



educo.ir

دانلود سوالات آزمون‌های مختلف

به نام او

روز اول

۱. همه  $a$  و  $b$  های طبیعی و نسبت به هم اول را بیابید که

$$\frac{a}{b} = b/a.$$

(توضیح: اگر  $a = 92$  و  $b = 13$ ، آن گاه  $b/a$  برابر سیزده و نود و دو صدم است.)



۲. فرض کنید اعداد طبیعی  $W_1, W_2, \dots, W_n$  و وزن  $n$  وزنه باشند. به این مجموعه از وزنه‌ها «کامل» می‌گوییم اگر برای هر عدد طبیعی  $W$  که کوچک‌تر از  $W_1 + W_2 + \dots + W_n$  است، مجموع وزن تعدادی از این وزنه‌ها برابر  $W$  شود. ثابت کنید اگر از یک مجموعه وزنه کامل، یک وزنه با سنگین‌ترین وزن را حذف کنیم، مجموعه وزنه باقی‌مانده نیز کامل است.

۳. مثلث دل‌خواه  $ABC$  داده شده است. وسط کمان  $BC$  از دایره محیطی مثلث که شامل رأس  $A$  نیست را  $M$  می‌نامیم. از نقطه  $O$ ، مرکز دایره محیطی مثلث، دو خط به موازات  $MB$  و  $MC$  رسم می‌کنیم تا اضلاع  $AB$  و  $AC$  را به ترتیب در نقاط  $K$  و  $L$  قطع کنند. ثابت کنید اگر امتداد ارتفاع نظیر رأس  $A$  در مثلث، با دایره محیطی در نقطه  $N$  تلاقی کند آن گاه  $NK = NL$ .

موفق باشید

به نام او

روز دوم

۴. فرض کنید  $C$  یک دایره و  $P$  نقطه‌ای خارج از آن باشد. دو مماس  $PA$  و  $PB$  را بر دایره رسم و نقطه  $K$  را روی پاره خط  $AB$  انتخاب کرده‌ایم. دایره محیطی مثلث  $PBK$  برای بار دوم دایره  $C$  را در نقطه  $T$  قطع می‌کند. قرینه  $P$  نسبت به  $A$  را  $P'$  می‌نامیم. نشان دهید  $\angle PBT = \angle P'KA$ .

۵. در خانه‌های یک جدول  $n \times m$  اعداد صحیح نوشته شده است. منظور از یک ردیف اریب، خانه‌هایی از جدول است که تفاضل شماره ستون و شماره سطر آن‌ها برابر مقداری ثابت است. می‌خواهیم طی چند مرحله اعداد داخل جدول را صفر کنیم. در هر مرحله می‌توانیم خانه‌های یک ردیف افقی یا یک ردیف عمودی و یا یک ردیف اریب را انتخاب و از همه یک واحد کم کنیم یا به همه یک واحد اضافه کنیم. ثابت کنید اگر بتوان اعداد داخل هر زیرجدول  $3 \times 3$  را، صرف نظر از خانه‌های دیگر، صفر کرد آن‌گاه می‌توان همه اعداد داخل جدول را صفر کرد. به عنوان مثال در جدول  $5 \times 9$  زیر، خانه‌های یکی از ردیف‌های اریب با علامت  $\blacktriangledown$  و خانه‌های یکی از زیرجدول‌های  $3 \times 3$  با علامت  $*$  مشخص شده است. توجه کنید که خانه گوشه راست - بالا (سطر ۱، ستون ۹) نیز به‌تنهایی یک ردیف اریب حساب می‌شود.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱						$\blacktriangledown$			
۲		*	*	*			$\blacktriangledown$		
۳		*	*	*				$\blacktriangledown$	
۴		*	*	*					$\blacktriangledown$
۵									

(راهنمایی: ابتدا به این سؤال فکر کنید که اعداد یک جدول  $3 \times 3$  در چه صورت قابل صفر کردن است.)

۶. دنباله  $\{a_n\}$  از اعداد طبیعی در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$a_{n+2} = \left[ \frac{2a_{n+1}}{a_n} \right] + \left[ \frac{2a_n}{a_{n+1}} \right]$$

که در آن منظور از  $[x]$ ، جزء صحیح عدد  $x$  است. ثابت کنید عدد طبیعی  $m$  وجود دارد که  $a_m = 4$  و  $a_{m+1} \in \{3, 4\}$

موفق باشید