

بخش A (قضیه - ۸ نمره):

- ۱- هرگاه E زیر مجموعه فضای متریک X باشد و p یک نقطه حدی E باشد، آنگاه دنباله‌ای مانند $\{p_n\}$ در E هست که به نقطه p همگرا است. (۲ نمره)
- ۲- هرگاه \bar{E} ، بست مجموعه E در فضای متریک X باشد، آنگاه $diam E = diam \bar{E}$ (۳ نمره)
- ۳- هرگاه $f: X \rightarrow Y$ نگاشتی پیوسته باشد و $E \subseteq X$ همبند باشد آنگاه $f(E)$ زیر مجموعه‌ای همبند از Y است. (نمره ۳)

بخش B (تمرین - ۸ نمره):

- ۴- فرض کنید $\{p_n\}$ یک دنباله کوشی در فضای متریک X باشد و زیر دنباله‌ای از آن مانند $\{p_{n_k}\}$ به نقطه $p \in X$ همگرا باشد. ثابت کنید تمام دنباله $\{p_n\}$ همگرا به p خواهد بود.
- ۵- سری $\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \frac{1}{64} + \dots$ را در نظر بگیرید، نشان دهید استفاده از آزمون نسبت برای بررسی همگرایی این سری بی‌فایده است در حالیکه آزمون ریشه همگرایی این سری را تضمین می‌کند.
- ۶- فرض کنید $f: X \rightarrow Y$ نگاشتی پیوسته باشد و $E \subseteq X$ یک زیر مجموعه چگال X باشد، نشان دهید $f(E)$ در $f(X)$ چگال است.
- ۷- آیا سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2}) + \frac{1}{3} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \dots$ همگرا است یا واگرا؟ اگر همگرا است، همگرای مشروط است یا مطلق؟ آیا این سری تجدید آرایشی دارد که به عدد 2014 همگرا شود؟

بخش C (سوالات با پاسخ کوتاه- برای پاسخ به سوالات این بخش باید قضیه‌ها و نکاتی را که می‌دانید کنار هم قرار دهید تا جواب سوال را بگیرید- ۵ نمره)

- ۸- فرض کنید $f: [a, b] \rightarrow Y$ تابعی پیوسته باشد (Y یک فضای متریک دلخواه است). فرض کنید $\{y_n\}$ یک دنباله کوشی در برد f یعنی در $f([a, b])$ باشد. نشان دهید دنباله $\{y_n\}$ همگرا است.
- ۹- نشان دهید تابع $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ نمی‌تواند هم یک به یک، هم پوشا و هم پیوسته باشد.
- ۱۰- هرگاه $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی نا منفی باشد به طوری که $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ آنگاه مقدار حد زیر چقدر است؟
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$
- ۱۱- هرگاه $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و E یک دایره در \mathbb{R}^2 باشد، نشان دهید $f(E)$ باید یک بازه به صورت $[a, b]$ باشد.
- ۱۲- نشان دهید تابع $f(x) = \arctan(x)$ تابعی پیوسته یکنواخت است.

بخش D (سوال کوئیز- ۱،۵ نمره):

- ۱۳- نشان دهید سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ همگرا است.

بخش F (پاسخ به این سوال اجباری نیست و لی اگر پاسخ دهید به صورت امتیازی نمره می‌گیرید)

- ۱۴- شخصی با دوچرخه راس ساعت 12 شب از تهران به سمت قم حرکت می‌کند و بعد از 11 ساعت به قم می‌رسد (می‌تواند در مسیر برای استراحت متوقف شده باشد) و دوباره ساعت 12 شب روز بعد از قم به سمت تهران با سرعت دلخواه

حرکت می کند وبعد از 11 ساعت به تهران میرسد. نشان دهید جایی بین قم و تهران وجود دارد که در زمان عبور دوچرخه سوار از آنجا، ساعت در زمان رفت و برگشت عدد یکسانی را نشان می دهد.