

باسمه تعالی

دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

آزمون ترکیبیات = پنجشنبه دهم

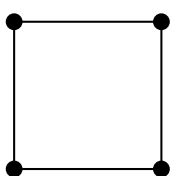
پنج شنبه ۲۲ مرداد ۱۳۹۴

مدرس: اسدی

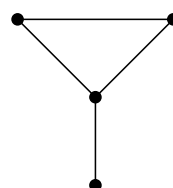
وقت: ۲ ساعت و ۱۵ دقیقه

مسئله‌ی چهارم. زندگی بدون این دو گراف امکان ندارد! ۳۱ امتیاز

گراف‌های آقا جبل و ابوالفضل به شکل زیر هستند:



گراف ابوالفضل H



گراف آقا جبل G

$R(G, H)$ را بیابید.

مسئله‌ی پنجم. روزبه گرمشه! ۳۱ امتیاز

روزبه پس از طرح سوال دو مرحله دوم، با تصمیم قاضی به سرزمینی دور تبعید شد. این سرزمین مانند یک صفحه‌ی مختصات است. روزبه در نقطه‌ی $(0, 0)$ این سرزمین سکونت دارد. هوا به تازگی در این نقطه بسیار گرم شده است و روزبه از هوای گرم متنفر است؛ پس تصمیم دارد به نقطه‌ی (n, k) برود که شنیده است نقطه‌ی نسبتن سردی است! روزبه در هر مرحله می‌تواند از یکی از وسایل نقلیه‌ی این سرزمین (شتر، گاو، خر و قاطر) استفاده کند. این وسایل نقلیه به شکل زیر کار می‌کنند:

- اگر روزبه در نقطه‌ی (i, j) باشد، شتر او را به نقطه‌ی $(i+1, j-1)$ می‌برد.
- اگر روزبه در نقطه‌ی (i, j) باشد، گاو او را به نقطه‌ی $(i+1, j+1)$ می‌برد.
- اگر روزبه در نقطه‌ی (i, j) باشد، خر او را به نقطه‌ی $(i+1, j)$ می‌برد.
- قاطر نیز مانند خر عمل می‌کند.

واضح است که کار روزبه در دقیقن n مرحله انجام می‌شود. این سرزمین از نظر حمل و نقل قوی است؛ پس در هر مرحله تمام وسایل نقلیه در دسترس هستند!

دو روش برای رسیدن به نقطه‌ی (n, k) را متفاوت گوییم؛ هرگاه حداقل یکی از دو شرط زیر برقرار باشد:

- مرحله‌ای مانند L وجود داشته باشد که مکان روزبه پس از آن مرحله در دو روش، متفاوت باشد.
- مرحله‌ای مانند L وجود داشته باشد که وسیله‌ی نقلیه‌ی مورد استفاده‌ی روزبه در آن مرحله در دو روش، متفاوت باشد.

ثابت کنید تعداد روش‌های متفاوت رسیدن روزبه به نقطه‌ی (n, k) برابر $\binom{2n}{n-k}$ است.

مسئله ششم. دلواپسان کجایند؟! ۳۱ امتیاز

حسین و حسین به برخی از اعداد علاقه دارند! ضمن این که به یک جایگشت از اعداد $۱, ۲, \dots, ۲n-۱$ دلواپس گوییم؛ هرگاه تمام اعداد سمت چپ n از آن کوچک تر یا تمام اعداد سمت چپ n از آن بزرگ تر باشند. برای مثال جایگشت های $\langle ۱, ۳, ۴, ۶, ۵, ۷, ۲ \rangle$ ، $\langle ۵, ۴, ۱, ۲, ۷, ۶, ۳ \rangle$ و $\langle ۴, ۳, ۷, ۶, ۱, ۲, ۵ \rangle$ دلواپس هستند؛ اما جایگشت $\langle ۱, ۶, ۴, ۳, ۷, ۵, ۲ \rangle$ دلواپس نیست! به چه احتمالی یک جایگشت از اعداد $۱, ۲, \dots, ۲n-۱$ دلواپس است؟ توجه: ناسزا نگویید. احتمال بریده شدن تک دل توسط کریم را که نخواسته‌ام!

نمره‌ی هر کس یا بالای کف می‌شود، یا روی کف و یا پایین کف.
استریتیانف