مختصری درمورد منطق محمولات (مرتبهٔ اول)

- مقدمات :

یک گزاره نما عبارتی است به شکل $A(x)$ ، که در آن A ، خبری را درمورد x بیان می‌کند. برای مثال $A(x)$ می‌تواند عبارت « x فرد است » باشد. در این حالت دامنهٔ $A(x)$ مجموعهٔ اعداد طبیعی است.

$A(3)$ حاصل جانشینی ۳، به جای x در A است و معنی آن « ۳ فرد است » خواهد بود.

روشن است که $A(x)$ یک گزاره نیست اما $A(3)$ چنین است.

در ادبیات گاهی اوقات A را «محمول» می‌نامند.

گزاره نماها یا محمولها می‌توانند شامل بیش از یک متغیر باشند. مثلاً عبارتی به شکل $B(x,y)$. در اینجا B می‌تواند محمول « x برادر y است » یا « $x-y=2$ » باشد.

در ریاضیات با عبارتهائی به شکل زیر زیاد مواجه می‌شویم :

« هر عدد زوج مرکب است »

این عبارت را می‌توان به شکل زیر ترجمه کرد :

به ازای هر x ، اگر x عددی زوج باشد آنگاه x مرکب است .

عبارت فوق را می‌توان به شکل زیر صوری کرد :

$$\forall x \ (Z(x) \to M(x))$$

« $\forall x$ » نمایشگر « به ازای هر » می‌باشد و آنرا سورعمومی می‌نامند .

در عبارت فوق الذکر ، حوزهٔ سخن سور $\forall$ ، مجموعهٔ اعداد طبیعی است . ضمناً $Z(x)$ محمول « x زوج است » و $M(x)$ محمول « x مرکب است » است .

به همین ترتیب ، عبارتی چون

« عدد اولی وجود دارد که زوج است »

را می‌توان به شکل زیر بصورت صوری نوشت :

$$\exists x \ (P(x) \wedge Z(x))$$

$\exists x$ نمایشگر عبارت «وجود دارد» است و آنرا سور وجودی می‌گویند.

حوزهٔ سخن سور $\exists$ در این مثال مجدداً مجموعهٔ اعداد طبیعی است. دامنهٔ عمل یک سور معمولاً با پرانتزها مشخص می‌شود. البته گاهی مواقع برای اختصار پرانتزها حذف می‌شوند.

مثال: در عبارت $\forall x\,(\exists y\ A(y) \rightarrow A(x))$ دامنهٔ سور $\forall x$، همهٔ عبارت درون پرانتز و دامنهٔ سور $\exists y$، $A(y)$ است.

مثال: جملهٔ زیر را بصورت صوری بنویسید:

«فردی وجود دارد که همه را دوست دارد»

حل: $\exists x\ \forall y\ A(x,y)$

در اینجا حوزهٔ سخن سورها، مجموعهٔ همهٔ انسانهاست. ضمناً $A(x,y)$ به معنی «x، y را دوست دارد» است. توجه کنید که دامنهٔ عمل $\exists x$، عبارت $\forall y\ A(x,y)$ و دامنهٔ عمل $\forall y$، $A(x,y)$ است.

مثال: به زبان صوری ترجمه کنید.

«هرکس را کسی دوست دارد»

حل: $\forall y\ \exists x\ A(x,y)$

تمرین: عبارت صوری $\forall x\ \forall y\ \exists z\ (x+y=z)$ را به زبان فارسی سلیس بنویسید.

تمرین: عبارتهای زیر که در مورد اعداد طبیعی هستند را به زبان صوری ترجمه کنید:

الف) عددی زوج وجود دارد.

ب) عددی فرد بزرگتر از ۲ وجود دارد.

ج) هر عدد زوج بزرگتر از ۱ است.

د) مجموع هر عدد حقیقی مثبت از نصف آن دو برابر است.

- متغیرهای محدود (قلابی) و آزاد (واقعی)

در فرمول ریاضی $\sum_{i=1}^{n} i^2$ ، i یک متغیر محدود است. با تغییر i به j ، مقدار عبارت تغییری نخواهد کرد. اما در این فرمول، n یک متغیر آزاد است. برای مثال تغییر n به m مقدار فرمول را کاملاً تغییر می‌دهد.

نظیر وضعیت فوق در مورد عبارتهای منطق نیز وجود دارد. اگر موردی از یک متغیر در دامنهٔ عمل یک سور هم‌نام خود باشد آن مورد محدود نامیده می‌شود در غیر اینصورت موردی آزاد است، (موارد آزاد و محدود). اگر حداقل یک مورد آزاد از یک متغیر در یک عبارت موجود باشد، می‌گوییم آن متغیر در آن عبارت آزاد است.

<u>مثال</u>:

$$\exists x\ (A(x) \to \forall y\ B(z,y))$$

محدود   محدود   محدود   آزاد   محدود

تنها متغیر z در عبارت فوق آزاد است.

<u>مثال</u>: دو عبارت $\forall x\, A(x)$ ، $\forall y\, A(y)$ معنای یکسانی دارند. هر دو به معنی آن هستند که «هر شیئ‌ای (در حوزهٔ سخن) خاصیت A دارد». به نحو مشابه $\exists x\, A(x)$ و $\exists y\, A(y)$ نیز معنی یکسان دارند. در اینجا $A(x)$ می‌تواند با هر عبارت دلخواه که شامل متغیر آزاد x است جایگزین شود.

۳- ارزشیابی عبارت‌های منطقی حاوی سور

عبارتی چون $\forall x\, A(x)$ ، با حوزهٔ سخن D برای $\forall$ ، درست خوانده می‌شود هرگاه به ازای هر $d \in D$ ، $A(d)$ درست باشد (توجه کنید که $\forall x\, A(x)$ در واقع یک گزاره است).

برای مثال در نظریهٔ اعداد $\forall x\ (2<x)$ غلط است.

عبارت $\exists x\, A(x)$ با حوزهٔ سخن D برای $\exists$ ، درست خوانده می‌شود هرگاه عضوی همچون $d \in D$ وجود داشته باشد به قسمی که $A(d)$ درست باشد.

برای مثال $\exists x\ (2<x)$ در دامنهٔ اعداد طبیعی درست است.
در تعاریف فوق نیز، $A(x)$ می‌تواند با هر عبارت دلخواه که شامل متغیر آزاد x است جایگزین شود.

بعضی از عبارتهای منطقی دارای این خاصیت هستند که حوزه سخن سورهای موجود در آنها را هرچه اختیار کنیم و محمولهای موجود در آنها را در این حوزه‌های سخن هرگونه تعبیر کنیم، درست هستند. آنها را منطقاً معتبر گوییم. درستی این عبارتها به حوزه سخن خاصی که انتخاب می‌شود بستگی ندارد بلکه به ساختار منطقی آنها مربوط است.

مثال: هر عبارت به شکل $\exists x G(x) \leftrightarrow \sim(\forall x \sim G(x))$ منطقاً معتبر است.

حل: حوزه سخن دلخواهی چون D را درنظر بگیرید. باید نشان دهیم که $\exists x G(x)$ و همچنین $(\sim \forall x \sim G(x))$ هردو در D درست هستند، یا هردو در D غلط هستند.

فرض کنید $\exists x G(x)$ در D درست باشد. پس $d_0 \in D$ وجود دارد بطوریکه $G(d_0)$ در D درست است. پس $\sim G(d_0)$ در D غلط است. پس $\forall x \sim G(x)$ در D غلط است. بنابراین $\sim(\forall x \sim G(x))$ در D درست است.

به همین ترتیب از درستی $\sim(\forall x \sim G(x))$ در D می‌توان به درستی $\exists x G(x)$ در D رسید.

مثال: هر عبارت به شکل زیر منطقاً معتبر است:

$$(\forall x G(x) \vee \forall x H(x)) \rightarrow \forall x (G(x) \vee H(x))$$

حل: فرض کنید طرف اول عبارت شرطی فوق در یک حوزه سخن دلخواه D، درست باشد. باید ثابت کنیم طرف دوم آن نیز در D درست است.

فرض کنید، برای مثال، $\forall x G(x)$ در D درست باشد. پس به ازای هر $d \in D$، $G(d)$ درست است. پس به ازای هر $d \in D$، $G(d) \vee H(d)$ درست است. بنابراین $\forall x (G(x) \vee H(x))$ در D درست است.

مثال: عبارت زیر منطقاً معتبر نیست:

$$\forall x (G(x) \vee H(x)) \rightarrow (\forall x G(x) \vee \forall x H(x))$$

حل: کافی است مثالی از یک حوزهٔ سخن خاص D_0 و تعابیری برای $G(x)$ و $H(x)$ در D_0 بیابیم بطوریکه $\forall x\,(G(x) \vee H(x))$ در D_0 درست باشد ولی $\forall x\, G(x) \vee \forall x\, H(x)$ در D_0 درست نباشد. برای این منظور می‌توانید حوزهٔ سخن را مجموعهٔ اعداد طبیعی و $G(x)$ را محمول « x عددی زوج است » و $H(x)$ را محمول « x عددی فرد است » بگیرید.

مثال: عبارت $\forall x \forall y\, G(x,y) \leftrightarrow \forall y \forall x\, G(x,y)$ مطلقاً معتبر است.

حل: باید نشان دهیم که در یک دامنهٔ دلخواه D، دو عبارت طرفین $\leftrightarrow$، یا همزمان درست هستند یا همزمان نادرستند. اما این مطلب واضح است زیرا هر دوی آنها در D به معنی آن هستند که به ازای هر دو شیء دلخواه $e,d \in D$، $G(e,d)$ در D برقرار است.

۴- چند کلمه در مورد استنتاج در منطق محمولات:

گوییم استنتاج $A_1, \dots, A_n \vdash B$ معتبر است ($A, A_1, \dots, A_n$ عبارتهای دلخواه) هرگاه در هر عالم سخن D و هر تعبیر دلخواه A_i و A در D، اگر A_i همگی درست بودند، B نیز درست باشد.

مثال: استنتاجهای مقابل معتبرند:

الف) i- هر انسانی فانی است.
ii- سقراط انسان است.
پس سقراط فانی است.

ب) i- هر تابع مشتق‌پذیر، پیوسته است.
ii- هر تابع پیوسته، انتگرال‌پذیر است.
iii- $f(x)=x^2$ مشتق‌پذیر است.
پس تابعی انتگرال‌پذیر وجود دارد.

خلاصه اثبات:

صورت منطقی استنتاجهای فوق بصورت زیر است:

الف)
$$\begin{array}{l} \forall x\,(A(x) \to B(x)) \\ A(a) \\ \hline \therefore\ B(a) \end{array}$$

ب)
$$\begin{array}{l} \forall x\,(M(x) \to P(x)) \\ \forall x\,(P(x) \to A(x)) \\ M(a) \\ \hline \therefore\ \exists x\, A(x) \end{array}$$

تمرین

۱- نشان دهید عبارتهای زیر منطقاً معتبرند.

الف) $\forall x G(x) \to \exists x G(x)$

ب) $\forall x G(x) \to \sim(\exists x \sim G(x))$

ج) $(\forall x G(x) \wedge \forall x H(x)) \leftrightarrow (\forall x G(x) \wedge \forall x H(x))$

د) $\exists x (G(x) \vee H(x)) \leftrightarrow (\exists x G(x) \vee \exists x H(x))$

و) $\exists x \exists y G(x,y) \leftrightarrow \exists y \exists x G(x,y)$

۲- نشان دهید عبارتهای زیر منطقاً معتبر نیستند.

الف) $(\exists x G(x) \wedge \exists x H(x)) \to \exists x (G(x) \wedge G(x))$

ب) $\forall x \exists y G(x,y) \to \exists y \forall x G(x,y)$

۳- در حوزهٔ اعداد طبیعی، فرض کنید $G(x,y)$ به معنی $x>y$ و $H(x,y,z)$ به معنی $x.y=z$ و $E(x,y)$ به معنی $x=y$ باشد. تنها به کمک این محمولات، عبارتی چون $Pr(x)$، شامل متغیر آزاد x، بنویسید که معنای آن «x اول است» باشد.

۴- نقیض عبارت $\forall x \exists y \forall z\, G(x,y,z)$ را بصورت ساده شده بنویسید.

۵- تمرینی در منطق گزاره‌ها:
از واقعهٔ قتلی این اطلاعات بدست آمده است که جملگی راست هستند

۱. اگر حسین قاتل نیست پرویز قاتل است.
۲. حسین قاتل نیست یا مقتول مست بوده است.
۳. اگر مقتول مست بوده است قتل در مهمانخانه واقع شده است.
۴. قتل در مهمانخانه واقع شده است.

قاتل کیست؟

۶- رابطه $\uparrow$ را بصورت مقابل تعریف کنید: $P \uparrow Q \equiv \sim P \vee \sim Q$

گزاره‌های $\neg P$ ، $P \vee Q$ ، $P \wedge Q$ ، $P \to Q$ ، $P \leftrightarrow Q$ را برحسب $\uparrow$ بنویسید. (مثال $\neg P \equiv P \uparrow P$)