کاردینال (1)

$\emptyset$، ۰ عضو دارد و $\mathbb{N}_k$، k عضو دارد. آیا می‌توان به مجموعه‌های نامتناهی هم عددی نسبت داد؟! این کار شدنی است. به هر مجموعهٔ A، شئی ای ریاضی که عدد اصلی A (کاردینال A) نامیده می‌شود و با $\mathrm{Card}(A)$ نشان داده می‌شود، نسبت می‌دهیم. در این روش $\mathrm{Card}(A)$ را تعریف نمی‌کنیم و تنها با خاصیت‌های زیر آنرا معرفی می‌کنیم:

۱) $$A=\emptyset \iff \mathrm{card}\, A = 0$$

۲) $$A\sim \mathbb{N}_k \iff \mathrm{card}\, A = k$$

۳) $$A\sim B \iff \mathrm{card}\, A = \mathrm{card}\, B$$

تذکر. در نظریه مجموعه، می‌توان کاردینال هر مجموعه را به شکل دقیق تعریف کرد و در واقع خود یک مجموعه خواهد بود! ادعای ما این است که $\mathrm{card}\, A$ خواصی شبیه اعداد طبیعی دارد و می‌توان آنها را مرتب کرد و برای آن جمع و ضرب و توان را به طور مناسب تعریف کرد البته تفاوت‌هایی هم دارد، مثلاً نمی‌توان برای آنها تفریق را تعریف کرد!

① تعریف. $\mathrm{card}\, A \le \mathrm{card}\, B$ دقیقاً وقتی A با زیرمجموعه‌ای از B، هم‌توان باشد.
اگر $\mathrm{card}\, A \le \mathrm{card}\, B$ و $\mathrm{card}\, A \ne \mathrm{card}\, B$، می‌نویسیم $\mathrm{card}\, A < \mathrm{card}\, B$.

مثال. $\mathrm{card}\, \mathbb{N} = \mathrm{card}\, \mathbb{Z} = \mathrm{card}\, \mathbb{Q}$

مثال. $\mathrm{card}\, \mathbb{N} < \mathrm{card}\, \mathbb{R}$

---

② قضیه (شرودر - برنشتاین). اگر $\mathrm{card}\, A \le \mathrm{card}\, B$ و $\mathrm{card}\, B \le \mathrm{card}\, A$ آنگاه $\mathrm{card}\, A = \mathrm{card}\, B$.

اثبات - ابتدا لم زیر را اثبات می‌کنیم.

لم. اگر $B \subsetneq A$ و $f: A \xrightarrow{\text{یک‌به‌یک}} B$، آنگاه $h: A \xrightarrow[\text{پوشا}]{\text{یک‌به‌یک}} B$ موجود است.

اثبات لم. قرار دهید $C=\bigcup_{n\ge 0} f^n(A-B)$، به عبارت دیگر

$$C=(A-B)\cup f(A-B)\cup f(f(A-B))\cup\cdots$$

حال تابع $h: A \to B$ را به شکل زیر تعریف کنید:

$$h(z)=\begin{cases} f(z) & \text{اگر } z\in C \\ z & \text{اگر } z\in A-C \end{cases}$$

خواص زیر برقرارند. (الف) $A-B\subseteq C$ بنابر تعریف مجموعه C

(ب) $f(C)\subseteq C$

اثبات ب: اگر $x\in C$، آنگاه nای هست که $x\in f^{n}(A-B)$ و بنابراین $f(x)\in f^{n+1}(A-B)\subseteq C$

(ج) اگر $m<n$، آنگاه $f^{m}(A-B)$ و $f^{n}(A-B)$ مجزا هستند.

اثبات ج: اگر $y\in f^{m}(A-B)\cap f^{n}(A-B)$ آنگاه وجود دارد $x, x'\in A-B$ بطوریکه $f^{m}(x')=f^{n}(x)=y$. حال چون f یک به یک است $f^{n-m}(x')=f^{0}(x)=x$. اما $x\in A-B$ داریم و $f^{n-m}(x')\in B$، تناقض.

(د) h یک به یک است.

اثبات د: اگر $h(x)=h(x')$ آنگاه بنابر تعریف f و قسمت ب، یا $x, x'\in C$ یا $x, x'\in A-C$. در هر دو صورت داریم $x=x'$.

(و) h پوشا است.

اثبات و:

$$h(A) \overset{\text{h یک به یک}}{=} h(A-C)\cup h(C)$$

$$\overset{\text{h تعریف}}{=} (A-C)\cup f(C)$$

$$\overset{\text{C تعریف}}{=} \Big[A-\bigcup_{n\geq 0} f^{n}(A-B)\Big]\cup f\Big(\bigcup_{n\geq 0} f^{n}(A-B)\Big)$$

$$\overset{\text{f یک به یک و قسمت ج}}{=} \Big[A-\bigcup_{n\geq 0} f^{n}(A-B)\Big]\cup \bigcup_{n\geq 1} f^{n}(A-B)$$

$$= A-(A-B)$$

$$= B$$

ادامه اثبات قضیه ش-ب :

با توجه به فرض، مجموعه‌های $A_0 \subseteq A$ و $B_0 \subseteq B$، $f_0 : A \sim B_0$ و $g_0 : B \sim A_0$ موجودند. تعریف کنید $f : A \longrightarrow A_0$ ، $f(x) = g_0(f_0(x))$. f یک به یک است.

پس بنابر لم قبل، تناظر دوسویی $h : A \sim A_0$ موجود است. در اینصورت $g_0^{-1} \circ h$ تناظری یک به یک بین A و B است. پس $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B$.

چند نکته :

① اگر $A \subseteq B$ آنگاه $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} B$

اثبات① $A \sim A \subseteq B$

② $n < \operatorname{card} \mathbb{N}$

اثبات② $\mathbb{N}_n \subseteq \mathbb{N}$

③ به ازای هر مجموعهٔ نامتناهی A، $\operatorname{card} \mathbb{N} \leq \operatorname{card} A$

اثبات③ هر مجموعهٔ نامتناهی، یک زیرمجموعهٔ شمارای نامتناهی دارد.

④ اگر $A \subseteq B \subseteq C$ و $A \sim C$، آنگاه $A \sim B$

اثبات④ داریم $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} B \leq \operatorname{card} C$. از طرفی $\operatorname{card} A = \operatorname{card} C$ پس بنابر ش.ب، $A \sim B$

⑤ $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} B$ اگر و تنها اگر تابعی یک به یک چون $f : A \longrightarrow B$ موجود باشد.

اثبات⑤ الف: اگر $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} B$ آنگاه $B_0 \subseteq B$ وجود دارد که $A \sim B_0$، یعنی $h : A \xrightarrow[\text{پوشا}]{\text{یک به یک}} B_0$ وجود دارد. در اینصورت $h_1 : A \longrightarrow B$ ، $h_1(x) = h(x)$ یک به یک است.

ب: فرض کنید $f : A \longrightarrow B$ یک به یک باشد. در اینصورت $f_1 : A \longrightarrow \operatorname{Im}(f)$ ، $f_1(x) = f(x)$ یک به یک و پوشاست.

و $\operatorname{Im} f \subseteq B$ پس $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} B$.

(۳) قضیه (کانتور) اگر X یک مجموعه دلخواه (متناهی یا نامتناهی) باشد، آنگاه

$$\operatorname{Card}(X) < \operatorname{Card}(P(X))$$

اثبات: اگر X تهی باشد، آنگاه حکم واضح است.
فرض کنید X ناتهی باشد. تابع زیر یک به یک است:

$$g: X \to P(X)$$
$$f(x) = \{x\}$$

پس $\operatorname{Card} X \leq \operatorname{Card} P(X)$. حال به برهان خلف ثابت می‌کنیم که $\operatorname{Card} X \neq \operatorname{Card} P(X)$.
فرض کنید (فرض خلف) که $f: X \sim P(X)$. تعریف می‌کنیم

$$S = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$$

چون f پوشا است، $e \in X$ موجود است که $f(e) = S$
دو حالت متصور است:

الف) $e \in S$. دراینصورت $e \notin f(e) = S$، تناقض.

ب) $e \notin S$. دراینصورت $e \in f(e) = S$، تناقض.

پس فرض خلف غلط است و $\operatorname{Card} X < \operatorname{Card} P(X)$.

---

(۴) نکته. بنا به قضیه کانتور، $\operatorname{Card} \mathbb{N} < \operatorname{Card} P(\mathbb{N})$. یک سؤال مهم این است که آیا مجموعه‌ای چون X وجود دارد که اگر $\operatorname{Card}(X) = x$، آنگاه

$$\operatorname{Card}(\mathbb{N}) < x < \operatorname{Card} P(\mathbb{N})$$

این موضوع را مسئله پیوستار می‌نامند. اکنون می‌دانیم که وجود یا عدم وجود چنین مجموعه‌ای مستقل از بقیه خواص مجموعه‌هاست.