فصل اول

بردارها و مکانیک

۱. دو بردار $A=\left(2\hat{i}-3\hat{j}+7\hat{k}\right)$ و $B=\left(5\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}\right)$ مفروض‌اند، پیدا کنید؟

۱) $A+B$ ۲) $A-B$ ۳) $A.B$ ۴) $A\times B$

۲. کسینوس زاویه بین $A=\left(3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right)$ و $B=\left(-2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k}\right)$ را به‌دست آورید؟

۳. کسینوس‌های هادی یک بردار، کسینوس زوایایی هستند که آن بردار با محورهای مختصات می‌سازد، کسینوس زوایای بین یک بردار و محورهای y,x و z را معمولاً با γ,β,α نشان می‌دهند. با استفاده از هندسه و یا جبر برداری ثابت کنید که $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$.

۴. نشان دهید، اگر $|A-B|=|A+B|$ باشد، آن‌گاه A عمود است بر B.

۵. ثابت کنید که قطرهای یک لوزی بر هم عمودند.

۶. با استفاده از ضرب برداری، قانون سینوس‌ها را در دو یا سه سطر ثابت کنید.
(**راهنمایی:** مساحت مثلثی را که از سه بردار C, B, A تشکیل شده در نظر بگیرید که برای آن $A+B+C=0$).

۷. فرض کنید $\hat{a}$ و $\hat{b}$ بردارهای یکه در صفحه xy باشند، و با محور xها به‌ترتیب زوایای θ و ϕ بسازند. نشان دهید $\hat{a}=\cos\theta\hat{i}+\sin\theta\hat{j}$ و $\hat{b}=\cos\phi\hat{i}+\sin\phi\hat{j}$ و با استفاده از جبر برداری ثابت کنید.

$$\cos(\theta-\phi)=\cos\theta\cos\phi+\sin\theta\sin\phi$$

۸. بردار یکه‌ای بیابید که بر بردارهای $A=(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})$ و $B=(2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k})$ عمود باشد.

۹. نشان دهید که حجم یک متوازی السطوح به ابعاد C,B,A از رابطه $A.(B\times C)$ به دست می‌آید.

۱۰. دو نقطه را که در r_1 و r_2 واقع شده و به فاصله $r=|r_1-r_2|$ از یکدیگر واقع شده‌اند در نظر می‌گیریم. بردار A را که از مبدأ به نقطه‌ای روی خط واصل r_1 و r_2 و به فاصله xr از r_1 وصل می‌شود پیدا کنید، در صورتی که x یک عدد مشخص است.

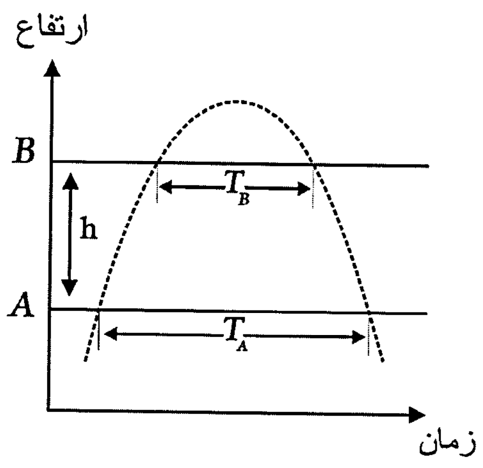
۱۱. فرض کنید A برداری اختیاری و $\hat{n}$ برداریکه در جهتی معین باشد، نشان دهید.

$$A=(A.\hat{n})\hat{n}+(\hat{n}\times A)\times\hat{n}$$

۱۲. شتاب گرانشی را می‌توان با پرتاب یک جسم به طرف بالا و اندازه‌گیری زمان لازم برای عبور از دو نقطه معین مسیر در هر دو جهت اندازه گرفت. اگر زمان لازم برای عبور جسم از یک خط افقی A در هر دو جهت برابر با T_A و برای خط دیگر B برابر T_B باشد، با فرض ثابت بودن شتاب نشان دهید که اندازه این شتاب برابر است با:

$$g=\frac{8h}{T_A^2-T_B^2}$$

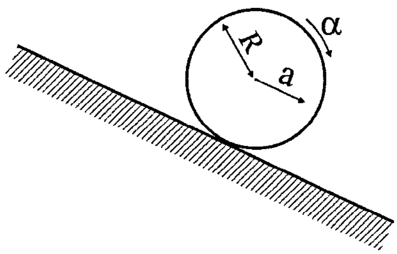
که در آن h ارتفاع خط B نسبت به خط A است (شکل ۱ـ ۱)



شکل ۱ ـ ۱

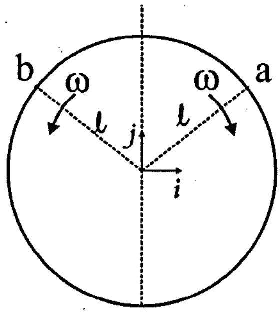
۱۳. آسانسوری با سرعت یکنواخت از زمین به طرف بالا شروع به حرکت می‌کند در زمان T_1 یکی از سرنشینان سنگی را از کف آن رها می‌سازد. این سنگ با شتاب $g=9.8\frac{m}{s^2}$ سقوط می‌کند و بعد از T_2 ثانیه به زمین می‌رسد. ارتفاع آسانسور از زمین را در لحظه T_1 پیدا کنید.

۱۴. استوانه‌ای به شعاع R روی سطح شیب‌داری، بدون لغزش به طرف پایین می‌غلتد (شکل ۲ـ۱). محور آن دارای شتاب a موازی با سطح شیب‌دار است، α شتاب زاویه‌ای استوانه، چقدر است؟



شکل ۲ ـ ۱

۱۵. منظور از سرعت نسبی، سرعت نسبت به یک دستگاه مختصات موردنظر است. (از واژه سرعت، به تنهایی معنای سرعت نسبت به دستگاه مختصات ناظر استنباط می‌شود). (الف) مشاهده شده است که نقطه‌ای دارای سرعت V_A نسبت به دستگاه مختصات A است. سرعت آن نسبت به دستگاه مختصات B که به اندازه R از دستگاه A فاصله دارد، چقدر است؟ (R نسبت به زمان می‌تواند تغییر کند).(ب) ذرات a و b در دو جهت مخالف هم روی دایره‌ای با سرعت زاویه‌ای ω در حرکت‌اند (شکل ۳ـ۱) در $t=0$ هر دوی آن‌ها در نقطه $r=\ell\hat{j}$ قرار دارند، که l شعاع دایره است. سرعت a را نسبت به b پیدا کنید.



شکل ۳ـ۱

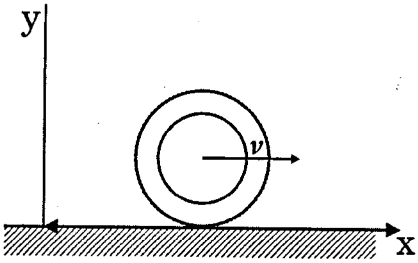
۱۶. یک اتومبیل مخصوص مسابقه، در 30 ثانیه می‌تواند به‌طور یکنواخت شتاب بگیرد و به سرعت 200 کیلومتر بر ساعت برسد. بیشینه شتاب کند کننده ناشی از ترمز آن نمی‌تواند از 0.7g تجاوز کند. زمان کمینه لازم برای پیمودن نیم کیلومتر چقدر است؟ فرض می‌کنیم که اتومبیل در زمان شروع و پایان کار در حالت سکون است.

(**راهنمایی:** نمودار سرعت بر حسب زمان می‌تواند مفید باشد)

۱۷. ذره‌ای با سرعت شعاعی ثابت $\dot{r}=4\frac{m}{s}$ در صفحه حرکت می‌کند. سرعت زاویه‌ای آن ثابت و به مقدار $\dot{\theta}=2\frac{rad}{s}$ است. وقتی که ذره در فاصله 3 متر از مبدأ قرار دارد (الف) بزرگی سرعت و (ب) بزرگی شتاب آن را پیدا کنید.

۱۸. آهنگ تغییر شتاب را گاهی اوقات "جرک" می‌گویند. اندازه و جهت جرک را برای ذره‌ای که روی دایره‌ای به شعاع R با سرعت زاویه‌ای ω حرکت می‌کند پیدا کنید. با رسم نمودار برداری، مکان، سرعت، شتاب و جرک لحظه‌ای را نشان دهید.

۱۹. لاستیک اتومبیلی در امتداد خط راست و بدون لغزش می‌غلتد (شکل ۴ـ۱). مرکز آن با سرعت ثابت V حرکت می‌کند. ریگ کوچکی در شیار آن جا گرفته است که در $t = 0$ با زمین تماس پیدا می‌کند. مکان، سرعت، و شتاب ریگ را به صورت تابعی از زمان به‌دست آورید.



شکل ۴ـ۱

۲۰. ذره‌ای در امتداد یک مارپیچ و به طرف خارج آن در حرکت است. مسیر آن به وسیله رابطه $r=A\theta$ مشخص شده است که در آن A مقدار ثابت و برابر است با $A=\left(\frac{1}{\pi}\right)\frac{m}{rad}$. مقدار θ هم با زمان مطابق رابطه $\theta=\frac{\alpha t^2}{2}$ افزایش می‌یابد که در آن α مقداری ثابت است.

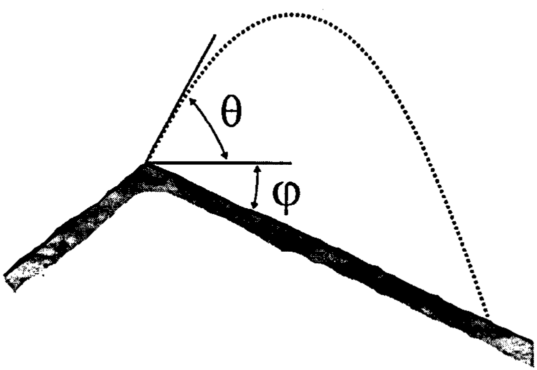
(الف) شکل مسیر حرکت را رسم کنید، و سرعت و شتاب تقریبی را در چند نقطه نشان دهید.

(ب) نشان دهید که شتاب شعاعی وقتی که $\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{rad}$ است، برابر صفر می‌شود.

(ج) در چه زاویه‌ای شتاب مماسی و شعاعی با هم برابرند؟

۲۱. پسربچه‌ای در بالای تپه‌ای ایستاده است، این تپه دارای شیب یکنواخت (با زاویه ϕ)به طرف پایین است. با چه زاویه‌ای از خط افق (θ) باید سنگی را پرتاب کند تا بیشترین بردار را داشته باشد

(شکل ۵ـ۱)



شکل ۵ـ۱

بردارها و مکانیک

(۱ـ۱)

$$\vec{A}+\vec{B}=7\hat{i}-2\hat{j}+9\hat{k}$$

$$\vec{A}-\vec{B}=(2-5)\hat{i}+(-3-1)\hat{i}+(7-2)\hat{k}$$

$$=-3\hat{i}-4\hat{i}+5\hat{k}$$

$$\vec{A}.\vec{B}=10-3+14=21$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 7 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}=3\hat{i}+3\hat{j}+17\hat{k}$$

(۲ـ۱)

$$\vec{A}.\vec{B}=|A||B|\cos\theta=A_x B_x+A_y B_y+A_z B_z$$

$$\cos\theta=\frac{A_x B_x+A_y B_y+A_z B_z}{|A||B|}=\frac{-10}{(\sqrt{11})(\sqrt{14})}$$

$$\cos\theta=-0.805$$

(۳ـ۱)

$$V=(a,b,c) \quad \Rightarrow \quad u=\frac{V}{|V|}=\frac{a\hat{i}+b\hat{j}+v\hat{k}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\cos\alpha\,\hat{i}+\cos\beta\,\hat{j}+\cos\gamma\,\hat{k}$$

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad , \quad \cos\beta\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad , \quad \cos\gamma=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}=1$$

(۱ـ۴)

اگر $|A-B|=|A+B|$ آن‌گاه $\vec{A}\perp\vec{B}$

$$\sqrt{(A_x-B_x)^2+(A_y-B_y)^2+(A_z-B_z)^2}$$
$$=\sqrt{(A_x+B_x)^2+(A_y+B_y)^2+(A_z+B_z)}$$
$$2A_xB_x+2A_yB_y+2A_zB_z=0 \quad \Rightarrow \quad A.B=0$$

توجه شود که می‌توانیم این اثبات را از $A.B$ شروع کنیم و نشان دهیم $|A+B|=|A-B|$ برقرار است.

(۱ ـ ۵)

شرط لوزی بودن این است که دو ضلع با یکدیگر برابر و اقطار بر هم عمود باشند با توجه به این‌که $|\vec{B}|=|\vec{A}|$ می‌توان نوشت:

$$(A\times\vec{B}).(\vec{A}-\vec{B})=$$
$$\left[(A_x+B_x)\hat{i}+(A_y+B_y)\hat{j}\right].\left[(A_x-B_y)+(A_x-B_y)\right]$$
$$A_x^2-B_x^2+A_y^2-B_y^2=0$$

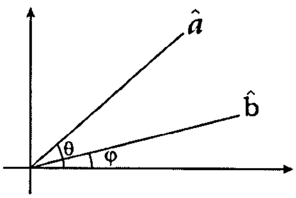
(۱ـ۶)

یک مثلث در نظر می‌گیریم:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}(\vec{A}\times\vec{B})=\frac{1}{2}(\vec{B}\times\vec{C})=\frac{1}{2}(\vec{C}\times\vec{A})$$
$$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{B}\times\vec{C}=\vec{C}\times\vec{A} \quad \Rightarrow \quad AB\sin\gamma=BC\sin\alpha=CA\sin\beta$$
$$\frac{\sin\alpha}{|A|}=\frac{\sin\beta}{|B|}=\frac{\sin\gamma}{|C|}$$

(۱ـ۷)

$$|\hat{a}|=1 \quad , \quad |\hat{b}|=1$$



$$\hat{a}.\hat{b}=|\hat{a}||\hat{b}|\cos(\theta-\varphi)=\cos(\theta-\varphi)$$
$$\hat{a}.\hat{b}=\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta h\varphi$$
$$\cos(\theta+\varphi)=\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi$$

۱ـ۸)

$$\vec{A}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k} \qquad \vec{B}=2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$$

$$\vec{N}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=2\hat{i}-5\hat{j}-3\hat{k}$$

$$\hat{n}=\frac{\vec{N}}{|N|}=\frac{2i-5\hat{j}-3\hat{k}}{\sqrt{38}}$$

که هم $\pm\hat{n}$ بر این دو بردار عمود است.

۱ـ۹)

حجم یک متوازی‌السطوح برابر است با: مساحت قاعده در ارتفاع به‌منظور بدست آوردن مساحت قاعده باید از یک رأس به ضلع مجاور عمود کنیم , بدست می‌آید $A\sin\theta$ و سپس در ارتفاع ضرب کنیم داریم:

$$V=\left|\vec{A}.\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\right|$$

۱ـ۱۰)

$$r=\left|r_1-r_2\right| \quad \vec{r}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$$

$$\vec{r}=\left(\vec{r}_2-\vec{A}\right)+\left(\vec{r}-\vec{A}\right)$$

$$r=xr+\left(\vec{r}_2-\vec{A}\right)$$

۱ـ۱۱)

A را یک بردار دلخواه در نظر می‌گیریم و $\hat{n}$ یک واحد در یک جهت ثابت در نظر می‌گیریم.

$$C=\left(\hat{n}\times\vec{A}\right)\times\hat{n} \quad , \quad B=\left(A.\hat{n}\right)\hat{n}$$

در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که زاویه میان A و $\hat{n}$ ، θ باشد حال A را به بردار موازی با $\hat{n}$ و عمود بر $\hat{n}$ تجزیه می‌کنیم. B مولفه موازی را می‌دهد و مولفه عمودی باید $|A|\sin\theta$ باشد می‌توان ثابت کرد که $(\hat{n}\times A)\times n$ بر $\hat{n}$ عمود است.

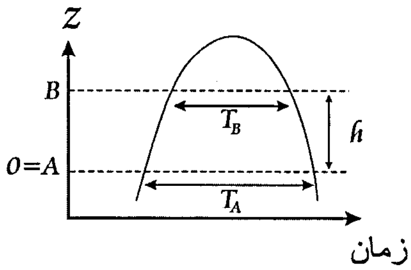
$$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{B}\left(\vec{A}.\vec{C}\right)-\vec{C}\left(\vec{A}.\vec{B}\right)$$

با استفاده از قاعده BAC – CAB داریم:

$$\hat{n}\times\left(\hat{n}\times\vec{A}\right)=\hat{n}\left(\hat{n}.\vec{A}\right)-\vec{A}\left(\hat{n}.\hat{n}\right)$$

$$A=\left(A.\hat{n}\right)\hat{n}+\left(\hat{n}\times A\right)\times\hat{n}$$

۱ـ۱۲)



از حرکت جسم در جهت y,x صرف‌نظر می‌کنیم و فرض می‌کنیم که فقط جهت z حرکت داشته باشد. زمان $t = 0$ را برای ارتفاع A در نظر می‌گیریم و این ارتفاع را هم $z = 0$ در نظر می‌گیریم. از $\frac{d^2z}{dt^2}=-g$ داریم:

$$z(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+z_0$$

که در اینجا $z=0$ است. در چه زمان‌هایی پرتابه ما در $A(z=0),\ B(z=h)$ است؟

$$A:0=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t \qquad t=0\ ,\ \frac{2v_0}{g}$$

$$T_A=\frac{2v_0}{g}$$

$$B:h=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t \qquad \frac{1}{2}gt^2-v_0t+h=0$$

$$t=\frac{V_0\pm\sqrt{v_0^2-4\left(\frac{1}{2}g\right)h}}{g}$$

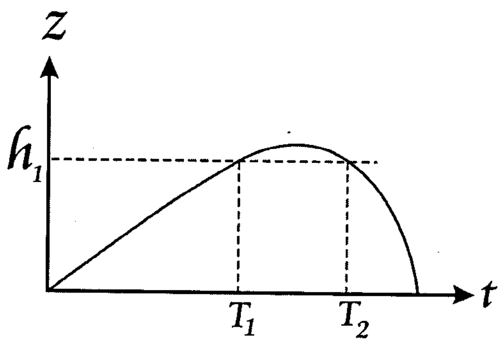
$$T_B=\frac{v_0+\sqrt{v_0^2-2gh}}{g}-\frac{v_z-\sqrt{v_0^2-2gh}}{g}=\frac{2\sqrt{v_0^2-2gh}}{g}$$

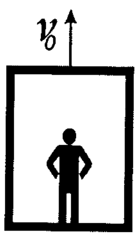
$$T_A^2=\left(\frac{2v_0^2}{g}\right)^2 \qquad T_B^2=\frac{4}{g^2}\left(v_z^2-2gh\right)$$

$$T_A^2-T_B^2=\frac{8h}{g} \qquad g=\frac{8h}{T_A^2-T_B^2}$$

۱-۱۳)

T_1 زمانی که سنگ رها می‌شود و T_2 زمانی که به زمین می‌رسد. فرض می‌کنیم که در $t = 0$ آسانسور از زمین شروع به حرکت می‌کند در زمان T_1 سنگ در ارتفاع $z_1 = v_0 T_1$ با سرعت اولیه $v(T_1) = v_0 \hat{z}$ رها می‌شود.





توجه شود که $T_2' = T_1 + T_2$

برای زمان $T_1 \le t \le T_2'$ جسم طبق معادله زیر حرکت می‌کنیم.

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -g \qquad \frac{dz}{dt} = -gt + c_1 = -gt + \left(v_0 + gT_1\right)$$

$$\frac{dz(T_1)}{dt} = -gT_1 + C_1 = v_0 \qquad C_1 = v_0 + gT_1$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \left(v_0 + gT_1\right)t + c_2$$

$$z\left(T_2'\right) = 0 = -\frac{1}{2}gT_2'^2 + \left(v_0 + gT_1\right)T_2' + c_2$$

$$z\left(T_1\right) = h_1 = -\frac{1}{2}gT_1^2 + \left(v_0 + gT_1\right)T_1 + c_2$$

$$h_1 = \frac{1}{2}g\left(T_2'^2 - T_1^2\right) - \left(v_0 + gT_1\right)\left(T_2' - T_1\right)$$

$$h_1=\frac{1}{2}g\left(T_2'^2-T_1^2\right)-\left(\frac{h_1}{T_1}+gT_1\right)\left(T_2'-T_1\right)\ ,\ v_0=\frac{h_1}{T_1}$$

$$h_1=\frac{1}{2}g\left(T_2'^2-T_1^2\right)-\left(\frac{h_1}{T_1}+gT_1\right)\left(T_2'-T_1\right)$$

$$h_1+\frac{h_1}{T_1}\left(T_2'-T_1\right)=\frac{1}{2}g\left(T_2'^2-T_1^2\right)-gT\left(T_2'\ -T_1\right)$$

$$h_1=\frac{T_1}{T_2'}\left[\frac{1}{2}g\left(T_2'^2+T_1^2\right)-gT_1T_2'\right]$$

حال حالت خاص $h_1=39.2\text{m}$ $\rightarrow$ $T_1=T_2=4\sec$ بررسی می‌کنیم.

$$h_1-\frac{T_1}{T_1+T_2}\left[\frac{g}{2}\left(\left(T_1+T_2\right)^2-T_1^2\right)-gT_1T_2\right]$$

$$=\frac{T_1}{T_1+T_2}\left[\frac{g}{2}\left(T_2^2+2T_1T_2\right)-gT_1T_2\right]$$

$$h_1=\frac{1}{2}\frac{T_1T_1^2}{T_1+T_2}g$$

$$h_1\left(T_1=T_2=4\sec\right)=\frac{4^3}{298}g;4g=39.2\text{m}$$

(فکر نمی‌کنم این ساده‌ترین راه باشد!!!)

(۱۴ـ۱

چون غلتش کامل است پس

$$a=R\times\alpha\quad\Rightarrow\quad\alpha=\frac{a}{R\sin\theta}$$

(۱۵ـ۱

الف)

$$R=X_A+X_B$$

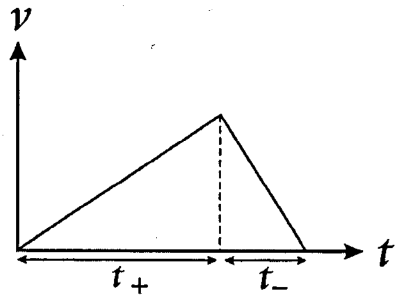
$$\frac{dR}{dt}=V_A+V_B\qquad V_B=V_A-\frac{dR}{dt}$$

ب)

$$\vec{V}_A=\ell\omega\hat{\theta}\qquad\vec{V}_B=-\ell\omega\hat{\theta}$$

$$\vec{V}_A-\vec{V}_B=2\ell\omega\hat{\theta}$$

(۱ـ۱۶



$$d_+ = \frac{1}{2} a_+ t_+^2$$
$$d_- = \frac{1}{2} a_- t_-^2$$

بیشترین سرعت

$$V_m = a_+ t_+ = a_- t_-$$

$$d = d_+ + d_- = \frac{1}{2} a_+ t_+^2 + \frac{1}{2} a_- t_-^2 = \frac{1}{2} a_+ t_+^2 + \frac{1}{2} a_- \frac{d_+^2}{a_-^2} t_+^2$$

$$d = \frac{1}{2} a_+ \left(1 + \frac{a_+}{a_-}\right) t_+^2$$

$$t_+ = \sqrt{\frac{2d}{a_+\left(1+\frac{a_+}{a_-}\right)}} \qquad t_- = \sqrt{\frac{2d}{a_-\left(1+\frac{a_-}{a_+}\right)}}$$

$$d = 804.7\,m \qquad a_+ = 1.79\frac{m}{s^2} \qquad a_- = 6.86\frac{m}{s^2}$$

$$t = t_+ + t_- = 26.7 + 6.96 = 33.7\,sec$$

(۱ـ۱۷

$$\dot{r} = 4\,m \qquad \dot{\theta} = 2\frac{rad}{s} \qquad r\,(T) = 3\,m$$

الف)

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2} = \sqrt{4^2 + (3\times 2)^2} = \sqrt{52}\,\frac{m}{s}$$

ب)

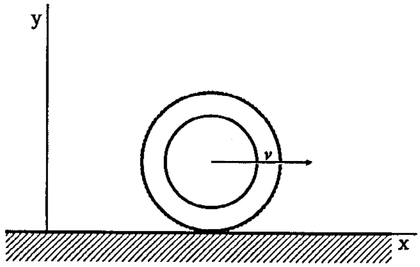
$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\hat{r} + 2\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-r\dot{\theta})^2 + (2\dot{r}\dot{\theta})^2} = \sqrt{12^2 + (16)^2} = 20$$

۱ـ۱۹)

اگر موقعیت اولیه ذره در مبدا در نظر بگیریم سرعت برابر می‌شود با:



$$\dot{x}=\omega R-\omega R\cos\omega t$$
$$\dot{y}=\omega R\sin\omega t$$

با انتگرال‌گیری از معادلهٔ بالا و در نظر گرفتن $\omega t=\phi$

$$x(t)=R(\phi-\sin\phi)$$
$$y(t)=R(1-\cos\phi)$$

شرایط اولیه $\left(x_{(0)},y_{(0)}\right)=(0,0)$ که معادله یک سیکلوئیه است.

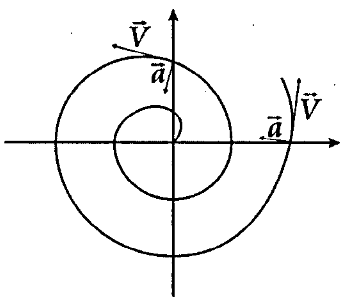
شتاب ذره برابر می‌شود با:

$$a=-\omega^2 R\vec{r}$$

۱ـ۲۰)

$$r=a\theta \qquad A=\frac{1}{\pi}\frac{m}{rad} \qquad \theta=\frac{\alpha+2}{2}$$

الف)



ب) شتاب شعاعی

$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}=0 \qquad \dot{r}=r\dot{\theta} \qquad \dot{\theta}=\alpha t \quad \dot{r}=A\dot{\theta}$$
$$\alpha A=A\theta(\alpha t)^2 \qquad \theta=\alpha \qquad \ddot{r}=A\ddot{\theta}$$
$$\alpha=\frac{1}{2}\alpha t^2(\alpha t)^2$$

$$\alpha=\frac{1}{2}\alpha^{3}\left(t^{4}\right) \qquad t=\left(\frac{2}{\alpha^{2}}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\theta=\frac{1}{2}\alpha t^{2}=\frac{1}{2}\alpha\left(\frac{2}{\alpha^{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ج)

$$a_t=\frac{rd^2\theta}{dt^2}+\frac{2dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}=r_\alpha+2A\alpha^2t^2$$

$$\left|a_r\right|=\left|a_\theta\right|$$

$$\left|A\alpha-r\alpha^2t^2\right|=\left|r\alpha+2\alpha^2t^2\right|$$

$$A\alpha\left|1-2\theta^2\right|=A\alpha\left|\theta+4\theta\right|$$

$$\left|1-2\theta^2\right|=\left|5\theta\right|$$

بنابراین نتیجه نهایی:

$$\theta<\frac{1}{\sqrt{2}} \;:\; \theta=\frac{\sqrt{33}-5}{4}$$

$$\theta>\frac{1}{\sqrt{2}} \;:\; \theta=\frac{\sqrt{33}+5}{4}$$

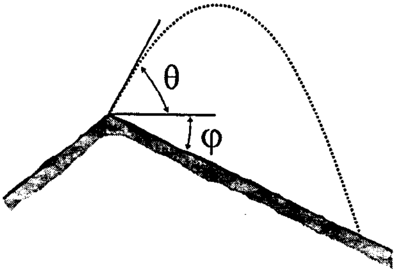
۱ـ۲۱)

$$x=v\cos\theta t \qquad y=v\sin\theta t-\frac{1}{2}gt^2$$

$$y_{(x)}=x\operatorname{Tan}\theta-\frac{gx^2}{2v^2\cos^2\theta}$$

$$y_h(x)=-\tan\phi x$$

$$-\tan\phi x=\tan\theta x-\frac{gx^2}{2v^2\cos^2\theta}$$



$x=0$ یکی از جواب‌ها است ولی جواب دیگر که جواب ما است.

$$X=\frac{2v^2\cos^2\theta}{g}\left[\tan\theta+\tan(\phi)\right]$$

ماکسیمم X

$$\frac{dx}{d\theta}=0=\frac{2v^2}{g}\left[2\cos\theta(-\sin\theta)(\tan\theta+\tan\phi)\right]+\cos^2\theta\left(1+\tan^2\theta\right)\Big]$$

$$0=\frac{2v^2}{g}\left[-2\sin^2\theta-\sin 2\theta\tan\phi+\cos^2\theta+\sin^2\theta\right]$$

$$0=-\sin 2\theta\tan\phi+\cos^2\theta-\sin^2\theta$$

$$0=-\sin(2\theta)\tan\phi+\cos 2\theta$$

$$\tan(2\theta)=(\cot\phi) \quad\Rightarrow\quad \tan 2\theta=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right) \quad , \quad \theta=\frac{\pi}{4}-\frac{\phi}{2}$$

$$\theta=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left[\cot(\phi)\right]$$

در حالت خاص اگر $\phi=45^\circ$ باشد آن‌گاه:

$$\theta=45-\frac{60}{2}=45-3=15^\circ$$