض شود؛ چرا که γ بسیار کوچک است.

الف) با نوشتن رابطه‌ی بین گشتاور و تکانه زاویه‌ای در مدار دایره‌ای، رابطه‌ی شعاع مداری جسم بر حسب زمان را به ازای $\alpha = ۱$ به دست آورید.

راهنمایی: رابطه‌ی بین گشتاور و تکانه‌ی زاویه‌ای به صورت زیر است.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

ب) رابطه‌ی به دست آمده در قسمت قبل را خطی‌سازی کنید. سپس با برازش خط مناسب بر داده‌ها، γ را به دست آورید. رگرسیون برازش خود را تا ۶ رقم معنادار گزارش کنید.

ج) حال به ازای $\alpha = ۲$، قسمت «الف» را مجدداً حل کنید.

د) رابطه‌ی به دست آمده در قسمت قبل را خطی‌سازی کنید. سپس با برازش خط مناسب بر داده‌ها، γ را به دست آورید. رگرسیون برازش خود را تا ۶ رقم معنادار گزارش کنید.

ه) برازش‌های قسمت «ب» و «د» را با یک‌دیگر مقایسه کنید. کدام یک مدل بهتری است؟ با توجه به مدل انتخابی α و γ را گزارش کنید.

و) با توجه به مدل انتخابی، نمودار **خطی** داده‌ها و **خط برازش شده** را رسم کنید.

بخش دوم

حال باید با استفاده از α و γ به دست آمده در قسمت قبل، حرکت موشک پیش‌بینی شود. ابتدا قرار بود موشک در مداری با خروج از مرکز $e = ۰/۲۳$ پرتاب شود.

ز) نیم‌قطر اطول مدار موشک و زاویه‌ی پرتاب موشک نسبت به سطح زمین را بیابید.

راهنمایی: رابطه‌ی زاویه‌ی پرواز با زاویه آنومالی به صورت زیر است.

$$\tan\gamma = \frac{e\sin\theta}{۱ + e\cos\theta}$$

با استفاده از معادله‌ی کپلر، زمان تقریبی برخورد موشک در نبود اصطکاک، $۱۴۸/۶\ \mathrm{s}$ است. برای تحلیل حرکت موشک با وجود اصطکاک، دستگاه مختصات **پادساعتگردی** در مرکز زمین در نظر بگیرید که محور y آن به‌سوی تهران است و محور x آن به گونه‌ای است که مؤلفه‌ی v_x موشک در لحظه‌ی پرتاب، مثبت باشد. دقت کنید این دستگاه هم‌صفحه با صفحه‌ی مداری موشک است. حال باید با هدف یافتنِ مکان برخورد موشک و مدت زمان پرواز آن، پارامترهای موشک را در چند بازه‌ی زمانی حساب کنید. این پارامترها عبارت‌اند از:

مؤلفه‌ی x مکان، مؤلفه‌ی y مکان، فاصله از مرکز زمین (r)، سرعت در راستای x (v_x)، سرعت در راستای y (v_y)، شتاب در راستای x (a_x)، شتاب در راستای y (a_y)، زاویه‌ی بردار مکان موشک با محور x (θ) و زاویه‌ی بردار سرعت موشک با محور x (θ_v).

در اولین ستون جدول IV پاسخ‌نامه، زمان‌هایی نوشته شده‌اند که از لحظه‌ی پرتاب موشک سنجیده می‌شوند و فاصله‌ی بین آن‌ها ۱۰ ثانیه است.

ح) پارامترهای موشک را برای زمان‌های نوشته شده در جدول IV پاسخ‌نامه تا اولین زمان **بعد از** برخورد موشک به زمین به دست آورید و در این جدول یادداشت کنید. سایر ردیف‌های جدول را خالی بگذارید.

توجّه: برای محاسبه‌ی پارامترها در هر زمان، از پارامترهای زمان قبلی استفاده کنید. شتاب موشک را در هر بازه‌ی زمانی، تقریباً **ثابت و برابر با شتاب ابتدای بازه** فرض کنید. در محاسبات میانی خود تمامی اعداد را حداقل تا ۶ رقم معنادار نگه دارید. پر کردن دو ستون آخر جدول **اختیاری** است و نمره‌ای ندارد.

ط) داده‌های به دست آمده برای مکان موشک را در نمودار میلی‌متری رسم کنید. توجه کنید محورهای مختصاتتان باید دقیقاً مانند تعریف سوال باشد؛ اما نیازی نیست که تقاطع محورهای مختصات، نقطه‌ی (۰ ,۰) را نشان دهد.

ی) زمان و مختصات تقریبی (عرض و طول جغرافیایی) نقطه‌ی برخورد موشک را بیابید.

راهنمایی: برای یافتن مختصات نقطه‌ی برخورد، از یافتن فاصله‌ی زاویه‌ای این نقطه تا تهران شروع کنید.

ک) همان طور که هنگام حل سوال هم متوجه شدید، تمامی کارهایی که انجام دادید بسیار وقت‌گیر بودند و ممکن بود در این مدت نیروهای تکفیری مقر خود را ترک کرده باشند. یکی از راهکارهای جایگزین، صرف نظر کردن از نیروی اصطکاک و بیشتر کردن قدرت تخریب (یا به عبارتی **شعاع تخریب**) موشک است. برای موفقیت در این عملیات، شعاع تخریب موشک چه قدر باید باشد؟ به خاطر این تصمیم، چه تعداد انسان ممکن است کشته یا زخمی شوند؟ با توجه به حس انسان‌دوستی خود، آیا رساندن قدرت تخریب موشک به این سطح، کار درستی است؟

فرض کنید ۷ میلیارد انسان روی کره‌ی زمین کاملاً همگن پخش شده‌اند و ٪۷۵ سطح زمین را آب پوشانده است (طبعاً این نقاط غیر قابل سکونت هستند!).

روابط برازش

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - (a + bx_i + cx_i^2)\right)^2$$

$$\boldsymbol{y = A + Bx}$$

$$d_i = y_i - (A + Bx_i)$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2} \qquad A = \bar{y} - B\bar{x}$$

$$(\Delta B)^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2} \frac{\sum_{i=1}^{N} d_i^2}{N - 2} = \frac{B^2}{n - 2}\left(\frac{1}{r^2} - 1\right)$$

$$(\Delta A)^2 = \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}\right) \frac{\sum_{i=1}^{N} d_i^2}{N - 2} \quad = \overline{x^2}(\Delta B)^2$$

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\overline{x^2} - \bar{x}^2)(\overline{y^2} - \bar{y}^2)}}$$

$$\boldsymbol{y = Bx}$$

$$d_i = y_i - Bx_i$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$$

$$(\Delta B)^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2} \frac{\sum_{i=1}^{N} d_i^2}{N - 1}$$

شکل سؤال ۲: تصویر ستاره‌ی بارنارد در سال ۲۰۰۰ میلادی