تحلیل سرشکنی (Amortized Analysis)

- تحلیل بدترین حالت
- تحلیل در حالت متوسط

محیط: یک داده‌ساختار و دنباله‌ای از عملیات بر روی آن

هزینه‌ی سرشکن‌شده هر عمل: متوسط هزینه‌ی آن عمل (در بدترین حالت)

روش‌های تحلیل سرشکن‌شده

- روش انبوهه (aggregate): جمع هزینه‌های اعمال، تقسیم بر تعداد.
- روش حساب‌داری (accounting): استفاده از یک مخزن پول و پرداخت برای هر عمل.
- روش تابع پتانسیل (potential): حالت کلی‌تر روش قبل.

مسئله‌های ساده و آن‌هایی که بلدیم

- پشته با MultiPop
- عمل «یک–واحد–افزایش» در شمارنده‌ی بیتی

مسئله‌های گفته‌شده در درس DS

- ساخت هرم (درج n عنصر در یک هرم تهی)
- مجموعه‌های مجزا: پیاده‌سازی با لیست
-

مسئله‌های جدید

- شمارنده: یک–واحد–افزایش و یک–واحد کاهش
- خرس گرسنه
- درج و حذف در یک هرم
- جدول درهم‌سازی پویا

خرس گرسنه

در یک زمستان سرد، خرس قطبی n قطعه گوشت دقیقاً به اندازه‌های ۱، ۲، تا n را در غاری ذخیره کرده است. او هر روز یکی از این قطعه‌گوشت‌ها را به‌صورت تصادفی انتخاب می‌کند. اگر اندازه‌ی گوشت عدد فردی بود، آن‌را کاملاً می‌خورد. اگر زوج بود، آن‌را دقیقاً نصف می‌کند، یک نصف آن‌را می‌خورد و نصف دیگر را مجدداً در غار قرار می‌دهد. اگر گوشتی موجود نباشد، خرس می‌میرد. با این الگوریتم، خرس ما چند روز می‌تواند زنده بماند؟

یا: به‌صورت سرشکنی هر قطعه گوشت برای چند روز خرس کافی است؟

خرس گرسنه (حل)

به‌روش انبوهه

- هر گوشت ۱ روز: n روز و $n/۲$ گوشت باقی می‌ماند به اندازه‌های ۱ تا $n/۲$
- $n/۲$ روز و $n/۴$ قطعه گوشت با اندازه‌های ۱ تا $n/۴$
-
-

جمع: $n + n/۲ + n/۴ + n/۸ + \cdots \leq n \sum_{i=۰}^{\infty} ۱/۲^i \leq ۲n$

روش تابع پتانسیل

- $D_۰$: داده‌ساختار اولیه
- D_i: داده‌ساختار پس از عمل i ام

$$D_۰ \xrightarrow{\text{عمل ۱}} D_۱ \xrightarrow{\text{عمل ۲}} D_۲ \ldots \xrightarrow{\text{عمل } n} D_n$$

- c_i: هزینه‌ی واقعی عمل i ام
- تعریف می‌کنیم: $\Phi(D_i) =$ تابع پتانسیل که D_i به عدد حقیقی نگاشت می‌کند.

- **تعریف: $\hat{c}$ هزینه‌ی سرشکن‌شده‌ی عمل i ام**

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$$

- **پس** $\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i = \sum_{i=1}^{n} c_i + \Phi(D_n) - \Phi(D_0)$
- **اگر** $\Phi(D_0) = 0$،

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i \geq \sum_{i=1}^{n} c_i$$

یعنی $\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i$ کران بالایی برای $\sum_{i=1}^{n} c_i$ است که می‌خواهیم به‌دست آوریم.

تناظر با روش حساب‌داری

- $\Phi(D_i)$: مقدار پول موجود در مخزن پس از عمل i.
- $\hat{c}_i$: مقدار پولی که برای عمل i پرداخت می‌کنیم.
- c_i: مقدار هزینه‌ی صرف‌شده برای عمل i.
- اگر $c_i < \hat{c}_i$، مابه‌التفاوت به مخزن اضافه می‌شود: $\Phi(D_i) = \Phi(D_{i-1}) + \hat{c}_i - c_i$
- اگر $c_i > \hat{c}_i$، برای انجام عمل i لازم است از مخزن به‌اندازه‌ی $c_i - \hat{c}_i$ برداریم تا بتوانیم این عمل را انجام دهیم. پس پول مخزن $\Phi(D_i) = \Phi(D_{i-1}) - (c_i - \hat{c}_i)$ می‌شود.

درج و حذف در یک هرم

نشان دهید که هزینه‌ی سرشکن‌شده‌ی درج در یک هرم با n عنصر $\mathcal{O}(\lg n)$ و هزینه‌ی حذف آن $\mathcal{O}(۱)$ است.

درج و حذف در یک هرم (حل)

به‌روش تابع پتانسیل

تعریف: $\Phi(n) = \sum_{i=1}^{n} \lg n$

درهم‌سازی پویا (Dynamic Hashing)

- T : جدول درهم‌سازی
- $table[T]$: مولفه‌ی جدول
- $size[T]$: اندازه‌ی جدول
- $num[T]$: تعداد عناصر موجود در جدول
- درج ساده
- درج با گسترش (expansion)
- حذف ساده

- **حذف با فشرده‌سازی** (compaction)
- c_i **هزینه‌ی عمل** i
- s_i **اندازه‌ی جدول پس از عمل** i
- n_i **تعداد عناصر جدول پس از عمل** i
- **ضریب بار پس از عمل** i $0 \leq \alpha_i = \frac{n_i}{s_i} \leq 1$

فقط درج. گسترش اگر $\alpha_{i-1} = ۱$

```
TABLE-INSERT (T, x)
if size[T] = 0
  then allocate table[T] with one slot
       size[T] ← 1
if num[T] = size[T]
  then allocate new-table with 2.size[T] slots
       insert all items in table[T] into new-table
       free table[T]
       table[T] ← new-table
       size[T] ← 2.size[T]
insert x into table[T]
num[T] ← num[T] + 1
```

تحلیل به‌روش انبوهه

تعداد گسترش‌ها: $\lceil \lg_2^n \rceil + 1$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
s_i	1	2	4	4	8	8	8	8	16
expansions	1	2	3	3	3	4	4	4	5

$$c_i = \begin{cases} 1 & no\ expansion \\ n_{i-1} + 1 & expansion \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = n + \sum_{k=0}^{\lfloor \lg_2 n \rfloor} 2^k = n + \frac{2^{\lfloor \lg_2 n \rfloor + 1} - 1}{2 - 1} \leq 3n$$

تحلیل به‌روش حساب‌داری

- پس از هر عمل گسترش: n_i عنصر موجود و $s_i = ۲(n_{i-۱})$
- هر عمل درج ۳ ریال خرج می‌کنیم
  - ۱ ریال صرف خود درج آن‌عنصر
  - ۱ ریال بر روی آن عنصر قرار می‌دهیم
  - ۱ ریال بر روی یک عنصری که قبلاً در جدول بوده و پولی ندارد
- قبل از عمل گسترش، هر عنصر موجود در جدول ۱ ریال دارد. پس عمل گسترش با این پول می‌تواند انجام شود.
- پس از گسترش، مخزن پول خالی است.

تحلیل به‌روش پتانسیل

تابع پتایسیل Φ باید

- $\Phi(D_i) \geq ۰$
- **اگر عمل i موجب گسترش شود** $\Phi(D_{i-۱}) \geq s_{i-۱}$

تابع پتانسیل Φ

تعریف: $\Phi(D_i) = ۲n_i - s_i$

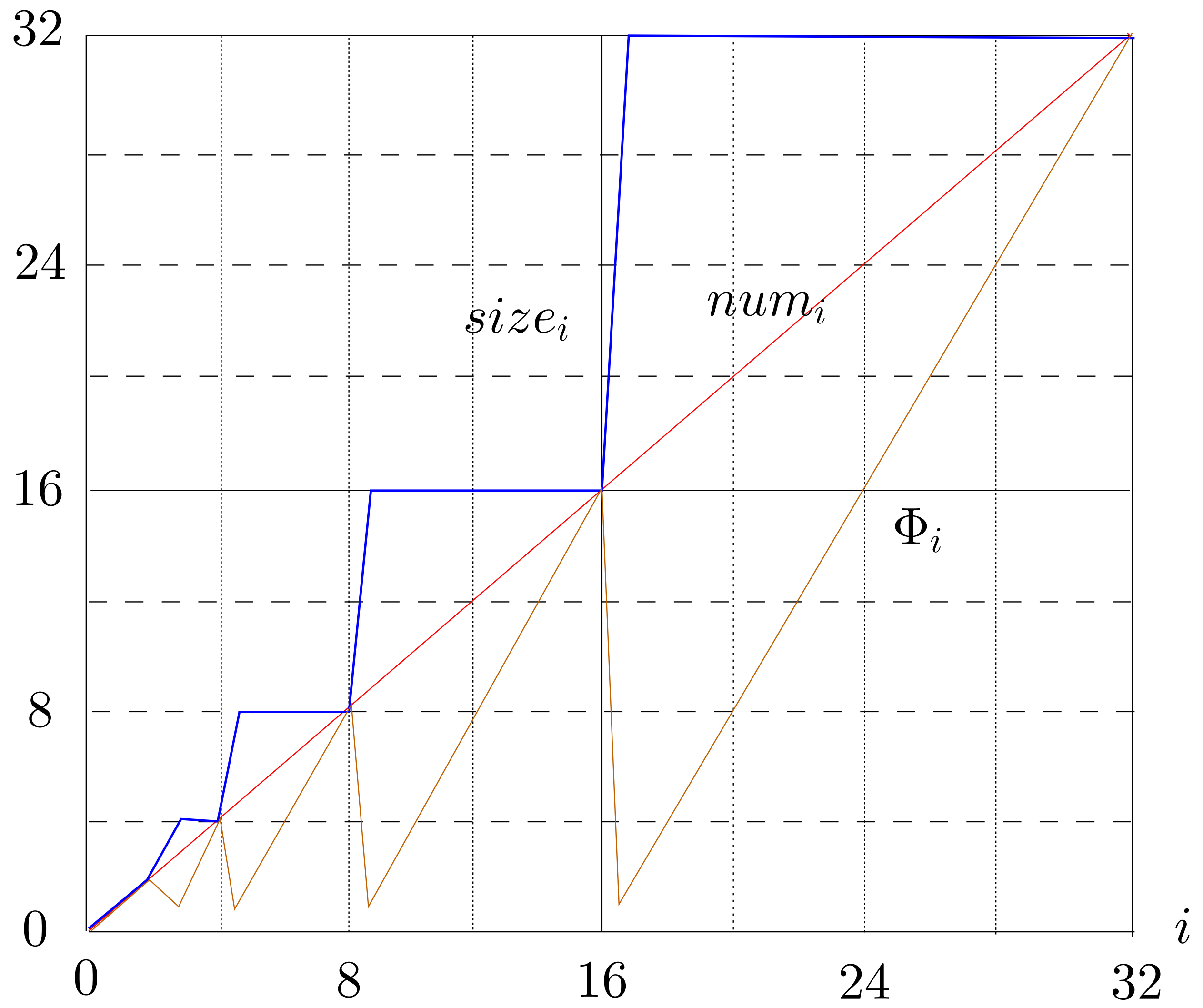
روشن است که $\Phi(D_i) \geq ۰$

- عمل i موجب گسترش می‌شود.
  - $s_{i-۱} = n_{i-۱}$
  - $\Phi(D_{i-۱}) = s_{i-۱}$
  - $s_i = ۲s_{i-۱}$
  - $n_i = n_{i-۱} + ۱$

$$\begin{aligned}
\hat{c}_i &= c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-۱}) \\
&= n_{i-۱} + ۱ + [۲n_i - s_i] - [۲n_{i-۱} - s_{i-۱}] \\
&= n_{i-۱} + ۱ + [۲n_{i-۱} + ۲ - ۲s_{i-۱}] - [۲n_{i-۱} - s_{i-۱}] \\
&= n_{i-۱} - s_{i-۱} + ۱ + ۲ = ۳
\end{aligned}$$

- **عمل i عادی است.**
  - $s_i = s_{i-1}$
  - $n_i = n_{i-1} + 1$

$$\begin{aligned} \hat{c}_i &= c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) \\ &= 1 + [2n_i - s_i] - [2n_{i-1} - s_{i-1}] \\ &= 1 + [2n_{i-1} + 2 - s_{i-1}] - [2n_{i-1} - s_{i-1}] \\ &= 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$


32
24
16
8
0
0
8
16
24
32
i
$size_i$
num_i
Φ_i

حذف

عمل فشرده‌سازی (Compaction):

- عنصر را حذف می‌کنیم.
- اندازه‌ی جدول را نصف می‌کنیم.
- همه‌ی عناصر دیگر را به جدول جدید منتقل می‌کنیم.

فرض کنید عمل «فشرده‌سازی» را وقتی انجام می‌دهیم که

- عمل i حذف باشد
- ضریب بار $\alpha_{i-1} = \frac{n_{i-1}}{s_{i-1}} = \frac{1}{2}$

در این‌صورت می‌توان سناریوی زیر را تصور کرد.

$$\underbrace{I, \ldots, I}_{n/۲}, \underbrace{I, D, D, I, I, D, D, \ldots}_{n/۲}$$

پس از $n/۲$ درج،
اولین درج $\leftarrow$ گسترش
دومین حذف $\leftarrow$ فشرده‌سازی
سومین درج $\leftarrow$ گسترش
چهارمین حذف $\leftarrow$ فشرده‌سازی
...پس $\Theta(n)$ فشرده‌سازی یا گسترش $\leftarrow$ $\Theta(n^۲)$

روش به‌تر

عمل فشرده‌سازی را وقتی انجام می‌دهیم که

- عمل i حذف باشد
- ضریب بار $\alpha_{i-1} = \frac{n_{i-1}}{s_{i-1}} \leq \frac{1}{4}$

پس از فشرده‌سازی و حذف

- $n_i = n_{i-1} - 1$
- $s_i = \frac{s_{i-1}}{2}$
- پس $1/4 < \alpha_i = \frac{2(n_{i-1}-1)}{s_{i-1}} < 1/2$

تحلیل

تابع پتانسیل باید ویژگی‌های زیر را داشته باشد:

- درست قبل از گسترش برای عمل درج iام $\Phi(T_{i-۱}) = n_{i-۱}$
- درست قبل از فشرده‌سازی برای عمل حذف iام $\Phi(T_{i-۱}) = n_{i-۱}$
- $\Phi(T_i) \geq ۰$

تابع پتانسیل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\Phi(T_i) = \begin{cases} ۲n_i - s_i & \alpha_i \geq \frac{۱}{۲} \\ s_i/۲ - n_i & \alpha_i < \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

درست قبل از گسترش

- $\alpha_{i-۱} = ۱$
- $s_{i-۱} = n_{i-۱}$
- $\Phi(T_{i-۱}) = ۲n_{i-۱} - s_{i-۱} = n_{i-۱}$

درست قبل از فشرده‌سازی

- $\alpha_{i-۱} = ۱/۴$
- $s_{i-۱} = ۴n_{i-۱}$
- $\Phi(T_{i-۱}) = s_{i-۱}/۲ - n_{i-۱} = n_{i-۱}$

چون $۱/۴ \le \alpha_i \le ۱$ **پس** $\Phi(T_i) \ge ۰$

تحلیل

- عمل درج i موجب گسترش می‌شود.
  - $s_{i-1} = n_{i-1} \Rightarrow \alpha_{i-1} = 1$
  - $2(n_i - 1) = 2n_{i-1} = 2.s_{i-1} = s_i \Rightarrow \alpha_i > 1/2$
  - $\Phi(T_{i-1}) = 2.n_{i-1} - s_{i-1}$
  - $\Phi(T_i) = 2.n_i - s_i$
  - $s_i = 2s_{i-1}$
  - $n_i = n_{i-1} + 1$

$$\begin{aligned}
\hat{c}_i &= c_i + \Phi(T_i) - \Phi(T_{i-۱}) \\
&= n_{i-۱} + ۱ + [۲n_i - s_i] - [۲n_{i-۱} - s_{i-۱}] \\
&= n_{i-۱} + ۱ + [۲n_{i-۱} + ۲ - ۲s_{i-۱}] - [۲n_{i-۱} - s_{i-۱}] \\
&= n_{i-۱} - s_{i-۱} + ۱ + ۲ = ۳
\end{aligned}$$

- عمل درج i عادی است.
  - $۱/۴ < \alpha_{i-۱} \leq ۱$
  - $۱/۴ < \alpha_i < ۱$
  - $s_i = s_{i-۱}$
  - $n_i = n_{i-۱} - ۱$

-- دو حالت

* $\alpha_{i-۱} \geq ۱/۲$

* $\alpha_i \geq ۱/۲ \Longleftarrow$ در آن‌صورت مانند حالت گسترش

$$\begin{aligned} \hat{c}_i &= c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-۱}) \\ &= ۱ + [۲n_i - s_i] - [۲n_{i-۱} - s_{i-۱}] \\ &= ۱ + [۲n_{i-۱} + ۲ - s_{i-۱}] - [۲n_{i-۱} - s_{i-۱}] \\ &= ۱ + ۲ = ۳ \end{aligned}$$

* **اگر** $\alpha_{i-۱} < ۱/۲$ **و** $\alpha_i < ۱/۲$

$$
\begin{aligned}
\hat{c}_i &= c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-۱}) \\
&= ۱ + [s_i/۲ - n_i] - [s_{i-۱}/۲ - n_{i-۱}] \\
&= ۱ + [s_i/۲ - n_i] - [s_i/۲ - (n_i - ۱)] \\
&= ۰
\end{aligned}
$$

* **اگر** $\alpha_{i-1} < 1/2$ **و** $\alpha i \geq 1/2$

$$\begin{aligned}
\hat{c}_i &= c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) \\
&= 1 + [2n_i - s_i] - [s_{i-1}/2 - n_{i-1}] \\
&= 1 + [2(n_{i-1} + 1) - s_{i-1}] - [s_i/2 - (n_i - 1)] \\
&= 3n_{i-1} - \frac{3}{2}s_{i-1} + 3 \\
&= 3\alpha_{i-1}s_{i-1} - \frac{3}{2}s_{i-1} + 3 \\
&< \frac{3}{2}s_{i-1} - \frac{3}{2}s_{i-1} + 3 \\
&= 3
\end{aligned}$$

• **عمل i حذف عادی است.**

– **حالت اول:** $\alpha_{i-۱} < ۱/۲ \Longleftarrow \alpha_i < ۱/۲$

– $s_i = s_{i-۱}$

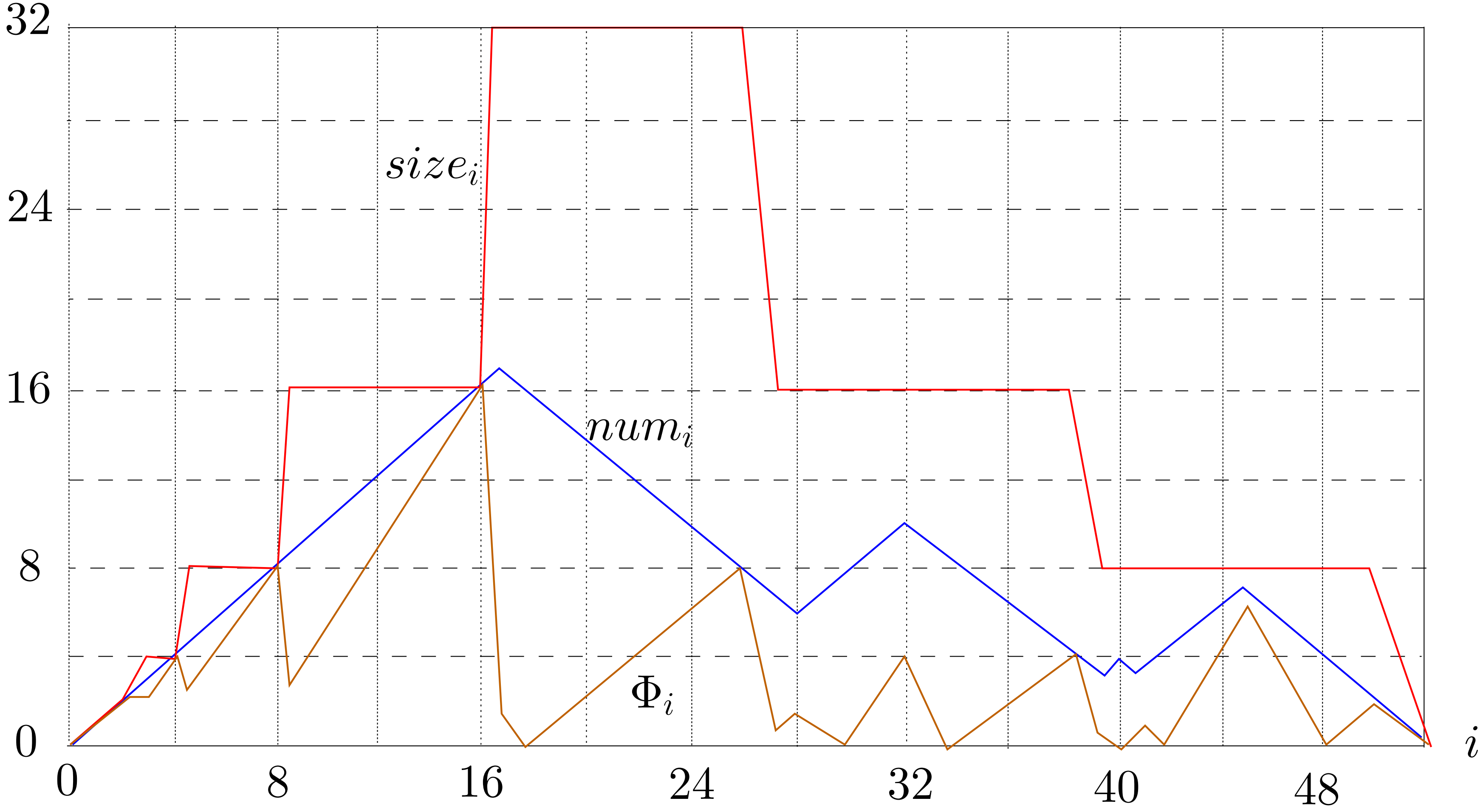
– $n_i = n_{i-۱} - ۱$

$$\begin{aligned}\hat{c}_i &= c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-۱}) \\ &= ۱ + [s_i/۲ - n_i] - [s_{i-۱}/۲ - n_{i-۱}] \\ &= ۱ + [s_i/۲ - n_i] - [s_i/۲ - (n_i + ۱)] \\ &= ۰\end{aligned}$$

-- حالت دوم: $\alpha_{i-۱} \geq ۱/۲$ تمرین

- **عمل حذف i موجب فشرده‌سازی می‌شود** $\Longrightarrow \alpha_{i-۱} = ۱/۴ \Longrightarrow \alpha_i < ۱/۲$
  - $s_i = s_{i-۱}/۲$
  - $n_i = n_{i-۱} - ۱$

$$
\begin{aligned}
\hat{c}_i &= c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-۱}) \\
&= n_{i-۱} + ۱ + [s_i/۲ - n_i] - [s_{i-۱}/۲ - n_{i-۱}] \\
&= n_{i-۱} + [s_{i-۱}/۴ - (n_{i-۱} - ۱)] - [s_{i-۱}/۲ - n_{i-۱}] \\
&= n_{i-۱} + [n_{i-۱} - (n_{i-۱} - ۱)] - [۲n_{i-۱} - n_{i-۱}] \\
&= ۱
\end{aligned}
$$



32
24
16
8
0
0
8
16
24
32
40
48
i
$size_i$
num_i
Φ_i

درج در مجموعه‌ها

داده‌ساختار D شامل مجموعه‌های S_0، S_1، S_2 و ... است به‌طوری‌که مجموعه‌ی S_i یا صفر یا 2^i عنصر دارد. درج یک عنصر x در D به این صورت است: ابتدا کوچک‌ترین i که S_i صفر عنصر دارد را پیدا می‌کنیم. سپس تمام عناصر موجود در مجموعه‌های S_0، S_1 تا S_{i-1} را به S_i منتقل و در انتها x را در S_i درج می‌کنیم. دقت کنید که پس از این انتقال مجموعه‌های S_0، S_1 تا S_{i-1} خالی می‌شوند و هزینه‌ی انتقال برابر مجموع تعداد این عناصر است. اگر در ابتدا مجموعه‌ها خالی باشند، هزینه‌ی سرشکن‌شده‌ی درج چه‌قدر است؟

یک مسئله

آرایه‌ی A به‌طول n داده شده است که تمام درایه‌های آن در ابتدا صفر هستند. عمل درج زیر را n بار با مقادیر دل‌خواه x انجام می‌دهیم. هزینه‌ی سرشکن‌شده‌ی هر عمل درج کدام است؟ بهترین گزینه را انتخاب کنید.

```
INSERT(x)
  n ← n + 1
  t ← x
  for i ← 0 to ⌈lg n⌉
      do if A[i] ≠ 0
            then t ← t + A[i]
                 A[i] ← 0
            else A[i] ← t
                 return
```

۱) $\mathcal{O}(n)$

۲) $\mathcal{O}(\lg n)$

۳) $\mathcal{O}(\lg^{۲} n)$

۴) $\mathcal{O}(۱)$