ADVANCED CONTROL

Ali Karimpour
Associate Professor
Ferdowsi University of Mashhad

Reference:
Chi-Tsong Chen, “Linear System Theory and Design”, 1999.
I thank my student, Nima Vaezi, for his help in making slides of this lecture.

Lecture 6

Controllability and Observability

Topics to be covered include:

- Introduction.
- Controllability.
- Observability.
- Canonical Decomposition.
- Controllability and Observability in Jordan forms.
- Controllability and Observability in LTV systems.

2

آنچه پس از مطالعه این مبحث می آموزید

- مفاهیم کنترل پذیری و رویت پذیری
- Controllability and observability ideas
- تشخیص کنترل پذیری و رویت پذیری
- Controllability and observability detection
- کاربرد مفاهیم کنترل پذیری و رویت پذیری
- Application of controllability and observability
- تعیین ورودی در سیستمهای کنترل پذیر
- Input determination in controllable systems
- شاخص های کنترل پذیری و رویت پذیری
- Controllability and observability indices
- دو گانی کنترل پذیری و رویت پذیری
- Duality of controllability and observability
- تاثیر تبدیلات معادل بر کنترل پذیری و رویت پذیری
- Effect of equivalent transformation on controllability and observability
- تشخیص کنترل پذیری و رویت پذیری در فرم جردن
- Controllability and observability in Jordan froms
- مفاهیم کنترل پذیری و رویت پذیری در سیستمهای LTV
- Controllability and observability in LTV systems

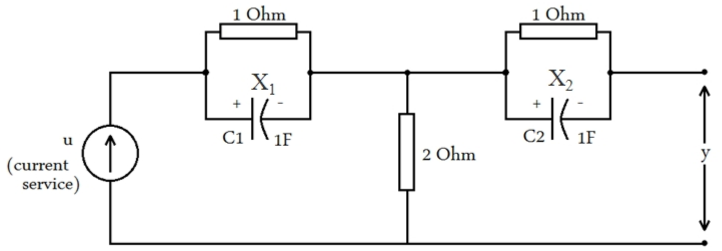
3

Introduction مقدمه

کنترل پذیری از امکان کنترل حالات معادله حالت بوسیله ی ورودی صحبت می کند.

رویت پذیری از امکان تشخیص حالات اولیه از اطلاعات خروجی و ورودی سیستم صحبت می کند.

این مفاهیم را می توان با استفاده از مدار نشان داده شده در شکل زیر تشریح کرد



X_1 در این مدار کنترل پذیر ولی رویت ناپذیر است و X_2 رویت پذیر ولی کنترل ناپذیر است که این مدار یک مدار کنترل ناپذیر و رویت ناپذیر می باشد.

4

Controllability کنترل پذیری

معادلات فضای حالت مقابل را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \qquad (I)$$

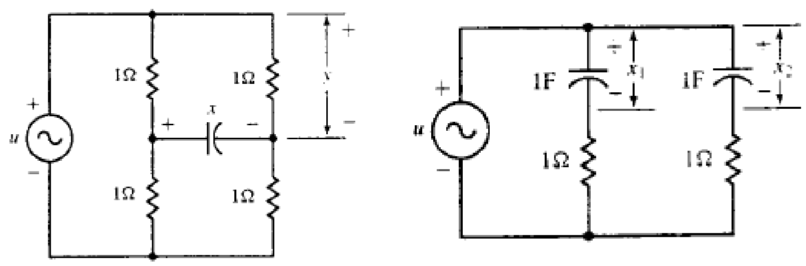
تعریف ۶-۱: معادلات (I) یا زوج (A,B) را کنترل پذیر گویند اگر برای هر حالت اولیه x_0 و برای هر حالت نهایی x_1 ، ورودی ای وجود داشته باشد که x_0 را در زمان محدود به x_1 برساند. در غیر اینصورت معادلات (I) یا زوج (A,B) را کنترل ناپذیر گویند

Definition 6-1:The state equation (I) or the pair (A,B) is said to be controllable if for any initial state x_0 and any final state x_1, there exists an input that transfers x0 to x1 in a finite time. Otherwise (I) or (A,B) is said to be uncontrollable

5

Controllability کنترل پذیری

مثال ۶-۱: شبکه های کنترل ناپذیر



مشخص است که تشخیص کنترل پذیری یا کنترل ناپذیری با توجه به ظاهر سیستم ممکن نبوده و نیاز به قضیه مناسب داریم.

6

تست کنترل پذیری Controllability test

قضیه ۶-۱: برای سیستم مقابل عبارات زیر معادلند.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

۱- زوج n-بعدی (A,B) کنترل پذیر هستند.

۲- ماتریس n×n زیر برای تمامی t > 0 معکوس پذیر است.

$$W_c(t) = \int_0^t e^{A\tau} B B' e^{A'\tau}\, d\tau = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B B' e^{A'(t-\tau)}\, d\tau$$

۳ - ماتریس کنترل پذیری n×np دارای رتبه n یا رتبه کامل سطری باشد.

$$C = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

۴- ماتریس [A-λI B] با بعد n×(n+p) به ازای هر مقدار ویژه λ ماتریس A، دارای رتبه کامل سطری باشد.

۵ - اگر علاوه اینکه تمامی مقادیر ویژه A دارای قسمت حقیقی منفی باشد، حل منحصربه فرد معادله

$$AW_c + W_cA = -BB'$$

مثبت معین باشد.

حل معادله گرامیان کنترل پذیری نامیده و بصورت مقابل قابل بیان است.

$$W_c = \int_0^\infty e^{A\tau} B B' e^{A'\tau}\, d\tau$$

7

تست کنترل پذیری Controllability test

اثبات قضیه ۶-۱: ابتدا هم ارزی (۱) و (۲) را ثابت می کنیم پس باید دو عبارت زیر را اثبات کنیم:

زوج (A,B) کنترل پذیر	$\Rightarrow$	$W_c(t)$ معکوس پذیر
$W_c(t)$ معکوس پذیر	$\Rightarrow$	زوج (A,B) کنترل پذیر

ابتدا به اثبات رابطه اول می پردازیم.

پس فرض می کنیم $W_c(t)$ معکوس پذیر است پس برای هر t_1 عبارت $W_c^{-1}(t_1)$ وجود دارد.

ادعا می کنیم با فرض x_0 و x_1 دلخواه ورودی $u(t)$ زیر x_0 را در زمان t_1 به x_1 منتقل می کند.

$$u(t) = -B' e^{A'(t_1-t)} W_c^{-1}(t_1)[e^{At_1}x_0 - x_1]$$

می دانیم که حالت از معادله زیر تبعیت می کند.

$$x(t_1) = e^{At_1}x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau$$

$$x(t_1) = e^{At_1}x_0 - \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} BB' e^{A(t_1-\tau)} W_c^{-1}(t_1)[e^{At_1}x_0 - x_1]\, d\tau$$

$$x(t_1) = e^{At_1}x_0 - W_c(t_1)W_c^{-1}(t_1)[e^{At_1}x_0 - x_1] \quad \Rightarrow \quad x(t_1) = x_1$$

8

تست کنترل پذیری Controllability test

اثبات قضیه ۶-۱(ادامه): ابتدا هم ارزی (۱) و (۲) را ثابت می کنیم پس باید دو عبارت زیر را اثبات کنیم:

زوج (A,B) کنترل پذیر $\Rightarrow$ $W_c(t)$ معکوس پذیر

$W_c(t)$ معکوس پذیر $\Rightarrow$ زوج (A,B) کنترل پذیر

حال به اثبات طرف دیگر می پردازیم.

فرض می کنیم $W_c(t)$ به ازای t_1 معکوس پذیر نباشد لذا بردار $v\neq 0$ وجود دارد که:

$$v'W_c(t_1)v = \int_0^{t_1} v'e^{A(t_1-\tau)}BB'e^{A'(t_1-\tau)}v\,d\tau = 0 \;\Rightarrow\; \int_0^{t_1}\left\| B'e^{A'(t_1-\tau)}v\right\|^2 d\tau = 0$$

پس

$$B'e^{A'(t_1-\tau)}v = 0 \; and \;\; v'e^{A(t_1-\tau)}B = 0 \quad \forall\, \tau\in[0,t_1]$$

حال چون سیستم کنترل پذیر است پس براحتی می توان از $x_0=e^{-At_1}v$ به $x1=0$ رسید لذا.

$$0 = x(t_1) = e^{At_1}e^{-At_1}v + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau$$

تناقض

$$0 = v'v + \int_0^{t_1} v'e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau = v'v + 0 = 0 \qquad \|v\|^2 = 0$$

تست کنترل پذیری Controllability test

اثبات قضیه ۶-۱(ادامه): ابتدا هم ارزی (۱) و (۲) را ثابت می کنیم پس باید دو عبارت زیر را اثبات کنیم:

زوج (A,B) کنترل پذیر $\Rightarrow$ $W_c(t)$ معکوس پذیر

$W_c(t)$ معکوس پذیر $\Rightarrow$ زوج (A,B) کنترل پذیر

حال باید هم ارزی (۲) و (۳) را ثابت می کنیم.

....

سپس باید هم ارزی (۳) و (۴) را ثابت می کنیم.

....

و در انتها کافی است هم ارزی (۵) با یکی از عبارات دیگر را ثابت می کنیم.

....

10

Controllability test تست کنترل پذیری

مثال ۶-۲: کنترل پذیری سیستم زیر را بررسی کنید.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$
$$y=[1\quad 1\quad 0]x$$

$$C=[b\quad Ab\quad A^2b]=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&-6\\1&-6&25\end{bmatrix}$$

$$|C|=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&-6\\1&-6&25\end{vmatrix}=-1$$

این نوع سیستم همواره کنترل پذیر است لذا به آن فرم کانونی کنترل پذیر گویند.

11

Controllability test تست کنترل پذیری

مثال ۶-۳: کنترل پذیری هر مود را بررسی کنید.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-2&1\\0&-1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}r(t)$$
$$y=[1\quad 1]x$$

$$|sI-A|=\begin{vmatrix}s+2&-1\\0&s+1\end{vmatrix}=(s+1)(s+2)\to\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$$

$$C=\begin{bmatrix}1&-2\\0&0\end{bmatrix}\qquad |C|=0\quad\rightarrow\quad \text{It is not completely controllable}$$

Controllability of $\lambda_1=-1$:

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&-1&1\\0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{\text{not full row rank}}\lambda_1=-1\quad\text{is not controllable}$$

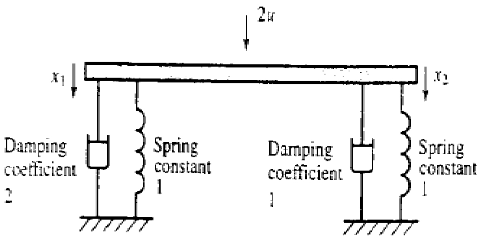
Controllability of $\lambda_2=-2$:

$$\left[\begin{array}{cc|c}0&-1&1\\0&-1&0\end{array}\right]\xrightarrow{\text{full row rank}}\lambda_2=-2\quad\text{is controllable}$$

12

تست کنترل پذیری Controllability test

مثال ۶-۴: سیستم تعلیق خودرو



سکوی نشان داده شده در شکل مقابل را در نظر بگیرید. اگر جا به جایی دو سیستم فنر از حالت تعادل را به عنوان متغیرهای حالت x_1 و x_2 انتخاب شوند، داریم:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

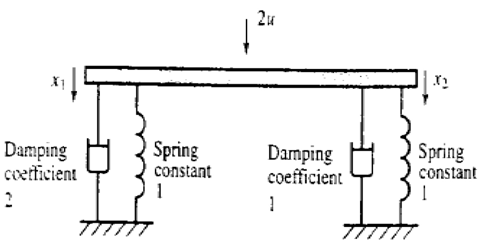
اگر جابه جایی های اولیه مخالف صفر باشد و نیرویی اعمال نشود، سکو به صورت نمایی به صفر برمی گردد. از دیدگاه نظری بی نهایت زمان لازم است تا x_iها دقیقا برابر صفر شوند.

سوال: حال آیا اگر $x_1(0) = 10$ و $x_2(0) = -1$ باشند، می توانیم نیرویی اعمال کنیم که سکو را در ۲ ثانیه به حالت تعادل برساند؟

13

تست کنترل پذیری Controllability test

مثال ۶-۴: سیستم تعلیق خودرو



$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

سوال: حال آیا اگر $x_1(0) = 10$ و $x_2(0) = -1$ باشند، می توانیم نیرویی اعمال کنیم که سکو را در ۲ ثانیه به حالت تعادل برساند؟

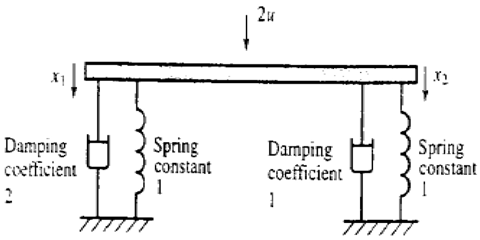
$$C = [b \quad Ab] = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.25 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad |C| \neq 0$$

لذا معادله کنترل پذیر است و برای هر شرط اولیه دلخواه یک ورودی وجود دارد بطوریکه در ۲ ثانیه یا در هر زمان معین دیگر شرط اولیه را به صفر انتقال دهد.

14

Controllability test تست کنترل پذیری

مثال ۶-۴: سیستم تعلیق خودرو



$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

عبارات $W_c(2)$ و u(t) را برای این سیستم محاسبه می کنیم:

$$W_c(2) = \int_0^2 \left(\begin{bmatrix} e^{-0.5\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-0.5\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\tau} \end{bmatrix} \right) d\tau = \begin{bmatrix} 0.2162 & 0.3167 \\ 0.3167 & 0.4908 \end{bmatrix}$$

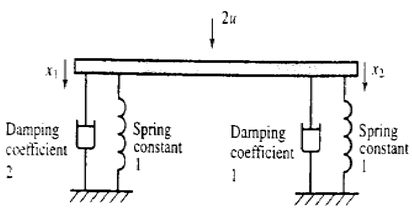
و برای t در [0 2] :

$$u(t) = -\begin{bmatrix} 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-0.5(2-t)} & 0 \\ 0 & e^{-(2-t)} \end{bmatrix} W_c^{-1}(2) \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \end{bmatrix} = -58.8e^{0.5t} + 27.96e^{t}$$

15

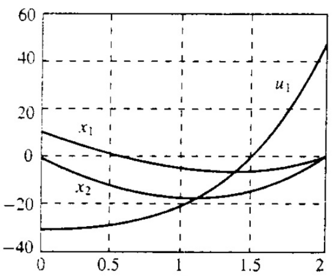
Controllability test تست کنترل پذیری

مثال ۶-۴: سیستم تعلیق خودرو



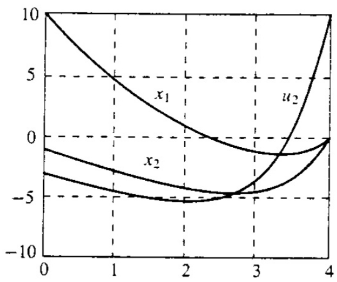
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$u(t) = -58.8e^{0.5t} + 27.96e^{t}$$



(الف)

$$t_f = 2 \Rightarrow t_f = 4$$



(ب)

16

Controllability کنترل پذیری

تاثیر تبدیلات همانندی بر کنترل پذیری

قضیه ۶-۲: کنترل پذیری با تبدیل همانندی تغییر نمی کند.

اثبات قضیه ۶-۲:

$$\dot{x} = Ax + bu \qquad \hat{A} = PAP^{-1} \quad \hat{b} = Pb \qquad \dot{w} = \hat{A}w + \hat{b}u$$

$$y = cx + du \qquad \hat{c} = cP^{-1} \quad \hat{d} = d \qquad y = \hat{c}w + \hat{d}u$$

$$C = [b \;\; Ab \;\; A^2b \;\dots\; A^{n-1}b] \longleftarrow \text{Controllability Matrix} \longrightarrow \hat{C} = [\hat{b} \;\; \hat{A}\hat{b} \;\; \hat{A}^2\hat{b} \;\dots\; \hat{A}^{n-1}\hat{b}]$$

$$\hat{C} = [\hat{b} \;\; \hat{A}\hat{b} \;\; \hat{A}^2\hat{b} \;\dots\; \hat{A}^{n-1}\hat{b}] = [Pb \;\; PAP^{-1}Pb \;\; PA^2P^{-1}Pb \;\dots\; PA^{n-1}P^{-1}Pb] =$$

$$[Pb \;\; PAb \;\; PA^2b \dots PA^{n-1}b] = P[b \;\; Ab \;\; A^2b \dots A^{n-1}b] = PC$$

$$P \text{ is nonsingular} \Rightarrow \quad \rho(\hat{C}) = \rho(C)$$

17

Controllability indices شاخص های کنترل پذیری

فرض کنید A و B ماتریس های ثابت با ابعاد مناسب باشند و ماتریس B رتبه کامل ستونی را دارا باشد. اگر B رتبه کامل ستونی را دارا نباشد، برخی از ورودی ها اضافی هستند.

اگر A و B کنترل پذیر باشند، ماتریس کنترل پذیری C دارای رتبه n است و دارای n ستون مستقل خطی است. توجه کنیم که چون C دارای np ستون است بنابراین، تعداد زیادی مجموعه nتایی از ستون مستقل خطی در C وجود دارد.

فرض کنید b_i ستون iام ماتریس B است، آنگاه C را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathrm{C} = [\; b_1 \dots b_p \mid Ab_1 \dots Ab_p \mid \dots \mid A^{n-1}b_1 \dots A^{n-1}b_p \;]$$

حال ستون های خطی مستقل خطی C را از چپ به راست جستجو می کنیم. فرض کنید μ_m تعداد ستون های مستقل خطی مربوط به b_m در C باشد، ستون های زیر در C مستقل خطی هستند.

$$b_m \,,\, Ab_p \,,\, \dots \,,\, A^{\mu_m - 1}b_m$$

واضح است که اگر C دارای رتبه n باشد داریم:

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_p = n$$

18

Controllability indices شاخص های کنترل پذیری

مجموعه $\{ \mu_1 , \mu_2 , \ldots , \mu_p \}$ را مجموعه شاخص های کنترل پذیری می نامند و

$$\mu = \max (\mu_1 , \mu_2 , \ldots , \mu_p)$$

شاخص کنترل پذیری (A,B) نامیده می شود.

یا بطور معادل، اگر (A,B) کنترل پذیر باشند، شاخص کنترل پذیری کوچکترین عدد صحیحی است به طوریکه

$$\rho(C_\mu) = \rho([B \quad AB \quad \ldots \quad A^{\mu-1}B]) = n$$

19

Controllability indices شاخص های کنترل پذیری

اکنون یک محدوده برای μ مشخص می کنیم. اگر داشته باشیم: $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_p$

آنگاه داریم: $$n/p \le \mu$$

اگر تمامی μm به جز یکی برابر یک باشد، آنگاه بزرگترین مقدار ممکن برای شاخص کنترل پذیری عبارتست از

$$\mu = n - p + 1$$

فرض کنید $\bar{n}$ درجه چند جمله ای مینیمال باشد، آنگاه بنابه تعریف، یک دسته αi وجود دارد بطوریکه

$$A^{\bar{n}} = \alpha_1 A^{\bar{n}-1} + \alpha_2 A^{\bar{n}-2} + \ldots + \alpha_{\bar{n}} I$$

که در نتیجه $A^{\bar{n}}B$ را می توان بر حسب ترکیب خطی بردارهای زیر بیان نمود

$$\{ B , AB , \ldots , A^{\bar{n}-1}B \}$$

بنابراین نتیجه می گیریم که

$$n/p \le \mu \le \min(\bar{n}, n-p+1)$$

20

Controllability indices شاخص های کنترل پذیری

قضیه ۶-۳: زوج (A,B) که B دارای رتبه p است، کنترل پذیر است اگر و تنها اگر ماتریس زیر دارای رتبه n باشد.

$$C_{n-p+1} := [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-p}B]$$

مثال ۶-۵: معادله حالت زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} U \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} X$$

حال ماتریس کنترل پذیری سیستم با توجه به قضیه ۶-۳ را تشکیل می دهیم

$$[B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

این ماتریس دارای رتبه ۴ می باشد، لذا کنترل پذیر است. به سادگی می توان نشان داد که شاخص های کنترل پذیری برابر ۲ و ۲، و شاخص کنترل پذیری برابر ۲ است.

21

Observability رویت پذیری

معادلات فضای حالت مقابل را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \qquad (I)$$

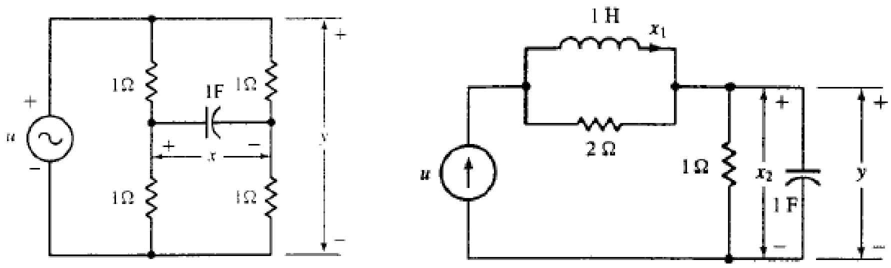
تعریف ۶-۲: معادلات (I) یا زوج (A,C) را رویت پذیر گویند اگر برای هر شرط اولیه x_0 زمان محدود $t_1>0$، وجود داشته باشد که اطلاعات ورودی u و خروجی y در بازه $[0,t_1]$ برای محاسبه منحصر بفرد x_0 کافی باشد در غیر اینصورت سیستم را رویت ناپذیر گویند.

Definition 6- 2:The state equation (I) or the pair (A,C) is said to be observable if for any unknown initial state x_0, there exists a finite time $t_1 > 0$ such that the knowledge of the input u and the output y over $[0,t_1]$ suffices to determine Uniquely the initial state x_0. Other wise, the equation is unobservable.

22

Observability رویت پذیری

مثال ۶-۶: شبکه های رویت ناپذیر



مشخص است که تشخیص رویت پذیری یا رویت ناپذیری با توجه به ظاهر سیستم ممکن نبوده و نیاز به قضیه مناسب داریم.

23

Observability test تست رویت پذیری

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

قضیه ۶-۴: معادله حالت مقابل رویت پذیر است اگر و تنها اگر ماتریس n-بعدی زیر برای تمامی $t > 0$ معکوس پذیر باشد.

$$w_o(t) = \int_0^t e^{A'\tau}\, C'\, C\, e^{A\tau}\, d\tau$$

اثبات قضیه ۶-۴: باید دو عبارت زیر را اثبات کنیم:

زوج (A,C) رویت پذیر $\Rightarrow$ $W_o(t)$ معکوس پذیر

$W_o(t)$ معکوس پذیر $\Rightarrow$ زوج (A,C) رویت پذیر

ابتدا رابطه اول را اثبات می کنیم:

می دانیم:

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}\, Bu(\tau)\, d\tau + Du(t)$$

$$Ce^{At}x_0 = \bar{y}(t) = y(t) - C\int_0^t e^{A(t-\tau)}\, Bu(\tau)\, d\tau - Du(t)$$

معادله حالت رویت پذیر است اگر و تنها اگر حالت اولیه x_0 بصورت منحصربفرد از پاسخ ورودی صفر در یک بازه زمانی محدود بدست آید.

Observability test تست رویت پذیری

زوج (A,C) رویت پذیر ⇒ $W_o(t)$ معکوس پذیر

می دانیم:

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}\, Bu(\tau)\, d\tau + Du(t)$$

$$Ce^{At}x_0 = \bar{y}(t) = y(t) - C\int_0^t e^{A(t-\tau)}\, Bu(\tau)\, d\tau - Du(t)$$

معادله حالت رویت پذیر است اگر و تنها اگر حالت اولیه x(0) بصورت منحصربفرد از پاسخ ورودی صفر در یک بازه زمانی محدود بدست آید.

$$e^{A't}C'Ce^{At}x_0 = e^{A't}C'\bar{y}(t) \qquad \int_0^{t_1} e^{A'\tau}C'Ce^{A\tau}x_0 d\tau = \int_0^{t_1} e^{A'\tau}C'\bar{y}(\tau)d\tau$$

$$x_0 = W_0^{-1}(t_1)\int_0^{t_1} e^{A'\tau}C'\bar{y}(\tau)d\tau$$

حال به اثبات طرف دیگر قضیه می پردازیم:

$W_o(t)$ معکوس پذیر ⇒ زوج (A,C) رویت پذیر

Observability test تست رویت پذیری

حال به اثبات طرف دیگر قضیه می پردازیم:

$W_o(t)$ معکوس پذیر ⇒ زوج (A,C) رویت پذیر

فرض می کنیم $W_o(t)$ به ازای t_1 معکوس پذیر نباشد لذا بردار $v\neq0$ وجود دارد که:

$$v'W_o(t_1)v = \int_0^{t_1} v'e^{A'\tau}C'Ce^{A\tau}\, vd\tau = 0 \qquad \int_0^{t_1} \left\|Ce^{A\tau}\, v\right\|^2 d\tau = 0$$

پس

$$Ce^{At}\, v = 0 \ \forall\ t \in [0,t_1]$$

حال رابطه مقابل را در نظر بگیرید:

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}\, Bu(\tau)\, d\tau + Du(t)$$

دو شرط اولیه مختلف $x_0=0$ و $x_0=v$ با فرض ورودی صفر هر دو منجر به $y=0$ شده و لذا امکان تعیین منحصر بفرد x_0 وجود ندارد لذا ....

نکته: ازاین قضیه ملاحظه می کنیم که رویت پذیری تنها به ماتریس های A و C بستگی دارد. بنابراین رویت پذیری یک خاصیت از زوج (A,C) است و مستقل از B و D می باشد.

Observability test تست رویت پذیری

قضیه ۶-۵: دوگانی : زوج (A,B) کنترل پذیر است اگر و فقط اگر زوج (A´,B´) رویت پذیر باشد.

قضیه ۶-۵: دوگانی : زوج (A',C') کنترل پذیر است اگر و فقط اگر زوج (A,C) رویت پذیر باشد.

Observability test تست رویت پذیری

قضیه ۶-۶: برای سیستم مقابل عبارات زیر معادلند.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

۱- زوج n-بعدی (A,C) رویت پذیر هستند.

۲ - ماتریس n×n زیر برای تمامی t > 0 معکوس پذیر است.

$$w_o(t) = \int_0^t e^{A'\tau} C' C e^{A\tau} \, d\tau$$

۳- ماتریس رویت پذیری nq×n مقابل دارای رتبه n یا رتبه کامل ستونی باشد.

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

۴- ماتریس $\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$ با بعد (n+q)×n به ازای هر مقدار ویژه λ ماتریس A، دارای رتبه کامل ستونی باشد.

۵ - اگر علاوه اینکه تمامی مقادیر ویژه A دارای قسمت حقیقی منفی باشد، حل منحصربه فرد معادله

$$A' w_0 + w_0 A = -C'C$$

مثبت معین باشد.

حل معادله گرامیان رویت پذیری نامیده و بصورت مقابل قابل بیان است.

$$W_o = \int_0^\infty e^{A'\tau} C' C e^{A\tau} \, d\tau$$

Observability test تست رویت پذیری

مثال ۶-۷: رویت پذیری سیستم زیر را بررسی کنید.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 1 \quad 0] x$$

$$V = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -6 & -11 & -5 \end{bmatrix}$$

$$|V| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -6 & -11 & -5 \end{vmatrix} = 1(-5+11) - 1(0+6) = 0$$

پس سیستم رویت پذیر نیست

29

Observability رویت پذیری

تاثیر تبدیلات همانندی بر رویت پذیری

قضیه ۶-۷: رویت پذیری با تبدیل همانندی تغییر نمی کند.

اثبات قضیه ۶-۷:

$$\dot{x} = Ax + bu$$
$$y = cx + du$$

$$\hat{A} = PAP^{-1} \qquad \hat{b} = Pb$$
$$\hat{c} = cP^{-1} \qquad \hat{d} = d$$

$$\dot{w} = \hat{A}w + \hat{b}u$$
$$y = \hat{c}w + \hat{d}u$$

$$O = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ . \\ . \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} \longleftarrow \text{Observability Matrix} \longrightarrow \hat{O} = \begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{c}\hat{A} \\ . \\ . \\ \hat{c}\hat{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\hat{O} = OP^{-1} \qquad P \text{ is nonsingular} \Rightarrow \qquad \rho(\hat{O}) = \rho(O)$$

30

Observability indices شاخص های رویت پذیری

فرض کنید A و C ماتریس های ثابت با ابعاد مناسب باشند و ماتریس C رتبه کامل سطری (q) را دارا باشد. اگر C رتبه کامل سطری را دارا نباشد، برخی از خروجی ها را می توان بصورت یک ترکیب خطی از دیگر خروجی ها نوشت. لذا این خروجی ها حاوی اطلاعات جدیدی از سیستم نیستند و می توان آنها را حذف نمود.

اگر A و C رویت پذیر باشند، ماتریس کنترل پذیری O دارای رتبه n است و دارای n سطر مستقل خطی است. توجه کنیم که چون O دارای nq سطر است بنابراین، تعداد زیادی مجموعه nتایی سطر مستقل خطی در O وجود دارد.

مشابه حالت کنترل پذیری، اگر سطری مربوط به C_m بطور خطی به سطرهای بالاتر وابسته باشد، تمام سطرهای به از آن که به C_m مربوط می شوند نیز وابسته خواهد بود. فرض کنید v_m تعداد سطرهای مستقل خطی مربوط به C_m باشد. اگر O دارای رتبه n باشد، خواهیم داشت:

$$v_1 + v_2 + \dots + v_q = n$$

مجموعه $\{ v_1 , v_2 , \dots , v_q \}$ را شاخص های رویت پذیری می نامند

و

$$v = \max (v_1 , v_2 , \dots , v_q)$$

شاخص رویت پذیری (A,C) نامیده می شود.

Observability indices شاخص های رویت پذیری

مشابه بخش کنترل پذیری اگر (A,C) رویت پذیر باشد،

اندیس رویت پذیری کوچکترین عدد صحیحی است که

$$\rho(O_v) = \rho(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{v-1} \end{bmatrix}) = n$$

به طور دوگان با بخش کنترل پذیری داریم:

$$n/q \le v \le \min (\bar{n} , n-q+1)$$

قضیه ۶-۸: زوج n-بعدی (A,C) رویت پذیر است اگر و تنها اگر ماتریس زیر دارای رتبه n باشد.

$$O_{n-q+1} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-q} \end{bmatrix}$$

32

Canonical Decomposition تجزیه های کانونی

$$\dot{x} = Ax + bu$$
$$y = cx + du$$

Suppose $w = Px$ then

$$\dot{w} = \bar{A}w + \bar{b}u$$
$$y = \bar{c}w + \bar{d}u$$

که:

$$\bar{A} = PAP^{-1} \qquad \bar{b} = Pb$$
$$\bar{c} = cP^{-1} \qquad \bar{d} = d$$

می دانیم خاصیت های پایداری، کنترل پذیری و رویت پذیری در معادله باز نویسی شده باقی می ماند. همچنین داریم:

$$\bar{C} = PC \quad , \quad \bar{O} = OP^{-1}$$

33

Canonical Decomposition تجزیه های کانونی

$$\dot{x} = Ax + bu$$
$$y = cx + du$$

قضیه ۶-۹: معادله حالت n بعدی

فرض کنید کنترل پذیر نیست لذا

$$\rho(C) = \rho(\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}) = n_1 \prec n$$

ماتریس n×n زیر را تشکیل می دهیم:

$$P^{-1} = [q_1 \quad q_2 \quad \dots q_{n1} \; \dots . \quad q_n]$$

که n_1 ستون اول آن هر n_1 ستون از C هستند که مستقل خطی باشند و ستون های باقی مانده بگونه ای انتخاب میشوند که P ناویژه باشد. در این صورت با تبدیل تشابهی معادله بالا به معادله زیر تبدیل می کند.

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_c \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \bar{C}_c & \bar{C}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + Du$$

34

Canonical Decomposition تجزیه های کانونی

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_c\\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{A}_c & \bar{A}_{12}\\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_c\\ \bar{x}_{\bar{c}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{B}_c\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}\bar{C}_c & \bar{C}_{\bar{c}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_c\\ \bar{x}_{\bar{c}}\end{bmatrix}+Du$$

که در این معادله

$$\bar{A}_{c\ \ n_1\times n_1}\quad ,\quad \bar{A}_{\bar{c}\ \ (n-n_1)\times(n-n_1)}$$

است. و زیر معادله n_1 بعدی

$$\dot{\bar{x}}_c=\bar{A}_c\bar{x}_c+\bar{B}_c u$$

$$y=\bar{C}_c\bar{x}_c+Du$$

کنترل پذیر و دارای ماتریس انتقال یکسانی با معادله حالت اولیه است.

35

Canonical Decomposition تجزیه های کانونی

اثبات قضیه ۶-۹: با توجه به اینکه

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}q_1 & q_2 & \dots q_{n1} \dots & q_n\end{bmatrix}$$

ستون اول $\bar{A}$ عبارتست از نمایش Aq_1 بر حسب ستونهای ماتریس فوق

پس ماتریس $\bar{A}$ عبارتست از

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}\bar{A}_c & \bar{A}_{12}\\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}}\end{bmatrix}$$

ستون های $\bar{B}$ عبارتست از نمایش ستونهای B بر حسب ستونهای ماتریس فوق

پس ماتریس $\bar{B}$ عبارتست از

$$\bar{B}=\begin{bmatrix}\bar{B}_c\\ 0\end{bmatrix}$$

پس سیستم تبدیل شده عبارتست از:

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_c\\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{A}_c & \bar{A}_{12}\\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_c\\ \bar{x}_{\bar{c}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{B}_c\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}\bar{C}_c & \bar{C}_{\bar{c}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_c\\ \bar{x}_{\bar{c}}\end{bmatrix}+Du$$

36

Canonical Decomposition تجزیه های کانونی

اثبات قضیه ۶-۹(ادامه):

پس سیستم تبدیل شده عبارتست از:

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_c\\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{A}_c & \bar{A}_{12}\\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_c\\ \bar{x}_{\bar{c}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{B}_c\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}\bar{C}_c & \bar{C}_{\bar{c}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_c\\ \bar{x}_{\bar{c}}\end{bmatrix}+Du$$

از طرفی

$$\rho(C)=\rho(\begin{bmatrix}B & AB & \dots & A^{n-1}B\end{bmatrix})=n_1=\rho(\bar{C})$$

لذا داریم:

$$n_1=\rho(\bar{C})=\rho(\begin{bmatrix}\bar{B}_c & \bar{A}_c\bar{B}_c & \dots & \bar{A}_c^{n-1}\bar{B}_c\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix})=\rho(\begin{bmatrix}\bar{B}_c & \bar{A}_c\bar{B}_c & \dots & \bar{A}_c^{n_1-1}\bar{B}_c\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix})$$

$$=\rho(\begin{bmatrix}\bar{B}_c & \bar{A}_c\bar{B}_c & \dots & \bar{A}_c^{n_1-1}\bar{B}_c\end{bmatrix})=n_1$$

و این ماتریس کنترل پذیری سیستم کاهش مرتبه یافته است.

$$\dot{\bar{x}}_c=\bar{A}_c\bar{x}_c+\bar{B}_c u$$

$$y=\bar{C}_c\bar{x}_c+Du$$

Canonical Decomposition تجزیه های کانونی

اثبات قضیه ۶-۹(ادامه):

پس سیستم تبدیل شده عبارتست از:

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_c\\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{A}_c & \bar{A}_{12}\\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_c\\ \bar{x}_{\bar{c}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{B}_c\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}\bar{C}_c & \bar{C}_{\bar{c}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_c\\ \bar{x}_{\bar{c}}\end{bmatrix}+Du$$

$$\dot{\bar{x}}_c=\bar{A}_c\bar{x}_c+\bar{B}_c u$$

$$y=\bar{C}_c\bar{x}_c+Du$$

از طرفی تابع انتقال سیستمها عبارتست از:

$$G(s)=\begin{bmatrix}\bar{C}_c & \bar{C}_{\bar{c}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}sI-\bar{A}_c & \bar{A}_{12}\\ 0 & sI-\bar{A}_{\bar{c}}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\bar{B}_c\\ 0\end{bmatrix}+D$$

$$G(s)=\begin{bmatrix}\bar{C}_c & \bar{C}_{\bar{c}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(sI-\bar{A}_c)^{-1} & M\\ 0 & (sI-\bar{A}_{\bar{c}})^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{B}_c\\ 0\end{bmatrix}+D$$

$$G(s)=\bar{C}_c(sI-\bar{A}_c)^{-1}\bar{B}_c+D$$

Canonical Decomposition تجزیه های کانونی

مثال ۶-۸:معادله حالت زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}u \quad , \quad y=\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}x$$

رتبه ماتریس B برابر ۲ می باشد. با توجه به

$$\rho(C_2)=\rho([B \quad AB])=\rho(\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&0\\0&1&1&1\end{bmatrix})=2\prec 3$$

پس این سیستم کنترل پذیر نمی باشد. با انتخاب :

$$P^{-1}=Q=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$\dot{\bar{x}}=\left[\begin{array}{cc:c}1&0&0\\1&1&0\\\hdashline 0&0&1\end{array}\right]\bar{x}+\left[\begin{array}{cc}1&0\\0&1\\\hdashline 0&0\end{array}\right]u$$

$$y=\left[\begin{array}{cc:c}1&2&1\end{array}\right]\bar{x}$$

سیستم جدید عبارتست از:

$$\dot{\bar{x}}_c=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\bar{x}_c+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}\bar{x}_c$$

39

Canonical Decomposition تجزیه های کانونی

قضیه ۶-۱۰: معادله حالت n بعدی

$$\dot{x}=Ax+bu$$
$$y=cx+du$$

فرض کنید رویت پذیر نیست لذا

$$\rho(O)=\rho(\begin{bmatrix}C\\CA\\\vdots\\CA^{n-1}\end{bmatrix})=n_2<n$$

ماتریس n×n مقابل را تشکیل می دهیم:

$$P=\begin{bmatrix}p_1\\\vdots\\p_{n_2}\\\vdots\\p_n\end{bmatrix}$$

که n_2 سطر اول هر n_2 سطر مستقل خطی از ماتریس O است، و سطرهای باقی مانده را می توان تا وقتی که P ناویژه باشد به دلخواه انتخاب نمود.
در این صورت با تبدیل تشابهی معادله حالت را به سیستم زیر تبدیل می کنیم.

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_o\\\dot{\bar{x}}_{\bar{o}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{A}_o&0\\\bar{A}_{21}&\bar{A}_{\bar{o}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_o\\\bar{x}_{\bar{o}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{B}_o\\\bar{B}_{\bar{o}}\end{bmatrix}u \quad , \quad y=\begin{bmatrix}\bar{C}_o&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_o\\\bar{x}_{\bar{o}}\end{bmatrix}$$

40

Canonical Decomposition تجزیه های کانونی

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_o \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{o}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{A}_o & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{\bar{o}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_o \\ \bar{x}_{\bar{o}}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\bar{B}_o \\ \bar{B}_{\bar{o}}\end{bmatrix}u \quad , \quad y = \begin{bmatrix}\bar{C}_o & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_o \\ \bar{x}_{\bar{o}}\end{bmatrix}$$

که در این معادله

$$\bar{A}_o \quad {}_{n_2\times n_2} \qquad \bar{A}_{\bar{o}} \quad {}_{(n-n_2)\times(n-n_2)}$$

است. و زیر معادله n_2 بعدی

$$\dot{\bar{x}}_o = \bar{A}_o\,\bar{x}_o + \bar{B}_o\,u$$
$$\bar{y} = \bar{C}_o\,\bar{x}_o + Du$$

رویت پذیر و دارای ماتریس انتقال یکسانی با معادله حالت اولیه است.

اثبات قضیه ۶-۱۰: مشابه قضیه قبل

Canonical Decomposition تجزیه های کانونی

قضیه ۶-۱۱: هر معادله از فضای حالت را می توان با یک تبدیل تشابهی به شکل کانونیکال زیر در آورد.

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_{co} \\ \dot{\bar{x}}_{c\bar{o}} \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}o} \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{A}_{co} & 0 & \bar{A}_{13} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{c\bar{o}} & \bar{A}_{23} & \bar{A}_{24} \\ 0 & 0 & \bar{A}_{\bar{c}o} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A}_{43} & \bar{A}_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_{co} \\ \bar{x}_{c\bar{o}} \\ \bar{x}_{\bar{c}o} \\ \bar{x}_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\bar{B}_{co} \\ \bar{B}_{c\bar{o}} \\ 0 \\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}\bar{C}_{co} & 0 & \bar{C}_{\bar{c}o} & 0\end{bmatrix}\bar{x} + Du$$

که در آن

$\bar{x}_{co}$ = *Controllable and observable*

$\bar{x}_{c\bar{o}}$ = *Controllable but not observable*

$\bar{x}_{\bar{c}o}$ = *Observable but not controllable*

$\bar{x}_{\bar{c}\bar{o}}$ = *Neither observable nor controllable*

Canonical Decomposition تجزیه های کانونی

قضیه ۶-۱۱: هر معادله از فضای حالت را می توان با یک تبدیل تشابهی به شکل کانونیکال زیر در آورد.

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_{co} \\ \dot{\bar{x}}_{c\bar{o}} \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}o} \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{co} & 0 & \bar{A}_{13} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{c\bar{o}} & \bar{A}_{23} & \bar{A}_{24} \\ 0 & 0 & \bar{A}_{\bar{c}o} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A}_{43} & \bar{A}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{co} \\ \bar{x}_{c\bar{o}} \\ \bar{x}_{\bar{c}o} \\ \bar{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_{co} \\ \bar{B}_{c\bar{o}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \bar{C}_{co} & 0 & \bar{C}_{\bar{c}o} & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + Du$$

و معادله حالت کنترل پذیر و رویت پذیر عبارتست از:

$$\dot{\bar{x}}_{co} = \bar{A}_{co}\bar{x}_{co} + \bar{B}_{co}u$$

$$\bar{y} = \bar{C}_{co}\bar{x}_{co} + Du$$

43

Controllabiltiy and Observability in Jordan Form

کنترل پذیری و رویت پذیری در فرم جردن

کنترل پذیری و رویت پذیری تحت هر تبدیل تشابهی ثابت است. اگر یک معادله به فرم جردن تبدیل شود، در این صورت شرایط کنترل پذیری و رویت پذیری یصورت ساده اغلب می توان بصورت خیلی ساده بررسی کرد. معادله حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = Jx + Bu \qquad (III)$$

$$y = cx$$

که J به فرم جردن است، برای بررسی ساده تر، فرض می کنیم که J تنها دو مقدار ویژه متمایز λ_1 و λ_2 دارد و می توان به صورت زیر نوشت.

$$J = diag\,(J_1\,,\,J_2\,)$$

در اینجا فرض می کنیم که J_1 بلوک وابسته به λ_1 و J_2 بلوک وابسته به λ_2 می باشد. برای بررسی ساده تر فرض می کنیم که J_1 دارای سه بلوک جردن و J_2 دارای دو بلوک جردن است یا

$$J_1 = diag\,(J_{11}\,,\,J_{12}\,,\,J_{13}\,) \qquad J_2 = diag\,(J_{21}\,,\,J_{22}\,)$$

44

Controllabiltiy and Observability in Jordan Form

کنترل پذیری و رویت پذیری در فرم جردن

سطری از B را که به آخرین سطر از **Jij** مربوط می شود با $\mathbf{b}_{lij}$ نشان می دهیم ستونی از C را که به اولین ستون از **Jij** مربوط می شود با $\mathbf{c}_{fij}$ مشخص می کنیم.

قضیه ۶-۱۲:

۱- معادله حالت (III) کنترل پذیر است اگر و فقط اگر سه بردار سطری

$$\{\ b_{l11}\ ,\ b_{l12}\ ,\ b_{l13}\ \}$$

و دو بردار

$$\{\ b_{l21}\ ,\ b_{l22}\ \}$$

نسبت به یکدیگر مستقل خطی باشند.

۲- معادله حالت (III) رویت پذیر است اگر و فقط اگر سه بردار ستونی

$$\{\ c_{f11}\ ,\ c_{f12}\ ,\ c_{f13}\ \}$$

و دو بردار ستونی

$$\{\ c_{f21}\ ,\ c_{f22}\ \}$$

نسبت به یکدیگر مستقل خطی باشند.

45

Controllabiltiy and Observability in Jordan Form

کنترل پذیری و رویت پذیری در فرم جردن

نکته ۱: اگر معادله حالتی به شکل جردن باشد، کنترل پذیری متغیرهای حالت مربوط به یک مقدارویژه را می توان مستقل از کنترل پذیری سایر متغیرهای حالت، که مربوط به مقادیر ویژه متفاوتی هستند، بررسی کرد.

نکته ۲: کنترل پذیری آن متغیرهای حالتی که مربوط به یک مقدار ویژه هستند فقط به آن سطرهایی از B وابسته است که مربوط به اخرین سطرهای بلوک های جردن آن مقدار ویژه می باشند. سایر سطرهای B در تعیین کنترل پذیری هیچ نقشی ایفا نمی کند.

نکته ۳: توضیحات مشابه در مورد مشاهده پذیری قابل بیان است به جر اینکه آن ستون هایی از C که مربوط به اولین ستون های بلوک های جردن هستند رویت پذیری را تعیین می کنند.

46

Controllabiltiy and Observability in Jordan Form

کنترل پذیری و رویت پذیری در فرم جردن

مثال ۶-۹: معادله حالت زیر را که به شکل جردن است را در نظر بگیرید.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} x$$

معادله حالت سیستم کنترل پذیر است. چرا؟

معادله حالت سیستم رویت پذیر نیست. چرا؟

47

Controllabiltiy and Observability in Jordan Form

کنترل پذیری و رویت پذیری در فرم جردن

قضیه ۶-۱۳: فرم جردن معادله تک ورودی کنترل پذیر است، اگر و تنها اگر متناظر با هر مقدار ویژه، تنها یک بلوک موجود بوده و درایه بردار b متناظر با آخرین سطر از بلوک جردن متناظر مخالف صفر باشد.

قضیه ۶-۱۴: فرم جردن معادله تک خروجی رویت پذیر است، اگر و تنها اگر متناظر با هر مقدار ویژه، تنها یک بلوک موجود بوده و درایه بردار c متناظر با اولین ستون از بلوک جردن متناظر مخالف صفر باشد.

48

Controllabiltiy and Observability in Jordan Form

کنترل پذیری و رویت پذیری در فرم جردن

مثال ۶-۱۰: معادله حالت زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x$$

معادله حالت سیستم کنترل پذیر نیست. چرا؟

معادله حالت سیستم رویت پذیر است. چرا؟

49

Controllabiltiy and Observability in LTV Systems

کنترل پذیری و رویت پذیری در سیستمهای LTV

معادله حالت n-بعدی، p ورودی و q خروجی را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

تعریف ۶-۳: معادلات حالت فوق را در t_0 کنترل پذیر گویند ، اگر یک زمان محدود $t_1 > t_0$ وجود داشته باشد که برای هر $x(t_0) = x_0$ و هر x_1، یک ورودی ای وجود داشته باشد که x_0 را به x_1 در زمان t_1 انتقال دهد. در غیر این صورت معادله حالت در t_0 کنترل ناپذیر می باشد.

تذکر: در حالت تغییر ناپذیر با زمان اگر یک معادله حالت کنترل پذیر باشد، آنگاه در هر t_0 و برای هر $t_1 > t_0$ کنترل پذیر است؛ بنابراین نیازی به مشخص کردن t_0 و t_1 نیست. در حالت متغیر با زمان مشخص کردن t_0 و t_1 لازم است.

50

Controllabiltiy and Observability in LTV Systems

کنترل پذیری و رویت پذیری در سیستمهای LTV

قضیه ۶-۱۵: زوج n-بعدی $(A(t) , B(t))$ در زمان t_0 کنترل پذیر است، اگر و فقط اگر یک زمان محدود $t_1 > t_0$ وجود داشته باشد در صورتی که ماتریس n-بعدی زیر معکوس پذیر باشد.

$$W_c(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,\tau)\, B(\tau)\, B'(\tau)\, \Phi'(t_1,\tau)\, d\tau$$

عبارت $\Phi(t,\tau)$ در این رابطه ماتریس گذار حالت $\dot{x} = A(t)x$ است.

اثبات قضیه ۶-۱۵: باید دو عبارت زیر را اثبات کنیم:

زوج $(A(t),B(t))$ کنترل پذیر $\Rightarrow$ $W_o(t_0,t_1)$ معکوس پذیر

$W_o(t_0,t_1)$ معکوس پذیر $\Rightarrow$ زوج $(A(t),B(t))$ کنترل پذیر

ابتدا رابطه اول را اثبات می کنیم: چون $W_c(t_0,t_1)$ معکوس پذیر است پس برای هر t_1 عبارت $W_c^{-1}(t_0,t_1)$ وجود دارد. ادعا می کنیم با فرض x_0 و x_1 دلخواه ورودی $u(t)$ زیر x_0 را در زمان t_1 به x_1 منتقل می کند.

$$u(t) = -B'(t)\Phi'(t_1,t)W_c^{-1}(t_0,t_1)\left[\Phi(t_1,t_0)x_0 - x_1\right]$$

51

Controllabiltiy and Observability in LTV Systems

کنترل پذیری و رویت پذیری در سیستمهای LTV

اثبات قضیه ۶-۱۵(ادامه) :

زوج $(A(t),B(t))$ کنترل پذیر $\Rightarrow$ $W_o(t_0,t_1)$ معکوس پذیر

$W_o(t_0,t_1)$ معکوس پذیر $\Rightarrow$ زوج $(A(t),B(t))$ کنترل پذیر

ابتدا رابطه اول را اثبات می کنیم: چون $W_c(t_0,t_1)$ معکوس پذیر است پس برای هر t_1 عبارت $W_c^{-1}(t_0,t_1)$ وجود دارد. ادعا می کنیم با فرض x_0 و x_1 دلخواه ورودی $u(t)$ زیر x_0 را در زمان t_1 به x_1 منتقل می کند.

$$u(t) = -B'(t)\Phi'(t_1,t)W_c^{-1}(t_0,t_1)\left[\Phi(t_1,t_0)x_0 - x_1\right]$$

می دانیم که حالت از معادله زیر تبعیت می کند.

$$x(t_1) = \Phi(t_1,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_1,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau$$

$$= \Phi(t_1,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_1,\tau)B(\tau)B'(\tau)\Phi'(t_1,\tau)W_c^{-1}(t_0,t_1)[\Phi(t_1,t_0)x_0 - x_1]\,d\tau$$

$$= \Phi(t_1,t_0)x_0 + W_c(t_0,t_1)W_c^{-1}(t_0,t_1)[\Phi(t_1,t_0)x_0 - x_1] \Rightarrow x(t_1) = x_1$$

52

Controllabiltiy and Observability in LTV Systems

کنترل پذیری و رویت پذیری در سیستمهای LTV

اثبات قضیه ۶-۱۵(ادامه) :

زوج (A(t),B(t)) کنترل پذیر $\Rightarrow$ $W_o(t_0,t_1)$معکوس پذیر

$W_o(t_0,t_1)$معکوس پذیر $\Rightarrow$ زوج (A(t),B(t)) کنترل پذیر

حال طرف دیگر رابطه را اثبات می کنیم:

فرض می کنیم $W_c(t_0,t_1)$ به ازای t_1 معکوس پذیر نباشد لذا بردار $v\neq 0$ وجود دارد که:

$$v'W_c(t_0,t_1)v=\int_{t_0}^{t_1}v'\Phi(t_1,\tau)B(\tau)B'(\tau)\Phi'(t_1,\tau)v\,d\tau=0$$

پس
$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_1}\left\|B'\Phi'(t_1,\tau)v\right\|^2d\tau=0$$

$$B'(\tau)\Phi'(t_1,\tau)v=0 \; and \;\; v'\Phi(t_1,\tau)B(\tau)=0 \quad \forall\, \tau\in[t_0,t_1]$$

حال چون سیستم کنترل پذیر است پس براحتی می توان از $x_0=\Phi(t_0,t_1)v$ به $x1=0$ رسید لذا.

$$0=x(t_1)=\Phi(t_1,t_0)\Phi(t_0,t_1)v+\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_1,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

تناقض
$$0=v'v+\int_{t_0}^{t_1}v'\Phi(t_1,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau=v'v+0=0 \quad \left\|v\right\|^2=0$$

Controllabiltiy and Observability in LTV Systems

کنترل پذیری و رویت پذیری در سیستمهای LTV

برای استفاده از قضیه قبل باید ماتریس گذار جالت را داشته باشیم که ممکن است در دسترس نباشد. بنابراین مطلوب این است که شرط کنترل پذیری را مستقل از $\Phi(t,\tau)$ بدست آوریم.

فرض کنیم A(t) و B(t) پیوسته بوده و (n-1) مرتبه بطور پیوسته مشتق پذیر باشند. اگر در نظر بگیریم

$$M_0(t)=B(t)$$

سپس $M_m(t)$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$M_{m+1}(t)=-A(t)M_m(t)+\frac{d}{dt}M_m(t)$$

به وضوح برای هر t_2 داریم:

$$\Phi(t_2,t)B(t)=\Phi(t_2,t)M_0(t)$$

محاسبه می کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\Phi(t_2,t)B(t)]=\frac{\partial}{\partial t}[\Phi(t_2,t)]B(t)+\Phi(t_2,t)\frac{d}{dt}B(t)$$

Controllabiltiy and Observability in LTV Systems

کنترل پذیری و رویت پذیری در سیستمهای LTV

فرض کنیم A(t) و B(t) پیوسته بوده و (n-1) مرتبه بطور پیوسته مشتق پذیر باشند. اگر در نظر بگیریم

$$M_0(t) = B(t)$$

$$M_{m+1}(t) = -A(t)M_m(t) + \frac{d}{dt}M_m(t)$$

$$\Phi(t_2,t)B(t) = \Phi(t_2,t)M_0(t)$$

محاسبه می کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\Phi(t_2,t)B(t)] = \frac{\partial}{\partial t}[\Phi(t_2,t)]B(t) + \Phi(t_2,t)\frac{d}{dt}B(t)$$

$$= -\Phi(t_2,t)A(t)M_0(t) + \Phi(t_2,t)\frac{d}{dt}M_0(t)$$

$$= \Phi(t_2,t)M_1(t)$$

Controllabiltiy and Observability in LTV Systems

کنترل پذیری و رویت پذیری در سیستمهای LTV

اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، برای $m = 0 , 1 , 2 , \ldots$ داریم:

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m}[\Phi(t_2,t)B(t)] = \Phi(t_2,t)\, M_m(t)$$

قضیه زیر شرط کافی نه لازم برای کنترل پذیر بودن معادله حالت متغیر با زمان است.

قضیه ۶-۱۶: فرض کنید A(t) و B(t) ماتریس هایی باشند که n-1 مرتبه بطور پیوسته مشتق پذیر هستند. آنگاه زوج (A(t) , B(t)) در t_0 کنترل پذیر است اگر یک زمان محدود $t_1 > t_0$ وجود داشته باشد بطوریکه

$$rank\,[M_0(t_1) \quad M_1(t_1) \quad \ldots \quad M_{n-1}(t_1)] = n$$

Controllabiltiy and Observability in LTV Systems

کنترل پذیری و رویت پذیری در سیستمهای LTV

قضیه ۶-۱۶: فرض کنید $A(t)$ و $B(t)$ ماتریس هایی باشند که n-1 مرتبه بطور پیوسته مشتق پذیر هستند. آنگاه زوج $(A(t) , B(t))$ در t_0 کنترل پذیر است اگر یک زمان محدود $t_1 > t_0$ وجود داشته باشد بطوریکه

$$rank\,[M_0(t_1) \quad M_1(t_1) \quad \ldots \quad M_{n-1}(t_1)] = n$$

اثبات قضیه ۶-۱۶: نشان می دهیم که اگر رتبه ماتریس فوق برابر n باشد در اینصورت $W_c(t_0,t)$ برای تمام $t \geq t_1$ غیر منفرد است.

فرض کنید که $W_c(t_0,t_2)$ برای $t_2 \geq t_1$ منفرد است نشان می دهیم که این امر به تناقض می رسد.

$$v'W_c(t_0,t_2)\,v = \int_{t_0}^{t_2} v'\Phi(t_2,\tau)\,B(\tau)\,B'(\tau)\Phi'(t_2,\tau)\,v\,d\tau = 0$$

پس

$$\Rightarrow \quad \int_{t_0}^{t_2} \left\| B'\Phi'(t_2,\tau)\,v \right\|^2 d\tau = 0$$

$$B'(\tau)\Phi'(t_2,\tau)v = 0 \;\; and \;\; v'\Phi(t_2,\tau)B(\tau) = 0 \quad \forall\, \tau \in [t_0,t_2]$$

با مشتق گیری از رابطه نسبت به τ و قرار دادن t_1 بجای آن داریم:

$$v'\Phi(t_2,\tau)[M_0(t_1) \quad M_1(t_1) \quad \ldots \quad M_{n-1}(t_1)] = 0$$

تناقض

57

Controllabiltiy and Observability in LTV Systems

کنترل پذیری و رویت پذیری در سیستمهای LTV

مثال ۶-۱۱: معادله حالت مقابل را در نظر بگیرید.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} t & -1 & 0 \\ 0 & -t & t \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

حال داریم:

$$M_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad M_1 = -AM_0 + \frac{d}{dt}M_0 = -\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} \qquad M_2 = -AM_1 + \frac{d}{dt}M_1 = \begin{bmatrix} -t \\ t^2 \\ t^2-1 \end{bmatrix}$$

$$|\,M_0 \quad M_1 \quad M_2\,| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -t \\ 1 & 0 & t^2 \\ 1 & -t & t^2-1 \end{vmatrix} = t^2+1$$

که دترمینان ماتریس برای تمامی t ها یک ماتریسی معکوس پذیر است. بنابراین معادله در هر t کنترل پذیر است.

58

Controllabiltiy and Observability in LTV Systems

کنترل پذیری و رویت پذیری در سیستمهای LTV

مثال۶-۱۲: فرض کنید

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad (I)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} e^{t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} u \qquad (II)$$

معادلات حالت (I) تغییر ناپذیر با زمان است و بر اساس قضیه مربوطه (I) کنترل پذیر است.

معادله حالت (II)تغییر پذیر با زمان است، دو درایه ماتریس B برای تمامی t غیر صفر است و ممکن است به طرف این نتیجه کشیده شویم که این معادله کنترل پذیر است. ولی قابل قبول نیست.

$$M_0 = \begin{bmatrix} e^{t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} \qquad M_1 = -AM_0 + \frac{d}{dt} M_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \rho([M_0 \quad M_1]) = 1 < 2$$

پس ....

59

Controllabiltiy and Observability in LTV Systems

کنترل پذیری و رویت پذیری در سیستمهای LTV

معادله حالت n-بعدی، p ورودی و q خروجی را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$
$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

تعریف ۶-۳ : معادلات حالت فوق را در t_0 رویت پذیر گویند ، اگر یک زمان محدود $t_1 > t_0$ وجود داشته باشد که برای هر $x(t_0) = x_0$ اطلاعات ورودی و خروجی در بازه زمانی $[t_0,t_1]$ برای محاسبه منحصر بفرد x_0 کافی باشد.

60

Controllabiltiy and Observability in LTV Systems

کنترل پذیری و رویت پذیری در سیستمهای LTV

قضیه ۶-۱۷: زوج (A(t) , C(t)) در زمان t_0 رویت پذیر است اگر و فقط اگر یک زمان محدود $t_1 > t_0$ وجود داشته باشد بطوریکه ماتریس n-بعدی زیر معکوس پذیر باشد.

$$W_o(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi'(\tau,t_0)C'(\tau)C(\tau)\Phi(\tau,t_0)\,d\tau$$

قضیه ۶-۱۸: فرض کنید A(t) و C(t) ماتریس هایی باشند که n-1 مرتبه بطور پیوسته مشتق پذیر هستند.

آنگاه زوج n-بعدی (A(t) , C(t)) در t_0 رویت پذیر است اگر یک زمان محدود $t_1 > t_0$ وجود داشته باشد

بطوریکه

$$rank \begin{bmatrix} N_0(t_1) \\ N_1(t_1) \\ \vdots \\ N_{n-1}(t_1) \end{bmatrix} = n$$

که در اینجا

$$N_0(t) = C(t), \qquad N_{m+1}(t) = N_m(t)A(t) + \frac{d}{dt}N_m(t)$$

Exercises تمرینها

۶-۴ اندیس کنترل پذیری و اندیس رویت پذیری سیستم مقابل را تعیین کنید.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} x$$

۶-۵ اندیس کنترل پذیری و اندیس رویت پذیری سیستم مقابل را تعیین کنید.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

۶-۶ اندیس کنترل پذیری سیستم مقابل را تعیین کنید. I ماتریس واحد است.

$$\dot{x} = Ax + Iu$$

Exercises
تمرینها

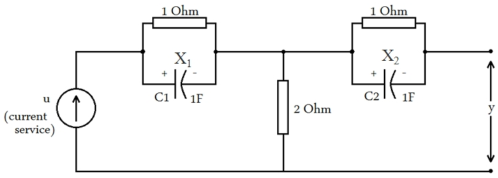
۶-۱ آیا معادلات حالت مقابل کنترل پذیر است؟ رویت پذیر چطور؟

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} x$$

۶-۲ آیا معادلات حالت مقابل کنترل پذیر است؟ رویت پذیر چطور؟

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

۶-۳ معادلات حالت سیستم مقابل را بنویسید.
کنترل پذیری و رویت پذیری سیستم را بررسی کنید.



63

Exercises
تمرینها

۶-۷ سیستم مقابل را به یک سیستم کنترل پذیر کاهش مرتبه دهید.
آیا سیستم حاصله رویت پذیر است؟

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

۶-۸ سیستم تمرین ۶-۳ را به یک سیستم کنترل پذیر و رویت پذیر کاهش مرتبه دهید.

۶-۹ سیستم زیر را به یک سیستم کنترل پذیر و رویت پذیر کاهش مرتبه دهید.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

64

Exercises تمرینها

۶-۱۰ در فرم جردن مقابل کنترل پذیری و رویت پذیر سیستم را بررسی کنید.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}2&1&0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0&0\\0&0&2&0&0&0&0\\0&0&0&2&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2&1&0\\2&1&1\\1&1&1\\3&2&1\\-1&0&1\\1&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}2&2&1&3&-1&1&1\\1&1&1&2&0&0&0\\0&1&1&1&1&1&0\end{bmatrix}x$$

65

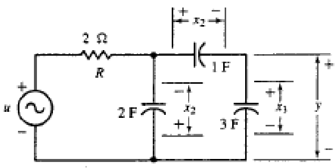
Exercises تمرینها

۶-۱۱ در سیستم زیر آیا می توان ضرایب ماتریس B و C را بگونه ای تنظیم کرد که سیستم کنترل پذیر باشد؟ رویت پذیر چطور؟

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\\b_{31}&b_{32}\\b_{41}&b_{42}\\b_{51}&b_{52}\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}&c_{14}&c_{15}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}&c_{24}&c_{25}\\c_{31}&c_{32}&c_{33}&c_{34}&c_{35}\end{bmatrix}x$$

۶-۱۲ معادلات حالت دو بعدی و سه بعدی برای سیستم مقابل بدست آورده و کنترل پذیری و رویت پذیری هر یک را بررسی کنید



66

Exercises
تمرینها

۶-۱۳ کنترل پذیری و رویت پذیری سیستم مقابل را بررسی کنید.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & t\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}x$$

۶-۱۴ کنترل پذیری و رویت پذیری سیستم مقابل را بررسی کنید.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ e^{-t}\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}0 & e^{-t}\end{bmatrix}x$$

67

Answers to selected problems

جواب ۶-۲: کنترل پذیر و رویت پذیر

جواب ۶-۳: نه کنترل پذیر و نه رویت پذیر

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}0 & -1\end{bmatrix}x+2u$$

جواب ۶-۸: y(t)=2u(t)

جواب ۶-۱۰: کنترل پذیر و رویت ناپذیر

جواب ۶-۱۴: کنترل ناپذیر در تمام t و رویت پذیر در تمام t

68