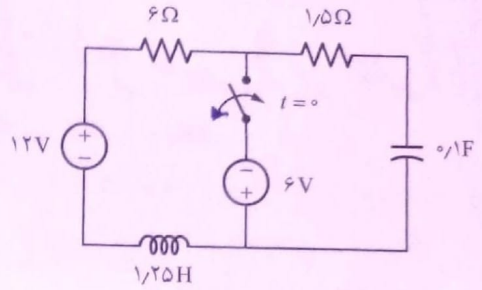
متصل می‌شود. در این مدار ... درست قبل از اتصال کلید متفاوت است . توجه کنید که در مدارهای واقعی چنین وضعیتی پیش نمی‌آید ، زیرا سیم‌های اتصال مقاومت دارند (هر چند بسیار کوچک) و این مقاومت باعث می‌شود مدار شکل ۷-۱ (ب) مدل واقعی‌تری از اتصال دو خازن به هم باشد . در مدار شکل ۷-۱ (ب) معادله‌ی (۷-۱) معتبر است .

در فصل قبل دیدیم که معادلات حاکم بر مدارهای دارای عناصر ذخیره کننده‌ی انرژی معادلات دیفرانسیل هستند. برای یافتن جواب این معادلات باید مقدار اولیه‌ی کمیات مداری (و در بعضی موارد مقدار اولیه‌ی مشتق‌های آنها) را بدانیم . این فصل به یافتن این مقادیر اختصاص دارد. کاربرد این مقادیر در تحلیل مدار را در دو فصل بعد خواهیم دید.



شکل ۷-۲ مدار مثال ۷-۱ .

یافتن مقادیر اولیه

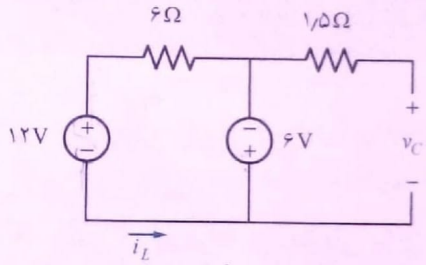
دو اصل پایه در یافتن مقادیر اولیه ، معادلات (۷-۱) و (۷-۲) هستند ، یعنی تغییر ناگهانی نداشتن ولتاژ خازن و جریان القاگر . بقیه‌ی کمیات مدار مثل ولتاژ روی مقاومت ، جریان خازن و ولتاژ القاگر می‌توانند به طور ناگهانی تغییر کنند. کار را با یک مثال دنبال می‌کنیم.

مثال ۷-۱

در مدار شکل ۷-۲ کلید پس از مدت‌ها بسته بودن ، در $t=0$ باز می‌شود . جریان خازن و ولتاژ القاگر را درست بعد از باز شدن کلید تعیین کنید.

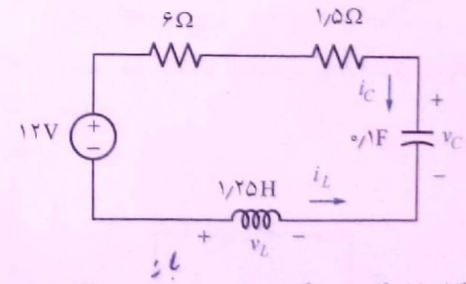
حل مدار در پیش از باز شدن کلید به صورت شکل ۷-۳ است . می‌بینیم که به خاطر dc بودن منابع و در نتیجه ثابت بودن ولتاژها و جریان‌های مدار ، القاگر به صورت اتصال کوتاه و خازن به صورت مدار باز عمل می‌کند. به سادگی می‌توان به دست آورد

$$i_L = \frac{-12\text{V}+(-6\text{V})}{6\Omega} = -3\text{A} \qquad t<0$$
$$v_C = -6\text{V} \qquad t<0$$



شکل ۷-۳ مدار شکل ۷-۲ پیش از بسته شدن کلید .

بعد از باز شدن کلید (در $t>0$) مدار به صورت شکل ۷-۴ در می‌آید. چرا در اینجا با وجود این که مدار تنها منبع dc دارد ، القاگر را اتصال کوتاه و خازن را مدار باز در نظر نگرفته‌ایم ؟ بیایید فرض کنیم در $t>0$ تمام ولتاژها و جریان‌ها مقدار ثابتی پیدا می‌کنند . در این صورت مدار به صورت شکل ۷-۵ در می‌آید ؛ جریان القاگر باید صفر شود و ولتاژ خازن به ۱۲ V برسد. این با اصول بیان شده در معادلات (۷-۱) و (۷-۲) سازگار نیست. ولتاژ خازن و جریان القاگر نمی‌توانند به طور ناگهانی تغییر کنند. پس این مدار را نمی‌توان یک مدار dc دانست ؛ البته پس از گذشت مدتی ولتاژ خازن به تدریج از ۶V- به ۱۲V و جریان القاگر از ۳A- به صفر می‌رسد و ولتاژها و جریان‌های مدار دیگر تغییر نمی‌کنند. تنها پس از گذشت این زمان است که مدار را می‌توان یک مدار dc دانست.



شکل ۷-۴ مدار شکل ۷-۲ بعد از بسته شدن کلید .

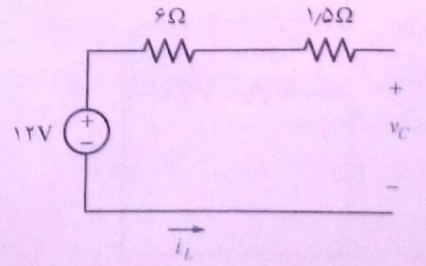
مدار شکل ۷-۴ یک مدار تک حلقه‌ای است و برای آن می‌توان نوشت

$$(6+1/5)i_C + v_C - v_L = 12$$

این رابطه برای تمام زمان‌های بزرگ‌تر از صفر معتبر است ، از جمله برای $t=0^+$. در این زمان داریم

$$7/5\, i_C(0^+) + v_C(0^+) - v_L(0^+) = 12 \qquad (7\text{-}3)$$

از طرف دیگر داریم $i_C = -i_L$ و بنابراین $i_C(0^+) = -i_L(0^+)$. چون جریان القاگر تغییر ناگهانی ندارد به دست می‌آوریم



شکل ۷-۵ جریان مدار شکل ۷-۲ بعد از بسته شدن کلید در صورتی که ولتاژ خازن و جریان القاگر مقدار ثابتی پیدا کند.

Scanned by CamScanner

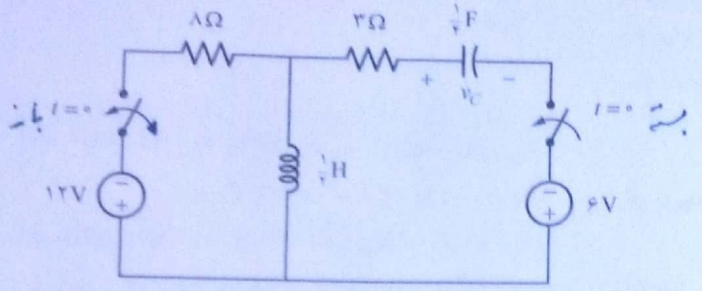
$$i_C(0^+) = -i_L(0^+) = -i_L(0^-) = 3\text{A}$$

همچنین چون ولتاژ خازن به طور ناگهانی تغییر نمی‌کند داریم

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = -6\text{V}$$

با گذاشتن مقادیر به دست آمده در معادله‌ی (۷-۳) به دست می‌آوریم

$$v_L(0^+) = 7.5\, i_C(0^+) + v_C(0^+) - 12$$
$$= 7.5(3\text{A}) + (-6\text{V}) - 12\text{V} = 4.5\text{V}$$



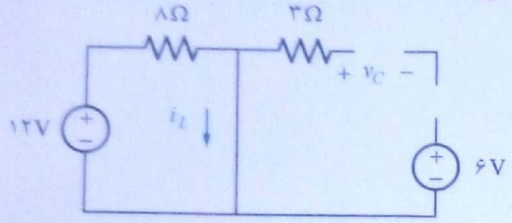
شکل ۷-۶ مدار مثال ۷-۲.

مثال ۷-۲ در مدار شکل ۷-۶ ولتاژ خازن ، جریان القاگر ، جریان خازن ، و ولتاژ القاگر را درست بعد از تغییر حالت کلیدها به دست آورید.

$v_C(0^-) = 0$

حل پیش از تغییر حالت کلیدها یک مدار dc داریم که می‌توانیم آن را به صورت شکل ۷-۷ نشان دهیم . در این مدار داریم

$$i_L = \frac{12\text{V}}{8\Omega} = 1.5\text{A} \qquad t < 0$$
$$v_C = 0\text{V} \qquad t < 0$$



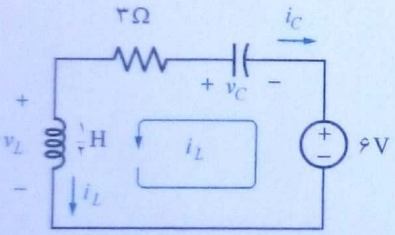
شکل ۷-۷ مدار شکل ۷-۶ پیش از تغییر حالت کلیدها.

در $t > 0$ مدار شکل ۷-۸ را داریم که برای آن می‌توان نوشت

$$-6 - v_C + 3\, i_L + v_L = 0 \qquad \text{(KVL حول حلقه)}$$

این معادله برای تمام زمان‌های بزرگ‌تر از صفر معتبر است . در $t = 0^+$ داریم

$$-6 - v_C(0^+) + 3\, i_L(0^+) + v_L(0^+) = 0 \qquad (۷-۴)$$



شکل ۷-۸ مدار شکل ۷-۶ بعد از تغییر حالت کلیدها.

از این میان مقدار $i_L(0^+)$ و $v_C(0^+)$ معلوم است ، زیرا این دو مقدار تغییر ناگهانی ندارند . پس

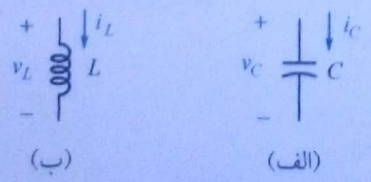
$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0\text{V}$$
$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1.5\text{A}$$

با گذاشتن این دو مقدار در معادله‌ی (۷-۴) به دست می‌آوریم

$$v_L(0^+) = 6 + v_C(0^+) - 3\, i_L(0^+) = 6 + 0 - 3 \times 1.5 = 1.5\text{V}$$

جریان خازن نیز منفی جریان القاگر است ، بنابراین

$$i_C(0^+) = -i_L(0^+) = -i_L(0^-) = -1.5\text{A}$$



شکل ۷-۹ (الف) انتخاب جریان و ولتاژ برای خازن ، به منظور بیان رابطه‌ی بین مقدار اولیه‌ی جریان و مقدار اولیه‌ی مشتق ولتاژ . (ب) انتخاب جریان و ولتاژ برای القاگر ، به منظور بیان رابطه‌ی بین مقدار اولیه‌ی ولتاژ و مقدار اولیه‌ی مشتق جریان .

اگر معادله‌ی دیفرانسیل مدار مرتبه دو (یا بالاتر) باشد ، علاوه بر مقدار اولیه‌ی کمیت مورد نظر ، مقدار اولیه‌ی مشتق آن نیز مورد نیاز است . همانطور که در یافتن مقدار اولیه‌ی کمیات ، خازن به خاطر ثابت نگهداشتن ولتاژ ، و القاگر به خاطر ثابت نگهداشتن جریان نقش اصلی را بازی می‌کنند ، در یافتن مقدار اولیه‌ی مشتق‌ها نیز این دو عنصر هستند که اصلی‌ترین نقش را دارند. این نقش به خاطر رابطه‌ی IV این عناصر ایجاد می‌شود . برای القاگر و خازن شکل ۷-۹ داریم

$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} = Cv_C'(t) \qquad v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = Li_L'(t)$$

Scanned by CamScanner

این روابط برای تمام لحظات برقرار هستند ، از جمله $t=0^+$. در این زمان

$$i_C(0^+)=C\frac{dv_C}{dt}(0^+)=Cv'_C(0^+)$$

$$v_L(0^+)=L\frac{di_L}{dt}(0^+)=Li'_L(0^+)$$

که نتیجه می‌دهند

$$v'_C(0^+)=\frac{i_C(0^+)}{C} \qquad (۷-۵)$$

$$i'_L(0^+)=\frac{v_L(0^+)}{L} \qquad (۷-۶)$$

توجه کنید که
همانطور که یافتن مقدار اولیه‌ی ولتاژ خازن و جریان القاگر ساده است ، یافتن مقدار اولیه‌ی مشتق این دو کمیت نیز ساده است ؛ به این منظور باید از معادلات (۷-۵) و (۷-۶) استفاده کرد.

می‌بینیم که خازن و القاگر این امکان را می‌دهند که مقدار مشتق یک کمیت را بر اساس مقادیر کمیات مداری بنویسیم . مثال زیر چگونگی استفاده از این روابط را نشان می‌دهد.

مثال ۷-۳

در مدار شکل ۷-۶ مقدار مشتق ولتاژ خازن و مشتق جریان القاگر را درست بعد از تغییر حالت مدار تعیین کنید.

حل برای حل مسئله باید از معادلات (۷-۵) و (۷-۶) استفاده کنیم . جریان خازن و ولتاژ القاگر در $t=0^+$ را در مثال ۷-۲ به دست آوردیم . بنابراین

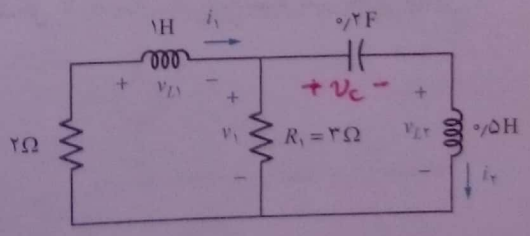
$$v'_C(0^+)=\frac{i_C(0^+)}{C}=\frac{-1.5\text{A}}{\frac{1}{4}\text{F}}=-6\ \text{V/s}$$

$$i'_L(0^+)=\frac{v_L(0^+)}{L}=\frac{1.5\text{V}}{\frac{1}{2}\text{H}}=3\text{A/s}$$

یافتن مقدار اولیه‌ی مشتق کمیاتی غیر از ولتاژ خازن و جریان القاگر در مثال زیر مورد بررسی قرار گرفته است .

مثال ۷-۴

در مدار شکل ۷-۱۰ $v_C(0^+)=0$ ، $i_1(0^+)=3\text{A}$ ، و $i_2(0^+)=1\text{A}$. مقدار اولیه‌ی ولتاژ روی R_1 و مقدار اولیه‌ی مشتق این ولتاژ را بیابید.



شکل ۷-۱۰ مدار مثال ۷-۴.

حل KCL در گره‌ی بالای مقاومت R_1 به دست می‌دهد $i_1-i_2=v_1/R_1$ یا

$$v_1(t)=R_1i_1(t)-R_1i_2(t) \qquad (۷-۷)$$

بنابراین مقدار اولیه‌ی v_1 به صورت زیر به دست می‌آید

$$v_1(0^+)=R_1i_1(0^+)-R_1i_2(0^+)$$
$$=3\times3-3\times1=6\text{V}$$

زیرا i_1 و i_2 جریان القاگر هستند ، بنابراین تغییر ناگهانی ندارند و مقدارشان در $t=0^+$ همان مقدارشان در $t=0^-$ است .

با مشتقگیری از معادله‌ی (۷-۷) به دست می‌آوریم

$$v'_1(t)=R_1[i'_1(t)-i'_2(t)] \qquad (۷-۸)$$

Scanned by CamScanner

که نشان می‌دهد برای یافتن مقدار $v_1'(0^+)$ باید $i_1'(0^+)$ و $i_2'(0^+)$ را بیابیم . چون این دو جریان القاگر هستند ، می‌توانیم برای یافتنشان از معادله‌ی (۷-۶) استفاده کنیم . به این منظور باید ولتاژ روی القاگرها را در $t=0^+$ بیابیم . برای خانه‌ی سمت چپ $2i_1+v_{L1}+v_1=0$ یا

$$v_{L1}=-2i_1-v_1$$

بنابراین $v_{L1}(0^+)=-2i_1(0^+)-v_1(0^+)=-(2\times 3)-6=-12\text{V}$. و

$$i_1'(0^+)=\frac{v_{L1}(0^+)}{L_1}=\frac{-12}{1\text{H}}=-12\text{A/s}$$

KVL برای خانه‌ی سمت راست به دست می‌دهد $v_1=v_C+v_{L2}$ که به دست می‌دهد

$$v_{L2}(0^+)=-v_C(0^+)+v_1(0^+)=0+6=6\text{V}$$

و در نتیجه

$$i_2'(0^+)=\frac{v_{L2}(0^+)}{L_2}=\frac{6}{0.5\text{H}}=12\text{A/s}$$

با گذاشتن مقادیر به دست آمده در معادله‌ی (۷-۷) به دست می‌آوریم

$$v_1'(0^+)=R_1[i_1'(0^+)-i_2'(0^+)]=3\times(-12-12)=-72\text{V/s}$$

برای یافتن مشتق جریان القاگر در یک لحظه باید ولتاژ آن را در آن لحظه داشته باشیم .
برای یافتن مشتق ولتاژ خازن در یک لحظه باید جریان آن را در آن لحظه داشته باشیم .

مثال ۷-۵ چون مدار شکل ۷-۱۰ سه عنصر ذخیره کننده‌ی انرژی دارد ، معادله‌ی دیفرانسیلی که حل آن ولتاژ $v_1(t)$ را به دست می‌دهد یک معادله‌ی مرتبه سوم است و برای یافتن جواب آن علاوه بر مقدار اولیه‌ی $v_1(t)$ باید مقدار اولیه‌ی مشتق اول و مشتق دوم آن را نیز بدانیم . برای تکمیل مثال قبل ، مقدار اولیه‌ی مشتق دوم $v_1(t)$ را بیابید.

برای یافتن مشتق دوم جریان القاگر در یک لحظه باید مشتق ولتاژ آن را در آن لحظه داشته باشیم .

حل با مشتقگیری دوباره از معادله‌ی (۷-۸) به دست می‌آوریم

$$v_1''(t)=R_1[i_1''(t)-i_2''(t)] \qquad (9\text{-}7)$$

پس برای یافتن $v_1''(0^+)$ باید $i_1''(0^+)$ و $i_2''(0^+)$ را بیابیم . برای یافتن این دو مشتق از رابطه‌ی IV القاگر مشتق می‌گیریم و به دست می‌آوریم

$$\frac{dv(t)}{dt}=L\frac{d^2}{dt^2}i(t)$$

محاسبه‌ی این عبارت در $t=0^+$ و بازآرایی آن به دست می‌دهد

$$i_L''(0^+)=\frac{v_L'(0^+)}{L} \qquad (10\text{-}7)$$

در مثال قبل KVL برای خانه‌ی سمت چپ مدار را نوشتیم و به دست آوردیم

$$v_{L1}(t)=-2i_1(t)-v_1(t)$$

مشتقگیری از این معادله به دست می‌دهد $v_{L1}'(t)=-2i_1'(t)-v_1'(t)$ و در $t=0^+$

Scanned by CamScanner

$$v'_{L1}(0^+) = -2i'_1(0^+) - v'_1(0^+) = -2\times(-12) + 72 = 96\,\text{V/s}$$

پس طبق معادله‌ی (۷–۱۰)

$$i''_1(0^+) = \frac{v'_{L1}(0^+)}{L_1} = \frac{96\,\text{V/s}}{1\,\text{H}} = 96\,\text{A/s}^2$$

KVL برای خانه‌ی سمت راست مدار $v_1 = v_C + v_{L2}$ را به دست می‌دهد . با مشتقگیری از این معادله به دست می‌آوریم $v'_{L2}(t) = v'_1(t) - v'_C(t)$. برای این که $v'_{L2}(0^+)$ را بیابیم باید $v'_C(0^+)$ را حساب کنیم . به این منظور از معادله‌ی (۷–۵) استفاده می‌کنیم . توجه کنید که جریان خازن همان i_2 است ، بنابراین

$$v'_C(0^+) = \frac{i_2(0^+)}{C} = \frac{1}{0.2} = 5\,\text{V/s}$$

و در نتیجه

$$v'_{L2}(0^+) = v'_1(0^+) - v'_C(0^+) = -72 - 5 = -77\,\text{V/s}$$

و طبق معادله‌ی (۷–۱۰)

$$i''_2(0^+) = \frac{v'_{L2}(0^+)}{L_2} = \frac{-77\,\text{V/s}}{0.5\,\text{H}} = -154\,\text{A/s}^2$$

سرانجام با مقدار گذاری در معادله‌ی (۷–۹) به دست می‌آوریم

$$v''_1(0^+) = R_1[i''_1(0^+) - i''_2(0^+)] = 3\times[96-(-154)] = 750\,\text{V/s}^2$$

برای یافتن مشتق دوم ولتاژ خازن در یک لحظه باید مشتق جریان آن را در آن لحظه داشته باشیم .

به همان روشی که معادله‌ی (۷–۱۰) به دست آمد ، می‌توان معادله‌ی زیر را برای خازن به دست آورد

$$v''_C(0^+) = \frac{i'_C(0^+)}{C} \qquad (۷–۱۱)$$

مدار معادل لحظه‌ای

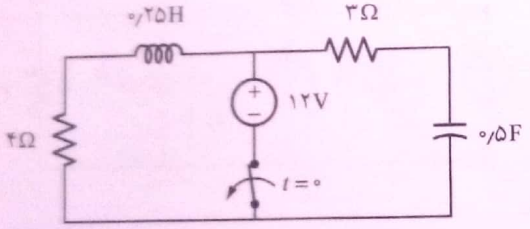
یافتن ولتاژها و جریان‌های مدار در یک لحظهٔ خاص، معمولاً درست پس از وقوع یک تغییر حالت در مدار، و یافتن مقدار مشتق این کمیات در آن لحظه برای به دست آوردن جواب کامل معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر رفتار مدار ضروری است. در بالا مثال‌هایی ارائه شد که در آنها مقدار اولیه‌ی یک کمیت یا مقدار اولیه‌ی مشتق خواسته شده بود . همانطور که این مثال‌ها نشان دادند ، حل این گونه مسائل مستلزم نوشتن معادلات مداری و استفاده‌ی مناسب از آنهاست . پیچیده‌تر شدن مدار ، مخصوصاً اگر با افزایش تعداد عناصر ذخیره کننده‌ی انرژی همراه باشد ، می‌تواند مسئله را بسیار طولانی کند و احتمال بروز خطا را افزایش دهد. خوشبختانه می‌توان روشی سازمانیافته برای حل این مسائل پی‌ریزی کرد. اساس این روش استفاده از *مدار معادل لحظه‌ای* است. این روش در حالت کلی ساده‌ترین روش نیست. ولی مزیت عمدهٔ آن این است که همیشه می‌توان آن را به کار برد، برای استفاده از آن هیچ ابتکاری لازم نیست ، و در آن مسئله به تحلیل یک مدار مقاومتی تبدیل می‌شود ، به نحوی که وارسی نتایج به دست آمده خیلی ساده باشد.

Scanned by CamScanner

مدار معادل لحظه‌ای ، چنانچه از اسمش برمی‌آید ، مداری است که تنها در یک لحظه، مثلاً لحظهٔ $t=0$، با مدار اصلی معادل است. چون هدف ما یافتن ولتاژها و جریان‌ها در همان یک لحظه است، نه در تمام زمان‌ها، این مدار معادل برایمان کافی است.

عکسی که از یک مسابقه‌ی فوتبال گرفته می‌شود ، وضعیت توپ و بازیکنان را تنها در یک لحظه از کل زمان بازی نشان می‌دهد. فرض کنید در هر شاخه‌ی مدار یک آمپرمتر قرار دارد و با هر شاخه‌ای نیز یک ولتمتر موازی شده است . برای یک مدار غیر dc مقادیری که این اندازه‌گیرها نشان می‌دهند دائماً در حال تغییر است . اگر در یک لحظه عکسی از این مدار گرفته شود ، در این عکس مقدار تمام ولتاژها و جریان‌ها در آن لحظه مشخص است . مدار معادل لحظه‌ای تقریباً مشابه چنین عکسی است . توجه کنید که در چنین عکسی ولتاژها و جریان‌ها ثابت هستند ، همانطور که در عکس گرفته شده از مسابقه‌ی فوتبال توپ و بازیکنان ثابت هستند (حرکت نمی‌کنند) .

مداری را در نظر بگیرید که در $t=0$ تغییری ناگهانی در آن ایجاد می‌شود ، مثلاً کلیدی تغییر حالت می‌دهد یا مقدار یکی از منابع تغییر می‌کند. در مورد مدار ، درست پس از این تغییر مدار ، چه اطلاعاتی داریم ؟ مطمئن هستیم که ولتاژ خازن همان مقداری را دارد که در لحظه‌ی پیش از تغییر داشته است . بنابراین می‌توانیم ولتاژ خازن را ثابت بدانیم. به عبارت دیگر می‌توانیم به جای خازن یک منبع ولتاژ بگذاریم که مقداری برابر ولتاژ خازن در لحظه‌ی قبل از تغییر داشته باشد ، زیرا می‌دانیم که هر اتفاقی در مدار بیفتد این ولتاژ تغییر نمی‌کند. همچنین مطمئن هستیم که جریان القاگر نیز همان مقداری را دارد که در لحظه‌ی پیش از تغییر داشته است . بنابراین می‌توانیم جریان القاگر را ثابت بدانیم . به عبارت دیگر می‌توانیم به جای القاگر یک منبع جریان بگذاریم که مقداری برابر جریان القاگر در لحظه‌ی قبل از تغییر داشته باشد ، زیرا می‌دانیم که هر اتفاقی در مدار بیفتد این جریان تغییر نمی‌کند. با این دو تغییر مداری به دست می‌آوریم که تنها از منبع و مقاومت تشکیل شده است . چنین مداری با معادلات جبری توصیف می‌شود و تمام مقادیر آن را می‌توان به روش‌های بیان شده در فصول ۱ تا ۴ به دست آورد. البته باید توجه داشت که این مدار تنها در لحظه‌ی بعد از تغییر با مدار اصلی معادل است ، بنابراین مقادیر به دست آمده تنها مقادیر مربوط به این لحظه هستند.

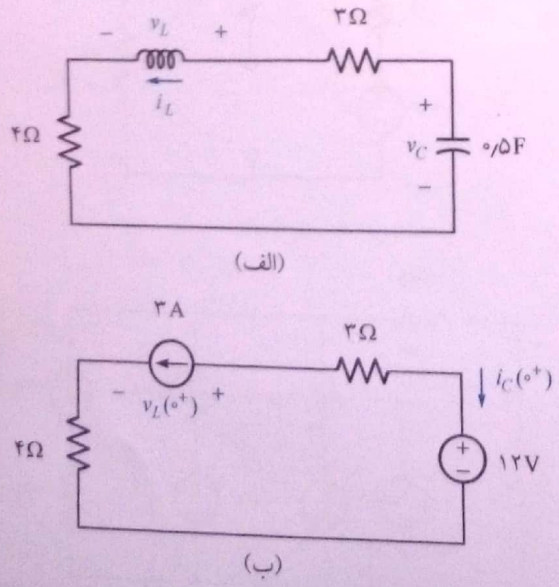


شکل ۷-۱۱ مدار مثال ۷-۶.

مثال ۷-۶ برای مدار شکل ۷-۱۱ مدار معادل $t=0^+$ را بیابید و آن را رسم کنید. به کمک این مدار ولتاژ القاگر و جریان خازن در $t=0^+$ را بیابید.

حل در $t<0$ یک مدار dc داریم که در آن القاگر اتصال کوتاه و خازن مدار باز است . به راحتی می‌توان دید که در $t<0$ داریم $i_L=3A$ و $v_C=12V$. در $t\geq 0^+$ مدار به صورت نشان داده شده در شکل ۷-۱۲ (الف) در می‌آید که در آن v_C و i_L مقدار ثابتی دارند. بنابراین می‌توان مدار را به صورت شکل ۷-۱۲ (ب) در آورد . به سادگی می‌توان دید که $i_C(0^+)=-3A$ و

$$v_L(0^+)=-3\times 3+12-4\times 3=-9V$$



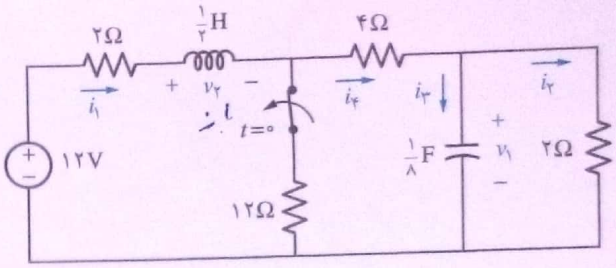
شکل ۷-۱۲ (الف) مدار شکل ۷-۱۱ بعد از باز شدن کلید. (ب) مدار معادل لحظه‌ای .

مثال بالا نمی‌تواند فایده‌ی مدار معادل لحظه‌ای را به خوبی نشان دهد. این روش در مواردی مزیت خود را آشکار می‌کند که مدار نسبتاً پیچیده باشد و بخواهیم تعداد زیادی کمیت را حساب کنیم .

Scanned by CamScanner

مثال ۷-۷

در مدار شکل ۷-۱۳ تمام جریانها و ولتاژهای مشخص شده در شکل را در $t=0^+$ به دست آورید.



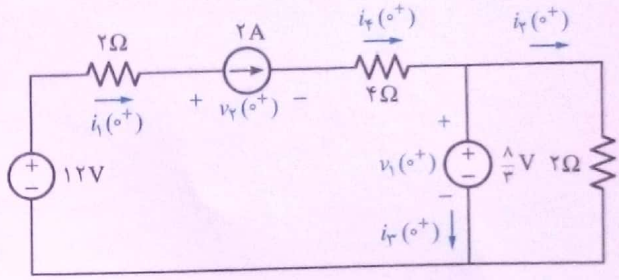
شکل ۷-۱۳ مدار مثال ۷-۷.

حل برای رسم مدار معادل 0^+ باید ولتاژ خازن و جریان القاگر را در آن لحظه بدانیم. در $t<0$ یک مدار dc داریم که به راحتی می‌توانیم آن را تحلیل کرده، به دست آوریم

$$i_1(0^-)=\frac{12}{2+[12\|(4+2)]}=2\text{A}$$

$$v_1(0^-)=2\text{A}\times\frac{12}{12+(4+2)}\times 2\Omega=\frac{8}{3}\text{V}$$

پس مدار معادل 0^+ به صورت شکل ۷-۱۴ است.این مدار تنها و تنها در لحظهٔ 0^+ با مدار اصلی معادل است و هر ولتاژ و جریانی که در آن به دست آوریم ، در واقع مقدار ولتاژ و جریان متناظر در مدار اصلی، در لحظهٔ 0^+ است . تحلیل این مدار ساده است و نتیجه می‌دهد



شکل ۷-۱۴ مدار معادل لحظه‌ای مثال ۷-۷.

$$i_1(0^+)=i_4(0^+)=2\text{A}$$

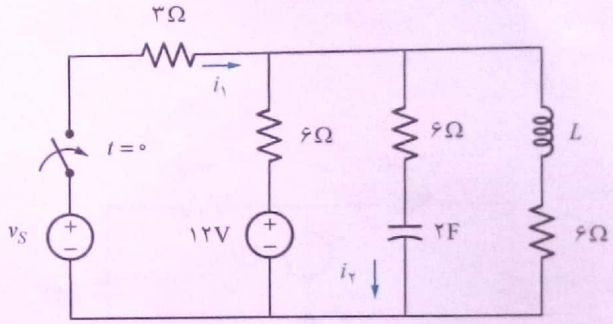
$$i_2(0^+)=\frac{\frac{8}{3}\text{V}}{2\Omega}=\frac{4}{3}\text{A}$$

$$i_3(0^+)=i_4(0^+)-i_2(0^+)=2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}\text{A}$$

$$v_1(0^+)=\frac{8}{3}\text{V}$$

$$v_2(0^+)=-2i_1(0^+)+12-\frac{8}{3}-4i_4(0^+)$$

$$=-(2\times 2)+12-\frac{8}{3}-(4\times 2)=-\frac{8}{3}\text{V}$$



شکل ۷-۱۵ یک مدار که هم منبع متغیر با زمان دارد و هم کلیدی که باعث تغییر ساختار مدار می‌شود.

اگر مدار منبعی با مقدار $f(t)$ داشته باشد، در لحظهٔ t_0 مقدار آن $f(t_0)$ است . بنابراین در مدار معادل لحظه‌ای به جای آن منبع یک منبع با مقدار ثابت $f(t_0)$ قرار می‌دهیم.

مثال ۷-۸

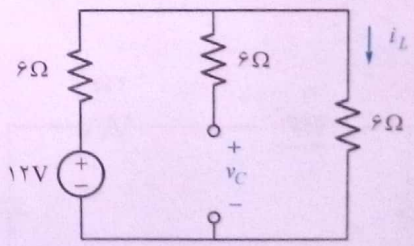
در مدار شکل ۷-۱۵ $v_s=6\cos 50t\,\text{V}$. مقدار اولیه‌ی جریان i_1 و i_2 را بیابید.

حل شکل ۷-۱۶ (الف) مدار را در $t<0$ نشان می‌دهد. با توجه به این مدار داریم

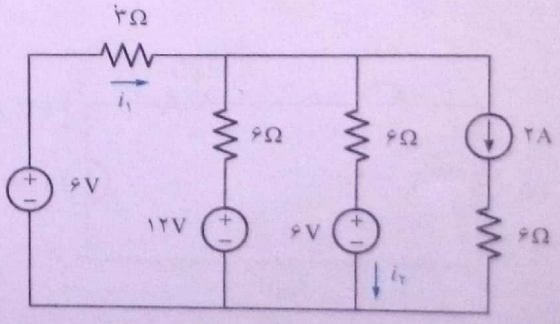
$$i_L=1\text{A}\qquad v_C=6\text{V}$$

مدار معادل 0^+ را به صورت نشان داده شده در شکل ۷-۱۶ (ب) رسم می‌کنیم . در این مدار به جای منبع v_s منبعی قرار داده‌ایم که در $t=0^+$ با آن هم‌ارز باشد. با توجه به این مدار می‌توانیم به دست آوریم

$$i_1(0^+)=0.5\text{A}\qquad i_2(0^+)=-0.25\text{A}$$



(الف)



(ب)

شکل ۷-۱۶ (الف) مدار شکل ۷-۱۵ پیش از بسته شدن کلید. (ب) مدار شکل ۷-۱۵ در $t=0^+$.

Scanned by CamScanner

مشتق ولتاژ عبارت است از $v'(t)=-2Ae^{-2t}+Be^{-2t}-2Bte^{-2t}$. چون $A=0$ با اعمال شرط اولیه‌ی بالا به دست می‌آوریم $B=-16$. بنابراین

$$v(t)=-16te^{-2t}u(t)$$

که برای تمام زمان‌ها معتبر است ، زیرا ولتاژ در $t<0$ صفر است .

مثال ۹-۳

در مدار شکل ۹-۶ جریان i را در $t>0$ بیابید.

حل در $t<0$ خازن مدار باز و القاگر اتصال کوتاه است (شکل ۹-۷) . پس

$$i=\frac{10\text{V}}{4\Omega+6\Omega}=1\text{A}$$

همچنین ولتاژ روی خازن ، با علامت + در بالا ، برابر ۶ V است . در $t>0$ یک مدار RLC سری داریم . طبق معادله‌ی (۹-۴)

$$\omega_0^2=1/LC=100 \qquad \alpha=R/(2L)=(6+3)/(2\times 0.5)=9$$

چون $\alpha<\omega_0$ مدار در حالت فرومیرا قرار دارد. فرکانس‌های طبیعی عبارت‌اند از

$$s_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}=-9\pm\sqrt{81-100}$$
$$=-9\pm j\sqrt{19}=-9\pm j4.36 \text{ rad/s}$$

و جریان را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$i(t)=e^{-\alpha t}(A\cos\omega_d t+B\sin\omega_d t)$$
$$=e^{-9t}(A\cos 4.36t+B\sin 4.36t) \text{ A}$$

$\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$

چون کمیت مورد نظر جریان القاگر است ، و جریان القاگر به طور ناگهانی تغییر نمی‌کند ، داریم $i(0^+)=i(0^-)=1\text{A}$. اعمال این شرط اولیه به دست می‌دهد $A=1$. برای یافتن مقدار اولیه‌ی مشتق جریان مدار لحظه‌ای شکل ۹-۸ را تشکیل داده ، به دست می‌آوریم

$$v_L(0^+)=-(6\times 1)+6-(3\times 1)=-3\text{V}$$

$$i'(0^+)=\frac{v_L(0^+)}{L}=\frac{-3}{0.5}=-6\text{ A/s}$$

اکنون داریم

$$i'(t)=-9e^{-9t}(A\cos 4.36t+B\sin 4.36t)+e^{-9t}(4.36)(-A\sin 4.36t+B\cos 4.36t)$$

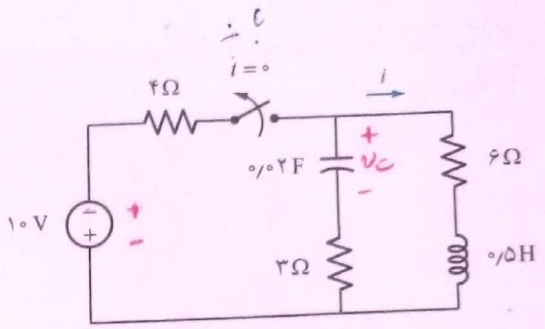
در $t=0^+$ داریم

$$-6=-9(A+0)+4.36(0+B)$$

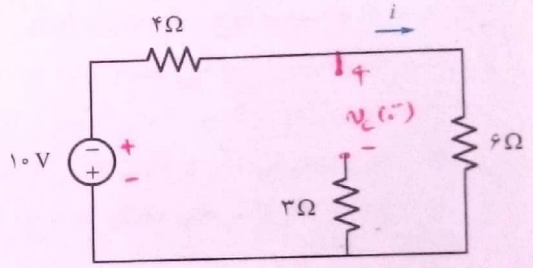
و چون $A=1$ بنابراین $B=0.69$. بنابراین

$$i(t)=e^{-9t}(\cos 4.36t+0.69\sin 4.36t) \text{ A}$$

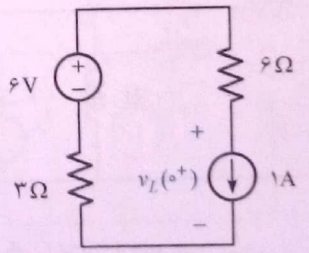
اصول کار بسیار مشخص است . فرکانس‌های طبیعی را با توجه به ترکیب مدار تعیین می‌کنیم (معادلات ۹-۳ ، ۹-۴ ، و ۹-۵) . پاسخ گذرا را با توجه به این که فرکانس‌های طبیعی چه وضعیتی دارند می‌نویسیم و مقادیر ثابت موجود در پاسخ را با توجه به شرایط اولیه تعیین می‌کنیم . اگر به مطالب فصول قبلی تسلط کافی داشته باشید ، حل مسائل مدارهای مرتبه دوم را هر چند طولانی ، ولی ساده می‌یابید.



شکل ۹-۶ مدار مثال ۹-۳.



شکل ۹-۷ مدار شکل ۹-۶ پیش از باز شدن کلید.

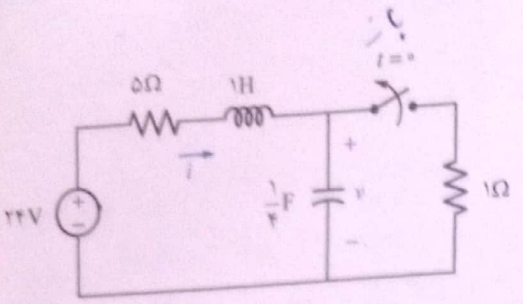


شکل ۹-۸ مدار معادل لحظه‌ای ، برای یافتن مقادیر اولیه .

Scanned by CamScanner

مدارهای RLC سری و موازی دارای منبع dc

باز هم مثل فصل قبل تنها مواردی را در نظر می‌گیریم که منبع موجود در مدار dc است. به این ترتیب پاسخ ماندگار (یا واداشته) تنها یک مقدار ثابت است. این مقدار ثابت با تحلیل dc مدار به دست می‌آید، زیرا بعد از گذشت زمان کافی و صفر شدن پاسخ گذرا، تمام کمیات مدار مقدار ثابتی پیدا می‌کنند و مدار در حالت dc قرار می‌گیرد.



شکل ۹-۹ یک مدار مرتبه دوم دارای منبع؛ مثال ۹-۴.

مثال ۹-۴ مدار شکل ۹-۹ ولتاژ روی خازن را بیابید.

حل در $t<۰$ یک مدار dc داریم که در آن خازن مدار باز و القاگر اتصال کوتاه است. جریان القاگر و ولتاژ روی خازن به صورت زیر به دست می‌آید

$$i=\frac{۲۴\text{V}}{۵\Omega+۱\Omega}=۴\text{A} \qquad v=۲۴\text{V}\times\frac{۱\Omega}{۱\Omega+۵\Omega}=۴\text{V}$$

در $t>۰$ مقاومت موازی با خازن از مدار خارج شده، یک مدار RLC سری دارای منبع حاصل می‌شود. برای یافتن پاسخ گذار داریم

$$\omega_۰^۲=۱/LC=۴ \qquad \alpha=R/(۲L)=۲/۵$$

بنابراین مدار فرامیرا است و فرکانس‌های طبیعی آن عبارت‌اند از

$$s_{۱,۲}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^۲-\omega_۰^۲}=-۲/۵\pm\sqrt{۶/۲۵-۴}$$
$$=-۲/۵\pm۱/۵=-۱,-۴\ \text{rad/s}$$

در حالت ماندگار خازن مدار باز و القاگر اتصال کوتاه است، بنابراین کل ولتاژ منبع روی خازن می‌افتد، یعنی $v_f=۲۴\text{V}$. پاسخ کل به صورت زیر است

$$v(t)=۲۴+Ae^{-t}+Be^{-۴t}$$

برای یافتن ضرائب ثابت به شرایط اولیه نیاز داریم. به سادگی به دست می‌آوریم

$$v(۰^+)=v(۰^-)=۴\text{V}$$
$$v'(۰^+)=\frac{i_C(۰^+)}{C}=\frac{i_L(۰^+)}{C}=\frac{i_L(۰^-)}{C}=\frac{۴\text{A}}{۰/۲۵\text{F}}=۱۶\text{V/s}$$

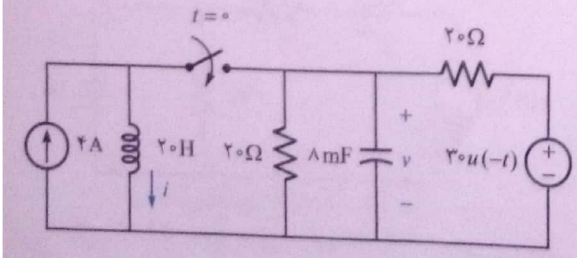
زیرا در این مدار جریان خازن و جریان القاگر یکی است. اعمال این شرایط اولیه به دست می‌دهد

$$۲۴+A+B=۴ \qquad -A-۴B=۱۶$$

که حل همزمانشان به دست می‌دهد $A=-۶۴/۳$ و $B=۴/۳$. پس

$$v(t)=۲۴-\frac{۶۴}{۳}e^{-t}+\frac{۴}{۳}e^{-۴t}\quad\text{V}$$

توجه کنید که اعمال شرایط اولیه باید پس از نوشتن جواب کامل (مجموع پاسخ گذرا و پاسخ واداشته) صورت بگیرد. اعمال شرایط اولیه به پاسخ گذرا و جمع کردن پاسخ به دست آمده با پاسخ واداشته نتیجه‌ای نادرست به همراه دارد.



شکل ۹-۱۰ مدار مثال ۹-۵.

مثال ۹-۵ در مدار شکل ۹-۱۰ جریان نشان داده شده برای القاگر را در $t>۰$ بیابید.

حل در $t<۰$ دو بخش مدار از هم مجزا هستند و هر دو در حالت dc قرار دارند. تمام جریان منبع جریان از القاگر می‌گذرد، ولی ولتاژ روی خازن با تقسیم ولتاژ به دست می‌آید و چون دو مقاومت برابر هستند، این ولتاژ نصف ولتاژ منبع و برابر ۱۵ V است.

Scanned by CamScanner

در $t>0$ کلید دو بخش مدار را به موازات هم قرار می‌دهد و ولتاژ منبع ولتاژ نیز صفر می‌شود (و چون منبع ولتاژ است معادل اتصال کوتاه می‌شود) . مدار RLC حاصل یک مدار موازی است که مقاومت معادل آن $20\Omega \| 20\Omega = 10\Omega$ است . برای این مدار طبق معادله‌ی (۹-۳) داریم

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 6.25 \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2.5$$

چون $\alpha > \omega_0$ ، مدار فرامیرا است و فرکانس‌های طبیعی آن عبارت‌اند از

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -11.98\,,\ -0.522 \text{ rad/s}$$

اتصال کوتاه شدن القاگر در حالت ماندگار باعث می‌شود تمام جریان منبع از آن بگذرد و پاسخ ماندگار برابر ۴ A باشد. پس پاسخ کل عبارت است از

$$i(t) = 4 + Ae^{-11.98t} + Be^{-0.522t}$$

شرایط اولیه را به راحتی می‌توان به دست آورد : $i(0^+) = i(0^-) = 4\text{A}$. همچنین چون القاگر و خازن موازی می‌شوند و ولتاژ روی خازن به طور ناگهانی تغییر نمی‌کند داریم

$$i'(0^+) = \frac{v_L(0^+)}{L} = \frac{v_C(0^+)}{20} = \frac{15}{20} = 0.75\,\text{A/s}$$

با اعمال این شرایط اولیه به دست می‌آوریم $A = -0.066$ و $B = 0.066$. بنابراین

$$i(t) = 4 - 0.066(e^{-11.98t} - e^{-0.522t}) \quad \text{A}$$

مدارهای مرتبه دوم در حالت کلی

هر مداری که دو عنصر ذخیره کننده‌ی انرژی داشته باشد ، یک مدار مرتبه دوم است . چنین مداری دو فرکانس طبیعی دارد ؛ و پاسخ گذرای آن می‌تواند یکی از سه حالت فرامیرا، فرومیرا ، و میرای بحرانی باشد ؛ این پاسخ دو ضریب نامعلوم دارد که باید با اعمال دو شرط اولیه تعیین شود . تفاوت چنین مداری با مدارهای قبلی این است که برای تعیین فرکانس‌های طبیعی آن باید معادله‌ی دیفرانسیل مدار را به دست آورد (موضوع فصل ۶ کتاب) و با حل معادله‌ی مشخصه فرکانس‌های طبیعی را تعیین کرد. حل مسئله از جنبه‌های دیگر کاملاً شبیه مدارهای RLC سری و موازی است ، یعنی رهیافت حل مسئله به صورت بیان شده در کنار صفحه است ، تنها سه گام اول به صورت زیر تغییر می‌کند:

۱. نوشتن معادله‌ی دیفرانسیل مدار
۲. نوشتن معادله‌ی مشخصه
۳. حل معادله‌ی مشخصه و یافتن فرکانس‌های طبیعی

مثال ۹-۶ ولتاژ نشان داده بر روی خازن ، خروجی مدار شکل ۹-۱۱ است . پاسخ پله‌ی این مدار را بیابید.

حل منظور از پاسخ پله ، پاسخ مدار در حالتی است که ورودی پله‌ی واحد باشد. این مدار یک مدار مرتبه دوم است ، ولی مدار بدون منبع RLC سری یا موازی نیست . بنابراین برای تعیین فرکانس‌های طبیعی باید معادله‌ی دیفرانسیل مدار را بنویسیم . به این منظور با استفاده از عملگر مشتقگیری مدار شکل ۹-۱۲ را تشکیل می‌دهیم . KVL حول مدار به دست می‌دهد

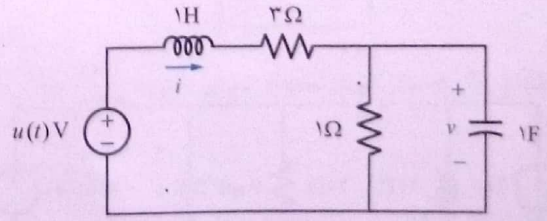
$$Di + 3i + v = v_s$$

جمع‌بندی

برای تحلیل مدارهای RLC سری یا موازی بدون منبع یا دارای منبع dc باید به این صورت عمل کنیم :

۱. تشخیص این که مدار بدون منبع (یعنی مدار در حالت صفر شدن منابع مستقل) RLC سری است یا موازی .
۲. یافتن α و ω_0 از معادله‌ی (۹-۳) (برای مدار موازی) یا (۹-۴) (برای مدار سری) .
۳. یافتن فرکانس‌های طبیعی از معادله‌ی (۹-۵)
۴. یافتن پاسخ واداشته با مدار باز کردن خازن و اتصال کوتاه کردن القاگر.
۵. نوشتن مجموع پاسخ واداشته و پاسخ گذرا به عنوان پاسخ کل
۶. تعیین شرایط اولیه (مقدار اولیه‌ی و مقدار اولیه‌ی مشتق کمیت مورد نظر).
۷. اعمال شرایط اولیه و تعیین دو ضریب ثابت موجود در پاسخ کل .

معمولاً طولانی‌ترین گام ، گام آخر است ولی ممکن است در بعضی موارد گام ۶ نیز به همان اندازه طولانی باشد.



شکل ۹-۱۱ مدار مرتبه دومی که RLC سری یا موازی نیست .

Scanned by CamScanner

KCL در گره‌ی بالای خازن نیز به دست می‌دهد

$$i=\frac{v}{1}+Dv$$

برای حذف i از این دو معادله ، معادله‌ی دوم را در معادله‌ی اول قرار می‌دهیم

$$(D+3)(1+D)v+v=v_s$$

که به صورت $(D^2+4D+4)v=v_s$ ساده می‌شود. پس معادله‌ی دیفرانسیل عبارت است از

$$v''+4v'+4v=v_s$$

معادله‌ی مشخصه $s^2+4s+4=0$ است که دو ریشه در $s=-2\text{rad/s}$ دارد. مدار میرای بحرانی است . در حالت ماندگار خازن مدار باز و القاگر اتصال کوتاه است و ولتاژ خروجی با تقسیم ولتاژ به دست می‌آید

$$v_f=1\text{V}\times\frac{1\Omega}{1\Omega+3\Omega}=\frac{1}{4}\text{V}$$

پاسخ کل به صورت زیر است

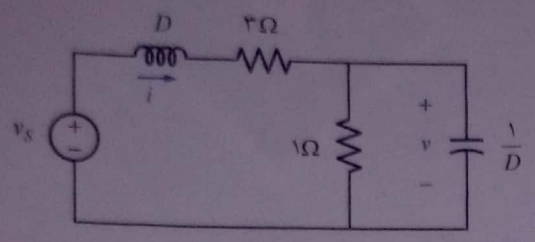
$$v=\frac{1}{4}+Ae^{-2t}+Bte^{-2t}\ \text{V}$$

چون در $t<0$ مدار منبع نداشته است ، هم مقدار اولیه‌ی ولتاژ خازن و هم مقدار اولیه‌ی جریان القاگر صفر است . اعمال این شرط اولیه به دست می‌دهد

$$0=\frac{1}{4}+A+(B\times 0)$$

که به دست می‌دهد $A=-\frac{1}{4}$. در $t=0^+$ از خازن جریانی هم نمی‌گذرد ، زیرا جریان القاگر صفر است . بنابراین $v'(0^+)=0$. داریم $v'=-2Ae^{-2t}+Be^{-2t}-2Bte^{-2t}$ ، بنابراین اعمال این شرط به دست می‌دهد $0=-2A+B$ یا $B=-\frac{1}{2}$. پس

$$v=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}e^{-2t}-\frac{1}{2}te^{-2t}\right)u(t)\ \ \text{V}$$



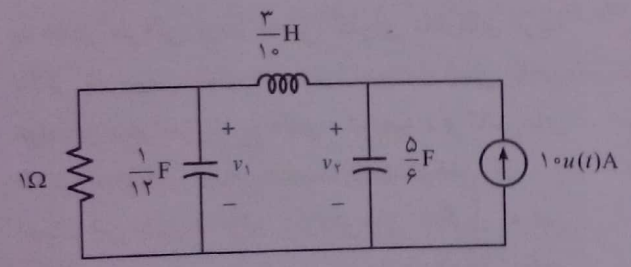
شکل ۹-۱۲ استفاده از عملگر مشتقگیری برای یافتن معادله‌ی دیفرانسیل مدار شکل ۹-۱۱.

مدارهای مرتبه بالا

روش بیان شده در بالا را می‌توان برای مدارهای مرتبه بالاتر نیز به کار برد. تفاوت تنها در میزان کار لازم برای به دست آوردن جواب است ، به این لحاظ که اکنون باید معادله‌ی مرتبه بالاتری حل شود ، تعداد فرکانس‌های طبیعی بیشتر است ، بنابراین تعداد ضرائب ثابت مجهول نیز بیشتر می‌شود و علاوه بر مقدار اولیه‌ی کمیت باید مقدار اولیه‌ی مشتق‌های آن نیز به دست آید. ولی به لحاظ مفاهیم لازم برای تحلیل ، به هیچ چیز دیگری نیاز نداریم.

مثال ۹-۷ در مدار شکل ۹-۱۳ ولتاژ روی خازن سمت راست ، v_2 را بیابید.

حل برای یافتن معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر مدار ، با استفاده از عملگر مشتقگیری مدار شکل ۹-۱۴ را رسم می‌کنیم . معادلات گره‌ای را می‌توان به شکل زیر نوشت



شکل ۹-۱۳ یک مدار مرتبه سوم که در مثال ۹-۷ تحلیل شده است .

Scanned by CamScanner