فصل

۵ هندسه

درس اوّل

تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی

درس دوم

دایره

شهر گور اولین شهر دایره‌ای در ایران و یکی از نخستین شهرهای دایره‌ای در جهان، در نزدیکی فیروزآباد فارس واقع شده است. قدمت این شهر باستانی به دورهٔ هخامنشیان می‌رسد. طرح و الگوی این شهر دایره‌ای به قطر دو کیلومتر و دارای چهار دروازهٔ اصلی بوده و بناهای حکومتی و محل اقامت درباریان در آن قرار داشته است. پس از اسلام، اعراب این شهر را جور تلفظ می‌کردند و مورخان قدیم این واژه را دشت یا گودال معنی کرده‌اند. به نقل از تاریخ طبری، اردشیر بنای این شهر را در حدود ۲۲۴ میلادی و به نشانهٔ قدرت‌نمایی در برابر آخرین شاه اشکانی آغاز کرده است.

درس اوّل

تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی

چهرهٔ پدربزرگ یا مادربزرگ خود را در ذهن تصور کنید. چه ویژگی‌هایی دارد؟ اگر بیست سال جوان‌تر بود به چه شکل بود؟

برای دوستتان توصیف کنید که خانه‌تان چه شکلی است؟ تصور کنید یک اتاق کمتر یا آشپزخانهٔ بزرگ‌تری داشتید. در این صورت خانهٔ جدید، چه شکلی بود؟

به مسیری که هر روز از خانه تا مدرسه طی می‌کنید، فکر کنید. آیا می‌توانید این مسیر را با رسم یک تصویر مناسب توضیح دهید؟

چشمانتان را ببندید و خود را در مکانی آرام و شاد که دلخواه شماست، تجسم کنید. آیندهٔ خود را با تمام جزئیات آن، مثل محل زندگی، شغلی که دوست دارید و مسئولیت‌هایی که تمایل دارید بر عهده داشته باشید، در ذهن مجسم کنید. این آینده را با چه جملاتی توصیف می‌کنید؟

در تمام حالت‌های بالا شما به موضوعی فکر کردید، اما از عبارات، جملات و شیوه‌های زبانی برای تفکر استفاده نکردید. در واقع به جای کلمات، تصاویری در ذهن شما نقش بستند و این تصویرسازی ذهنی، به شما کمک کرد که به آن موضوع یا موقعیت فکر کنید. این شیوه از تفکر را **تفکر تجسمی** می‌نامیم.

فرایند تفکر تجسمی، مستلزم تشکیل و دست‌ورزی تصاویر با قلم و کاغذ، فناوری و یا به صورت ذهنی است که به بررسی، کشف و درک مفاهیم منجر می‌شود. این نوع از تفکر، نقش مهمی در حل مسئله‌های ریاضی و همین‌طور مسائل زندگی روزمره دارد. تجسم ذهنی یک جسم پس از چرخاندن آن در فضا، ترسیم سطح گستردهٔ اجسام هندسی و ترسیم یک جسم سه بعدی روی سطح، ترسیم نماهای مختلف اجسام، دوران شکل حول یک نقطه یا حول یک محور در صفحه و فضا، تجسم اجسام هندسی بعد از برش و موقعیت‌های مختلف دیگر

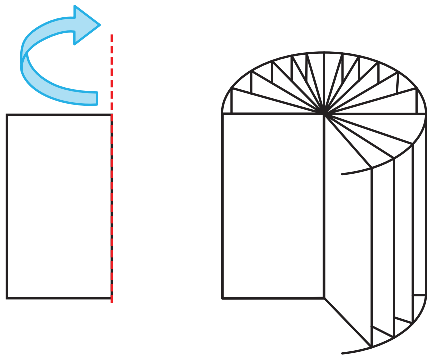
می‌تواند به تقویت تفکر تجسمی منجر شود. از آنجا که هدف کلی این درس آشنایی با مقاطع مخروطی است، از بین این موقعیت‌ها، **دوران** اشکال هندسی حول یک محور و **برش** اجسام را بررسی می‌کنیم.

دوران حول محور

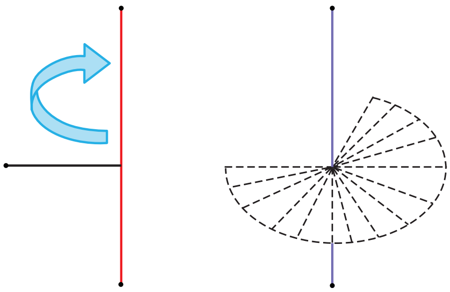
وقتی یک شکل هندسی حول یک محور دوران داده می‌شود، جسم‌های مختلف هندسی ساخته می‌شود. در فعالیت زیر نمونه‌هایی از این مفهوم ارائه شده است. در هر مورد، شکل حاصل از دوران حول محور را مشخص کنید.

فعالیت

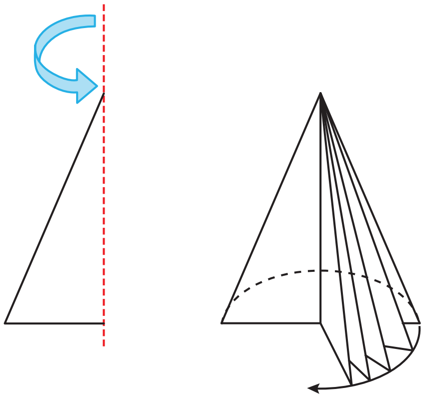
الف) شکل حاصل از دوران یک مستطیل، حول طول یا عرض آن : ....



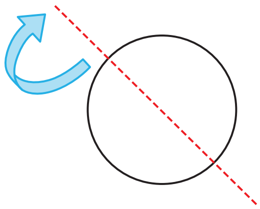
ب) شکل حاصل از دوران یک پاره خط، حول پاره خط دیگری که بر آن عمود است : ....



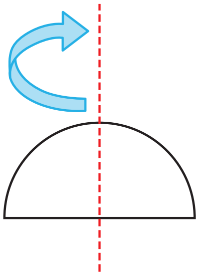
پ) شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه، حول یکی از اضلاع قائمه : ....



ت) شکل حاصل از دوران یک دایره، حول یکی از قطرهای آن : ....



ث) شکل حاصل از دوران یک نیم دایره، حول شعاع عمود بر قطر آن : ....



برش

در فعالیت بالا از دوران شکل، حول یک محور، یک جسم دو بعدی یا سه بعدی تشکیل شد. حال فرض کنید می‌خواهیم اجسام سه‌بعدی را برش بزنیم و تغییرات آن را بعد از برش تجسم کنیم. در زندگی روزمره بارها با برش اجسام مختلف هندسی مواجه بوده‌اید. این اجسام می‌توانند توپر یا توخالی باشند.

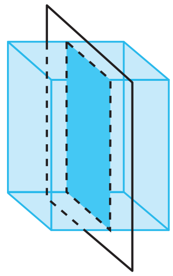
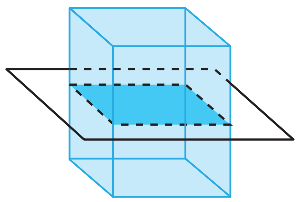
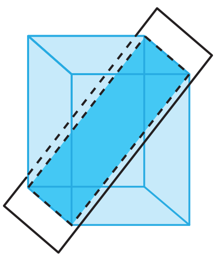
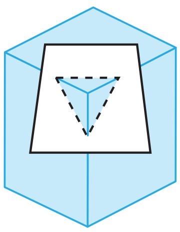




شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود، **سطح مقطع** آن نامیده می‌شود.

فعالیت

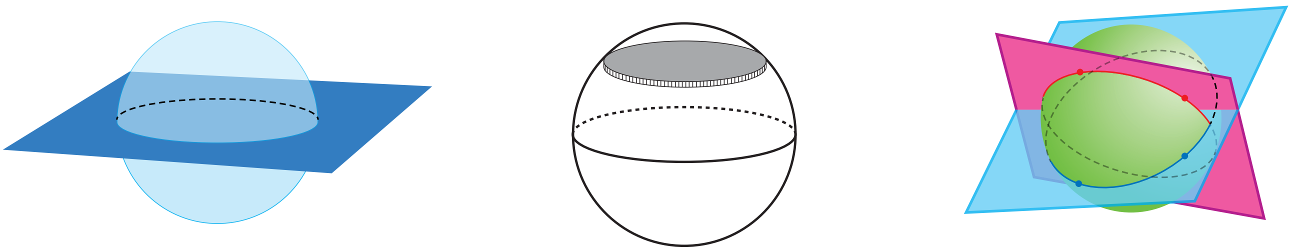
الف) سطح مقطع یک جعبهٔ توخالی به شکل مکعب مستطیل، در برخورد با صفحات قائم، افقی و مایل به چه شکل است؟


ب) سطح مقطع استوانه با صفحه‌های افقی، عمودی و صفحهٔ مایلی که با قاعده‌های استوانه متقاطع نباشد، به چه شکل است؟

پ) سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره به چه شکل است؟

در چه حالتی این سطح مقطع، بیشترین مساحت ممکن را دارد؟



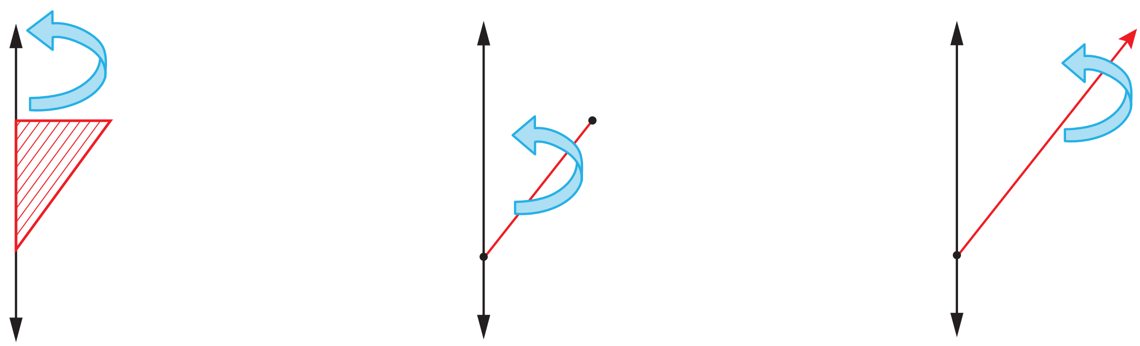
کار در کلاس

۱ در هر حالت، شکل حاصل از دوران حول محور را مشخص کنید و آنها را با هم مقایسه کنید :

الف) شکل حاصل از دوران نیم‌خط حول محور

ب) شکل حاصل از دوران پاره‌خط حول محور

پ) شکل حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول محور




مخازن نفتی در زنجان

۲ مستطیلی را حول عرض آن دوران داده‌ایم.

الف) شکل حاصل را رسم کنید.

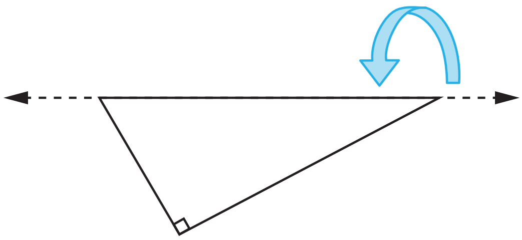
ب) اگر ابعاد مستطیل، ۳و۴ باشد، مساحت سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحهٔ افقی با این استوانه چقدر است؟

پ) در حالت ب، اگر صفحه‌ای عمود بر استوانه آن را قطع کند، بیشترین مساحت ممکن برای سطح مقطع حاصل چقدر است؟

ت) در چه حالتی سطح مقطع حاصل از برخورد یک استوانه، با صفحه‌ای که بر قاعدهٔ آن عمود است، یک مربع است؟

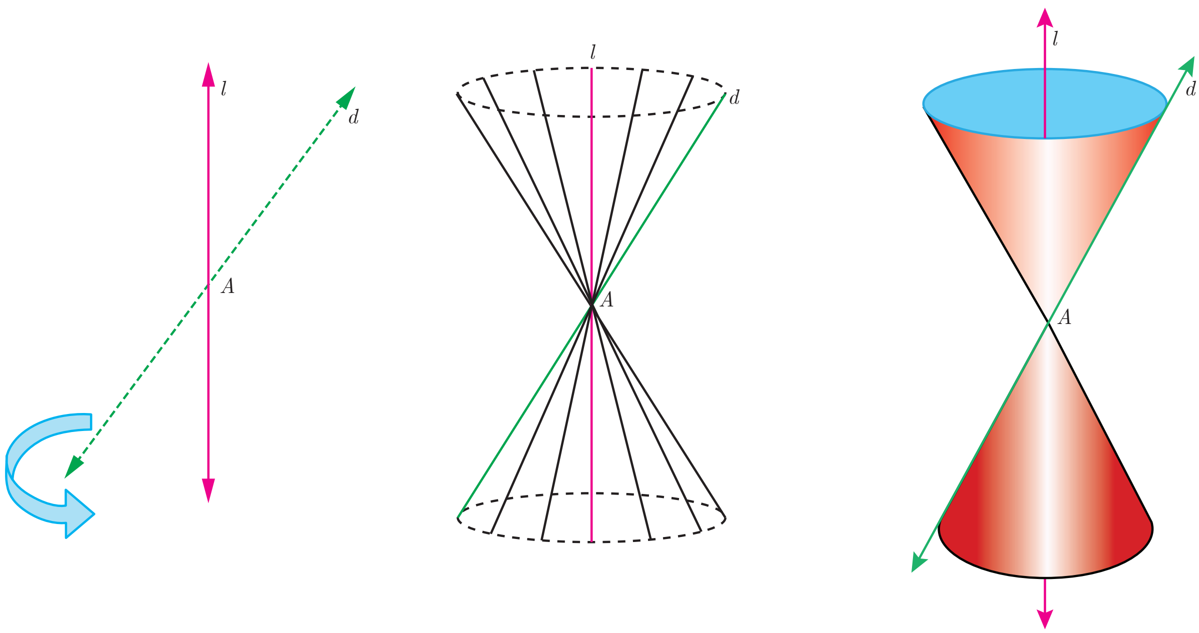
ث) اگر مستطیلی را حول طول آن دوران دهیم، در حالت کلی آیا حجم شکل با حالتی که مستطیل را حول عرض آن دوران بدهیم، یکی است؟

۳ شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول وتر آن چیست؟



آشنایی با مقاطع مخروطی

دو خط d و l در نقطه‌ای مثل A متقاطع‌اند. اگر خط d را حول خط l دوران دهیم، شکل حاصل یک **سطح مخروطی** نامیده می‌شود. در این حالت خط l **محور**، نقطهٔ A، **رأس** و خط d، **مولد** این سطح مخروطی است.

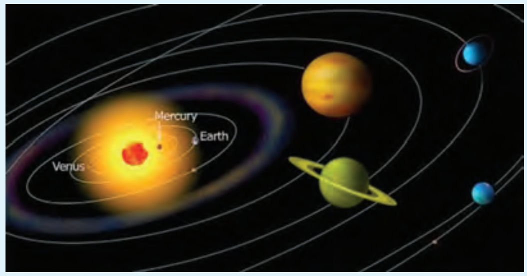


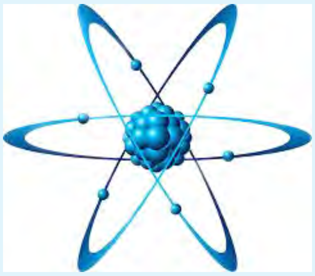
حال می‌خواهیم این سطح مخروطی را با صفحات مختلف برش بزنیم و در هر حالت سطح مقطع پدید آمده را بررسی کنیم. وقتی یک سطح مخروطی توسط یک صفحه برش داده می‌شود، در هر حالت سطح مقطع، یک منحنی است. از آنجا که این منحنی‌ها، حاصل تقاطع یک صفحه با یک سطح مخروطی هستند، **مقاطع مخروطی** نامیده می‌شوند. در ادامه با انواع مقاطع مخروطی آشنا خواهیم شد.

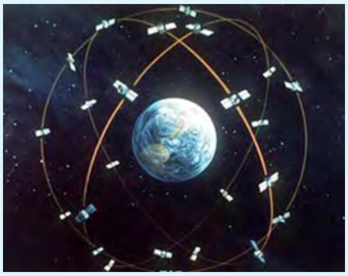
خواندنی

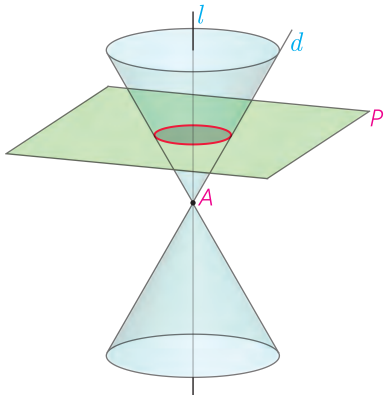
مقاطع مخروطی ابتدا توسط یونانیان باستان مورد مطالعه قرار گرفتند و به مرور زمان در مطالعهٔ مدار سیاره‌ها، ستاره‌های دنباله‌دار و قمرهای مصنوعی کاربردهای زیادی پیدا کردند.

این منحنی‌ها همچنین در مطالعهٔ ساختار اتم‌ها، سیستم‌های راهنمای هواپیماها، ساخت عدسی‌ها، نقشه‌برداری، وسایل نوری، وسایل پیش‌بینی هوا، ارتباطات قمرهای مصنوعی، ساختن پل و علاوه بر آن در جنگ، پزشکی و اقتصاد به‌کار می‌روند.

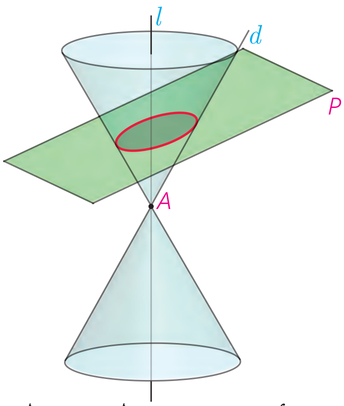




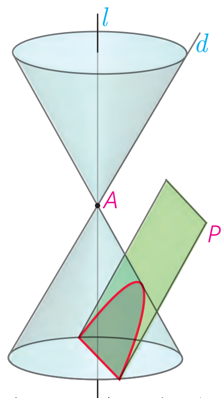




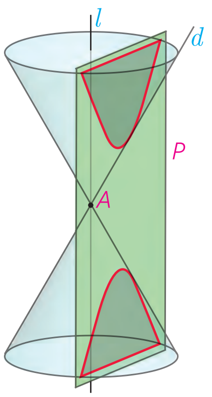
الف) اگر صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل **دایره** است.



ب) اگر صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و در هیچ حالتی با مولد سطح مخروطی موازی نشود، سطح مقطع به شکل **بیضی** خواهد بود.



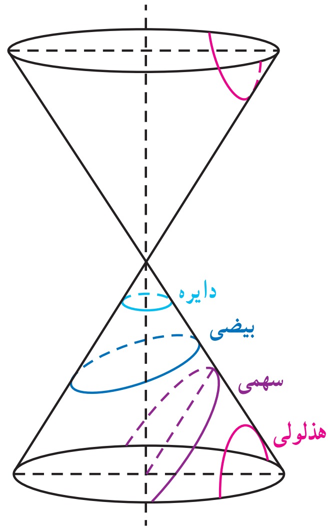
پ) اگر صفحهٔ P با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک **سهمی** است.



ت) اگر صفحهٔ P سطح مخروطی را، هم در قسمت بالایی و هم در قسمت پایینی قطع کند و از رأس آن عبور نکند، سطح مقطع حاصل را **هذلولی**[1] می‌نامیم.

۱ــ تعریف دقیق هذلولی و بررسی ویژگی‌های آن، جزء اهداف این کتاب نیست.

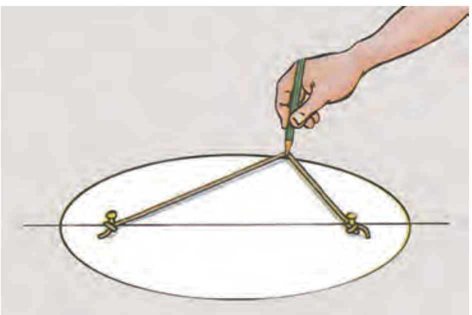
بدین ترتیب مقاطع مخروطی عبارت‌اند از دایره، بیضی، سهمی و هذلولی.
در ادامهٔ این درس قصد داریم بیضی و ویژگی‌های آن را بدون معرفی معادلهٔ آن، مورد بررسی قرار دهیم.



بیضی

حتماً می‌دانید که به کمک یک قطعه نخ چگونه می‌توان یک دایره رسم کرد. در این فعالیت می‌خواهیم ببینیم طریقهٔ رسم بیضی به کمک یک قطعه نخ چگونه است و حین انجام این فعالیت، ویژگی‌های بیضی را بهتر بشناسیم.

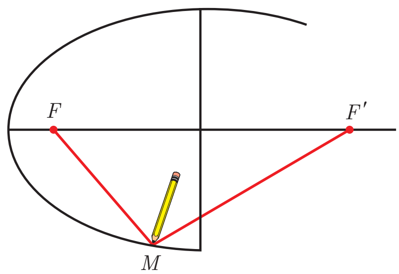
فعالیت



روی یک تخته چوبی، دو میخ به فاصله دلخواه بکوبید و یک قطعه نخ به طول l را به میخ‌ها گره بزنید. دقت داشته باشید که برای رسم بیضی لازم است که طول نخ از فاصلهٔ بین دو میخ، بیشتر باشد. حالا مطابق شکل، مدادتان را در حالتی که قطعه نخ از دو طرف کاملاً کشیده شده است، روی صفحه حرکت دهید.

شکل حاصل منحنی بسته‌ای است که به آن **بیضی** می‌گوییم.

همان‌طور که دیدید دو میخ در واقع نشان‌دهندهٔ دو نقطهٔ ثابت در بیضی هستند. این دو نقطه را **کانون‌های**[1] **بیضی** می‌نامند.



اگر کانون‌های بیضی را با F و F' نمایش دهیم و نقطه‌ای مثل M یک نقطهٔ دلخواه از بیضی باشد، مجموع فواصل این نقطه از نقاط F و F' یعنی $MF + MF'$ برابر با چیست؟

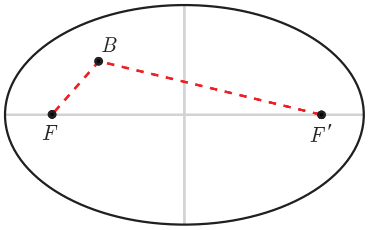
....

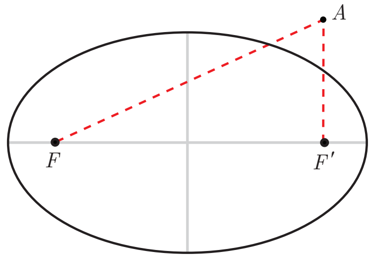
بدین ترتیب بیضی، مجموعه نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آنها از دو نقطهٔ ثابت واقع در صفحه، برابر با مقداری ثابت است.[2]

۱ــ Foci

۲ــ اثبات اینکه سطح مقطع مخروطی معرفی شده به عنوان بیضی، با این تعریف همخوانی دارد، خارج از اهداف این کتاب است.

می‌توان نشان داد که اگر نقطهٔ دلخواه A بیرون بیضی باشد، مجموع فواصل آن از نقاط F' و F بیشتر از l و اگر نقطهٔ دلخواه B، داخل بیضی باشد، فاصلهٔ آن از دو نقطهٔ F' و F کمتر از l خواهد بود.





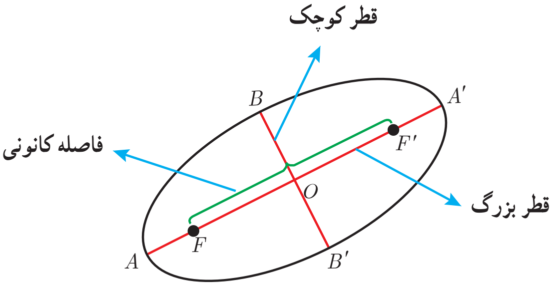
بیضی مقابل را در نظر بگیرید.

در این بیضی کانونها را F و F' نامیده‌ایم.

در هر بیضی اندازهٔ FF'، **فاصلهٔ کانونی** بیضی نامیده می‌شود.

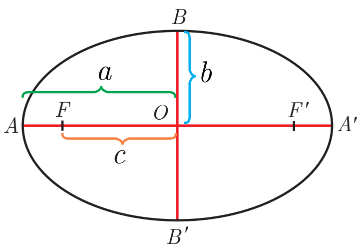
نقطهٔ میانی پاره‌خط FF'، **مرکز بیضی** است که آن را نقطهٔ O نامیده‌ایم.

قطری که از کانون‌های بیضی می‌گذرد یعنی AA'، **قطر بزرگ** یا **قطر کانونی** بیضی است. قطری که بر قطر کانونی بیضی عمود است، یعنی قطر BB'، **قطر کوچک** بیضی نامیده می‌شود.



فعالیت

بیضی مقابل را در نظر بگیرید. اندازهٔ پاره‌خط‌های OA، OB و OF را به‌ترتیب با a، b و c نمایش داده‌ایم. می‌دانیم که مجموع فواصل هر نقطه از بیضی، از دو کانون بیضی مقداری ثابت است.



۱ می‌خواهیم نشان دهیم قطر کانونی بیضی طولی برابر با همین مقدار ثابت دارد.

در رسم بیضی، حالتی را در نظر بگیرید که نوک مداد روی نقطهٔ A قرار دارد. در این‌صورت :

$$AF + AF' = AF + (AF + FF') = ۲AF + FF' \quad (۱)$$

به همین ترتیب فرض کنید نوک مداد روی نقطهٔ A' قرار دارد. در این صورت داریم :

$$A'F' + A'F = \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (۲)$$

از مقایسهٔ رابطهٔ (۱) و (۲) و برابری سمت چپ دو رابطه داریم : $AF = \cdots$

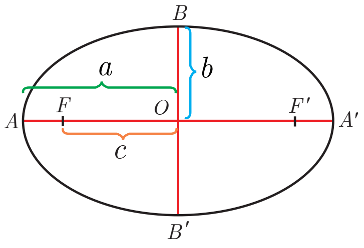
بنابراین می‌توان نتیجه گرفت $OA = \cdots$ پس مرکز بیضی، قطر بزرگ را نصف می‌کند و داریم : $AA' = \cdots = ۲a$.

به عبارتی :

$$AF + AF' = AF + (AF + FO + \cdots) = ۲AF + ۲\cdots = ۲(AF + \cdots) = ۲a$$

بنابراین

مجموع فواصل هر نقطه از بیضی، از دو کانون آن، مقدار ثابتی است که برابر است با ....



۲ حال قصد داریم رابطهٔ بین a، b و c را پیدا کنیم. در رسم بیضی حالتی را در نظر بگیرید که نوک مداد روی نقطهٔ B است. می‌دانیم این نقطه روی عمود منصف پاره‌خط FF' است. (چرا؟)

بنابراین به کمک قسمت قبلی فعالیت، اندازهٔ BF چقدر است؟ چرا؟

بدین ترتیب رابطهٔ بین a، b و c چیست؟

سؤال : آیا مرکز بیضی قطر کوچک را هم نصف می‌کند؟ چرا؟

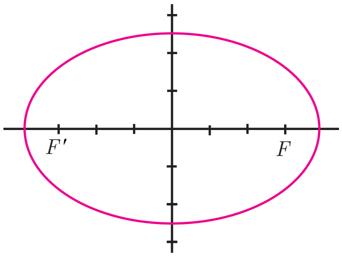
بنابراین :

اگر در یک بیضی، نیم قطر بزرگ را a، نیم قطر کوچک را b و نصف فاصلهٔ کانونی بیضی را c بنامیم، آنگاه ....

مثال :

اگر در یک بیضی $c=۳$ و $a=۴$ اندازه قطر کوچک بیضی چقدر است؟

حل :

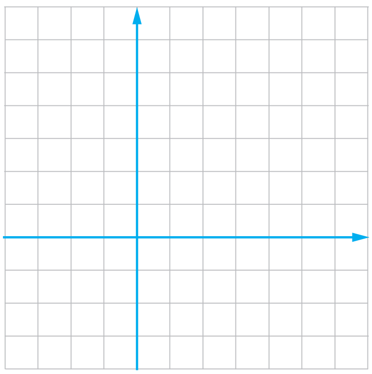


$$b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۴^۲ - ۳^۲ = ۱۶ - ۹ = ۷ \Rightarrow b = \sqrt{۷}$$

و بنابراین اندازهٔ قطر کوچک برابر است با $۲\sqrt{۷}$.

کار در کلاس

۱ اگر در یک بیضی داشته باشیم $a=۵$ و $b=۳$، در این‌صورت اندازهٔ فاصلهٔ کانونی را محاسبه کنید.



۲ در یک بیضی طول قطر بزرگ ۶ و قطر کوچک ۴ واحد است.

اگر مرکز این بیضی نقطه‌ای با مختصات (۴،۵) باشد :

الف) فاصلهٔ کانونی بیضی را پیدا کنید.

ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ و قطر کوچک و همچنین کانون‌های بیضی را بنویسید.

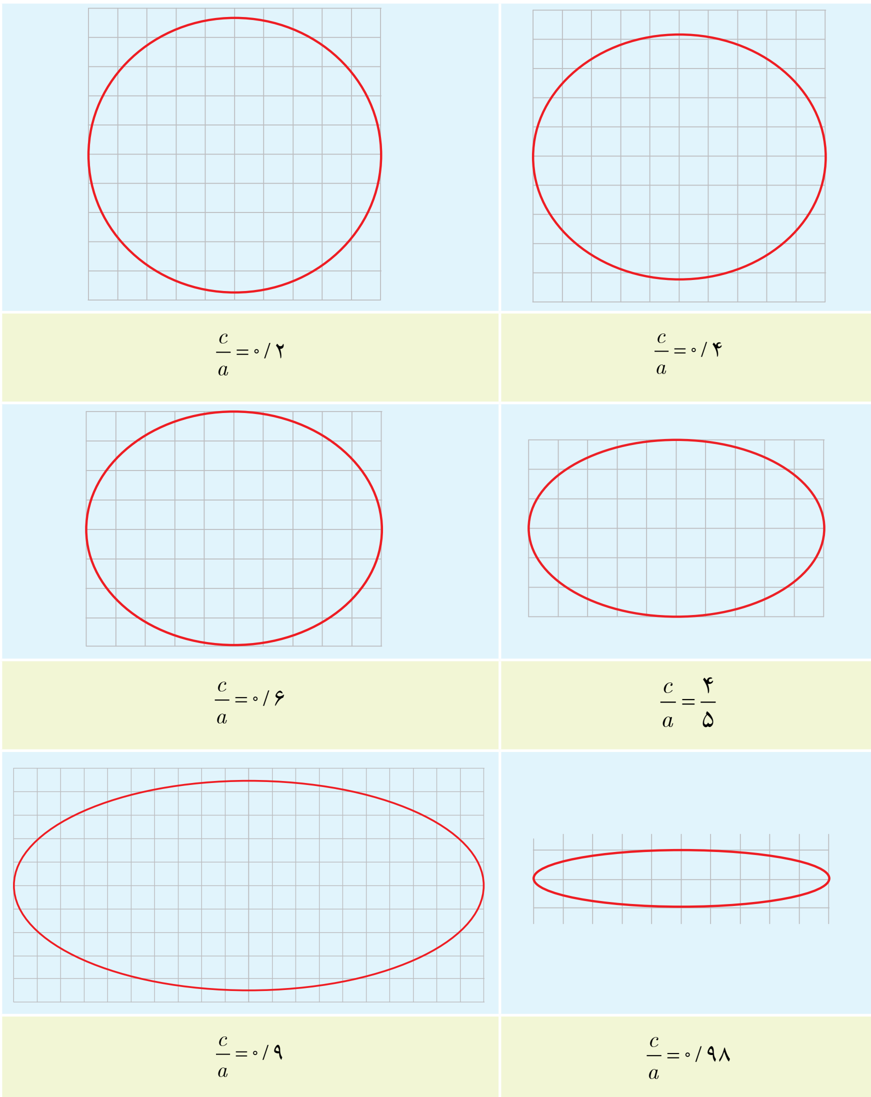
خروج از مرکز

همان‌طور که دیدید اندازهٔ قطر بزرگ، قطر کوچک و فاصلهٔ کانونی یک بیضی مقادیری به هم وابسته‌اند. بدیهی است که همیشه مقدار a از مقدار b و c بیشتر است (چرا؟).

اندازه‌های a، b و c بر شکل بیضی تأثیرگذار است و همواره $۰ \le \frac{c}{a} \le ۱$ (چرا؟). هر چه نسبت $\frac{c}{a}$، بزرگ‌تر و به ۱ نزدیک‌تر باشد، شکل بیضی کشیده‌تر می‌شود و هر چه مقدار $\frac{c}{a}$ کوچک‌تر و به صفر نزدیک‌تر باشد، شکل بیضی به شکل دایره نزدیک‌تر خواهد شد.

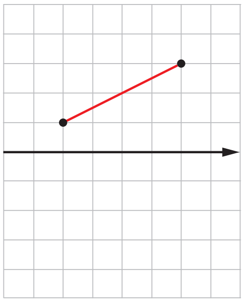
> مقدار $\frac{c}{a}$ را **خروج از مرکز بیضی** می‌نامند و معمولاً آن را با حرف e نمایش می‌دهند.

در ادامه چند بیضی با مقادیر مختلف e رسم شده است. تأثیر اندازهٔ خروج از مرکز را بر شکل بیضی بررسی کنید.



اگر مقدار خروج از مرکز بیضی برابر ۱ شود، شکل بیضی چگونه خواهد بود؟ اگر برابر صفر باشد، چطور؟

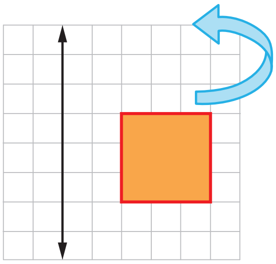
تمرین



۱ در شکل زیر پاره‌خط داده شده را حول محور دوران داده‌ایم.

الف) حجم شکل حاصل را محاسبه کنید.

ب) سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه‌ای که شامل محور دوران باشد، چیست و مساحت آن چقدر است؟



۲ مربعی با ضلع ۳ واحد مطابق شکل در فاصلهٔ ۲ واحد از یک خط راست قرار دارد.

الف) شکل حاصل از دوران این مربع حول محور داده شده را رسم و حجم آن را محاسبه کنید.

ب) سطح مقطع این شکل را در برخورد با صفحه‌ای موازی با قاعدهٔ آن توصیف کنید.

۳ اگر یک لوزی با طول قطرهای ۶ و ۴ حول قطر بزرگ دوران داده شود، حجم شکل حاصل چقدر است؟

۴ کانون‌های یک بیضی نقاط (۱,۳) و (۱,۵-) است.

الف) فاصلهٔ کانونی، مختصات مرکز بیضی و معادلهٔ قطرهای بزرگ و کوچک بیضی را بنویسید.

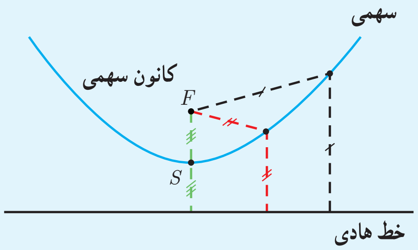
ب) اگر $a=۶$ باشد، اندازهٔ قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

۵ خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{۴}{۵}$، مرکز آن (۱- ، ۴-) و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است.

الف) طول قطر کانونی و فاصلهٔ کانونی را محاسبه کنید.

ب) مختصات نقاط دو سر قطر کوچک و قطر بزرگ و کانون‌های بیضی را پیدا کنید.

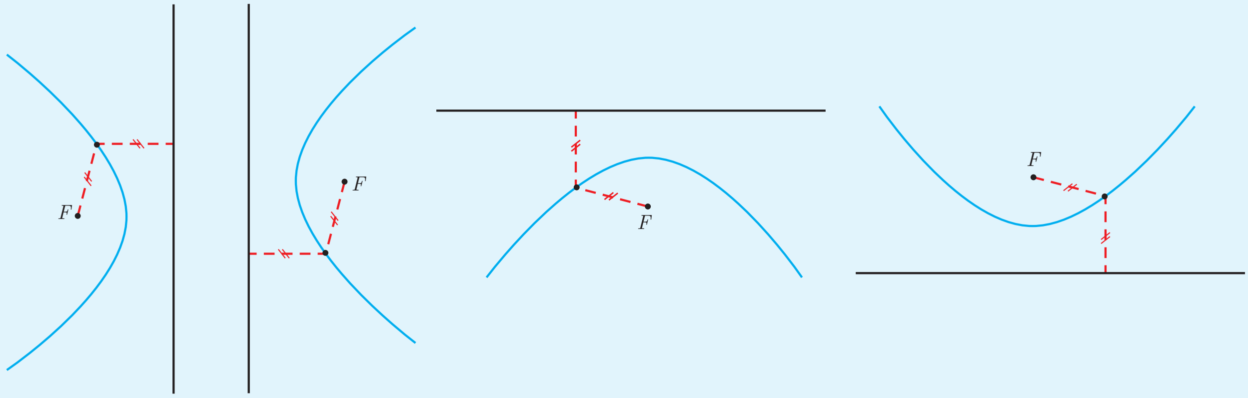
خواندنی



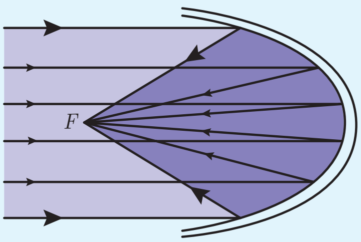
در سال‌های گذشته با معادلهٔ $y = ax^2+bx+c$ آشنا شدید و نمودار آن را سهمی نامیدید. سهمی به بیان دقیق‌تر، مجموعه نقاطی از صفحه است که از یک خط ثابت داده شده در آن صفحه و یک نقطهٔ ثابت غیر واقع بر آن خط و در همان صفحه، به یک فاصله است. این نقطهٔ ثابت را **کانون سهمی** و خط ثابت را **خط هادی سهمی** می‌نامند.

شکل مقابل یک سهمی را نمایش می‌دهد. همان‌طور که می‌بینید تمام نقاط روی سهمی از نقطهٔ ثابت F و خط هادی فاصله‌ای برابر دارند. اگر از نقطهٔ F به خط هادی عمود کنیم، محل تقاطع خط عمود و سهمی، نقطه‌ای است که به آن **رأس سهمی** می‌گویند و در این شکل آن را S نامیده‌ایم.

نمودارهای زیر، حالت‌های مختلف سهمی را نمایش می‌دهد.



سهمی‌ها ویژگی جالبی دارند که در ساخت آینه‌های سهموی، تلسکوپ‌ها، چراغ‌های جلو اتومبیل، آنتن‌های سهموی رادار، میکرو ویو و گیرنده‌های بشقابی تلویزیون کاربرد دارد. پرتوهایی که از کانون سهمی به سهمی برخورد می‌کنند، موازی با محور سهمی (عمود بر خط هادی) خارج می‌شوند و بالعکس، پرتوهایی که موازی با محور سهمی به آن می‌تابند، دقیقاً در کانون سهمی جمع می‌شوند.



به عنوان مثال معمولاً جدارهٔ پشت لامپ خودروها، آینه‌ای به شکل سهمی است. چراغ خودرو دقیقاً در کانون این سهمی قرار داده می‌شود و بدین ترتیب شعاع‌های نور بعد از برخورد با جدارهٔ آینه‌ای به‌صورت پرتوهای موازی با محور سهمی به جلو بازتاب می‌یابند و روشنایی بیشتری را موجب می‌شوند.

جابه‌جایی اندک لامپ در راستای عمودی، باعث خروج پرتوهای نور رو به بالا یا رو به پایین می‌شود که اصطلاحاً به آن نور بالا یا نور پایین گفته می‌شود.

درس دوم

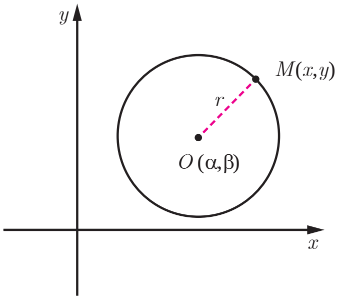
دایره

بنای دایره‌ای شکل مجموعه تئاتر شهر، تهران

زیربنای برج میلاد با نقشهٔ دایره‌ای شکل به قطر ۶۶ متر

دایره یکی از شکل‌های مهم هندسی است که با تعریف آن و برخی ویژگی‌های آن آشنا شده‌اید. می‌دانیم دایره، مجموعهٔ نقاطی از صفحه است که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ ثابتی در صفحه، مقداری ثابت است. این نقطهٔ ثابت را **مرکز دایره** و مقدار ثابت را **اندازهٔ شعاع دایره** می‌نامیم. دایرهٔ C را به مرکز O و شعاع r معمولاً با نماد $C(O,r)$ نمایش می‌دهیم.

فعالیت



در این درس به کمک دستگاه مختصات، به تحلیل برخی از ویژگی‌های دایره خواهیم پرداخت.
دایرهٔ $C(O,r)$ را در دستگاه مختصات به گونه‌ای در نظر بگیرید که مرکز آن نقطهٔ $O(\alpha,\beta)$ و نقطهٔ $M(x,y)$ نقطهٔ دلخواهی روی آن باشد. می‌دانیم که فاصلهٔ مرکز دایره از تمام نقاط روی آن برابر با مقدار ثابت r است.

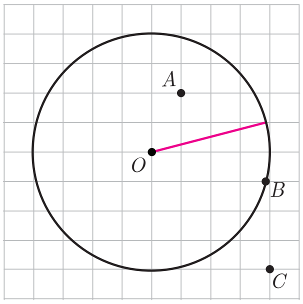
بنابراین به کمک رابطهٔ فاصلهٔ دو نقطه که در سال‌های گذشته با آن آشنا شدیم، داریم :

$$OM=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$$

با جایگزینی مقدار r به جای OM و حذف رادیکال خواهیم داشت :

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

رابطهٔ $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع r در صفحهٔ مختصات است که به آن **معادلهٔ استاندارد دایره** می‌گوییم.



به سادگی می‌توان دید که :

الف) اگر نقطه‌ای مثل B **روی دایره** باشد، فاصلهٔ آن تا مرکز دایره برابر شعاع دایره است و $OB = r$

ب) اگر نقطه‌ای مثل A **درون دایره** باشد، فاصلهٔ آن تا مرکز دایره .... شعاع دایره است و $OA \square r$

پ) اگر نقطه‌ای مثل C **بیرون دایره** باشد، فاصلهٔ آن تا مرکز دایره .... شعاع دایره است و $OC \square r$

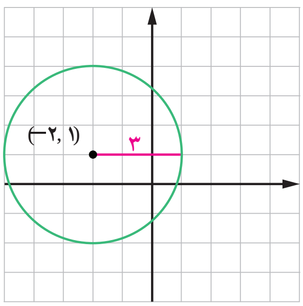
بدین‌ترتیب اگر معادلهٔ دایرهٔ $C(O,r)$ به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع r در دستگاه مختصات داده شده باشد، می‌توان وضعیت نقاط مختلف صفحه را نسبت به دایره بررسی کرد :

نقاطی که در معادلهٔ $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲$ صدق کنند، نقاطی هستند که روی دایره قرار دارند.

مجموعه جواب نامعادلهٔ $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲<r^۲$ نقاطی از صفحه را مشخص می‌کند که ....

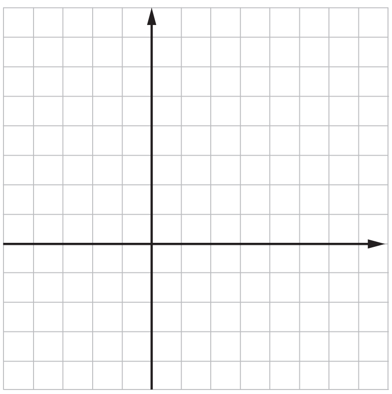
مجموعه جواب نامعادلهٔ $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲>r^۲$ نقاطی از صفحه را مشخص می‌کند که ....

مثال



الف) اگر مرکز دایره‌ای نقطهٔ $(-۲,۱)$ و شعاع آن ۳ باشد، معادلهٔ استاندارد دایره به شکل زیر خواهد بود :

$(x+۲)^۲+(y-۱)^۲=۹$



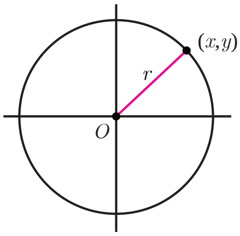
ب) اگر معادلهٔ دایره‌ای به شکل $(x-۳)^۲+(y+۱)^۲=۴$ باشد، مختصات مرکز آن .... و اندازهٔ شعاع برابر با .... است.

این دایره را در دستگاه مختصات رسم کنید.

کار در کلاس

۱ در هر حالت معادلهٔ دایره را بنویسید :

الف) دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۲.



ب) دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع r.

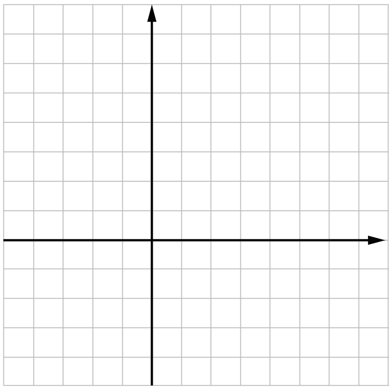
پ) دایره‌ای که از نقطهٔ (۳-,۱) بگذرد و مرکز آن (۱-,۲) باشد.

۲ در هر حالت، وضعیت هر نقطه را نسبت به دایره مشخص کنید :

معادلهٔ دایره	شعاع و مختصات مرکز دایره	نقاط		
		A(۱ , ۱)	B(۰ , ۳)	C(۲- , ۴)
$(x+۲)^۲+(y-۳)^۲=۴$	....	....	....	....
....	دایره به مرکز (۱ ,۲-) و شعاع ۳	....	بیرون دایره	....

۳ اگر معادلهٔ دایره‌ای به شکل $(x+۱)^۲+y^۲=۴$ باشد :

الف) مختصات مرکز دایره و اندازهٔ شعاع دایره را بنویسید.

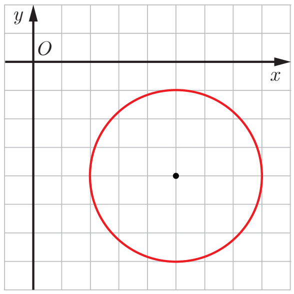


ب) مختصات نقاط تقاطع این دایره را با محورهای مختصات پیدا کنید.

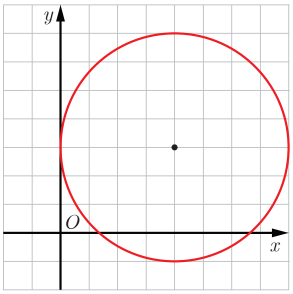
(**راهنمایی** : برای پیدا کردن نقاط تقاطع دایره با محور x، در معادلهٔ داده شده مقدار y را برابر صفر قرار دهید و برای پیدا کردن نقاط برخورد با محور y، مقدار x را صفر در نظر بگیرید.)

پ) شکل این دایره را رسم کنید.

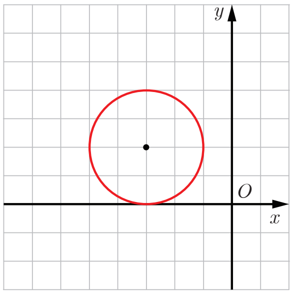
۴ معادلهٔ هر دایره را بنویسید :



....



....



....

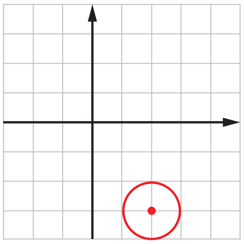
معادلهٔ گستردهٔ یک دایره

معادلهٔ هر دایره را علاوه بر شکل استاندارد، به کمک اتحادها به‌شکل دیگری نیز می‌توان نمایش داد که به آن معادلهٔ گسترده یا معادلهٔ ضمنی دایره می‌گوییم. در ادامه با نحوهٔ نوشتن این معادله آشنا خواهیم شد.

برای سادگی از یک مثال کمک می‌گیریم.

معادلهٔ دایرهٔ $(x-2)^2+(y+3)^2=1$ را در نظر بگیرید.

این معادله را می‌توان به شکل زیر ساده کرد:



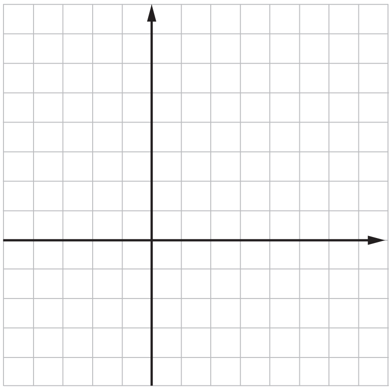
$$x^2-4x+4+y^2+6y+9=1$$
$$\rightarrow x^2+y^2-4x+6y+12=0$$

این رابطه را **معادلهٔ گستردهٔ دایره** می‌نامیم.

بدیهی است که معادلهٔ استاندارد دایره و معادلهٔ گستردهٔ آن به یکدیگر قابل تبدیل‌اند.

برای مثال فرض کنید معادلهٔ گستردهٔ یک دایره به شکل $x^2+y^2-6x+2y+6=0$ باشد.

عبارت داده شده را به شکل مجموع دو مربع کامل می‌نویسیم. داریم:



$$x^2+y^2-6x+2y+6=0$$
$$\rightarrow (x^2-6x)+(y^2+2y)+6=0$$
$$\rightarrow (x-3)^2-9+(y+1)^2-1+6=0$$
$$\rightarrow (x-3)^2+(y+1)^2=4$$

مختصات مرکز و شعاع این دایره را بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

اگر در حالت کلی معادلهٔ گستردهٔ یک دایره به شکل $x^2+y^2+ax+by+c=0$ داده شده باشد، با تبدیل x^2+ax و y^2+by به دو مربع کامل داریم:

$$(x^2+ax)+(y^2+by)+c=0$$
$$\rightarrow (x+\frac{a}{2})^2-\frac{a^2}{4}+(y+\frac{b}{2})^2-\frac{b^2}{4}+c=0$$
$$\rightarrow (x+\frac{a}{2})^2+(y+\frac{b}{2})^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$$

بدین ترتیب:

> اگر $x^2+y^2+ax+by+c=0$ **معادلهٔ گستردهٔ** یک دایره باشد، مختصات مرکز این دایره $O(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2})$ است.
> شعاع این دایره برابر است با: $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$

بدیهی است که با توجه به عبارت زیر رادیکال در این رابطه، معادلهٔ $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادلهٔ یک دایره است اگر و تنها اگر رابطهٔ $a^2+b^2>4c$ برقرار باشد.

کار در کلاس

۱ معادلهٔ گستردهٔ دایره‌ای به شکل $x^2+y^2-2x-6y+6=0$ است. مختصات مرکز این دایره و شعاع آن‌را پیدا کنید و معادلهٔ دایره را به شکل استاندارد بنویسید.

۲ چه نقاطی در نامعادلهٔ زیر صدق می‌کنند. پاسخ خود را با رسم شکل مشخص کنید.

$$x^2+4x+y^2-12\leq 0$$

اوضاع نسبی خط و دایره

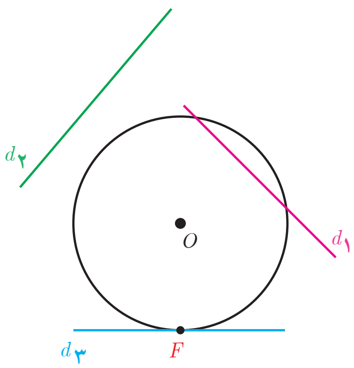
در سال‌های گذشته به طور شهودی با اوضاع نسبی خط و دایره آشنا شده‌اید. در این فعالیت قصد داریم به کمک معادلهٔ دایره و خط، این مفاهیم را مرور کنیم.

دایره $C(O,r)$ را در صفحه در نظر بگیرید. با توجه به شکل به سادگی می‌توان دید که خط و دایره می‌توانند **یک**، یا **دو** نقطهٔ اشتراک داشته، یا **هیچ** نقطهٔ اشتراکی نداشته باشند.

الف) در حالتی که خط و دایره تنها یک نقطهٔ اشتراک داشته باشند، خط بر دایره **مماس** است.

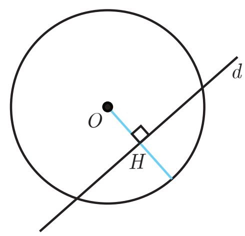
ب) در حالتی که خط و دایره دو نقطهٔ مشترک داشته باشند، خط و دایره را **متقاطع** می‌نامیم.

در این حالت خط را نسبت به دایره، **قاطع** می‌نامند.

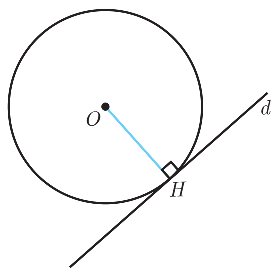


می‌توان دید که :

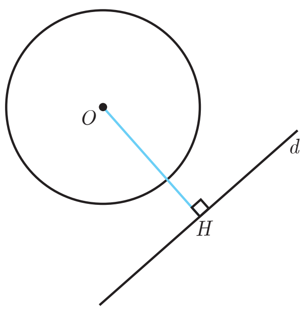
اگر خط d با دایره متقاطع باشد، $OH<r$ است.



اگر خط d بر دایره مماس باشد، $OH=r$ است.



اگر خط d، دایره را قطع نکند، $OH>r$ است.



یادآوری

۱ــ خط مماس در نقطهٔ تماس با دایره، بر شعاع آن دایره عمود است.

۲ــ فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0,y_0)$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=0$ برابر است با :

$$d=\frac{|ax_0+bx_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

اگر معادلهٔ دایرهٔ $C(O,r)$ به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع r در دستگاه مختصات داده شده باشد، می‌توان وضعیت خطوط مختلف صفحه را نسبت به دایره بررسی کرد :

مثال

وضعیت خط ۳ $= x+y$ را نسبت به دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x-۳=۰$ مشخص کنید.

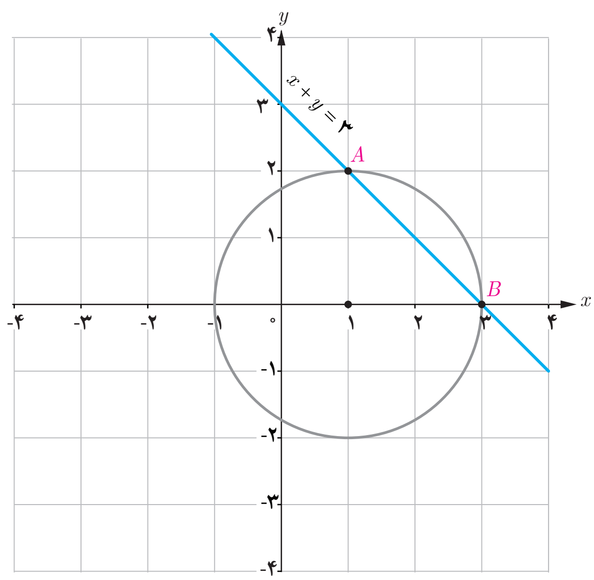
حل

کافی است فاصلهٔ مرکز دایره را از خط داده شده حساب کرده و اندازهٔ آن را با اندازهٔ شعاع دایره مقایسه کنیم.

به کمک آنچه در معادلهٔ گستردهٔ دایره گفته شد مرکز دایره از رابطهٔ $O(\frac{-a}{۲},\frac{-b}{۲})$، نقطهٔ $(۱,۰)$ و شعاع دایره از رابطهٔ $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$ برابر است با ۲.

به کمک رابطهٔ فاصلهٔ نقطه از خط، فاصلهٔ مرکز دایره از خط داده شده برابر است با $d=\frac{|۱(۱)+۱(۰)-۳|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$ و از آنجا که این مقدار از شعاع دایره کمتر است، پس می‌توان چنین نتیجه گرفت که خط داده شده با دایره متقاطع است.

وضعیت نسبی خط و دایره در این مثال مشخص شد، اما برای آنکه فهم بهتری از این مسئله پیدا کنیم، ابتدا نمودار دایره و خط داده شده را رسم می‌کنیم.



همان‌طور که شکل نشان می‌دهد، دایره و خط داده شده در دو نقطهٔ A و B متقاطع‌اند. اگر مختصات نقطهٔ برخورد خط و دایره را در حالت کلی، (x,y) در نظر بگیریم، بدیهی است که مختصات این نقطه، هم در خط داده شده و هم در معادلهٔ دایره صدق می‌کند.

بنابراین برای پیدا کردن مختصات آن کافی است به‌همان شیوه‌ای که در پایه‌های قبل دیدیم، مقدار $y=۳-x$ را در معادلهٔ دایره جایگزین کنیم. داریم :

$$x^۲+(۳-x)^۲-۲x-۳=۰$$
$$\rightarrow x^۲+۹-۶x+x^۲-۲x-۳=۰$$
$$\rightarrow ۲x^۲-۸x+۶=۰$$
$$\rightarrow x^۲-۴x+۳=۰ \qquad (۱)$$
$$\rightarrow (x-۱)(x-۳)=۰ \rightarrow x=۱ \text{ یا } x=۳$$

با جایگزین کردن مقدار x در یکی از معادله‌های خط یا دایره، به این نتیجه می‌رسیم که خط فوق در دو نقطهٔ $(۳,۰)$ و $(۱,۲)$ با دایره متقاطع است.

بدیهی است که اگر معادلهٔ (۱) جواب نداشته باشد، خط دایره را قطع نمی‌کند و اگر فقط یک جواب داشته باشد، خط بر دایره مماس است.

در واقع این روش هم می‌تواند وضعیت خط و دایره را نسبت به هم مشخص کند.

در مورد این دو روش و مزیت‌های هر کدام، با دوستان خود گفت‌وگو کنید.

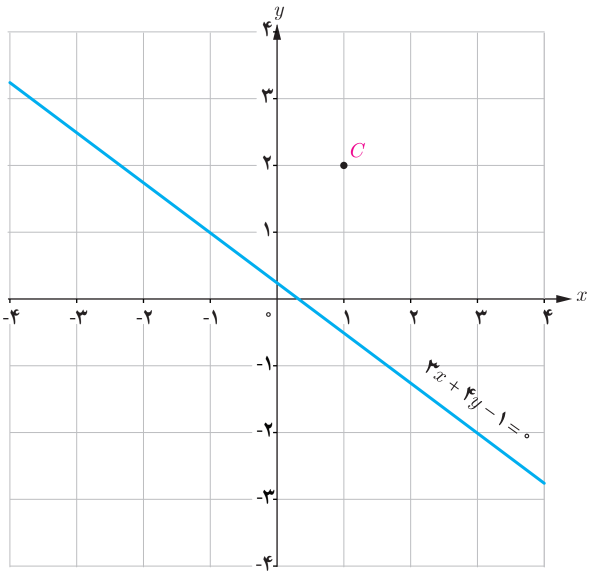
کار در کلاس

۱ در هر مورد وضعیت خط و دایره را نسبت به هم مشخص کنید. مختصات نقاط مشترک را در صورت وجود، بنویسید.

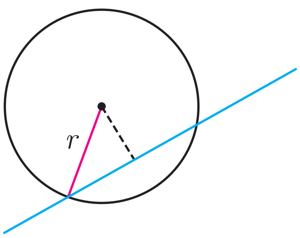
الف) دایرهٔ $x^2+y^2+2x+2y-1=0$ و خط $x+y=1$

ب) دایرهٔ $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ و خط $y=-1$

۲ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که بر خط $3x+4y-1=0$ مماس بوده و مرکز آن $C(1,2)$ باشد.



۳ مرکز دایره‌ای نقطهٔ $O(2,-3)$ است. این دایره روی خط $3x-4y+2=0$ وتری به طول ۶ جدا می‌کند. معادلهٔ این دایره را بنویسید.



اوضاع نسبی دو دایره

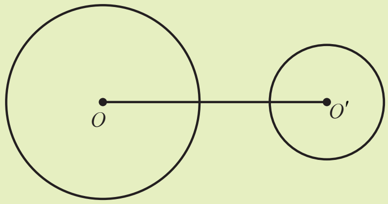
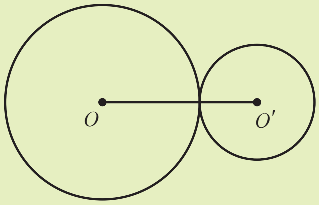
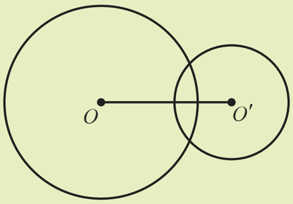
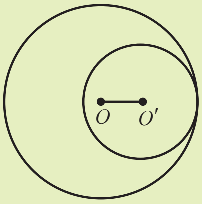
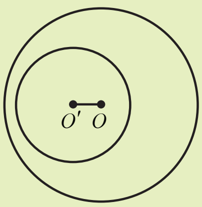
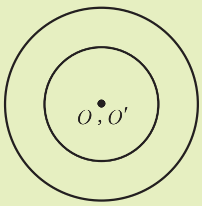
نظیر آنچه برای اوضاع نسبی نقطه و دایره و همین طور خط و دایره دیدید، قصد داریم ابتدا به طور شهودی وضعیت‌های مختلفی را که دو دایرهٔ دلخواه می‌توانند نسبت به هم داشته باشند، مشخص کنیم و سپس وضعیت دو دایره را نسبت به یکدیگر، در صفحه مختصات و با داشتن معادلهٔ دو دایره بررسی کنیم.





دو دایرهٔ دلخواه $C(O,r)$ و $C(O',r')$ را با فرض $r>r'$ در نظر بگیرید. در جدول زیر حالت‌های مختلف دو دایره نسبت به هم داده شده و در هر حالت رابطهٔ بین اندازهٔ شعاع‌های دو دایره با اندازهٔ فاصلهٔ بین مرکزهای دو دایره بیان شده است.

پاره‌خطی که مرکزهای دو دایره را به‌هم وصل می‌کند، **خط‌المرکزین** نامیده می‌شود که در اینجا اندازهٔ آن‌را با d نمایش داده‌ایم.

دو دایره برون هم (متخارج)	$d > r + r'$	
دو دایره مماس برون	$d = r + r'$	
دو دایرهٔ متقاطع	$r - r' < d < r + r'$	
دو دایرهٔ مماس درون	$d = r - r'$	
دو دایرهٔ متداخل	$d < r - r'$	
دو دایرهٔ هم‌مرکز	$d = 0$	

اگر معادلهٔ دو دایره را در دستگاه مختصات داشته باشیم، بدون رسم دو دایره چطور می‌توانیم وضعیت آنها را نسبت به هم مشخص کنیم؟ در این مورد به کمک شکل‌های بالا با دوستان خود گفت‌وگو کنید.

به‌نظر می‌رسد با داشتن اندازهٔ شعاع‌های دو دایره و طول خط‌المرکزین بتوان وضعیت دو دایره را نسبت به‌هم مشخص کرد.

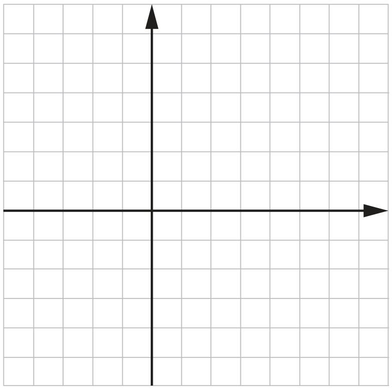
مثال

الف) وضعیت دو دایرهٔ $x^2+y^2+6x+8y=0$ و $x^2+y^2-4x+6y+12=0$ را نسبت به هم مشخص کنید و سپس نمودار دو دایره را رسم کنید.

حل

به کمک آنچه دیدیم، ابتدا مختصات مرکز و طول شعاع هر دایره را پیدا می‌کنیم و سپس با مقایسه مقادیر شعاع با طول خط‌المرکزین وضعیت دو دایره را نسبت به هم مشخص می‌کنیم.

در دایرهٔ $x^۲+y^۲+۶x+۸y=۰$، مرکز دایره از رابطهٔ $O(\frac{-a}{۲},\frac{-b}{۲})$، نقطهٔ $O(-۳,-۴)$ و اندازهٔ شعاع از رابطهٔ $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$ برابر ۵ است.



در دایرهٔ $x^۲+y^۲-۴x+۶y+۱۲=۰$، به شیوهٔ مشابه مرکز دایره نقطهٔ $O'(۲,-۳)$ و اندازهٔ شعاع $r'=۱$ است.

از طرفی طول خط‌المرکزین (فاصله بین دو مرکز) برابر است با:

$$OO'=\sqrt{(-۳-۲)^۲+(-۴+۳)^۲}=\sqrt{۲۶}$$

بنابراین از آنجا که داریم: $۵-۱<\sqrt{۲۶}<۵+۱$ یعنی $r-r'<d<r+r'$ پس دایره‌های فوق، متقاطع هستند.

نمودار دو دایره را رسم کنید.

کار در کلاس

۱ با انجام مراحل زیر، معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که بر دایرهٔ $x^۲+y^۲+۲x-۴y-۴=۰$ مماس برون و مرکز آن نقطهٔ $O(۲,-۲)$ باشد:

ـ مختصات نقطهٔ O'، مرکز دایرهٔ داده شده عبارت است از: ....

ـ اندازهٔ r' یعنی شعاع دایره داده شده برابر است با: ....

ـ فاصلهٔ OO' برابر است با: ....

ـ شرط اینکه دو دایره مماس بیرونی باشند این است که: .... پس شعاع r باید برابر .... باشد.

ـ معادلهٔ دایرهٔ مطلوب را با معلوم بودن اندازهٔ شعاع و مختصات مرکز آن بنویسید: ....

۲ در هر حالت معادلهٔ دو دایره را بنویسید و در مورد تعداد پاسخ‌های درست با دوستان خود گفت‌وگو کنید.

الف) دو دایره هم‌مرکز باشند.

ب) دو دایره برون هم باشند.

۳ در هر مورد وضعیت دو دایره را نسبت به هم مشخص کنید:

الف) $x^۲+y^۲-۲x+۴y=۰$ و $x^۲+y^۲+۲x-۴y=۰$

ب) $(x+۱)^۲+(y-۲)^۲=۱$ و $x^۲+y^۲-۲x+۴y+۱=۰$

تمرین

۱ مختصات مرکز هر دایره و اندازهٔ شعاع آن را پیدا کنید و آن دایره را در صفحه مختصات رسم کنید :

الف) $x^۲+y^۲-۶x+۲y+۱=۰$

ب) $x^۲+(y+۳)^۲-۴=۰$

پ) محل تقاطع هر دایره را با محورهای مختصات، در صورت وجود مشخص کنید.

۲ در هر حالت معادلهٔ دایره را بنویسید :

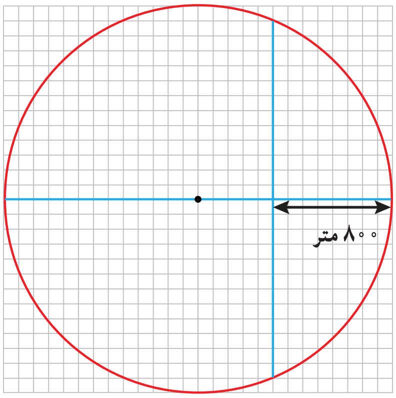
الف) دایره‌ای که از مبدأ مختصات بگذرد و مرکز آن $C(۲,-۱)$ باشد.

ب) دایره‌ای که مرکز آن $(۲,۳)$ و نقطهٔ $(-۳,-۹)$ نقطه‌ای روی آن باشد.

پ) دایره‌ای که نقاط $(۳,۰)$ و $(-۴,-۱)$ دو سر یکی از قطرهای آن باشند.

۳ وضعیت نقاط $(۱,۰)$، $(۲,۳)$، $(-۲,-۱)$، $(۰,۰)$ را نسبت به دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۴y+۱=۰$ مشخص کنید.

۴ شهرداری قصد دارد در یک فضای سبز دایره‌ای شکل به شعاع ۱۳۰۰ متر، دو مسیر پیاده‌روی مطابق شکل بسازد. اگر مختصات مرکز دایره $(۱۳,۱۳)$ و هر واحد برابر ۱۰۰ متر باشد :



الف) معادلهٔ این دایره چیست؟

ب) مختصات نقاط برخورد دو مسیر را با دایره پیدا کنید.

پ) دو مسیر در چه نقطه‌ای با یکدیگر متقاطع‌اند؟

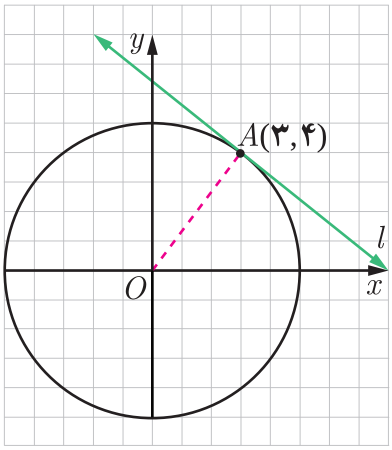
ت) طول مسیر عمودی چقدر است؟

۵ معادلهٔ گستردهٔ یک دایره به شکل $x^۲+y^۲+۲x+۲y-۸=۰$ است. مختصات مرکز دایره و شعاع آن را پیدا کنید و آن را به شکل استاندارد بنویسید.

۶ وضع هر خط را نسبت به دایره مشخص کنید و مختصات نقاط اشتراک را در صورت وجود بنویسید.

الف) $x^۲+y^۲-۴x-۴y+۷=۰$ و $۶x+۴y=۰$

ب) $x^۲+y^۲=۲$ و $y=-x-۲$



۷ اگر بدانیم خطی در نقطه $(۳,۴)$ بر دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات مماس است، معادله خط مماس چیست؟

۸ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکزش نقطهٔ $(3,0)$ است و بر خط $3x-4y=3$ مماس است.

۹ مشخص کنید در هر حالت دو دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟

الف) $x^2+y^2-2x+4y=4$ و $x^2+y^2+2x-4y=9$

ب) $(x-2)^2+(y+3)^2=7$ و $x^2+(y-5)^2=5$

۱۰ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(-1,-1)$ باشد و با دایرهٔ $x^2+y^2-4x-6y=3$ مماس درون باشد.

۱۱ دایره‌ای به معادلهٔ $x^2+y^2-4x+6y+4=0$ داده شده است. دو نقطهٔ A و B به طول ۲ روی این دایره در نظر می‌گیریم. مختصات نقطهٔ C را روی این دایره چنان بیابید که مثلث ABC در رأس C متساوی‌الساقین شود.

نمای بالایی ترمینال جنوب، تهران