چکیده مبسوط چهارمین سمینار آنالیز تابعی و کاربردهای آن

۱۲-۱۳اسفند ۱۳۹۴، دانشگاه فردوسی مشهد

مطالعه رفتار شبه پایداری معادله برگر با استفاده از طیف عملگر خطی

قاسم بابایی تهرانی [1] *، امیر علی جمشیدیان [2]، و اکبر زنجانی[3]

[1,2] گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد
author1@um.ac.ir
author2@um.ac.ir
[3] گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه بیرجند
author3@birjand.ac.ir

چکیده. در این نوشتار با استفاده از طیف عملگر خطی معادله برگر روی فضای هیلبرت وزن دار n-موج های انتشار را معرفی نموده و نشان می دهیم آنها گزینه های مناسبی برای بررسی رفتار «شبه پایداری» جواب های این معادله هستند.

۰. پیش‌گفتار

معادله برگر یکی از مهمترین و اساسی ترین معادلات با مشتقات جزئی است که در حوزه های گوناگون علمی و عملی کاربرد فراوانی دارد. این معادله علاوه بر اینکه مدل خوبی برای مطالعه دینامیک گاز ها و نظریه ترافیک است؛ یک مدل ساده سازی شده از معادله ناویر استوکس بوده که بسیاری از خواص این معادله را نیز حفظ می کند. نامگذاری این معادله بر اساس نام معرفی کننده آن یعنی جونز مارتینس برگرز [۱] می باشد.
در این نوشتار به بررسی رفتار «شبه پایداری» جواب های معادله برگر برای سیال با چسبندگی بسیار کم در فضای یک بعدی خواهیم پرداخت. «شبه پایداری» در این متن به باقی ماندن جواب ها برای مدت طولانی در کنار یک دسته از جواب های خاص اطلاق می گردد. این جواب ها با نام n-موج های انتشار شناخته می شوند. در این صورت اگر $u^\mu = u^\mu(x,t)$ نشان دهنده پاسخ معادله با چسبندگی $\mu \geq 0$ باشد، برای یک زمان ثابت $t > 0$ می دانیم که $u^\mu \to u^0$.
اما این در حالی است که برای یک $\mu > 0$ ثابت، رفتار بلند مدت u^0 و u^μ با یکدیگر کاملا متفاوت هستند. به عبارت دقیق تر حدود $\mu \to 0$ و $t \to +\infty$ در حالت کلی قابل جابجا شدن با یکدیگر نمی باشند.
شایسته ذکر است که برای بررسی این رفتار استفاده گسترده ای از مفاهیم آنالیز تابعی از جمله

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47A55; Secondary 39B52, 34K20, 39B82.

واژگان کلیدی. معادله برگر، طیف عملگر، رفتار شبه پایداری، نیم گروه، .

* سخنران

[۱]Johannes Martinus Burgers (1895–1981)

طیف عملگر های خطی، قضیه هیله یوشیدا، فضاهای هیلبرت وزن دار، نظریه نیم گروه ها و خواص عملگر های مزدوج شده است.

۲. معرفی معادله و یافتن طیف بخش خطی آن

صورت معادله با شرط اولیه برگر چسبنده به صورت زیر می باشد.

$$\begin{cases} \partial_t u = \mu\partial_x^2 u - uu_x \\ u(x,0) = h \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad , \quad t \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \qquad (۱.۲)$$

حال تغییر متغیر زیر که در آن $\xi = \frac{x}{\sqrt{1+t}}$ و $\tau = \log(1+t)$ را اعمال می‌کنیم.

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}} w(\xi,\tau) \qquad (۲.۲)$$

معادله با شرط اولیه $w(\xi,0)$ به صورت زیر در خواهد آمد

$$\begin{cases} \partial_\tau w = \mathcal{L}_\mu w - ww_\xi \\ \mathcal{L}_\mu w = \mu\partial_\xi^2 w + \frac{1}{2}\partial_\xi(\xi w) \end{cases} \qquad (۳.۲)$$

در قضیه زیر به بررسی طیف عملگر $\mathcal{L}_\mu$ در فضای هیلبرت وزن دار زیر خواهیم پرداخت.

$$L^2(m) = \{w \in L^2()\mathbb{R} : \|w\|_m^2 = \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^m |w(\xi)|^2 d\xi < \infty\}$$

قضیه ۱.۲. در فضای $L^2(m)$ مقادیر ویژه و توابع ویژه عملگر $\mathcal{L}_\mu$ به صورت زیر است : (طیف این عملگر دقیقا برابر با مقادیر ویژه آن است)

$$\sigma(\mathcal{L}_\mu) = \{-\frac{n}{2}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} | Re(\lambda) \leq \frac{1}{2} - \frac{m}{2}\} \qquad (۴.۲)$$

$$\varphi_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu}} e^{-\xi^2/4\mu} \ , \ \varphi_n(\xi) = (\partial_\xi^n \varphi_0)(\xi) \qquad (۵.۲)$$

برهان. اثبات این قضیه در مراجع [۱] و [۳] با استفاده از آنالیز فوریه، قضیه هیله یوشیدا و تئوری نیم‌گروه‌ها بیان شده است. □

نکته ۲.۲. در اینجا برای استفاده‌های آتی تبدیل کول – هوپف را معرفی می کنیم. اگر w جوابی از (۳.۲) باشد، تبدیل کول-هوپف آن به صورت زیر تعریف می شود:

$$W(\xi,\tau) = 2\mu\partial_\xi \exp\left(-\frac{1}{2\mu}\int_{-\infty}^{\xi} w(y,\tau)dy\right) \qquad (۶.۲)$$

که با یک محاسبه سر راست نشان داده می شود که $W(\xi,\tau)$ در معادله خطی $\partial_\tau W = \mathcal{L}_\mu W$ صدق می کند. و برعکس اگر $W(\xi,\tau)$ جواب معادله اخیر باشد که تابع $\log$ زیر قابل تعریف باشد در اینصورت معکوس تبدیل کول-هوپف به صورت زیر تعریف می گردد.

$$w(\xi,\tau) = -2\mu\partial_\xi \log\left(1 - \frac{1}{2\mu}\int_{-\infty}^{\xi} W(y,\tau)dy\right) \qquad (۷.۲)$$

۳. معرفی n-موج‌های انتشار

جواب های ایستا (مستقل از زمان) (۳.۲) در شرط $\partial_\xi(\mu w_\xi + \frac{1}{2}\xi w - \frac{1}{2}w^2) = 0$ صدق می کنند با انتگرال گیری از طرفین این معادله کامل سازی آن به عبارت زیر می رسیم.

$$\frac{\partial_\xi[\exp(\xi^2/4\mu)w]}{[\exp(\xi^2/4\mu)w]} = \frac{1}{2\mu}\exp(-\xi^2/4\mu) \qquad (۱.۳)$$

حال اگر $M = \int_{-\infty}^{+\infty} w(\xi,0)d\xi$ را جرم سراسری w بنامیم با یک محاسبه ساده می توانیم برخی از جواب های ایستای (۳.۲) را به صورت زیر مشاهده نماییم.

$$A_M(\xi) = \frac{\alpha_0\exp(-\xi^2/4\mu)}{1-\frac{\alpha_0}{2\mu}\int_{-\infty}^{\xi}\exp(-\eta^2/4\mu)d\eta} \quad , \quad \alpha_0 = \sqrt{\frac{M}{\pi}}(1-\exp(-M/2\mu)) \qquad (۲.۳)$$

حال سعی خواهیم کرد n-موج های انتشار را بسازیم برای این منظور اگر w جوابی از معادله (۳.۲) با جرم سراسری M باشد تعریف می‌کنیم $w = A_M + v$ و با استفاده از معادله (۳.۲) معادله ای که v در آن صدق می‌کند را به صورت زیر بدست می‌آید

$$\begin{cases} v_\tau = \mathcal{H}_\mu^M - vv_\xi \\ \mathcal{H}_\mu^M = \mathcal{L}_\mu v - (A_m v)_\xi \end{cases} \qquad (۳.۳)$$

با استفاده از تبدیل کول-هوپف به راحتی اثبات می شود که عملگرهای $\mathcal{H}_\mu^M$ و $\mathcal{L}_\mu$ مزدوج یکدیگرند و لذا مقادیر ویژه (و به تبع طیف) دو عملگر $\mathcal{H}_\mu^M$ و $\mathcal{L}_\mu$ با هم برابر خواهند بود با این توضیح که توابع ویژه عملگر $\mathcal{H}_\mu^M$ به صورت زیر می‌باشند

$$\phi_n(\xi) = \partial_\xi\left[\frac{\int_{-\infty}^{\xi}\varphi_n(y)dy}{1-\alpha/2\mu\int_{-\infty}^{\xi}\exp(-\eta^2/4\mu)d\eta}\right] \qquad (۴.۳)$$

که در آن φ_n توابع ویژه عملگر $\mathcal{L}_\mu$، مندرج در رابطه (۵.۲) می باشد.

نکته ۱.۳. ϕ_1 بصورت مضربی از $\partial_\xi A_M$ است.

نکته ۲.۳. این توابع ویژه تشکیل پایه ای برای فضای $L^2(m)$ می دهند و تصویر تابع f بر روی زیر فضای تولید شده توسط ϕ_0 برابر $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ می باشد.

حال برای یافتن n- موج های انتشار، تبدیل کول-هوپف را روی v اعمال می کنیم تا تابعی مانند V حاصل شود. این تابع در معادله خطی $\partial_\tau V = \mathcal{H}_\mu^M V$ صدق می کند. در گام بعد اگر فرض کنیم $m > 3/2$ در این صورت 0 و $-\frac{1}{2}$ دو مقدار ویژه منزوی از عملگر $\mathcal{H}_\mu^M$ خواهند بود. از این رو برای یافتن n- موج های انتشار تمرکز خود را متوجه زیر فضای مرکزی-پایدار تولید شده توسط $\{\phi_1, \phi_0\}$ خواهیم کرد ابتدا فرض می‌کنیم $\int_{-\infty}^{+\infty} V(\xi)d\xi = 0$ در ایضورت خانواده $\{V(\xi,\tau) = \alpha_1 e^{-\tau/2}\partial_\xi A_M\}$ حاصل خواهد شد. حال اگر عکس تبدیل کول-هوپف را روی این خانواده اعمال کنیم به خانواده زیر دست خواهیم یافت

$$v_N(\xi,\tau) = \frac{\alpha_1\exp(-\tau/2)A_M'(\xi)}{1-\frac{\alpha_1}{2\mu}\exp(-\tau/2)A_M(\xi)} \qquad (۵.۳)$$

و با توجه به رابطه vwو خانواده $\{w^N(\xi,\tau)=A_M(\xi)+v^N(\xi,\tau)\}$ بدست می آید. در ادامه ثابت خواهیم کرد که این خانواده همان n– موج های انتشار هستند. برای این منظور ابتدا برای تابع $w(\xi,\tau)$ مقادیر p و q که از این بعد به ترتیب جرم منفی و جرم مثبت نامیده می شوند را به صورت زیر تعریف می کنیم واضح است که $M=\frac{q-p}{2}$.

$$p=-2\inf_y\int_{-\infty}^{y}w(\xi,0)d\xi\ ,\ q=2\sup_y\int_{y}^{+\infty}w(\xi,0)d\xi \qquad (۶.۳)$$

لم ۳.۳. برای هر سه عدد مثبت ثابت q، q و δ فرض کنید $w^N(\xi,\tau)$ یکی از اعضای خانواده معرفی شده در بالا باشد بقسمی که برای یک لحظه $\tau=\tau_0$ ، جرم مثبت $w^N(\xi,\tau_0)$ برابر q و جرم منفی آن برابر p باشد در این صورت یک $\mu_0>0$ و به اندازه کافی کوچک وجود دارد که برای هر $0<\mu<\mu_0$ داشته باشیم $\|w^N(.,\tau_0)-N_{p,q}\|_m<\delta$ که

$$N_{p,q}(\xi)=\begin{cases}\xi & -\sqrt{p}<\xi<\sqrt{q}\\ 0 & otherwise\end{cases} \qquad (۷.۳)$$

قضیه ۴.۳. $m>3/2$ را تثبیت کنید. اگر $w(\xi,\tau)$ نمایانگر یک جواب دلخواه از (۳.۲) با جرم منفی و مثبت p و q باشد، در این صورت برای μ به اندازه کافی کوچک و هر $\delta>0$، وجود دارد $T>0$ از مرتبه $\mathcal{O}(|\log(\mu)|)$ که $\|w(T)-N_{p,q}\|_m\leq\delta$.

قضیه ۵.۳. برای هر جواب $w(.,\tau)$ از (۳.۲) یک $w^N(\xi,\tau)$ وجود دارد که $w(.,\tau)=w^N(.,\tau)+\psi(.,\tau)$ و $\|\psi(.,\tau)\|_m\leq C_\psi e^{-\tau}$.($C_\psi$ یک ثابت است)

۴. نتیجه‌گیری

لم (۳.۳) به ما می گوید هر n–موج انتشار به سمت جواب ایستای $N_{p,q}$ میل می کند و قضیه (۴.۳) تاکید می کند که زمان زیادی نیاز است که یک جواب دلخواه به $N_{p,q}$ همگرا شود و قضیه سوم نیز می گوید هر جواب دلخواه با سرعت بسیار زیادی به سمت$w^N(\xi,\tau)$ مربوط به خود میل می کند و لذا هر جواب دلخواه از (۳.۲) با سرعت زیادی به یک $w^N(\xi,\tau)$ نزدیک می شود و مدت زمان بسیار زیادی را در نزدیکی آن موج به سر می برد. بنابراین $w^N(\xi,\tau)$ گرینه مناسبی برای n–موج انتشار هستند

مراجع

1. C. Eugene Wayne, *Infinite dimensional dynamical systems and the Navier–Stokes equation*, NATO Science for Peace and Security Series pp 103-141, 2008.
2. Margaret Beck, C. Eugene Wayne, *Using global invariant manifolds to understand metastability in Burgers equation with small viscosity*, SIAM REVIEW , Vol. 53, No. 1, pp. 129–153, Oct 2008.
3. Thierry Gallay, C. Eugene Wayne, *Invariant Manifolds and the Long-Time Asymptotics of the Navier-Stokes and Vorticity Equations on* $\mathbb{R}^2$, Archive for Rational Mechanics and Analysis Volume 163, Issue 3, pp 209-258, June 2002.