بسم الله الرحمن الرحیم

کنترل مدرن

جعفر زارعی
دانشگاه صنعتی شیراز
دانشکده مهندسی برق و الکترونیک
ترم I 90-91

آشنایی با مفاهیم جبر خطی و مقدمات ریاضی

- فضاهای برداری
- نگاشت‌های خطی و ماتریس‌ها
- دستگاه معادلات جبری خطی
- توابع ماتریسی
- ماتریس‌های بلوکی و دترمینان‌ها

1

فضاهای برداری

- فضاهای برداری را به روی یک میدان تعریف می‌کنیم.
- میدان: مجموعه‌ای از عناصر به نام اسکالرها همراه با دو عملیات جمع و ضرب، که شرایط زیر را برآورده سازند:

1- برای هر دو اسکالر α و β در F، یک عنصر متناظر $\alpha + \beta$ در F وجود داشته (حاصل جمع) و همچنین یک عنصر $\alpha\beta$ وجود داشته (حاصل‌ضرب)

2- برای هر سه اسکالر α ¤ β و γ در F داریم:

(i) قوانین جابجایی پذیری

$a + b = b + a$ $\qquad$ $ab = ba$

(ii) قوانین شرکت پذیری

$(a + b) + g = a + (b + g)$ $\qquad$ $(ab)g = a(bg)$

(iii) قوانین توزیع پذیری

$a(b + g) = (ab) + (ag)$

2

... شرایط

3- F دارای یک عنصر 0 و 1 است به گونه‌ای که به ازاء هر اسکالر α در F،
$\alpha+0=\alpha$ و همچنین $\alpha\times 1=\alpha$

4- برای هر عنصر α در F یک عنصر مانند β وجود دارد که $\alpha+\beta=0$

5- برای هر عنصر α در F (که عنصر 0 نمی‌باشد) یک عنصر γ در F وجود دارد که $\alpha\times\gamma=1$.

- مثال:

1- مجموعه اعداد حقیقی R با قواعد معمولی جمع و ضرب

2- مجموعه اعداد مختلط C با قواعد معمولی جمع و ضرب

3- مجموعه اعداد گویا با قواعد معمولی جمع و ضرب

3

- ... مثال:

1- مجموعه اعداد صحیح Z با قواعد معمولی جمع و ضرب

شرط 5 را برآورده نمی کند

2- مجموعه ماتریس‌های n×n با قواعد معمولی جمع و ضرب

شرط 5 را برآورده نمی کند

3- مجموعه اعداد حقیقی مثبت R^+ با قواعد معمولی جمع و ضرب

شرط 4 را برآورده نمی کند

4

تعریف فضای برداری

- مجموعه‌ای از بردارها که می‌توانند با هم جمع شده و در اسکالرهای عضو F ضرب گردند، به نحوی که حاصل جمع بردارها و حاصلضرب بردار در اسکالرها نیز عضو F بوده و شرایط زیر را برآورده سازند:

(۱) برای عناصر v، u، w عضو V داریم

$$(u + v) + w = u + (v + w)$$

(۲) یک عنصر V، نشان داده شده با ۰ وجود دارد که برای هر عنصر u عضو V

$$0 + u = u + 0 = u$$

(۳) برای یک عنصر داده شده u در V، یک عنصر u- در V به گونه‌ای وجود دارد که

$$u + (-u) = 0$$

(۴) برای کلیه عناصر u، v عضو V داریم

$$u + v = v + u$$

(۵) برای هر α و β در میدان F و هر بردار v در V داریم

$$(\alpha \beta) v = \alpha (\beta v) \quad , \quad (\alpha + \beta) v = \alpha v + \beta v$$

(۶) برای هر α در میدان F و بردارهای v و u در V داریم

$$\alpha (u + v) = \alpha u + \alpha v$$

(۷) برای هر u در V داریم، $1.u = u$ (که در آن ۱ عنصر واحد در F است)

5

- مثال: فضای کلیه n-تایی‌های به صورت $V = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ تشکیل یک فضای برداری می‌دهند.
- تعریف زیرفضا

اگر M زیرمجموعه‌ای از V باشد، آنگاه اگر M تحت عملیات V یک فضا به روی میدان F تشکیل دهد آن را یک زیرفضا از V به روی میدان F گویند.

مثال ۱-۳- در فضای برداری دوبُعدی R^2 به‌روی میدان R هر خط راستی که از مبدأ عبور کند یک زیر فضا از R^2 به‌روی R خواهد بود. یعنی آنکه مجموعه

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \alpha x_1 \end{bmatrix}$$

برای هر عدد حقیقی α زیر فضایی از R^2 است.

قضیهٔ ۱-۱- اگر $M_1, M_2, \dots, M_n$ زیرفضاهای فضای برداری V باشند، آنگاه $M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n$ (اشتراک کلیه زیرفضاها) نیز یک زیرفضا از V خواهد بود.

6

ترکیب خطی و پایه‌ها

- تعریف ترکیب خطی

$$v_1, v_2, \dots, v_n \in V$$
$$a_1, a_2, \dots, a_n \in F$$

$$u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

ترکیب خطی از $v_1, v_2, \dots, v_n$

- تعریف اسپن

تعریف ۱-۵- فضای برداری V به‌روی میدان F را در نظر بگیرید. گوئیم که این فضاتوسط بردارهای $v_1, v_2, \dots, v_n$ اسپن[۲] شده است اگر کلیه این بردارها متعلق به V بوده و بتوان هر بردار $u \in V$ را به صورت ترکیب خطی از این بردارها نوشت. همچنین فضای اسپن شده توسط بردارهای $v_1, v_2, \dots, v_n$ را به صورت $SP\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ نمایش می‌دهند.

7

تعریف استقلال خطی

$$v_1, v_2, \dots, v_n \in V$$
$$a_1, a_2, \dots, a_n \in F$$

$$\exists a_i \quad i = 1,2,\dots,n \quad | \quad a_1, a_2, \dots, a_n \neq 0$$

وابسته خطی $\quad a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$

مستقل خطی $\quad a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ اگر

مثال ۱-۴- مجموعه بردارهای $v_1, v_2, \dots, v_n$ را در نظر بگیرید که در آن $v_1 = 0$. این مجموعه همواره وابسته خطی خواهد بود زیرا با انتخاب $\alpha_1 = 1$، $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0$ معادلهٔ (۱-۳-۲) همواره برآورده خواهد شد.

8

مثال 1-5- مجموعه بردارهای

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,\ldots,0)$$
$$\mathbf{e}_2 = (0,1,\ldots,0)$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{e}_1 = (0,0,\ldots,1)$$

در فضای برداری R^n مستقل خطی می باشند. زیرا

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{e}_i = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \ldots + a_n\mathbf{e}_n = 0 \;\Rightarrow\; (a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$$

$$\Rightarrow\; a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$$

9

مثال ۱-۶- فرض کنید که V فضای برداری از کلیه توابع متغیر t باشد. توابع $f_1, \ldots, f_n$ را در نظر بگیرید. این توابع وابسته خطی خواهند بود اگر n اسکالر $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (که همگی ۰ نباشند) وجود دارند که

$$\alpha_1 f_1(t) + \ldots + \alpha_n f_n(t) = 0$$

برای کلیه مقادیر t.

دو تابع e^t و e^{2t} ناوابسته خطی می‌باشند. برای اثبات این مطلب فرض کنید که اعداد α_1 و α_2 وجود دارند که

$$\alpha_1 e^t + \alpha_2 e^{2t} = 0$$

(برای کلیه مقادیر t) با مشتق‌گیری از این رابطه داریم

$$\alpha_1 e^t + 2\alpha_2 e^{2t} = 0$$

با تفریق معادله اول از معادله دوم داریم، $\alpha_2 = 0$ و از معادله اول خواهیم داشت $\alpha_1 = 0$.
بنابراین e^t و e^{2t} ناوابسته خطی می‌باشند.

10

قضیهٔ ۱-۲- (i) اگر بردارهای $u_1, u_2, ..., u_n$ یک جایگشت[1] از بردارهای $v_1, v_2, ..., v_n$ باشند، آنگاه بردارهای $u_1, u_2, ..., u_n$ ناوابسته خطی می‌باشند، اگر و فقط اگر $v_1, v_2, ..., v_n$ ناوابسته خطی باشند و همچنین

$$SP\{u_1, u_2, ..., u_n\}=SP\{v_1, v_2, ..., v_n\}$$

(ii) اگر $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ اسکالرهای غیر صفر متعلق به F باشند، آنگاه بردارهای $v_1, v_2, ..., v_n$ ناوابسته خطی می‌باشند، اگر و فقط اگر $\alpha_1 v_1, \alpha_2 v_2, ..., \alpha_n v_n$ ناوابسته خطی باشند و همچنین

$$SP\{v_1, v_2, ..., v_n\}=SP\{\alpha_1 v_1, \alpha_2 v_2, ..., \alpha_n v_n\}$$

¢ تعریف پایه

تعریف ۱-۷- مجموعه بردارهای $v_1, v_2, ..., v_n$ در فضای برداری V، برای آن فضا تشکیل یک *پایه*[1] می‌دهند اگر:

$$V=SP\{v_1, v_2, ..., v_n\}$$

و

$v_1, v_2, ..., v_n$ ناوابسته خطی باشند.

11

¢ قضیه 3: هر بردار $u \in V$ را می‌توان به طور منحصر بفردی توسط بردارهای پایه آن نمایش داد.

مثال: بردارهای $e_1, e_1, \ldots, e_n$ تعریف شده در مثال 1-5 یک پایه برای فضای R^n به روی میدان R می‌باشد.

- هر برداری در R^n را می‌توان به طور منحصر بفردی توسط این بردارها نمایش داد

¢ تعریف بعد فضای خطی

– تعداد بردارهای پایه در یک فضای خطی V به روی میدان F

– حداکثر تعداد بردارهای مستقل خطی در آن فضا

12

قضیهٔ ۱-۴- فضای برداری V را در نظر بگیرید. اگر $V \neq \{0\}$ و $V=SP\{v_1, \dots, v_n\}$ آنگاه بردارهای $u_1, \dots, u_m$ ($m \leq n$) متعلق به V وجود دارند به‌طوری که $u_1, \dots, u_m$ پایه‌ای برای V باشند.

- قضیه 1-5- در یک فضای برداری n-بعدی هر مجموعه از n بردارهای مستقل خطی می‌تواند یک پایه باشد.
- قضیه 1-6- یک فضای n-بعدی V را به روی میدان F در نظر بگیرید. هر مجموعه بردارهای مستقل خطی در V را می‌توان به یک پایه تبدیل کرد.

13

تغییر پایه در فضای N- بعدی:

$$\left.\begin{array}{l} e_1, e_2, \cdots, e_n \\ f_1, f_2, \cdots, f_n \end{array}\right\} \rightarrow \text{ Basis for } V$$

Then

$$v \in V \Rightarrow v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i$$

$$\Rightarrow v = [e_1, e_2, \cdots, e_n]\alpha = [f_1, f_2, \cdots, f_n]\beta$$

14

Also,

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} f_j p_{ji} = [f_1\, f_2\, \cdots\, f_n] \begin{bmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [e_1\, e_2\, \cdots\, e_n] = [f_1\, f_2\, \cdots\, f_n] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & & p_{nn} \end{bmatrix} \triangleq [f_1\, f_2\, \cdots\, f_n] P$$

Hence,

$$v = [e_1\, e_2\, \cdots\, e_n]\alpha = [f_1\, f_2\, \cdots\, f_n] P\alpha$$

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} i \text{ امین‌ستون: نمایش } \mathbf{e}_i \\ \text{برحسب پایه } \mathbf{f}_1\, \mathbf{f}_2 \ldots \mathbf{f}_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad P\alpha = \beta$$

Similarly,

$$\alpha = Q\beta$$

$$\mathrm{Q} = \begin{bmatrix} i \text{ امین‌ستون: نمایش } \mathbf{f}_i \\ \text{برحسب پایه } \mathbf{e}_1\, \mathbf{e}_2 \ldots \mathbf{e}_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad P = Q^{-1}$$

15

نگاشت های خطی و ماتریس ها

- تعریف نگاشت خطی یا تبدیل خطی

$$\mathrm{L} : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{W}$$

- نگاشت L را خطی گویند، اگر دو مشخصه زیر را برآورده سازد:

(i) برای هر دو بردار $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{V}$ داریم :

$$\mathrm{L}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathrm{L}(\mathbf{u}) + \mathrm{L}(\mathbf{v})$$

(ii) به ازاء کلیه $\alpha \in \mathrm{F}$ و $\mathbf{v} \in \mathrm{V}$ داریم :

$$\mathrm{L}(\alpha\mathbf{v}) = \alpha\mathrm{L}(\mathbf{v})$$

- به عبارت دیگر

$$L(a\mathbf{v} + b\mathbf{u}) = aL(\mathbf{v}) + bL(\mathbf{u})$$

16

¢ نمایش ماتریسی یک نگاشت خطی

$$\left.\begin{matrix} e_1, e_2, \cdots, e_n \\ f_1, f_2, \cdots, f_m \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{ Basis for } V \text{ and } W, \quad L: V \rightarrow W$$

Then

$$v \in V \Rightarrow v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

$$\Rightarrow L(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L(e_i)$$

17

Also,

$$L(e_i) = \sum_{j=1}^{m} f_j a_{ji} = [f_1\, f_2\, \cdots\, f_m] \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow L(v) = [f_1\, f_2\, \cdots\, f_m] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Hence,

$$L(v) = [f_1\, f_2\, \cdots\, f_n] A\alpha$$

If, $A\alpha = \beta$

Then,

$$L(v) = [f_1\, f_2\, \cdots\, f_n] \beta = w$$

18

¢ نگاشت های یک فضا به خود آن فضا: ماتریس های همانند یا مشابه

¢ تبدیل همانندی $L: V \rightarrow V$

پایه‌های $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ A

$\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ B

α و β به ترتیب نمایشهای $\mathbf{v}$ نسبت به پایه‌های $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ و $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ $\mathbf{v} \in V$

$\mathbf{w} = L\,\mathbf{v}$

$\delta = P\gamma = PA\alpha = PAP^{-1}\beta$ و $\delta = B\beta$

$B = PAP^{-1} = Q^{-1}AQ$

$Q = P^{-1}$

$A = P^{-1}BP = QBQ^{-1}$

19

دستگاه معادلات جبری خطی

¢ صورت کلی:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

¢ گستره نگاشت خطی

R(A) ={کلیه عناصر y در فضای m-بعدی W به روی میدان F است که برای آنها حداقل یک بردار x در فضای n-بعدی V به روی میدان F وجود دارد که $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$}

¢ قضیه 1-7- گستره نگاشت خطی A، یک زیرفضا از فضای W است.

¢ تعریف رتبه ماتریس یا بعد فضای گستره (رتبه یا (A)) $(\rho(A))$

– حداکثر تعداد ستون‌های مستقل خطی در A است.

20

- وجود پاسخ معادله ماتریسی:

قضیه ۱-۸- معادله ماتریسی $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ را در نظر بگیرید، که در آن ماتریس $m \times n$ A فضای n- بُعدی V را به فضای m- بُعدی W نگاشت می‌کند.

۱- برای A و بردار داده شده $\mathbf{y}$ در W ، بردار $\mathbf{x}$ وجود خواهد داشت که معادله $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ را برآورده سازد، اگر و فقط اگر بردار $\mathbf{y}$ عضو $R(\mathrm{A})$ باشد.

۲- برای Aیِ داده شده و برای هر $\mathbf{y}$ در W، بردار $\mathbf{x}$ وجود خواهد داشت که رابطه $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ را برآورده سازد، اگر و فقط اگر $R(\mathrm{A}) = \mathrm{W}$، یا به عبارت دیگر رتبه$(\mathrm{A}) = m$.

21

- فضای پوچی و بعد آن: پوچی

{کلیه عناصر x در V که برای آنها Ax=0} =N(A)

- مجموعه کلیه پاسخهای معادله Ax=0

- قضیه 9-1- برای ماتریس A m*n، داریم

$$r(\mathrm{A}) + v(\mathrm{A}) = n$$

- نامساوی سیلوستر

ماتریس‌های $n \times q$ و $p \times n$، A و B را در نظر بگیرید.

آنگاه

(۱-۶-۶) می‌نیمم((B)رتبه ، (A)رتبه) ≥(AB)رتبه ≥ n-(B)رتبه + (A)رتبه

22

توابعی از یک ماتریس

- توان ماتریس مربع
- چند جمله ای ماتریسی
- تعویض پذیری چند جمله ای های ماتریسی
- سری بی نهایت

23

- مقدار ویژه و بردار ویژه

اسکالر λ را مقدار ویژه ماتریس A می‌نامند اگر بردار غیرصفر x را بتوان پیدا کرد که معادله $\mathbf{Ax} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{x}$ را برآورده سازد.

بردار ویژه غیرصفر متناظر با مقدار ویژه λ

$$(A - l\,I)\mathbf{x} = 0$$

$$|A - l\,I| = 0$$

شرط وجود جواب غیربدیهی

- قضیه 1-12- قضیه کیلی-هامیلتون
- هر ماتریس مربع $n \times n$ A معادله مشخصه خود را برآورده می‌سازد

24

ماتریس های بلوکی و دترمینان ها

قضیه ۱-۱۳- (i) برای ماتریس‌های مربع و ناویژه B و A داریم

$$\det\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix} = \det(A)\det(B) \qquad (۱-۸-۱)$$

(ii) اگر $\det(A) \neq 0$ آنگاه :

$$\det\begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix} = \det(A)\det[B - CA^{-1}D] \qquad (۲-۸-۱)$$

(iii) اگر $\det(B) \neq 0$ آنگاه :

$$\det\begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix} = \det(B)\det[A - DB^{-1}C] \qquad (۳-۸-۱)$$

25