بسمه تعالی

صورت و راه حل سوال‌های مرحله دوم سی و هفتمین المپیاد ریاضی سال ۱۳۹۸

آزمون مرحله دوم سی و هفتمین المپیاد ریاضی کشور در تاریخ ۱۲ و ۱۳ اردیبهشت ۱۳۹۸ در سراسر کشور و با شرکت دانش‌آموزان پذیرفته شده در آزمون مرحله اول برگزار گردید. شرکت‌کنندگان در دو روز و در هر روز به مدت چهار ساعت و نیم به سه سؤال تشریحی پاسخ گفتند.

دفترچه‌ی پیشِ رو، شامل سؤالات آزمون به همراه راه حل آن‌هاست. لازم به ذکر است که سؤالات راه حل‌های دیگری هم دارند که در این دفترچه ذکر نشده‌اند. طبیعی است که هر راه حل صحیحی برای سؤالات آزمون از شرکت‌کنندگان پذیرفته می‌شود اگرچه در این دفترچه نیامده باشد.

با توجه به جنبه‌ی آموزشی این راه حل‌ها ممکن است توضیحاتی در راه حل‌ها آمده باشد که از نظر بارم‌بندی تصحیح ضروری نباشد و همچنین ممکن است بعضی توضیحاتی که بر اساس بارم‌بندی تصحیح ضروری است به دلیل خلاصه‌نویسی در این راه حل‌ها نیامده باشند.

۱. فرض کنید سطح داخلی چهار ضلع یک مستطیل از جنس آینه باشد. از یکی از نقاط گوشه‌ای پرتوی نوری به داخل مستطیل تابانده‌ایم. این پرتو بعد از چند بار انعکاس به رأس غیرمجاور رأس اول رسیده است و پیش از آن به هیچ یک از رئوس نرسیده است. ثابت کنید پرتوی نور پیش از این لحظه از مرکز مستطیل گذشته است. (توجه داشته باشید که هر گاه پرتوی نور به ضلعی برخورد می‌کند طوری منعکس می‌شود که زاویهٔ تابش و زاویهٔ بازتابش برابر باشند.)

راه حل:

گزاره ۱) انعکاس یافته‌های یک خط نسبت به اضلاع مستطیل با هم موازی هستند.(چرا؟)
گزاره ۲) انعکاس انعکاس یک خط نسبت به اضلاع مستطیل موازی با آن خط است.(چرا؟)
خطی که پرتو بر روی آن شروع به حرکت می‌کند را a می‌نامیم.
از انعکاس آن نسبت به یکی از اضلاع مستطیل خط b شکل می‌گیرد.
اگر موازی با خط b از دو راس ابتدایی و انتهایی مستطیل خطی بکشیم، این خطوط تماما خارج مستطیل قرار می‌گیرد. چرا که قرینه‌شان نسبت به اضلاع موازی خط a است و داخل مستطیل است.
پس خط انتهایی که از راس مستطیل خارج می‌شود موازی b نیست و موازی a است.
حال فرض کنید پرتو با سرعت ثابت در لحظه t به راس انتهایی برسد. اگر در ابتدا از هر دو راس شروع و پایان پرتویی موازی خط a تابیده می‌شد، طبق تقارن شکل در هر لحظه فاصله طولی و عرضی هر دو پرتو نسبت به مبداهای آن‌ها یکسان است. حال لحظه $t/۲$ را در نظر بگیرید. در این لحظه هر دو پرتو بر روی یک دیگر قرار دارند(چرا؟). و چون فاصله عرضی و طولی یکسانی نسبت به مبداهای خود دارند پس آن نقطه مرکز مستطیل است. پس پرتو از مرکز مستطیل عبور پیدا می کند.

۲. مثلث ABC متساوی الساقین ($AB = AC$) است و نقطه دلخواه X روی ضلع BC قرار دارد. نقاط Y و Z به ترتیب روی اضلاع AB و AC قرار دارند به طوریکه $\angle YXB = \angle ZXC$. از B موازی با YZ رسم می کنیم تا XZ را در T قطع کند. ثابت کنید AT نیمساز زاویهٔ A است.

راه حل:

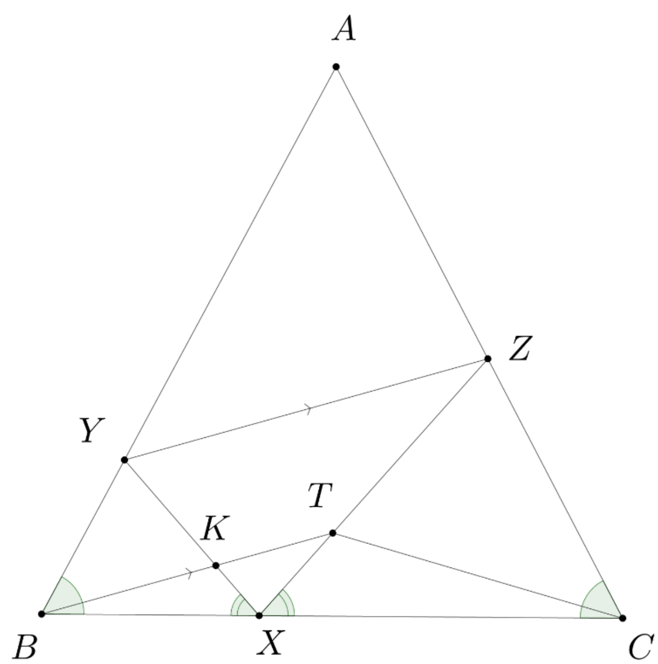
محل برخورد BT و XY را K می نامیم. دقت کنید $\Delta\, XYB \sim \Delta\, XZC$. طبق تالس می توان نوشت

$$\frac{XK}{KY} = \frac{XT}{TZ}$$

پس K و T دو نقطه متناظر در دو مثلث متشابه اند در نتیجه

$$\angle TCX = \angle KBX = \angle TBX \Longrightarrow TB = TC$$

پس T روی عمود منصف BC قرار دارد و از آن جا که مثلث متساوی الساقین است عمودمنصف BC و نیمساز $\angle A$ منطبق اند و حکم نتیجه می شود.



۳. فرض کنید $n > ۲$. ثابت کنید معادله‌ی زیر جوابی ندارد که در آن $x_۱, \dots, x_n$ اعداد طبیعی بزرگتر از ۱ باشند.

$$(x_۱ \cdots x_n)^۲ = x_۱^۳ + \cdots + x_n^۳$$

راه حل:

فرض کنید $x_1, \dots, x_n$ جوابی از معادله باشد که $x_i > 1$. بدون کم شدن از کلیت فرض می‌کنیم $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$.
دقت کنید از آنجا که سمت چپ بر x_n^2 بخش‌پذیر است پس سمت راست نیز بخش‌پذیر است و در نتیجه

$$x_n^2 \mid x_1^3 + \cdots + x_{n-1}^3$$

پس

$$x_n^2 \le x_1^3 + \cdots + x_{n-1}^3 \qquad (1)$$

از طرفی

$$(x_1 \cdots x_n)^2 = x_1^3 + \cdots + x_n^3 \le n x_n^3$$

که نتیجه می‌دهد

$$x_n \ge \frac{x_1^2 \cdots x_{n-1}^2}{n}$$

اکنون از نامساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$x_1^3 + \cdots + x_{n-1}^3 \ge \frac{x_1^4 \cdots x_{n-1}^4}{n^2}$$

پس

$$(n-1) x_{n-1}^3 \ge \frac{x_1^4 \cdots x_{n-1}^4}{n^2}$$

که نتیجه می‌دهد

$$x_1^4 \cdots x_{n-2}^4 x_{n-1} \le (n-1) n^2$$

از طرفی چون $x_i \ge 2$ پس نتیجه می‌شود

$$2^{4n-7} \le (n-1) n^2$$

ولی این نامساوی برای هر $n > 2$ غلط است. این تناقض حکم مورد نظر مسأله را ثابت می‌کند.

۴. دایره‌ای به قطر AB مفروض است. نقاط C و D روی دایره و دو طرف متفاوت AB قرار دارند. از D موازی با AC رسم می‌کنیم تا AB را در E قطع کند و از C موازی با AD رسم می‌کنیم تا AB را در F قطع کند. نقاط A، B، C و D به‌گونه‌ای هستند که نقاط E و F درون دایره ایجاد شوند. عمود وارد از E بر AB، BC را در X و عمود وارد از F بر AB، BD را در Y قطع می‌کند.
ثابت کنید اندازهٔ محیط مثلث AXY دو برابر طول پاره‌خط CD است.

راه حل:

به دلیل اشتباه تایپی، صورت سوال غلط است. صورت صحیح در زیر آمده است.

دایره‌ای به قطر AB مفروض است. نقاط C و D روی دایره و دو طرف متفاوت AB قرار دارند. از D موازی با AC رسم می‌کنیم تا AB را در E قطع کند و از C موازی با AD رسم می‌کنیم تا AB را در F قطع کند. نقاط A، B، C و D به‌گونه‌ای هستند که نقاط E و F درون دایره ایجاد شوند. عمود وارد از E بر AB، BD را در X و عمود وارد از F بر AB، BC را در Y قطع می‌کند.
ثابت کنید اندازهٔ محیط مثلث AXY دو برابر طول پاره‌خط CD است.

نحوه‌ی نمره‌دهی سؤال به شرح زیر است:

۱. داوطلبانی که صورت صحیح سؤال را نوشته و آن را اثبات کرده‌اند و نیز داوطلبانی که ثابت کرده‌اند سؤال غلط است نمره‌ی کامل سؤال را می‌گیرند.
۲. برای داوطلبانی که به این سؤال پاسخ نداده‌اند، نمره‌ی سؤال به طور مساوی روی سؤالات دیگر آزمون پخش می‌شود (یعنی مجموع نمره‌ی ۵ سؤال دیگر تقسیم بر ۵ می‌شود و به جای نمره‌ی این سؤال منظور می‌گردد).
۳. برای داوطلبانی که قسمتی که از راه حل صورت صحیح سؤال و یا قسمتی از اثبات غلط بودن سؤال را نوشته‌اند ولی راه حل آن‌ها کامل نیست، یک بار نمره بر اساس بند ۱ و بار دیگر بر اساس بند ۲ محاسبه می‌شود و نمره‌ی بزرگ‌تر به عنوان نمره‌ی داوطلب در این سؤال منظور می‌گردد.

۵. چندجمله‌ای $x^{۱۳۹۸} + ۱$ روی تخته نوشته شده است. روزبه و کیوان به نوبت این بازی را انجام می‌دهند. ابتدا نوبت روزبه است. هر بازی‌کن در نوبت خود یک عدد صحیح $۰ \le k \le ۱۳۹۸$ انتخاب می‌کند و چندجمله‌ای روی تخته را با x^k جمع می‌کند. هر بار پس از اینکه کیوان حرکت خود را انجام داد اگر عدد حقیقی x موجود باشد که چندجمله‌ای روی تخته به ازای آن x منفی بشود، روزبه برنده می‌شود و کیوان می‌بازد و بازی تمام می‌شود. در غیر این صورت بازی ادامه می‌یابد. ثابت کنید روزبه هرطور بازی کند کیوان می‌تواند به نحوی بازی کند که هیچ‌گاه نبازد.

راه حل:

قرار می‌دهیم $2n=1398$ و بازی‌کن‌ها را A و B می‌نامیم. ثابت می‌کنیم B می‌تواند طوری بازی کند که در هر مرحله یکی از ۱ و x^{2n} را اضافه کند و هیچ‌گاه نبازد.

لم ۱: برای هر $0 \le k \le 2n$ صحیح و برای هر x حقیقی، $(1-\frac{k}{2n})+x^k+\frac{k}{2n}x^{2n} \ge 0$.

اثبات لم: برای $x>0$ و نیز برای k زوج واضح است. برای k فرد از نامساوی حسابی-هندسی نتیجه می‌شود.

حال فرض کنید تا کنون t مرحله گذشته است و A جملات $x^{k_1},\dots,x^{k_t}$ را اضافه کرده است و فرض کنید B تا کنون a بار عدد ۱ و b بار x^{2n} را اضافه کرده است. پس چندجمله‌ای روی تخته برابر است با

$$a+1+\sum_{i=1}^{t}x^{k_i}+(b+1)x^{2n}$$

حال فرض کنید A در نوبت خود $x^{k_{t+1}}$ را انتخاب می‌کند.

حال B حرکت بعدی خود را طبق این معیار انتخاب می‌کند:

اگر $\sum_{i=1}^{t+1}\frac{k_i}{2n}>b+1$ آن‌گاه B جمله‌ی x^{2n} را اضافه می‌کند و اگر $\sum_{i=1}^{t+1}(1-\frac{k_i}{2n})>a+1$ آن‌گاه B جمله‌ی ۱ را اضافه می‌کند و اگر هیچ‌کدام از این دو اتفاق نیفتاد B به دلخواه یکی از دو جمله‌ی ۱ و x^{2n} را اضافه می‌کند. توجه کنید که هر دو نامساوی فوق نمی‌توانند همزمان اتفاق بیفتند زیرا مجموع سمت چپ نامساوی‌ها برابر $t+1$ است ولی چون $a+b=t$ مجموع سمت راست‌ها برابر $t+2$ است.

لم ۲: اگر B طبق روش فوق بازی کند، بعد از هر نوبت B، ضریب ثابت چندجمله‌ای حداقل $\sum_{i=1}^{t+1}(1-\frac{k_i}{2n})$ و ضریب x^{2n} حداقل $\sum_{i=1}^{t+1}\frac{k_i}{2n}$ است.

اثبات لم: لم را با استقرا روی t ثابت می‌کنیم. برای $t=0$ واضح است. حال فرض کنید حکم برای t ثابت شده باشد و فرض کنید ضریب ثابت و ضریب x^{2n} پس از مرحله‌ی t برابر $a+1$ و $b+1$ باشند. پس بنابر فرض استقرا:

$$\sum_{i=1}^{t}(1-\frac{k_i}{2n}) \le a+1 \text{ و } \sum_{i=1}^{t}\frac{k_i}{2n} \le b+1$$

پس به وضوح

$$\sum_{i=1}^{t+1}(1-\frac{k_i}{2n}) \le a+2 \text{ و } \sum_{i=1}^{t+1}\frac{k_i}{2n} \le b+2$$

همانطور که قبلا اشاره شد حداکثر یکی از دو نامساوی $\sum_{i=1}^{t+1}\frac{k_i}{2n} > b+1$ و $\sum_{i=1}^{t+1}(1-\frac{k_i}{2n}) > a+1$ می‌تواند رخ دهد.

حالت اول: $\sum_{i=1}^{t+1}\frac{k_i}{2n} > b+1$. در این حالت B یک واحد به ضریب x^{2n} اضافه می‌کند و درنتیجه ضریب x^{2n} برابر $b+2$ می‌شود که از $\sum_{i=1}^{t+1}\frac{k_i}{2n}$ بزرگتر مساوی است.

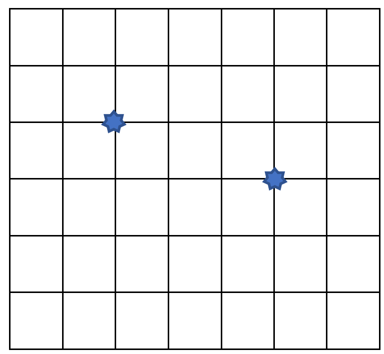
حالت دوم: $\sum_{i=1}^{t+1}(1-\frac{k_i}{2n}) > a+1$. در این حالت B یک واحد به ضریب ثابت اضافه می‌کند و درنتیجه ضریب ثابت برابر $a+2$ می‌شود که از $\sum_{i=1}^{t+1}(1-\frac{k_i}{2n})$ بزرگتر مساوی است.

حالت سوم: هیچ یک از دو نامساوی فوق رخ ندهد. در این صورت به وضوح ادعا برقرار است.

پس گام استقرا ثابت می‌شود و اثبات لم پایان می‌پذیرد.

اکنون از لم ۱ و لم ۲ نتیجه می‌شود که B هیچ‌گاه نمی‌بازد.

۶. جدولی با ۵۶ نقطه در ۷ ردیف ۸ تایی، با فواصل برابر، در نظر بگیرید. دو نقطه از نقاط جدول را به عنوان نقاط قرینه‌ساز مشخص می‌کنیم؛ نقطه‌ای از جدول را در نظر بگیرید و آن را نسبت به یکی از نقاط قرینه‌ساز قرینه کنید. در صورتی که نقطهٔ جدید یکی از نقاط جدول بود این کار را تکرار کنید و این تکرار را ادامه دهید. نقاطی که با این کار به آن‌ها می‌رسیم را در یک دسته قرار می‌دهیم. نقاط قرینه‌ساز را طوری انتخاب کرده‌ایم که تعداد دسته‌ها کم‌ترین مقدار ممکن شود. تعداد دسته‌ها چند تا است؟ (در شکل زیر، ۵۶ نقطه همان تقاطع‌ها هستند و یکی از انتخاب‌های ممکن برای نقاط قرینه‌ساز با دو ستاره مشخص شده است.)



.

راه حل:

ابتدا می‌خواهیم نقطه‌هایی که از قرینه کردن یک نقطه نسبت به نقاط قرینه‌ساز در یک شبکه انتخاب میشود را بدست آوریم. این نقطه‌ها را کلاس هم‌ارزی نام‌گذاری می‌کنیم. خط موازی گذرنده از یک نقطه که موازی خط واصل نقاط قرینه‌ساز باشد را خط خوب آن نقطه می‌نامیم و قرینه آن نسبت به دو مرکز را قرینه خط خوب آن نقطه می نامیم.

لم ۱: قرینه هر نقطه نسبت به یکی از ۲ مرکز بر روی قرینه خط خوب آن می‌افتد.(چرا؟)

با توجه به لم ذکر شده نتیجه می‌گیریم با قرینه کردن متوالی، یک نقطه تنها بر روی خط خوب آن نقطه و یا قرینه خط خوب آن نقطه می‌افتد.

لم ۲: اگر مجموعه تولیدی با اعمال قرینه کردن نسبت به نقاط قرینه‌ساز برای دو نقطه، اشتراک داشته باشند، آنگاه دو مجموعه یکی بوده‌اند.(چرا؟)

با توجه به لم ذکر شده تعداد دسته‌ها، برابر با تعداد کلاس‌های هم‌ارزی است. پس کافیست برای هر دو مرکزی این تعداد را حساب کنیم تا کمینه را بیابیم.

یکی از نقاط قرینه‌ساز را O و دوبرابر بردار بین نقاط قرینه‌ساز را بردار v بگیرید.

لم ۳: اگر از نقطه A با قرینه‌کردن توسط نقاط قرینه‌ساز بتوان به نقطه B رسید، می‌توان از A توسط تعدادی انتقال با بردار v یا $-v$ و سپس حداکثر یکبار قرینه نسبت به O، به B رسید.(در واقع ترکیب دو تقارن، یک انتقال است)(چرا؟)

حال از آنجا که v دوبرابر بردار واصل نقاط قرینه‌ساز است، مولفه افقی و عمودی آن زوج است. پس یکی از دو مولفه بردار v حداقل ۲ است. در نتیجه می‌توان گفت که با انتقال توسط بردار v و $-v$، نقاط به حداقل ۱۴ گروه(چرا؟) تقسیم می‌شوند به طوری که اگر دونقطه در یک گروه باشند، از هریک به دیگری با تعداد انتقال می‌توان رسید.

لم ۴: قرینه نقاط یک گروه نسبت به O، همگی در یک گروهند.(چرا؟)

در نتیجه هر کلاس هم‌ارزی یا شامل یک‌گروه است یا حداکثر دو گروه. می‌توان گفت دونقطه قرینه‌ساز در دو گروه مختلفند(چرا؟) و قرینه نقاط هر یک ازین دو گروه پس از قرینه‌شدن نسبت به O، در خود آن گروه می‌افتد. پس این دو گروه دو کلاس هم‌ارزی را تشکیل می‌دهند. هر کلاس هم‌ارزی دیگر نیز، شامل حداکثر دو گروه است. در نتیجه حداقل ۸ کلاس هم‌ارزی داریم. در شکل زیر، دو دایره نارنجی نقاط قرینه‌ساز هستند. با ۸ نقطه‌ای که دورشان دایره‌است، توسط قرینه نسبت به نقاط قرینه‌ساز، به همه نقاط جدول می‌توان رسید. پس جواب مسئله برابر با ۸ است.