فصل هفتم: خیز تیرها

مقدمه

همانطور که در فصل خمش محض دیدیم رابطه زیر بین گشتاور خمشی و انحنای تیر برقرار است:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M(x)}{EI} \qquad (۷-۱)$$

از طرفی از ریاضی می‌دانیم رابطه مقابل بین انحنای یک منحنی با معادله آن برقرار است:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}\approx\frac{d^2y}{dx^2} \qquad (۷-۲)$$

با جاگذاری از رابطه بالا در رابطه (۷-۱) بدست می‌آید:

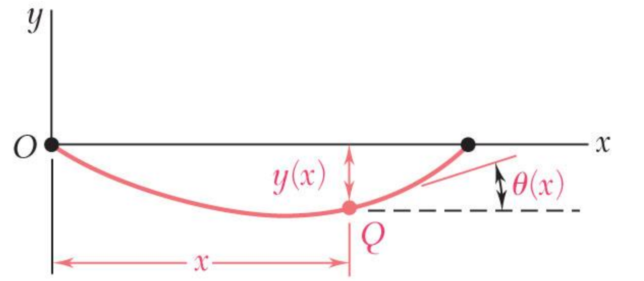
(۷-۳)

××

شیب و خیز تیر

اگر از معادله بالا یکبار انتگرال بگیریم شیب منحنی تیر در نقطه Q بدست می‌آید:

$$EI\,\theta\approx EI\frac{dy}{dx}=\int_0^x M(x)\,dx+C_1 \qquad (۷-۴)$$

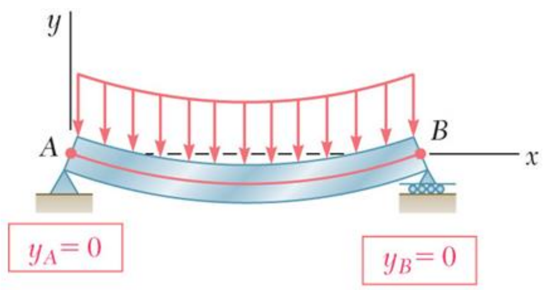


با انتگرال‌گیری دوباره، خیز تیر در نقطه Q حاصل می‌شود:

(۷-۵)

ثابت های انتگرال‌گیری را با کمک شرایط مرزی تعیین می‌کنیم.

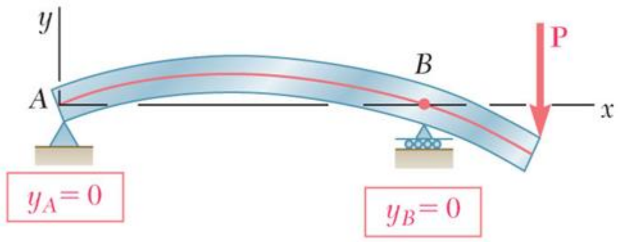
××



مثلاً شرایط مرزی برای سه حالت از تیرهای

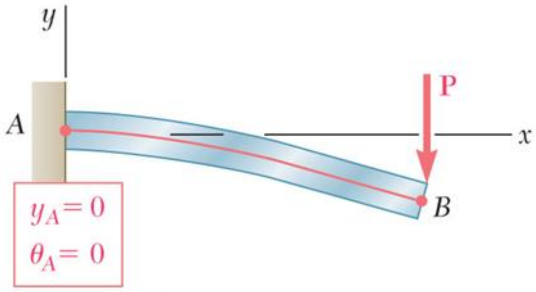
استاتیکی معین عبارتند از:

تیر با تکیه‌گاه ساده:



$y_A = 0, \quad y_B = 0$

تیر با انتهای آویزان:



تیر یکسرگیردار:

$y_A = 0, \quad \theta_A = 0$

××

تعیین مستقیم شیب و خیز تیر از توزیع بار

برای یک تیرتحت توزیع بار w روابط زیر برقرار است:

$$\frac{dM}{dx} = V(x) \qquad \frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dV}{dx} = -w(x) \tag{۷-۶}$$

بنابراین از معادله (۷-۳) می‌توان نوشت:

(۷-۷)

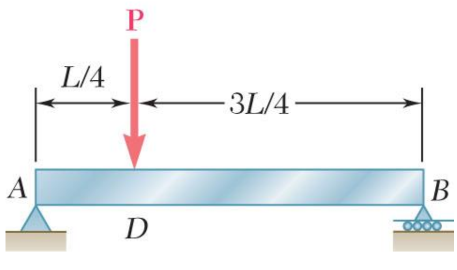
با ۴ بار انتگرال‌گیری از معادله بالا خواهیم داشت:

$$EI\,y(x) = -\int dx \int dx \int dx \int w(x)\,dx + \tfrac{1}{6}C_1x^3 + \tfrac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4 \tag{۷-۸}$$

ثوابت انتگرال‌گیری هم از شرایط مرزی تعیین می‌گردند.

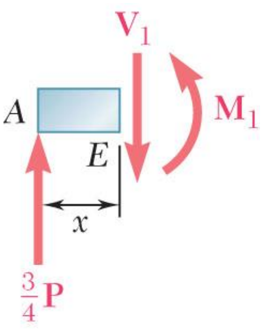
××

مثال ۷-۱



شیب و خیز تیر را در نقطه D تعیین کنید.

حل: با توجه به وجود نیروی P در نقطه D معادله گشتاور $M(x)$ در قسمتهای AD و DB متفاوت است.



الف) از A تا D $(x<L/4)$:

نقطه دلخواه E را بین A و D در نظر گرفته و دیاگرام آزاد قسمت AE را رسم می‌کنیم.

$$M_1 = \frac{3P}{4}x$$

××

یا با استفاده از معادله (۷-۳):

$y_1(x)$ در این معادله منحنی خیز قسمت AD تیر را مشخص می‌کند.

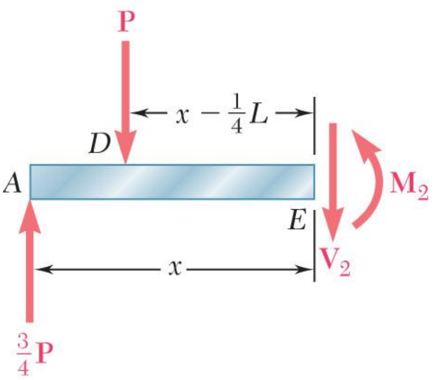
با انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

(الف)

$$EI\theta_1 = EI\frac{dy_1}{dx} = \frac{3}{8}Px^2 + C_1 \qquad EIy_1 = \frac{1}{8}Px^3 + C_1x + C_2$$

ب) از D تا B $(x>L/4)$:

اینبار نقطه دلخواه E را بین D و B در نظر گرفته و دیاگرام آزاد قسمت DE را رسم می‌کنیم.



××

$$M_2 = \frac{3P}{4}x - P\left(x - \frac{L}{4}\right) = -\frac{1}{4}Px + \frac{1}{4}PL$$

از معادله (۷-۳) خواهیم داشت:

$y_2(x)$ در این معادله منحنی خیز قسمت DB تیر را مشخص می‌کند.

با انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

(ب)

$$EI\theta_2 = EI\frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{8}Px^2 + \frac{1}{4}PLx + C_3$$

$$EIy_2 = -\frac{1}{24}Px^3 + \frac{1}{8}PLx^2 + C_3x + C_4$$

××

حال برای تعیین ثوابت انتگرال‌گیری در معادلات (الف) و (ب) از شرایط مرزی بهره می‌گیریم.

$$[x = 0 \rightarrow y_1 = 0] \Rightarrow C_2 = 0$$

(ج)

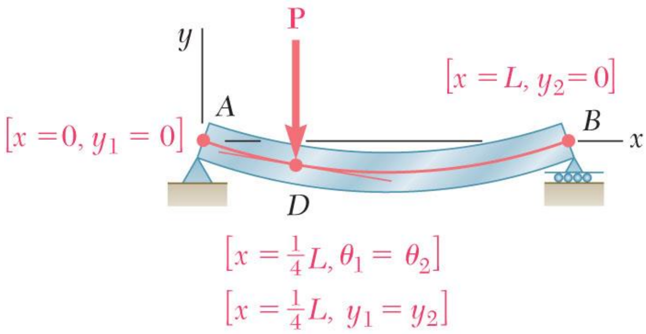
همانطور که می‌بینیم با کمک شرایط مرزی C_2 بدست آمد و یک معادله هم برای تعیین C_3 و C_4 حاصل شد.

با توجه به اینکه C_1 هم مجهول است پس یک معادله و سه مجهول داشته و به دو معادله دیگر برای تعیین همه ثوابت نیازمندیم.

××

$$\left[x = L/4 \rightarrow \theta_1 = \theta_2\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{123}PL^2 + C_1 = \frac{7}{128}PL^2 + C_3 \qquad \text{(د)}$$

$$\left[x = L/4 \rightarrow y_1 = y_2\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{512}PL^3 + C_1\frac{L}{4} = \frac{11}{1536}PL^3 + C_3\frac{L}{4} + C_4 \qquad \text{(ه)}$$



××

با حل دستگاه معادلات حاصل از (ج) و (د) و (ه) بدست می‌آید:

$$C_1 = -\frac{7PL^2}{128}, \quad C_3 = -\frac{11PL^2}{128}, \quad C_4 = -\frac{PL^3}{384}$$

با جاگذاری در معادلات (الف) و (ب) خواهیم داشت:

$$EI\theta_1 = \frac{3}{8}Px^2 - \frac{7PL^2}{128} \qquad EIy_1 = \frac{1}{8}Px^3 - \frac{7PL^2}{128}x$$

$$EI\theta_2 = -\frac{1}{2}Px^2 + \frac{1}{4}PLx - \frac{11PL^2}{128}$$

××

شیب و خیز تیر در نقطه D را می‌توان با قرار دادن $x = L/4$ در معادله مربوط به θ_1 و y_1 (یا θ_2 و y_2) یافت:

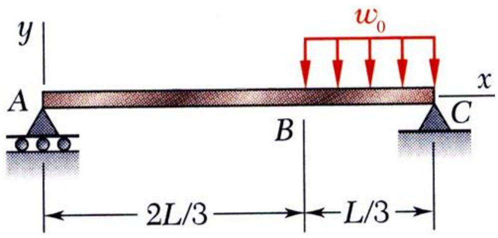
$$\theta_D = -\frac{PL^2}{32EI}$$

چون θ_D مساوی صفر نیست بنابراین خیز نقطه D خیز ماکزیمم نیست.

×××

استفاده از توابع تکینی برای تعیین شیب و خیز تیر

در مثال (۷-۱) دیدیم اگرگشتاور خمشی در طول تیر با بیشتر از یک معادله بیان شود عملیات محاسباتی زیادی برای تعیین ثوابت انتگرال‌گیری نیاز است.



برای کم کردن محاسبات از توابع تکینی استفاده می‌کنیم که بصورت زیر تعریف می‌شود:

(۷-۹)

به عنوان مثال برای شکل بالا می‌توان نوشت:

$$w(x) = w_0\left\langle x-\frac{2L}{3}\right\rangle^0 = \begin{cases} w_0\left(x-\dfrac{2L}{3}\right)^0 = w_0 & \text{when } x \ge 2L/3 \\ 0 & \text{when } x < 2L/3 \end{cases}$$

×××

معادله نیروی برشی و گشتاور در طول این تیر از معادله (۷-۶) حاصل می‌گردد:

$$V(x) = -\int w(x)\,dx = -\int w_0\left\langle x-\frac{2L}{3}\right\rangle^0 dx = -w_0\left\langle x-\frac{2L}{3}\right\rangle + C_1$$

$$M(x) = \int V(x)\,dx = \int\left[-w_0\left\langle x-\frac{2L}{3}\right\rangle + C_1\right]dx = -\frac{1}{2}w_0\left\langle x-\frac{2L}{3}\right\rangle^2 + C_1x + C_2$$

برای یافتن C_1 و C_2 از شرایط مرزی استفاده می‌کنیم.

در دو تکیه‌گاه ساده تیر یعنی در $x = 0$ و $x = L$ گشتاور M صفر است:

$$\Rightarrow \quad C_2 = 0$$

××

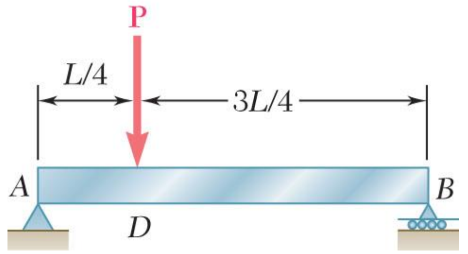
$$[x=L \rightarrow M=0] \Rightarrow -\frac{1}{2}w_0\left\langle L-\frac{2L}{3}\right\rangle^2 + C_1(L)=0 \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{1}{2}w_0\left(L-\frac{2L}{3}\right)^2 + C_1(L)=0 \Rightarrow C_1=\frac{1}{18}w_0L$$

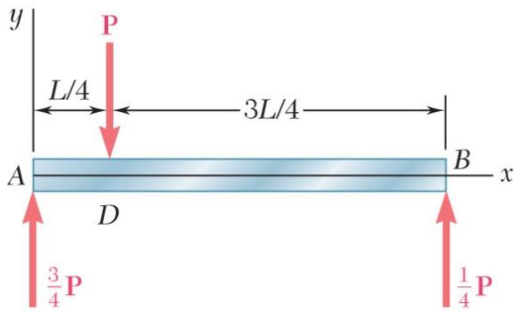
بنابراین نیرو و گشتاور در طول تیر عبارتند از:

$$V(x) = -w_0\left\langle x-\frac{2L}{3}\right\rangle + \frac{1}{18}w_0L$$

××

مثال ۷-۲





حل: دیاگرام آزاد تیر در شکل نشان داده است.

با توجه به این شکل، معادله نیروی برشی در طول تیر

عبارت است از:

معادله گشتاور هم بصورت زیر است:

$$M=\int V(x)\,dx=\int\left[\frac{3}{4}P-P\left\langle x-\frac{L}{4}\right\rangle^0\right]dx=\frac{3}{4}Px-P\left\langle x-\frac{L}{4}\right\rangle+C_1$$

××

چون گشتاور در تکیه‌گاه ساده صفر است بنابراین $C_1=0$ خواهد بود.

حال با استفاده از معادله (۷-۳) داریم:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=M=\frac{3}{4}Px-P\left\langle x-\frac{L}{4}\right\rangle$$

با انتگرال‌گیری بدست می‌آید:

$$EIy=\frac{1}{8}Px^3-\frac{1}{6}P\left\langle x-\frac{L}{4}\right\rangle^3+C_2x+C_3$$

حال شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم:

$$[x=0,y=0]\Rightarrow 0=\frac{1}{8}P(0)^3-\frac{1}{6}P\left\langle 0-\frac{L}{4}\right\rangle^3+C_2(0)+C_3 \qquad \Rightarrow \qquad C_3=0$$

××

$$[x=L,y=0]\Rightarrow 0=\frac{1}{8}P(L)^3-\frac{1}{6}P\left\langle L-\frac{L}{4}\right\rangle^3+C_2(L) \qquad \Rightarrow \qquad C_2=-\frac{7PL^2}{128}$$

بنابراین معادله شیب و خیز تیر عبارت است از:

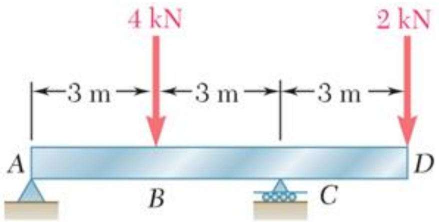
$$EI\theta=\frac{3}{8}Px^2-\frac{1}{2}P\left\langle x-\frac{L}{4}\right\rangle^2-\frac{7PL^2}{128}$$

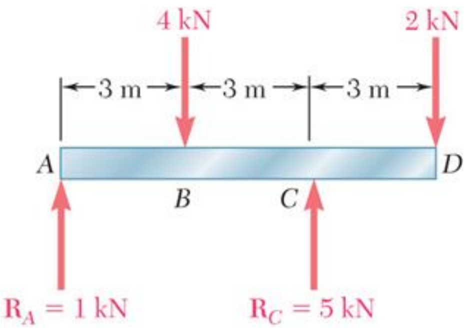
برای نقطه D داریم:

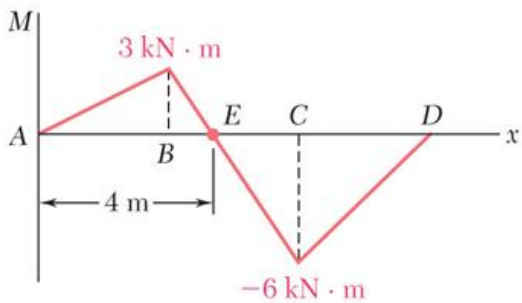
$$EI\theta_D=\frac{3}{8}P\left(\frac{L}{4}\right)^2-\frac{1}{2}P\left\langle\frac{L}{4}-\frac{L}{4}\right\rangle^2-\frac{7PL^2}{128}\Rightarrow$$

$$EIy=\frac{1}{8}P\left(\frac{L}{4}\right)^3-\frac{1}{6}P\left\langle\frac{L}{4}-\frac{L}{4}\right\rangle^3-\frac{7PL^2}{128}\left(\frac{L}{4}\right)\Rightarrow y_D=-\frac{3PL^3}{256EI}$$

××







نکته‌هایی از معادله (۷-۳)

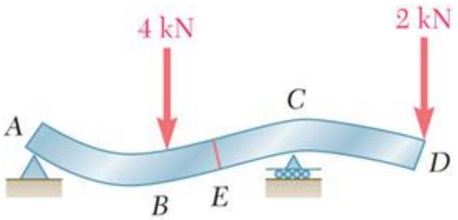
طبق معادله (۷-۳) مشتق دوم منحنی خیز که جهت تقعر منحنی خیز را مشخص می‌کند با گشتاور M متناسب است:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=M(x) \qquad (۷-۳)$$

جاهایی که M مثبت باشد تقعر منحنی خیز رو به بالاست مثل فاصله A تا E در تیر مقابل.

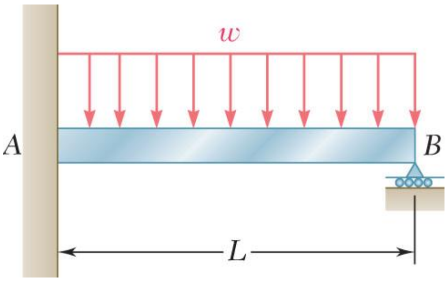
جاهایی که M منفی باشد تقعر منحنی خیز رو به پایین است

مثل فاصله E تا D در تیر مقابل.



××

تیرهای استاتیکی نامعین

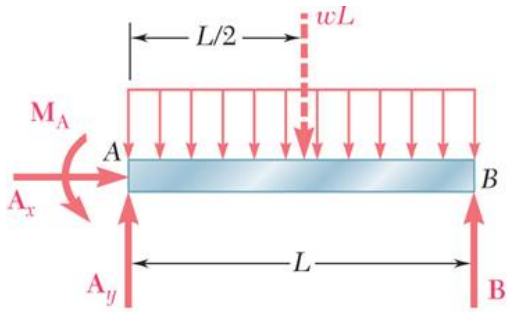


تیر AB در نقطه A تکیه‌گاه گیردار و در نقطه B تکیه‌گاه غلتکی دارد.

در دیاگرام آزاد تیر چهار عکس‌العمل مجهول داریم.

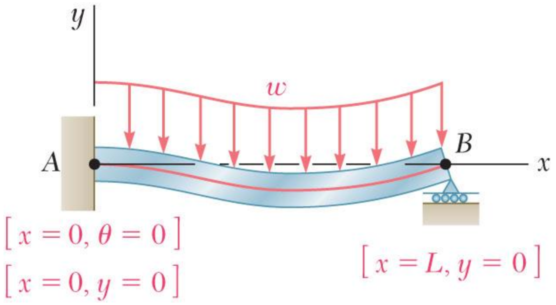
اما برای تعادل استاتیکی تیر باید سه معادله زیر ارضا شود:

(۷-۱۰)



با توجه به اینکه تعداد مجهولات از تعداد معادلات بیشتر است مسأله استاتیکی نامعین است.

××



علاوه بر معادلات استاتیک، معادله خیز تیر هم بصورت زیر است:

$$EI\,y = \int_0^x dx \int_0^x M\left(x\right)dx + C_1 x + C_2 \qquad (۷-۱۱)$$

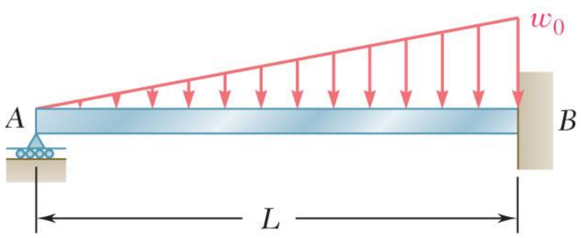
این معادله دو مجهول C_1 و C_2 به سیستم معادلات اضافه می‌کند.

اما با توجه به اینکه تیر AB سه شرط مرزی دارد معادله (۷-۱۱) سه معادله مربوط به شرط مرزی به دستگاه معادلات اضافه می‌نماید.

××

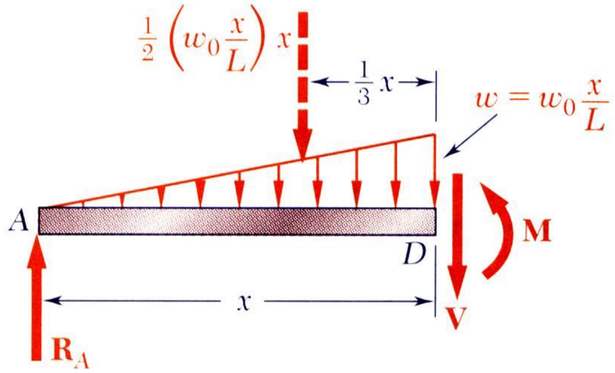
مثال ۷-۳

برای تیر نشان داده شده عکس‌العمل تکیه‌گاه A و معادله منحنی خیز تیر را بدست آورید. شیب تیر را در نقطه A تعیین کنید.



حل: مقدار گشتاور در هر مقطع دلخواه D بین A و B بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\sum M_D = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A x - \frac{1}{2}\left(\frac{w_0 x^2}{L}\right)\frac{x}{3} - M = 0 \quad \Rightarrow$$

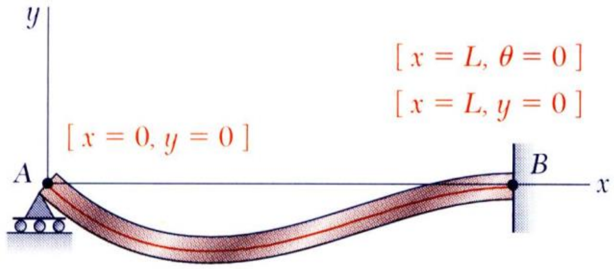


×××

برای تعیین خیز از این معادله دو بار انتگرال می‌گیریم.

$$EI\frac{dy}{dx} = EI\theta = \frac{1}{2}R_A x^2 - \frac{w_0 x^4}{24L} + C_1 \qquad EI\,y = \frac{1}{6}R_A x^3 - \frac{w_0 x^5}{120L} + C_1 x + C_2$$

حال شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم:



$$[x = 0 \rightarrow y = 0] \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$[x = L \rightarrow \theta = 0] \quad \Rightarrow$$

$$[x = L \rightarrow y = 0] \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{6}R_A L^3 - \frac{w_0 L^4}{120} + C_1 L + C_2 = 0$$

×××

با حل همزمان این دستگاه معادلات خواهیم داشت:

$$\frac{1}{3}R_A L^3 - \frac{1}{30}w_0 L^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = \frac{1}{10}w_0 L \qquad C_1 = \frac{1}{120}w_0 L^3$$

بنابراین معادله منحنی خیز تیر عبارت است:

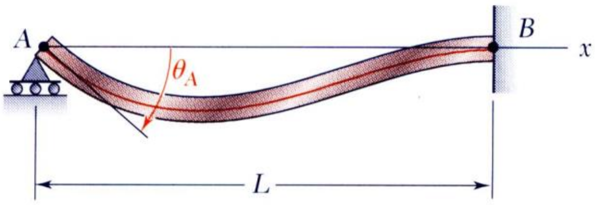
$$EI\,y = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{10}w_0 L\right)x^3 - \frac{w_0 x^5}{120L} - \left(\frac{1}{120}w_0 L^3\right)x \quad \Rightarrow$$

برای تعیین منحنی شیب تیر کافی است از معادله اخیر مشتق بگیریم.

×××

شیب در نقطه A برابر است با:

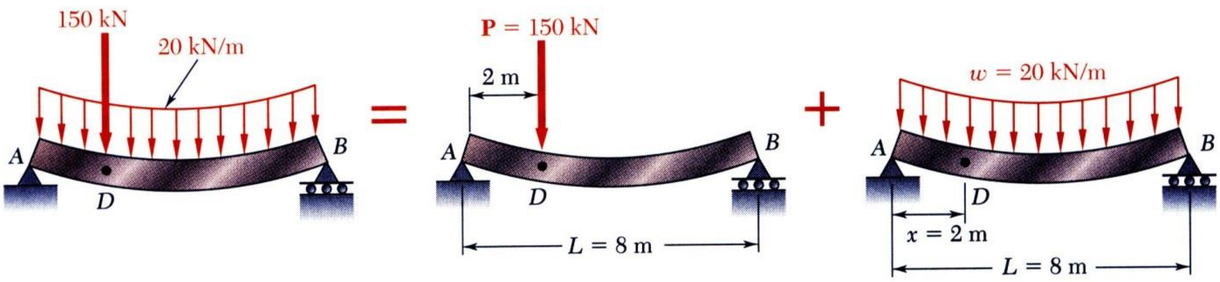
$$\theta_A = \theta(x=0) = -\frac{w_0 L^3}{120EI}$$



××

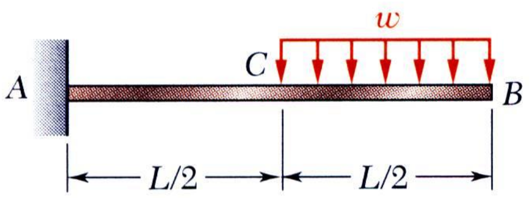
روش برهم نهی

اصل برهم نهی:

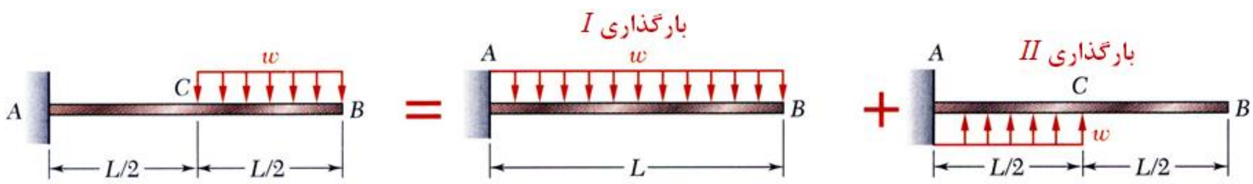


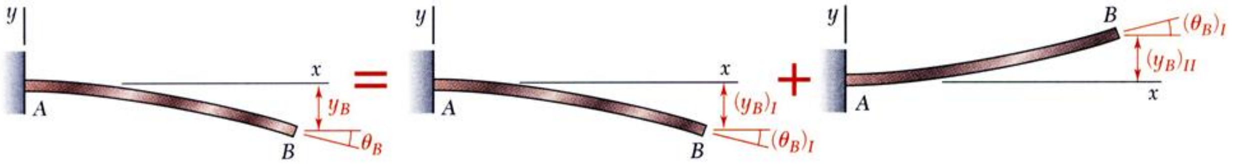
××

مثال ۷-۴



حل: بارگذاری تیر را می‌توان مطابق شکل زیر بصورت مجموع دو بارگذاری I و II نوشت.





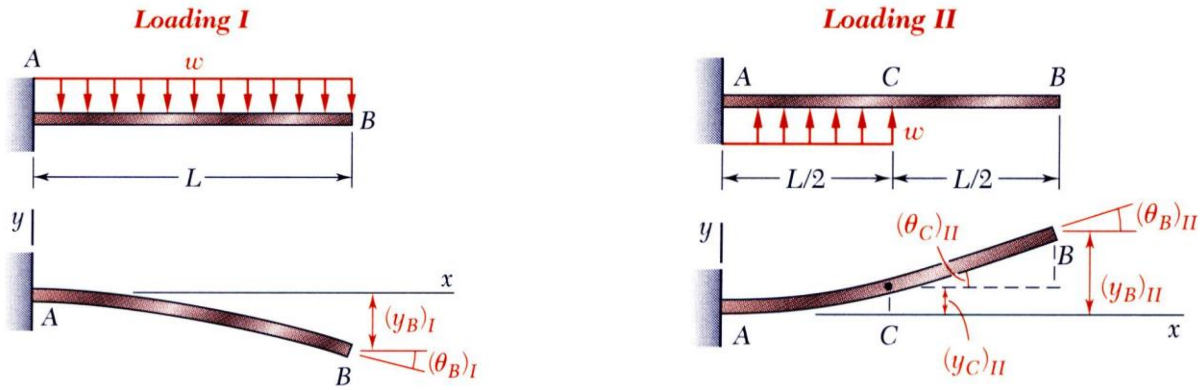
××

برای بارگذاری I شیب و خیز تیر در نقطه B برابر است با (جزئیات حل به عهده دانشجو):

$$(\theta_B)_I = -\frac{wL^3}{6EI} \qquad (y_B)_I = -\frac{wL^4}{8EI}$$

برای بارگذاری II شیب و خیز تیر در نقطه C برابر است با (جزئیات حل به عهده دانشجو):

$$(\theta_C)_{II} = \frac{wL^3}{48EI}$$



××

چون در بارگذاری II در فاصله B تا C گشتاور خمشی صفر است بنابراین طبق رابطه (۷-۳) در این فاصله داریم:

$$\frac{d^2 y_{II}}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} = 0 \Rightarrow \theta_{II} = \frac{dy_{II}}{dx} = \text{Constant} \qquad \Rightarrow$$

مقدار خیز تیر در نقطه B هم برابر است با:

$$(y_B)_{II} = (y_C)_{II} + \frac{dy_{II}}{dx}(x_B - x_C) \qquad \Rightarrow \quad (y_B)_{II} = \frac{wL^4}{128EI} + \frac{wL^3}{48EI}\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{7wL^4}{384EI}$$

شیب و خیز کل در نقطه B مساوی است با:

$$\theta_B = (\theta_B)_I + (\theta_B)_{II} = -\frac{wL^3}{6EI} + \frac{wL^3}{48EI} = -\frac{7wL^3}{48EI}$$

$$y_B = (y_B)_I + (y_B)_{II} = -\frac{wL^4}{8EI} + \frac{7wL^4}{384EI} = -\frac{41wL^4}{384EI}$$

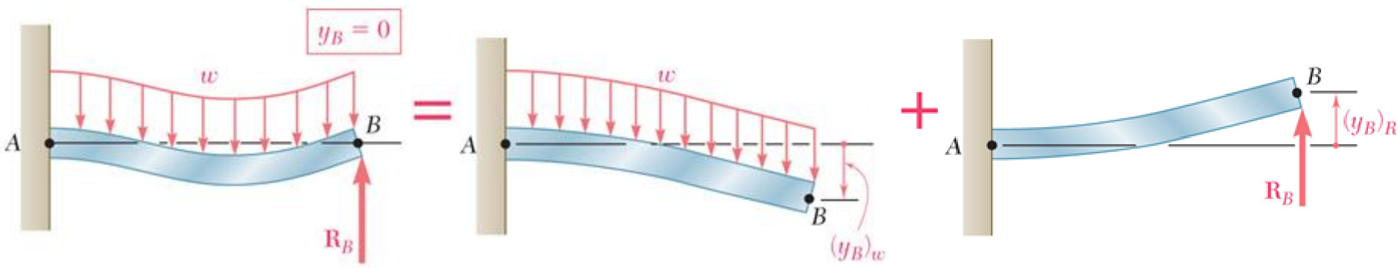
××

بکارگیری روش برهم نهی در مسائل استاتیکی نامعین

برای تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در تیرهای نامعین استاتیکی، ابتدا یکی از تکیه‌گاه‌ها را حذف کرده و به جای آن یک نیروی اضافی قرار می‌دهیم.

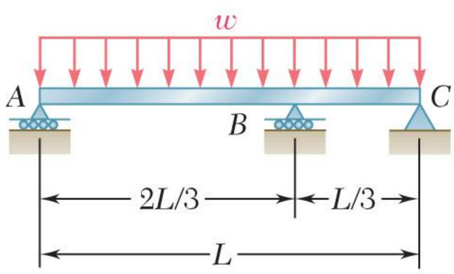
سپس تغییر شکل تیر را بدون در نظر گرفتن نیرو (تکیه‌گاه) اضافی تعیین می‌کنیم.

در نهایت با توجه به اینکه جمع تغییر شکل بدست آمده در دو گام بالا باید همانند تغییر شکل تیر اولیه باشد نیروی اضافی را بدست می‌آوریم.



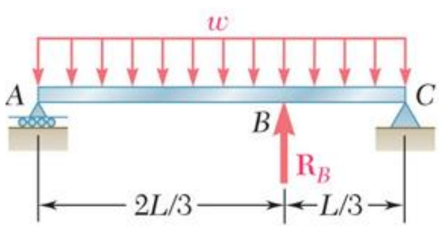
××

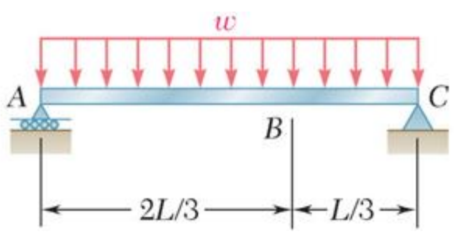
مثال ۷-۵



برای بارگذاری شکل مقابل عکس‌العمل هر تکیه‌گاه و شیب انتهای A را تعیین کنید.

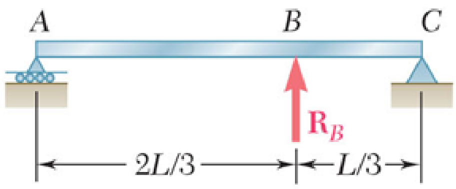
حل: در گام اول تکیه‌گاه B را حذف کرده و به جای آن نیروی اضافی R_B را قرار می‌دهیم.



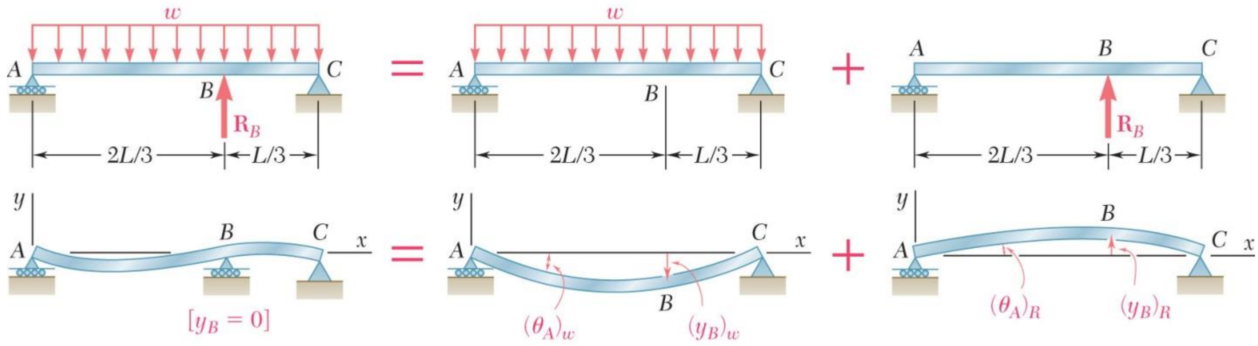


$$(y_B)_w = -\frac{w}{24EI}\left[\left(\frac{2}{3}L\right)^4 - 2L\left(\frac{2}{3}L\right)^3 + L^3\left(\frac{2}{3}L\right)\right] = -0.01132\frac{wL^4}{EI}$$

××



چون خیز تیر اولیه در تکیه‌گاه B برابر صفر است بنابراین جمع خیزهای بدست آمده برای نقطه B در گام دوم و سوم باید برابر با صفر باشد.



××

$$\Rightarrow \qquad -0.01132\frac{wL^4}{EI}+0.01646\frac{R_BL^3}{EI}=0 \qquad\qquad \Rightarrow \quad R_B=0.688wL\uparrow$$

با استفاده از معادلات تعادل استاتیک خواهیم داشت:

شیب در نقطه A هم از اصل برهم نهی بدست می‌آید:

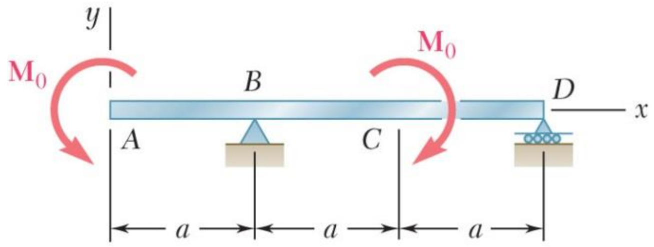
$$(\theta_A)_w=-\frac{wL^3}{24EI}=-0.04167\frac{wL^3}{EI}$$

$$(\theta_A)_R=\frac{0.0688wL}{6EIL}\left(\frac{L}{3}\right)\left[L^2-\left(\frac{L}{3}\right)^2\right]=0.03398\frac{wL^3}{EI}$$

$$\theta_A=(\theta_A)_w+(\theta_A)_R=-0.04167\frac{wL^3}{EI}+0.03398\frac{wL^3}{EI}=-0.00769\frac{wL^3}{EI}$$

××

مثال ۷-۶ (دوره)



برای تیر شکل مقابل، خیز انتهای A ، خیز نقطه C و شیب نقطه D را بیابید.

حل: چون دو گشتاور مساوی و در جهت خلاف یکدیگرند لذا تیر تحت اثر آن‌ها در تعادل بوده و نیروی تکیه‌گاهی نداریم:

$$R_B=0 \quad , \quad R_D=0$$

در نتیجه گشتاور داخلی در طول تیر عبارت است از:

$$0 < x < 2a \quad \rightarrow \quad M(x) = -M_0$$

×××

حال می‌توان نوشت:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x) = -M_0 + M_0\langle x-2a\rangle^0$$

$$EI\frac{dy}{dx} = -M_0x + M_0\langle x-2a\rangle^1 + C_1$$

$$EIy = -\frac{1}{2}M_0x^2 + \frac{1}{2}M_0\langle x-2a\rangle^2 + C_1x + C_2$$

در گام بعد شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم:

$$[x=3a, y=0] \rightarrow -\frac{1}{2}M_0(3a)^2 + \frac{1}{2}M_0a^2 + C_1(3a) + C_2 = 0$$

(الف)

×××

$$[x=a, y=0] \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{2}M_0a^2 + 0 + C_1a + C_2 = 0$$

(ب)

حال دو معادله (الف) و (ب) را از هم کم می‌کنیم:

$$\rightarrow \; 2aC_1 = \frac{7}{2}M_0a^2$$

$$\rightarrow \; C_1 = \frac{7}{4}M_0a \qquad\qquad \rightarrow \; C_2 = \frac{1}{2}M_0a^2 - aC_1 = -\frac{5}{4}M_0a^2$$

لذا معادله منحنی تیر عبارت است از:

$$y = \frac{M_0}{EI}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\langle x-2a\rangle^2 + \frac{7}{4}ax - \frac{5}{4}a^2\right)$$

×××

$$\rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{M_0}{EI}\left(-x + \langle x-2a\rangle^1 + \frac{7}{4}a\right)$$

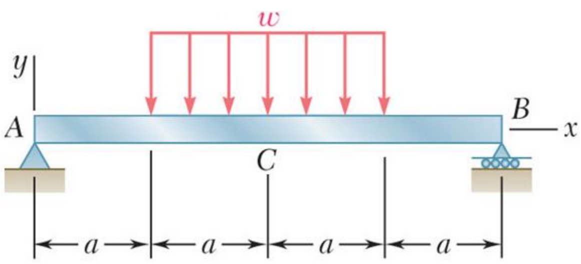
در نهایت باید مختصات نقاط را در معادله جاگذاری نمود:

$$(y,x=0)\ \rightarrow\ y_A=\frac{M_0a^2}{EI}\left(-0+0+0-\frac{5}{4}\right)=-\frac{5}{4}\frac{M_0a^2}{EI}$$

$$(y,x=2a)\ \rightarrow\ y_C=\frac{M_0a^2}{EI}\left(-\frac{1}{2}(2)^2+0+\frac{7}{4}(2)-\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{4}\frac{M_0a^2}{EI}$$

××

مثال ۷-۷ (دوره)



برای تیر شکل مقابل، منحنی الاستیک تیر و خیز نقطه میانی C را بیابید.

حل: با توجه به تقارن می‌توان نوشت: $R_A=R_B$

$$\sum F_y=0\ \rightarrow\ R_A+R_B-2wa=0\ \rightarrow\ R_A=wa$$

از طرف دیگر داریم:

$$\rightarrow\quad \frac{dV}{dx}=-w(x)=-w\langle x-a\rangle^0+w\langle x-3a\rangle^0$$

××

به همین ترتیب:

حال با انتگرال‌گیری بدست می‌آید:

$$M=M_A+R_Ax-\frac{1}{2}w\langle x-a\rangle^2+\frac{1}{2}w\langle x-3a\rangle^2=R_Ax-\frac{1}{2}w\langle x-a\rangle^2+\frac{1}{2}w\langle x-3a\rangle^2$$

$$\rightarrow\quad EI\frac{d^2y}{dx^2}=M=wax-\frac{1}{2}w\langle x-a\rangle^2+\frac{1}{2}w\langle x-3a\rangle^2$$

$$\rightarrow\quad EI\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}wax^2-\frac{1}{6}w\langle x-a\rangle^3+\frac{1}{6}w\langle x-3a\rangle^3+C_1$$

$$\rightarrow\quad EIy=\frac{1}{6}wax^3-\frac{1}{24}w\langle x-a\rangle^4+\frac{1}{24}w\langle x-3a\rangle^4+C_1x+C_2$$

××

در گام بعد شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم:

$$[x=4a,y=0]\quad\rightarrow\quad \frac{1}{6}wa(4a)^3-\frac{1}{24}w(3a)^4+\frac{1}{24}w(a)^4+C_1(4a)=0$$

$$4C_1=wa^3\left\{-\frac{64}{6}+\frac{81}{24}-\frac{1}{24}\right\}=-\frac{22}{3}wa^3\quad\rightarrow\quad C_1=-\frac{11}{6}wa^3$$

در نتیجه منحنی الاستیک تیر عبارت است از:

$$y=\frac{w}{EI}\left\{\frac{1}{6}ax^3-\frac{1}{24}\langle x-a\rangle^4+\frac{1}{24}\langle x-3a\rangle^4-\frac{11}{6}a^3x\right\}$$

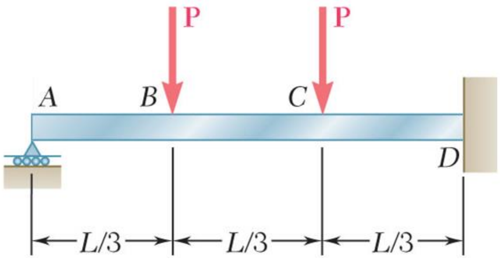
××

$$(y,x=2a)\quad\rightarrow\quad y_C=\frac{wa^4}{EI}\left\{\frac{1}{6}(2)^3-\frac{1}{24}(1)^4+0-\frac{11}{6}(2)\right\}=-\frac{19}{8}\frac{Wa^4}{EI}$$

××

مثال ۷-۸ (دوره)

برای تیر شکل مقابل، عکس‌العمل تکیه‌گاه غلتکی و خیز نقطه C را بیابید.



$$\frac{dM}{dx}=V=R_A-P\left\langle x-\frac{L}{3}\right\rangle^0-P\left\langle x-\frac{2L}{3}\right\rangle^0$$

$$\rightarrow\quad EI\frac{d^2y}{dx^2}=M=R_Ax-P\left\langle x-\frac{L}{3}\right\rangle^1-P\left\langle x-\frac{2L}{3}\right\rangle^1$$

$$\rightarrow\quad EI\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}R_Ax^2-\frac{1}{2}P\left\langle x-\frac{L}{3}\right\rangle^2-\frac{1}{2}P\left\langle x-\frac{2L}{3}\right\rangle^2+C_1$$

××

$$\rightarrow\quad EIy=\frac{1}{6}R_Ax^3-\frac{1}{6}P\left\langle x-\frac{L}{3}\right\rangle^3-\frac{1}{6}P\left\langle x-\frac{2L}{3}\right\rangle^3+C_1x+C_2$$

حال شرایط مرزی را اعمال می‌نماییم:

$$[x=0, y=0] \quad \rightarrow \quad 0+0+0+0+C_2=0 \quad \rightarrow \quad C_2=0$$

$$\left[x=L, \frac{dy}{dx}=0\right] \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}R_A L^2 - \frac{1}{2}P\left(\frac{2L}{3}\right)^2 - \frac{1}{2}P\left(\frac{L}{3}\right)^2 + C_1 + 0 = 0$$

××

$$[x=L, y=0] \quad \rightarrow \quad \frac{1}{6}R_A L^3 - \frac{1}{6}P\left(\frac{2L}{3}\right)^3 - \frac{1}{6}P\left(\frac{L}{3}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{9}P - R_A\right)L^2 L + 0 = 0$$

$$\rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)R_A L^3 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{9}\right)-\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{8}{27}\right)-\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{27}\right)\right]PL^3$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{3}R_A = \frac{2}{9}P \quad \rightarrow \quad R_A = \frac{2}{3}P$$

در نهایت خیز نقطه C را حساب می‌کنیم:

××

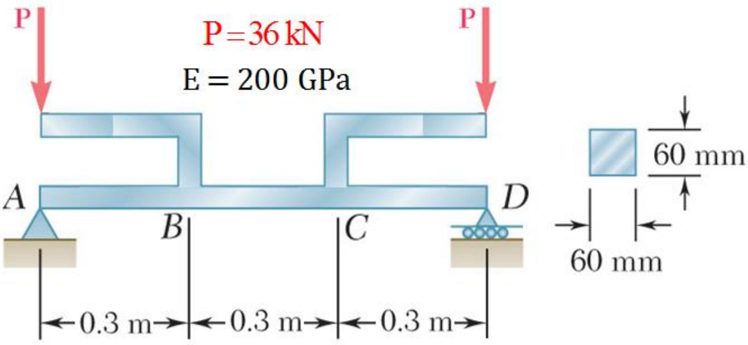
$$\left(y, x=\frac{2L}{3}\right) \quad \rightarrow \quad y_c = \frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}P\right)\left(\frac{2L}{3}\right)^3 - \frac{1}{6}P\left(\frac{L}{3}\right)^3 - 0 - \frac{1}{18}PL^2\left(\frac{2L}{3}\right)\right\} =$$

$$\frac{PL^3}{EI}\left(\frac{16}{486}-\frac{1}{162}-\frac{2}{54}\right) =$$

××

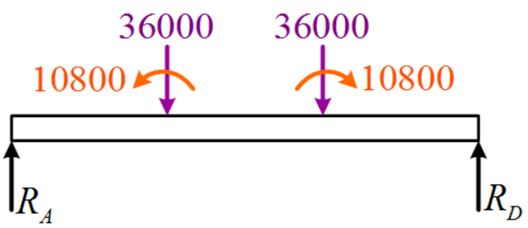
مثال ۷–۹ (دوره)

میله‌های صلب به تیر فولادی AD جوش داده شده‌اند. خیز نقطه B و شیب نقطه A را بیابید.



حل: با توجه به تقارن می‌توان نوشت:

$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad R_A + R_D - 36 - 36 = 0$$



××

در نتیجه:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M = 36000x - 36000\langle x-0.3\rangle^1 - 36000\langle x-0.6\rangle^1 - 10800\langle x-0.3\rangle^0 + 10800\langle x-0.6\rangle^0$$

$$\rightarrow \quad EI\frac{dy}{dx} = 18000x^2 - 18000\langle x-0.3\rangle^2 - 18000\langle x-0.6\rangle^2 - 10800\langle x-0.3\rangle^1 + 10800\langle x-0.6\rangle^1 + C_1$$

$$\rightarrow \quad EIy = 6000x^3 - 6000\langle x-0.3\rangle^3 - 6000\langle x-0.6\rangle^3 - 5400\langle x-0.3\rangle^2 + 5400\langle x-0.6\rangle^2 + C_1x + C_2$$

حال نوبت اعمال شرایط مرزی است:

××

$$[x=0.9, y=0] \quad \rightarrow \quad (6000)(0.9)^3 - (6000)(0.6)^3 - (6000)(0.3)^3 -$$
$$(5400)(0.6)^2 + (5400)(0.3)^2 + 0.9C_1 + 0 = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = -1620$$

از طرف دیگر داریم:

خیز در B برابر است با:

$$(y, x=0.3) \quad \rightarrow \quad EIy_B = (6000)(0.3)^3 - 0 - 0 - 0 + 0 - (1620)(0.3)$$
$$= -324 \quad \rightarrow \quad y_B = -\frac{324}{216\times10^3} = -1.5\times10^{-3}\,\text{m}$$

××

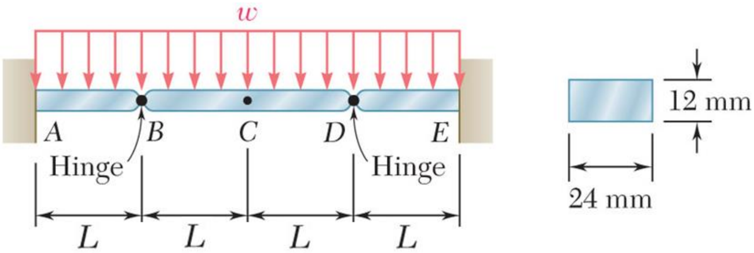
$$\left(\frac{dy}{dx}, x=0\right) \quad \rightarrow \quad EI\theta_A = C_1 = -1620 \quad \rightarrow \quad \theta_A = -\frac{1620}{216\times10^3} = -7.50\times10^{-3}\text{ rad}$$

شیب منفی به معنی چرخش ساعتگرد تیر در نقطه A است.

××

مثال ۷-۱۰ (دوره)

تیر BD با دو لولا به تیرهای AB و DE متصل

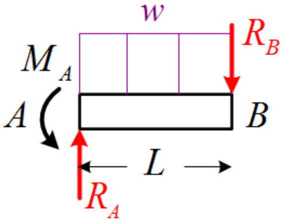


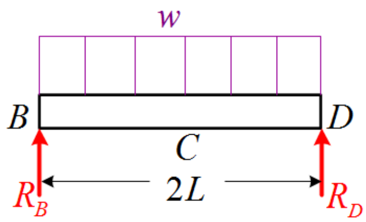
شده است. اگر بخواهیم خیز نقطه C از 3mm بیشتر نشود بیشترین حد مجاز w را بیابید.

$L = 0.4\ \text{m} \quad , \quad E = 200\ \text{GPa}$

حل: دیاگرام آزاد دو قسمت AB و BD در زیر آمده است:

$$R_B = R_D = \frac{2wL}{2} = wL$$





××

$$M_A = wL \times \frac{L}{2} + R_B \times L = \frac{3}{2} wL^2$$

$$EI\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = M(x_1) = -M_A + R_A x_1 - \frac{1}{2}wx_1^2 = -\frac{3}{2}wL^2 + 2wLx_1 - \frac{1}{2}wx_1^2$$

$$\rightarrow \quad EI\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{3}{2}wL^2x_1 + wLx_1^2 - \frac{1}{6}wx_1^3 + C_1$$

$$\rightarrow \quad EIy_1 = -\frac{3}{4}wL^2x_1^2 + \frac{1}{3}wLx_1^3 - \frac{1}{24}wx_1^4 + C_1x_1 + C_2$$

با اعمال شرایط مرزی خواهیم داشت:

$$x_1 = 0 \quad , \quad y_1 = 0 \quad , \quad \frac{dy_1}{dx_1} = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = C_2 = 0$$

××

حال به سراغ قسمت BD می‌رویم (مبدأ x_2 در B) :

$$EI\frac{d^2y_2}{dx_2^2} = M(x_2) = R_Bx_2 - \frac{1}{2}wx_2^2 = wLx_2 - \frac{1}{2}wx_2^2$$

$$\rightarrow \quad EI\frac{dy_2}{dx_2} = \frac{1}{2}wLx_2^2 - \frac{1}{6}wx_2^3 + C_3$$

وسط تیر یعنی نقطه C شیب صفر است. بنابراین:

$$x_2 = L \;\;,\;\; \frac{dy_2}{dx_2} = 0 \quad \to \quad 0 = \frac{1}{2}wL^3 - \frac{1}{6}wL^3 + C_3 \quad \to \quad C_3 = -\frac{1}{3}wL^3$$

××

برای تعیین C_4 از این واقعیت استفاده می‌کنیم که خیز تیر AB و BD در نقطه B برابر است:

$$\to \qquad C_4 = -\frac{3}{4}wL^4 + \frac{1}{3}wL^4 - \frac{1}{24}wL^4 = -\frac{11}{24}wL^4$$

در نتیجه معادله خیز تیر BD و خیز نقطه C به ترتیب عبارتند از:

$$EIy_2 = \frac{1}{6}wLx_2{}^3 - \frac{1}{24}wx_2{}^4 - \frac{1}{3}wL^3x_2 - \frac{11}{24}wL^4$$

$$EIy_c = \frac{1}{6}wLL^3 - \frac{1}{24}wL^4 - \frac{1}{3}wL^3L - \frac{11}{24}wL^4 = -\frac{2wL^4}{3}$$

××

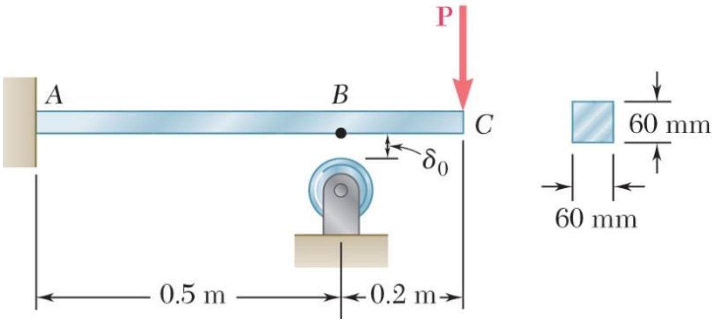
حال مقادیر پارامترهای مختلف را در معادله بالا قرار می‌دهیم:

$$EIy_c = \frac{-2wL^4}{3} \qquad \to \qquad \left(200\times10^9\right)\left(\frac{1}{12}\left(24\times10^{-3}\right)\left(12\times10^{-3}\right)^3\right)\left(-3\times10^{-3}\right) = -\frac{2w\left(0.4\right)^4}{3}$$

$$w = 121.5 \text{ N/m}$$

××

مثال ۷-۱۱ (دوره)



قبل از اعمال بار P فاصله δ_0 بین تیر AC و تکیه‌گاه

در B وجود دارد. مقدار P چقدر باشد تا خیز نقطه C

برابر با 1 mm شود. $L = 0.5 + 0.2 = 0.7$ m , $E = 200$ GPa , $\delta_0 = 0.5$ mm

حل: ابتدا فرض می‌کنیم بعد از اعمال بار P تیر در نقطه B به تکیه‌گاه برخورد نمی‌کند.

در اینصورت براحتی می‌توان نشان داد که معادله منحنی خیز تیر عبارت است از (اثبات به عهده دانشجو):

×××

لذا خیز انتهای آزاد برابر است با: $y_c = -\dfrac{PL^3}{3EI}$

که در آن:

$$EI = 200\times10^9\left(\frac{1}{12}\left(60\times10^{-3}\right)\left(60\times10^{-3}\right)^3\right) = 2.16\times10^5$$

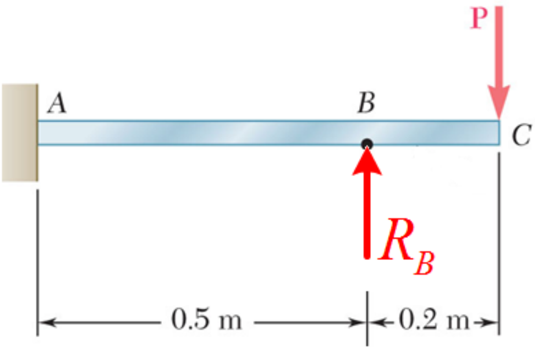
برای اینکه این خیز 1mm باشد لازم است داشته باشیم:

خیز نقطه B در اثر این نیرو عبارت است از:

$$y_B = \frac{1}{2.16\times10^5}\times\left(\frac{1}{6}(1889.2)(0.5)^3 - \frac{1}{2}(1889.2)(0.7)(0.5)^2\right) = -5.83\times10^{-4}\ \text{m} = -0.583\,\text{mm}$$

×××

چون اندازه خیز نقطه B از δ_0 بزرگتر شد پس فرض اولیه ما مبنی بر عدم برخورد تیر و تکیه‌گاه نادرست بوده و مسأله را باید از اول اینبار با فرض برخورد حل کنیم.



در این حالت مسأله بصورت زیر خواهد بود:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -M_A + R_A x + R_B\langle x-0.5\rangle$$

$$\rightarrow\quad EI\frac{dy}{dx} = -M_A x + \frac{1}{2}R_A x^2 + \frac{1}{2}R_B\langle x-0.5\rangle^2 + C_1$$

$$\rightarrow\quad EIy = -\frac{1}{2}M_A x^2 + \frac{1}{6}R_A x^3 + \frac{1}{6}R_B\langle x-0.5\rangle^3 + C_1 x + C_2$$

×××

با اعمال شرایط مرزی هر دو ثابت انتگرال‌گیری صفر شده و خواهیم داشت:

$$EIy=-\frac{1}{2}M_Ax^2+\frac{1}{6}R_Ax^3+\frac{1}{6}R_B\langle x-0.5\rangle^3=$$
$$-\frac{1}{2}(0.7P-0.5R_B)x^2+\frac{1}{6}(P-R_B)x^3+\frac{1}{6}R_B\langle x-0.5\rangle^3$$

در نقطه B خیز برابر با δ_0 است. در نتیجه:

$$EI\delta_0=-\frac{1}{2}(0.7P-0.5R_B){x_B}^2+\frac{1}{6}(P-R_B){x_B}^3$$

$$\rightarrow\ 2.16\times10^5\left(-0.5\times10^{-3}\right)=-\frac{1}{2}(0.7P-0.5R_B)(0.5)^2+\frac{1}{6}(P-R_B)(0.5)^3$$

(الف)

×××

در نقطه C هم خیز 1mm است. بنابراین:

$$EIy_C=-\frac{1}{2}(0.7P-0.5R_B){x_C}^2+\frac{1}{6}(P-R_B){x_C}^3+\frac{1}{6}R_B\langle x_C-0.5\rangle^3$$

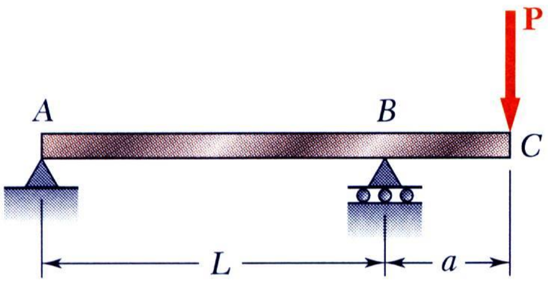
$$\rightarrow\ 2.16\times10^5\left(-1\times10^{-3}\right)=-\frac{1}{2}(0.7P-0.5R_B)(0.7)^2+\frac{1}{6}(P-R_B)(0.7)^3+\frac{1}{6}R_B(0.7-0.5)^3$$

(ب)

با حل همزمان (الف) و (ب) خواهیم داشت: $P=5630\ \text{N}\quad,\quad R_B=6420\ \text{N}$

×××

مثال ۷-۱۲ (دوره)

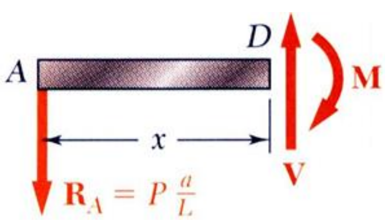


برای قسمت AB از تیر، الف) معادله منحنی خیز تیر را بدست آورید.

ب) محل ایجاد خیز ماکزیمم را تعیین کنید.

ج) y_{max} را محاسبه نمایید.

$I=3\times10^{-4}\ \text{m}^4\quad,\quad E=200\,\text{GPa}$
$P=220\,\text{KN}\quad,\quad L=4.5\,\text{m}\quad,\quad a=1.2\,\text{m}$



حل: از معادلات تعادل استاتیک عکس‌العمل تکیه‌گاه‌های A و B بدست می‌آید:

$$R_A=\frac{Pa}{L}\downarrow$$

×××

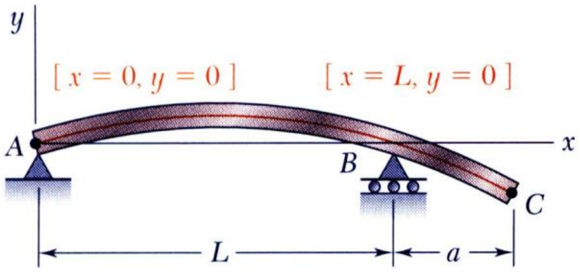
با توجه به دیاگرام آزاد قسمت AD، معادله گشتاور در فاصله A تا B عبارت است از:

بنابراین طبق معادله (۷-۳) معادله دیفرانسیل خیز تیر بصورت زیر خواهد بود:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=-P\frac{a}{L}x \qquad \Rightarrow \qquad EI\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}P\frac{a}{L}x^2+C_1 \qquad \Rightarrow \qquad EI\,y=-\frac{1}{6}P\frac{a}{L}x^3+C_1x+C_2$$

در گام بعد نوبت به اعمال به شرایط مرزی می‌رسد.

××



$$[x=0\rightarrow y=0] \quad \Rightarrow \quad C_2=0$$

$$[x=L\rightarrow y=0]\Rightarrow$$

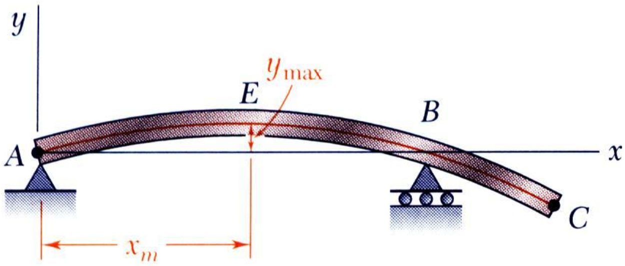
$$0=-\frac{1}{6}P\frac{a}{L}L^3+C_1L \qquad \Rightarrow \qquad C_1=\frac{1}{6}PaL$$

با جاگذاری در معادلات قبلی بدست می‌آید:

$$EI\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}P\frac{a}{L}x^2+\frac{1}{6}PaL \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{PaL}{6EI}\left[1-3\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

$$EI\,y=-\frac{1}{6}P\frac{a}{L}x^3+\frac{1}{6}PaLx \quad \Rightarrow$$

××



خیز ماکزیمم تیر جایی اتفاق می‌افتد که در آن مقدار

مشتق تابع خیز (تابع شیب تیر) برابر با صفر باشد:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{PaL}{6EI}\left[1-3\left(\frac{x_m}{L}\right)^2\right]=0 \quad \Rightarrow \quad x_m=\frac{L}{\sqrt{3}}=0.577L$$

مقدار خیز ماکزیمم یعنی y_{max} هم با قرار دادن $x=x_m$ در معادله خیز تیر حاصل می‌گردد:

$$y_{max}=\frac{PaL^2}{6EI}\left[0.577-(0.577)^3\right] \qquad \Rightarrow$$

××

با جاگذاری خواهیم داشت:

$$y_{max}=0.0642\frac{(220\times10^3)(1.2)(4.5)^2}{6(200\times10^9)(3\times10^{-4})} \qquad \Rightarrow$$