فصل چهارم: تقریب حل‌های آزمون، توابع وزن و تربیع گاوس برای مسائل یک بعدی

مقدمه

در فصل سوم با روش استخراج فرم ضعیف مسائل یک بعدی آشنا شدیم.

در روش اجزاء محدود توابع وزن و حل‌های آزمون با تقسیم ناحیه مسأله به المان‌ها و تشکیل توابع در داخل هر المان ایجاد می‌شوند.

این توابع باید با دقت انتخاب شوند طوریکه روش اجزاء محدود همگرا شود.

××

همگرایی یعنی دقت یک مدل اجزاء محدود با ریز شدن شبکه بهبود یابد.

این ویژگی اجزاء محدود فوق‌العاده با اهمیت است زیرا برای کنترل کیفیت جواب اجزاء محدود از ریزسازی شبکه استفاده می‌شود.

به عنوان مثال برای چک کردن دقت جواب، اغلب مسأله مورد بررسی را با شبکه‌ای ریزتر دوباره حل می‌کنیم.

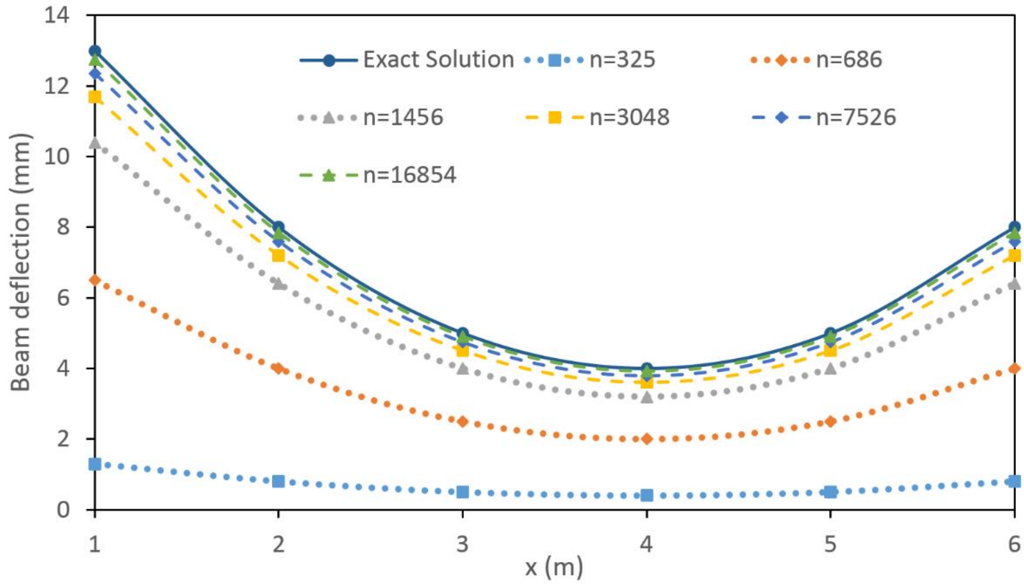
××

اگر تفاوت بین جواب بدست آمده با شبکه درشت و ریز اندک باشد نتیجه می‌گیریم جواب شبکه درشت دقیق است.

اما اگر تغییر جواب با ریز شدن شبکه قابل ملاحظه باشد جواب شبکه درشت فاقد دقت بوده و نیاز است از شبکه ریزتر استفاده شود.

پیوستگی Continuity	+	تمامیت Completeness	$\longrightarrow$	همگرایی Convergence

××



××

پیوستگی

پیوستگی به این معناست که حل‌های آزمون و توابع وزن به اندازه کافی هموار باشند.

به عبارت دقیقتر، اگر r بالاترین مرتبه مشتق حاضر در فرم ضعیف باشد درجه همواری C^{r-1} مورد نیاز خواهد بود.

به عنوان مثال برای معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم بعد از انتگرال‌گیری جزء به جزء مشتقات مرتبه اول $(r=1)$ در فرم ضعیف حاضر می‌شوند.

××

لذا در این حالت، پیوستگی $C^{r-1}=C^{1-1}=C^{0}$ برای توابع وزن و حل‌های آزمون مورد نیاز است.

چرا برای فرم ضعیف مقابل پیوستگی C^{r-1} نیاز است؟

پاسخ: انتگرال بالا برای تابع تکه‌ای پیوسته $\frac{d^r\phi}{dx^r}$ در صورتی وجود دارد که این تابع در محدوده انتگرال‌گیری کران‌دار باشد.

به این منظور لازم است $\frac{d^{r-1}\phi}{dx^{r-1}}$ پیوسته باشد یعنی ϕ دارای پیوستگی C^{r-1} باشد.

××

تمامیت

تمامیت به قابلیت یک مجموعه از توابع برای تقریب یک تابع هموار با دقت دلخواه اشاره دارد.

برای همگرایی حل وقتی اندازه المان به صفر میل می‌کند کافی است:

- تابعی که برای $u(x)$ و $w(x)$ انتخاب می‌شود و مشتقات آن تا مرتبه r بتوانند عددی ثابت شوند.

به عنوان مثال در مسأله تحلیل تنش بزرگ‌ترین مرتبه مشتق موجود در فرم ضعیف یک بود.

××

لذا برای همگرا شدن حل کافیست u و w طوری انتخاب شوند که:

خود u و w بتوانند عددی ثابت شوند که این بیانگر حرکت جسم صلب است،

مثلاً فرض کنید تابع زیر را برای حل انتخاب کنیم:

$$u = c_1 + c_2 x \tag{۱-۴}$$

در این تابع اگر c_2 صفر باشد $u = c_1$ خواهد بود که اجازه حرکت جسم صلب را می‌دهد.

××

علاوه بر این $\frac{du}{dx} = c_2$ است که اجازه کرنش ثابت در المان را می‌دهد.

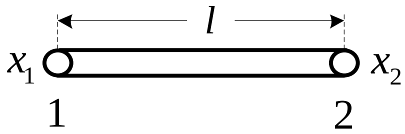
اما بدلیل عدم تمامیت تابع $u = c_1 + c_2 x^2$ ، تقریب اجزاء محدود حاصل از آن همگرا نخواهد شد.

در این فصل هم برای u و هم برای w از واژه تابع تقریب یا تابع استفاده کرده و آن را با θ نشان می‌دهیم.

در ادامه فصل با انواع مختلف المان‌ها آشنا شده و تابع تقریب مناسب را برای آن‌ها بدست می‌آوریم.

××

المان یک‌بعدی دو گرهی



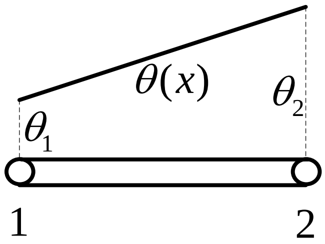
برای آشنایی با المان‌ها از مسائل یک بعدی شروع می‌کنیم.

مطابق شکل، ساده‌ترین المان یک بعدی المان دو گرهی است.

چند جمله‌ای خطی زیر که دو پارامتر α_0 و α_1 دارد واجد این شرط است:

$$\theta(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x \qquad (۲-۴)$$

××



ضمناً این چند جمله‌ای دارای پیوستگی C^0 بوده و تمامیت هم دارد.

مطابق با معادله (۴-۲) تغییر تابع تقریب که می‌تواند جابجایی، دما

یا . . . باشد روی این المان خطی است.

حال می‌خواهیم دو پارامتر α_0 و α_1 را برحسب مقادیر گرهی θ یعنی θ_1 و θ_2 پیدا کنیم.

××

به این منظور معادله (۴-۲) را به فرم زیر می‌نویسیم:

(۳-۴)

این معادله باید در دو گره المان نیز برقرار باشد بنابراین:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \alpha_0 + \alpha_1 x_1 \\ \theta_2 &= \alpha_0 + \alpha_1 x_2 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} \qquad (۴-۴)$$

فرم ماتریسی معکوس معادله بالا عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \qquad (۵-۴)$$

××

با جاگذاری از معادله (۴-۵) در (۴-۳) خواهیم داشت:

(۶-۴)

یا :

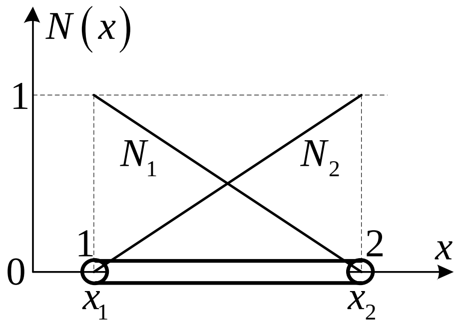
$$\theta(x)=\left[N_1(x) \quad N_2(x)\right]\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix}=\tilde{\mathbf{N}}(x)\tilde{\boldsymbol{\theta}} \qquad (۷-۴)$$

در این معادله، $\tilde{\mathbf{N}}(x)$ تابع شکل المان (shape function) نام دارد:

$$\tilde{\mathbf{N}}(x)=\left[N_1(x) \quad N_2(x)\right]=\left[1 \quad x\right]\begin{bmatrix}1 & x_1\\ 1 & x_2\end{bmatrix}^{-1} \qquad (۸-۴)$$

×××

$$\tilde{\mathbf{N}}=\left[N_1 \quad N_2\right]=\begin{bmatrix}\dfrac{x_2-x}{x_2-x_1} & \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}\end{bmatrix}=\frac{1}{l}\left[x_2-x \quad x-x_1\right] \qquad (۹-۴)$$



که در آن l طول المان و N_1 و N_2 توابع شکل متناظر با گره‌های ۱ و ۲ هستند.

تابع شکل هر المان فقط در محدوده آن المان غیر صفر

و در دیگر نقاط ناحیه صفر است.

×××

مطابق شکل این توابع شکل در المان بصورت خطی تغییر می‌کنند.

زیرا برای ایجاد تابع تقریب المان در معادله (۴-۲) از چندجمله‌ای خطی استفاده کردیم.

علاوه بر این، توابع شکل دارای خواص زیر هستند:

$$\sum_{i=1}^{2}N_i(x)=N_1+N_2=\frac{x_2-x}{l}+\frac{x-x_1}{l}=\frac{x_2-x_1}{l}=1 \qquad (۱۰-۴)$$

یا با نماد مختصر:

$$N_i\left(x_j\right)=\delta_{ij} \qquad (۱۱-۴)$$

××

در این معادله δ_{ij} دلتای کرونکر نام داشته و بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad i = j \\ 0 & \text{if} \quad i \neq j \end{cases} \tag{۱۲-۴}$$

حال معادله (۴-۷) را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$\theta(x) = \tilde{\mathbf{N}}\tilde{\boldsymbol{\theta}} = N_1\theta_1 + N_2\theta_2 = \sum_{i=1}^{n_{en}} N_i\theta_i \tag{۱۳-۴}$$

××

به عنوان نمونه در دو گره المان داریم:

$$\theta(x_1) = N_1(x_1)\theta_1 + N_2(x_1)\theta_2 = \delta_{11}\theta_1 + \delta_{12}\theta_2 = \theta_1$$

$$\theta(x_2) = N_1(x_2)\theta_1 + N_2(x_2)\theta_2 = \delta_{12}\theta_1 + \delta_{22}\theta_2 = \theta_2$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d\left(\tilde{\mathbf{N}}\tilde{\boldsymbol{\theta}}\right)}{dx} = \frac{d\tilde{\mathbf{N}}}{dx}\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \frac{dN_1}{dx}\theta_1 + \frac{dN_2}{dx}\theta_2 \tag{۱۴-۴}$$

××

حال ماتریس گرادیان (مشتق) تابع شکل یعنی $\tilde{\mathbf{B}}$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} = \frac{1}{l}\begin{bmatrix} \frac{d\left(x_2 - x\right)}{dx} & \frac{d\left(x - x_1\right)}{dx} \end{bmatrix} = \frac{1}{l}\begin{bmatrix} -1 & +1 \end{bmatrix} \tag{۱۵-۴}$$

در اینصورت معادله (۴-۱۴) به فرم زیر در می‌آید:

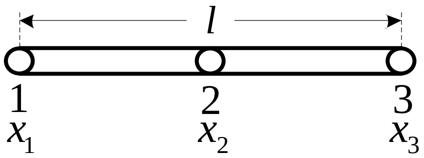
(۱۶-۴)

دومین نوع المان یک بعدی المان سه‌گرهی است.

××

المان یک‌بعدی سه‌گرهی

مطابق شکل دو گره این المان در دو انتهای آن و گره سوم هم جایی بین این دو گره قرار می‌گیرد.



عموماً بهترین عملکرد وقتی است که گره سوم وسط دو گره دیگر باشد.

این المان سه گره دارد لذا تابع تقریب آن هم باید دارای سه پارامتر باشد.

$$\theta(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2=\begin{bmatrix}1 & x & x^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix} \qquad (۱۷-۴)$$

××

استفاده از این المان بدین معناست که برای حل فرم ضعیف از حل آزمون و تابع وزن (تقریب) درجه دوم استفاده کنیم.

معادله (۴-۱۷) باید در هر سه گره المان نیز برقرار باشد بنابراین:

$$\begin{aligned}\theta_1&=\alpha_0+\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_1^2\\ \theta_2&=\alpha_0+\alpha_1 x_2+\alpha_2 x_2^2\\ \theta_3&=\alpha_0+\alpha_1 x_3+\alpha_2 x_3^2\end{aligned} \;\rightarrow\; \begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & x_1 & x_1^2\\ 1 & x_2 & x_2^2\\ 1 & x_3 & x_3^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix} \qquad (۱۸-۴)$$

$$\begin{bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & x_1 & x_1^2\\ 1 & x_2 & x_2^2\\ 1 & x_3 & x_3^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\end{bmatrix} \qquad (۱۹-۴)$$

××

$$\theta(x)=\begin{bmatrix}1 & x & x^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & x_1 & x_1^2\\ 1 & x_2 & x_2^2\\ 1 & x_3 & x_3^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}N_1 & N_2 & N_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\end{bmatrix} \qquad (۲۰-۴)$$

با محاسبه ماتریس معکوس، تابع شکل المان بصورت زیر بدست می‌آید:

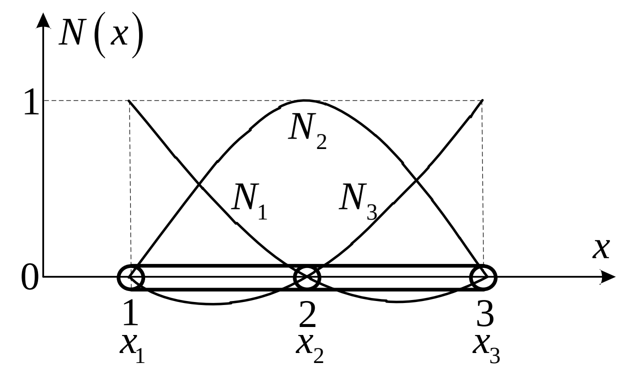
$$\tilde{\mathbf{N}}=\frac{2}{l^2}\begin{bmatrix}(x-x_2)(x-x_3) & -2(x-x_1)(x-x_3) & (x-x_1)(x-x_2)\end{bmatrix} \qquad (۲۱-۴)$$

××

مانند توابع شکل خطی خواص زیر برای توابع شکل درجه دوم هم برقرار است:

$$N_i\left(x_j\right)=\begin{cases}0 & \text{if} \quad i\neq j\\ 1 & \text{if} \quad i=j\end{cases} \qquad i,j=1,\ 2,\ 3$$

(۲۲-۴)



××

همانطور که در فصل سوم دیدیم حل فرم ضعیف با استفاده از تابع تقریب درجه دوم دقت بالاتری در مقایسه با تقریب خطی خواهد داشت.

همین امر در مقایسه حل با المان سه‌گرهی (تقریب درجه دوم) و المان دوگرهی (تقریب خطی) هم صدق می‌کند.

یعنی حل با المان سه‌گرهی دارای دقت بالاتر و حجم و زمان محاسبات بیشتر خواهد بود.

××

ایجاد مستقیم توابع شکل در یک بعد

توابع شکلی که در قسمت‌های قبل بدست آوردیم چندجمله‌ای‌های لاگرانژ نام دارند.

توابع شکل لاگرانژی را می‌توان با کمک خواص آنها بطور مستقیم هم بدست آورد.

به عنوان نمونه تابع شکل درجه دوم را به روش مستقیم بدست می‌آوریم.

کلی‌ترین شکلی که این تابع درجه دوم می‌تواند داشته باشد عبارت است از:

(۲۳-۴)

××

در این رابطه a و b و c ثوابتی هستند که با کمک خواص تابع شکل تعیین می‌شوند:

$$N_1(x_2)=N_1(x_3)=0 \;\Rightarrow\; a=x_2\,,\, b=x_3 \;\Rightarrow\; N_1=\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{c}$$
$$N_1(x_1)=1 \;\Rightarrow\; c=(x_1-x_2)(x_1-x_3) \;\Rightarrow \qquad (\text{۲۴-۴})$$

با توجه به اینکه $l=x_3-x_1$ است این معادله با معادله (۴-۲۱) مطابقت دارد.

××

$$N_1=\frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} \quad , \quad N_2=\frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}$$
$$N_3=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} \quad , \quad N_4=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} \qquad (\text{۲۵-۴})$$

توابع شکل درجه بالاتر دقت بیشتری نسبت به توابع شکل خطی دارند.

××

روش گالرکین

تقریب زدن تابع وزن با همان تقریبی که برای حل آزمون استفاده می‌شود الزامی نیست.

با این حال در بیشتر مسائل استفاده از تقریب یکسان برای توابع وزن و حل‌های آزمون سودمند است.

در این روش توابع آزمون و وزن و مشتق آن‌ها با روابط مقابل بدست می‌آیند:

$$u(x)=\tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{u}} \quad , \quad \frac{du}{dx}=\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{u}} \quad \text{and} \quad w(x)=\tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{w}} \quad , \quad \frac{dw}{dx}=\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{w}} \qquad (\text{۲۶-۴})$$

××

تربیع گاوس Gauss quadrature

عموماً محاسبه تحلیلی انتگرال‌های موجود در فرم ضعیف مقدور نبوده و استفاده از انتگرال‌گیری عددی ناگزیر است.

یکی از این روش‌های عددی روش تربیع گاوس است که بدلیل کارآمدی آن برای توابع چندجمله‌ای کاربردی گسترده در FEM دارد.

حال انتگرال روبرو را در نظر بگیرید:

$$I=\int_a^b f\left(x\right)dx=?$$ (۲۷-۴)

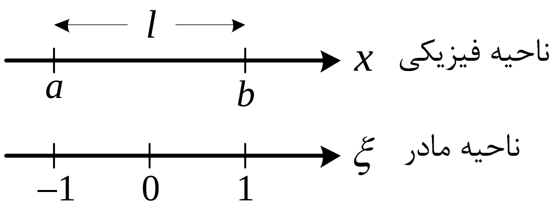
××

فرمول‌های تربیع گاوس همواره روی ناحیه [1,1-] که ناحیه مادر نام دارد داده می‌شوند.

بنابراین باید مطابق شکل با استفاده از نگاشتی خطی ناحیه فیزیکی [a,b] را به ناحیه مادر [1,1-] تبدیل کنیم.

با توجه به اینکه در $x=a$ مقدار $\xi=-1$ و در $x=b$ مقدار $\xi=1$ است رابطه زیر بین x و ξ بدست می‌آید:

(۲۸-۴)



××

توابع شکل خطی در مختصات مادر بصورت زیر هستند:

(۲۹-۴)

با کمک این توابع شکل معادله (۴-۲۸) را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$x=N_1x_1+N_2x_2=a\frac{1-\xi}{2}+b\frac{1+\xi}{2}$$ (۳۰-۴)

از طرفی از معادله (۴-۲۸) داریم:

$$dx=\frac{1}{2}\left(b-a\right)d\xi=\frac{l}{2}d\xi=Jd\xi$$ (۳۱-۴)

××

$$J=\frac{1}{2}\left(b-a\right)=\frac{l}{2}$$ (۳۲-۴)

حال انتگرال (۴-۲۷) را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$I=\int_a^b f\left(x\right)dx = J\int\limits_{-1}^{1} f\left(\xi\right)d\xi = J\,\hat{I} \quad \text{where} \quad \hat{I}=\int\limits_{-1}^{1} f\left(\xi\right)d\xi \tag{۳۳-۴}$$

در روش تربیع گاوس انتگرال $\hat{I}$ بصورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\hat{I}=W_1 f\left(\xi_1\right)+W_2 f\left(\xi_2\right)+\cdots+W_n f\left(\xi_n\right) \tag{۳۴-۴}$$

××

که در آن W_i اوزان روش گاوس بوده و ξ_i نقاطی هستند که عبارت داخل انتگرال باید در آنها محاسبه شود.

تعداد نقاط گاوس مورد نیاز (n_{gp}) برای محاسبه انتگرال یک چندجمله‌ای درجه p از رابطه زیر بدست می‌آید:

(۳۵-۴)

مثلاً برای انتگرال‌گیری دقیق از یک چندجمله‌ای درجه دوم $p=2$ حداقل به $n_{gp}=2$ نقطه گاوس نیاز داریم.

مختصات نقاط گاوس و اوزان متناظر آن از جدول بدست می‌آید.

××

جدول ۴-۱- مختصات نقاط گاوس و اوزان متناظر

n_{gp}	Location, ξ_i	Weights, W_i
1	0.0	2.0
2	$\pm 1/\sqrt{3} = \pm 0.5773502692$	1.0
3	±0.7745966692 0.0	0.555 555 5556 0.888 888 8889
4	±0.8611363116 ±0.3399810436	0.347 854 8451 0.652 145 1549
5	±0.9061798459 ±0.5384693101 0.0	0.236 926 8851 0.478 628 6705 0.568 888 8889
6	±0.9324695142 ±0.6612093865 ±0.2386191861	0.171 324 4924 0.360 761 5730 0.467 913 9346

××

مثال (۴-۱)

انتگرال زیر را با کمک تربیع گاوس محاسبه کنید.

$$I=\int_2^5\left(x^3+x^2\right)dx$$

حل:

$$n_{\mathrm{gp}}=\frac{p+1}{2}=\frac{3+1}{2}=2$$

بنابراین با استفاده از دو نقطه می‌توان این انتگرال را بطور دقیق محاسبه کرد.

برای انتگرال گاوس دو نقطه‌ای از جدول (۴-۱) مختصات نقاط و اوزان گاوس برابر است با:

$$\xi_1=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \xi_2=-\frac{1}{\sqrt{3}},\qquad W_1=W_2=1.0$$

مقدار ژاکوبین برابر است با:

××

حال مطابق معادله (۴-۲۸) داریم:

$$x=\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}\xi(b-a)=\frac{1}{2}(2+5)+\frac{1}{2}\xi(5-2)=3.5+1.5\xi$$

$$f=x^3+x^2=(3.5+1.5\xi)^3+(3.5+1.5\xi)^2$$

در نتیجه:

$$I=\int_2^5\left(x^3+x^2\right)dx=\int_{-1}^{1}\underbrace{\left[(3.5+1.5\xi)^3+(3.5+1.5\xi)^2\right]}_{f(\xi)}Jd\xi=$$

$$J\left[W_1 f(\xi_1)+W_2 f(\xi_2)\right]=J\,W_1\,f(\xi_1)+J\,W_2\,f(\xi_2)$$

××

$$I = JW_1\left[\left(3.5+1.5\xi_1\right)^3+\left(3.5+1.5\xi_1\right)^2\right]+JW_2\left[\left(3.5+1.5\xi_2\right)^3+\left(3.5+1.5\xi_2\right)^2\right]=$$

$$1.5\times1.0\left[\left(3.5+1.5\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3+\left(3.5+1.5\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]+1.5\times1.0\left[\left(3.5+1.5\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^3+\left(3.5+1.5\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]=191.25$$

×××

برای چک کردن جواب آن را با جواب تحلیلی مقایسه می‌کنیم:

$$I=\int_2^5\left(x^3+x^2\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_2^5=197.917-6.667=191.25$$

همانطور که می‌بینیم جوابها با هم برابرند.

در مواردی که عبارت انتگرالی پیچیده بوده و جواب تحلیلی نداشته باشد همچنان می‌توان از روش تربیع گاوس استفاده کرد و به جواب رسید.

×××

```
a=2;    b=5;
ngp=2;                                   % Number of Gauss points
 r=[-1/3^0.5, 1/3^0.5]                   % Coordinates of Gauss points
W=[1.0 1.0]                              % Gauss weights
 J=(b-a)/2;                              % Jacobian
I=0;
 for i=1:ngp
     I=I+J*W(i)*((3.5+1.5*r(i))^3+(3.5+1.5*r(i))^2);
end
```