

به نام حضرت دوست

اسفند ماه ۱۳۹۵

آزمون جامع (سری اول)



11 TH IOAA TEAM
I.R. IRAN

اعضای تیم به ترتیب حروف الفبا :

امیراحسان علیزاده	سینا بلوکی
عباس فروزان نژاد	امیرحسین ستوده فر
زهرا فرهمند	عماد صالحی
علیرضا ملکی	پریمه صفریان
محمد علی نادمی	شایان عزیزی

تذکرات :

- ✓ آزمون شامل ۵ سوال است و نمره آن از ۴۰۰ محاسبه می گردد
- ✓ استفاده از ماشین حسابی که قابل برنامه ریزی نباشد مجاز است و مدت پیشنهادی آزمون ۴ ساعت است .

سوال یک : مقاطع مخروطی (۱۰۰ نمره)

(در این سوال ضرایب در جواب آخر اهمیت ندارد، می توانید برای آنها نام گذاری کنید)
میتوانیم هر مقطع مخروطی دلخواه در فضا را با یک مخروط و صفحه در فضا نشان دهیم .
الف) معادله یک مخروط که محور اصلی آن منطبق بر محور Z است و راس آن روی مرکز مختصات است را به دست آورید.

ب) اگر مخروط بالا را به اندازه t درجه حول محور x دوران دهیم معادله آن را بدست آورید

میدانیم اگر صفحه ای به معادله $ax + by + cz = d$ را با مخروط بالا قطع دهیم یک مقطع مخروطی حاصل میشود.

ج) برای هر نقطه دلخواه این مقطع مخروطی معادله خط مماس بر آن را به دست آورید . (راهنمایی: خط مماس بر مقطع بر مخروط نیز مماس است و در صفحه قطع داده شده قرار دارد)
اگر مقطع را در صفحه (xz) تصویر کنیم یک شکل حاصل میشود، با استفاده از قسمت قبل:
د) شیب خط مماس بر آن شکل را بدست آورید.

ه) در شیب قسمت قبل y را بر حسب x و z جایگذاری کنید.

و) با استفاده از قسمت قبل معادله شکل حاصل شده را پیدا کنید.

سوال دو : اختلال ستاره ای (۸۰ نمره)

ستاره ای با چگالی ثابت ρ و شعاع R دچار تغییراتی میشود که لایه های درون آن شروع به حرکت میکنند.
تابع سرعت لایه ها برحسب فاصله لایه از مرکز کره بصورت $v = v_0 \sin(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{r}{R})$ است که v_0 عددی ثابت است.
بعد از زمان δt خیلی کوچک پوسته ی اولیه با شعاع r تا $r + \Delta r$ به پوسته ی ثانویه به شعاع r' تبدیل میشود. (به دلیل کوچک بودن δt از توان دوی نسبت تغییر شعاع یک لایه به شعاع آن لایه صرفنظر کنید).

الف) اختلاف چگالی پوسته ی ثانویه و اولیه را برحسب پارامترهای معرفی شده $(r, R, v_0, \rho, \delta t)$ بنویسید.

ب) نمودار جواب قسمت قبل را بر حسب r به صورت کیفی بکشید و تابع چگالی جدید بعد از این اختلال ها را توصیف کنید.

سوال سه : ستارگان رشته اصلی هلیومی (۷۰ نمره)

در ستاره‌های کم جرم که فشار گاز غالب است و انتقال انرژی از طریق تابش صورت می‌گیرد، عامل کدوری عمدتاً به دلیل برهمکنش‌های $free - free$ ست. که در این برخوردها رابطه‌ی طول پویش آزاد میانگین دما و چگالی بدین صورت است:

$$l \propto T^{3.5} / \rho$$

درخشندگی را می‌توانید کل انرژی تابشی موجود در حجم ستاره تقسیم بر زمان انتقال انرژی از مرکز تا سطح بگیرید.

الف) ابتدا برای این ستاره‌ها رابطه‌ای تناسبی برای درخشندگی بر حسب شعاع، دما و چگالی بیابید.

ب) سپس یک بار دما و بار دیگر چگالی را از رابطه‌ی بالا حذف کنید. توجه کنید که ستاره در تعادل است! در اینجا جرم میانگین ذرات در معادله ظاهر می‌شود.

پ) با فرض این که این ستاره‌ها تنها از هیدروژن و هلیوم تشکیل شده‌اند، رابطه‌ای برای جرم میانگین ذرات بر حسب کسر جرمی هیدروژن X بنویسید.

ت) برای ستاره‌ای در رشته اصلی هلیومی با جرم $0.5 M_{sun}$ که تمام هیدروژن خود را از دست داده و دمای مرکز آن به دمای سوزاندن هلیوم ($10^8 K$) رسیده درخشندگی و شعاع را بیابید. ($X_{sun} = 0.75$)

ث) دمای موثر این ستاره را بیابید.

سوال چهار : رابطه سن و دمای عالم (۵۰ نمره)

استدلال کنید در عالم ما در اوایل عمرش کدام مولفه غالب بوده سپس برای عالم در آن زمان رابطه‌ی زیر را بین دمای تابش و سن عالم ثابت کنید.

$$t = \left(\frac{3c^2}{32\pi G a_B T^4} \right)^{1/2} \approx 230 \text{ s} \left(\frac{10^9 \text{ K}}{T} \right)^2$$

سوال پنج : دزدان دریایی (۱۰۰ نمره)

به تازگی دزدان دریایی نقشه عظیم‌ترین گنج نهفته در اعماق آب‌ها را پیدا کرده‌اند! در صندوقچه پیدا شده، یک نقشه مرکاتور مانند نقشه سوال و سه مختصات در گوشه‌های داخلی آن، حک شده بود. یک مختصات مربوط به محل یافتن صندوقچه (نقشه گنج!) است. نقطه فعلی (مکان یافتن نقشه) که دزدان دریایی در آن

قرار دارند را جزیره Peaks Island به مختصات ($43.66^{\circ}N$ و $70.19^{\circ}W$) در نظر بگیرید. مختصات دو نقطه دیگر به شرح زیر است :

$A: (70.88^{\circ}N, 19.55^{\circ}E) - \text{Norwegian sea}$

$B: (34.28^{\circ}S, 18.43^{\circ}E) - \text{Cape town}$

گویا اینطور که پیداست گنج در هردوی این مکان‌ها مخفی شده است! اما ماموران ایالتی متوجه وجود این گنج شده و به نحوی موفق شده‌اند مختصات نقاط A و B را بیابند؛ آن‌ها در نظر دارند که کشتی دزدان دریایی را منهدم کنند، برای این کار از یک هواپیمای نظامی استفاده می‌کنند. نقشه‌ای که این نوع هواپیماها استفاده می‌کنند طبق تسطیح **Gnomonic projection** تهیه شده که این نوع تسطیح دوایر عظیمه را به خط راست نگاشت می‌کند. با استفاده از نقشه (اگر لازم‌تان است!) به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) دزدان دریایی به سمت کدام نقطه حرکت کنند تا هیچ‌گاه در معرض هواپیمای ماموران ایالتی قرار نگیرند؟

راهنمایی : می‌توانید از نقشه مرکاتور صفحه بعد استفاده کنید! راه خود را کامل شرح دهید.

ب) فرض کنید دزدان دریایی مسیر دیگر را انتخاب کردند (یعنی اگر جواب قسمت قبل نقطه B بود، اکنون تصمیم گرفته‌اند به سمت نقطه A حرکت کنند). اگر کشتی آن‌ها با سرعت ۲۰ گره دریایی حرکت کند (هر گره دریایی برابر با یک مایل دریایی بر ساعت است و یک مایل دریایی برابر با یک دقیقه قوسی روی سطح زمین است) هواپیمای نظامی با چه سرعتی حرکت کند تا حتماً بتواند کشتی را منهدم کند؟

نکته: نقشه مرکاتور صفحه بعد از عرض $82^{\circ}N$ تا $82^{\circ}S$ را پوشش می‌دهد. همچنین استفاده از روابط مثلثات کروی و روابط هر نوع تسطیحی که نیاز می‌دانید نیز بدون اثبات مجاز می‌باشد.

