# پاسخ نامه‌ی تشریحی

# آزمون مرحله اول المپیاد ریاضی

## دوره ۳۵ سال ۹۵


## به قلم:

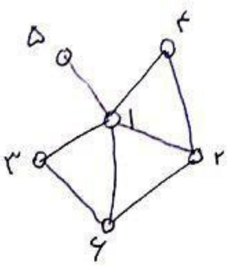
گروه آموزشی لاندا

دکتر علیرضا علیپور

محی‌الدین متوصل

ایمان مقصودی

**سوال ۱-** گزینه ۲. گراف بخش‌پذیری اعداد ۱ تا ۶ به صورت مقابل است.

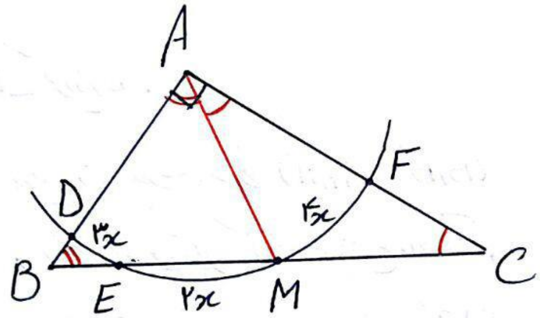



باید تعداد مسیرهای همیلتنی (هم‌آنها) این گراف را به دست آوریم. چون درجه رأس ۵ در این گراف برابر ۱ است، پس به ناچار مسیر را باید از این رأس شروع کنیم. با توجه به نمودار درختی زیر تعداد مسیرهای همیلتنی گراف برابر ۲ است.

$$5 - 1 \begin{cases} 4 - 2 - 6 - 3 \\ 3 - 6 - 2 - 4 \end{cases}$$

نتیجه می‌گیریم تعداد جایگشت‌های اعداد ۱ تا ۶ به طوری که از بین هر دو عدد مجاور یکی بر دیگری بخش‌پذیر باشد برابر ۴ است، زیرا هر مسیر همیلتنی ۲ جایگشت به ما می‌دهد، مثلاً جایگشت‌های ۳،۶،۲،۴،۱،۵ و ۵،۱،۴،۲،۶،۳ از یک مسیر به دست می‌آیند.

**سوال ۲-** گزینه ۵.




می‌توان فرض کرد:

$$\widehat{DE}=3x,\ \widehat{EM}=2x,\ \widehat{MF}=4x$$

$$\longrightarrow \widehat{DF}=9x=B\hat{A}C=90^\circ$$

$$\longrightarrow x=10^\circ$$

از آنجا که $M$ وسط $BC$ است پس:

$$AM=BM=CM$$

$$\longrightarrow \hat{B}=B\hat{A}M=5x=50^\circ,\quad \hat{C}=M\hat{A}C=4x=40^\circ$$

$$\longrightarrow \hat{B}-\hat{C}=10^\circ$$

بنابراین اختلاف زوایه $B$ و $C$ برابر $10^\circ$ است.

**سوال۳-** گزینه ۳. طبق مثال زیر جناب خان تا هفته بیستم می‌تواند برای گاوصندوق خود رمز انتخاب کند.

$$\underbrace{۱۴۰, ۱۵۰, ۱۶۰, \ldots, ۱۹۰}_{۶\ \text{هفته}}, \underbrace{۲۹۰, ۳۹۰, \ldots, ۸۹۰}_{۷\ \text{هفته}}, \underbrace{۸۹۱, ۸۹۲, \ldots, ۸۹۷}_{۷\ \text{هفته}}$$

نشان می‌دهیم جناب خان بیش از ۲۰ هفته نمی‌تواند برای گاوصندوق خود رمز انتخاب کند. توجه کنید که طبق شرط مسأله مجموع ارقام رمز هر هفته افزایش می‌یابد. همچنین در هفته اول این مجموع برابر ۵ است و در هفته پایانی این مجموع حداکثر ۲۴ = ۹+۸+۷ است (زیرا ارقام رمز سه رقم متمایزند).

پس تعداد هفته‌های مطلوب از ۲۰ = ۱+۵-۲۴ بیشتر نیست. نتیجه می‌گیریم جناب خان در هفته ۲۱ ام، یعنی ۲۰ هفته بعد از هفته اول، دیگر نمی‌تواند رمز گاوصندوقش را تغییر دهد.

**سوال٤-** گزینه ۳

گزینه ۱ غلط است زیرا می‌توان تعداد زیادی عدد گویا معرفی کرد که مقدار f روی آن‌ها ثابت باشد. یک مثال ساده اعداد گویای فراوانی است که مقدار f روی آن‌ها برابر با ۱ می‌شود. توجه کنید که

برای هر $k\in\mathbb{N}$ ، $(k+1, k)=1$ پس $f(\frac{k+1}{k}) = \frac{k+1}{k+1} = 1$ .

پس f ، یک به یک نیست.

همچنین توجه کنید که مثال های ذکرشده می‌توانند گزینه دوم را هم رد کنند. اگر f یکنوا باشد به راحتی ثابت می‌شود که اگر برای $x<y$ ، $f(x)=f(y)$ آن‌گاه برای هر t که $x<t<y$ ، $f(t)=f(x)$ . حال دقت کنید که مثلاً $f(\frac{3}{2}) = f(\frac{2}{1}) = 1$ پس برای هر t که $\frac{3}{2}<t<\frac{2}{1}$ ، $f(t)=1$ امّا به طور مثال $f(\frac{5}{3}) = \frac{5}{4} \neq 1$ $(\frac{3}{2}<\frac{5}{3}<\frac{2}{1})$ پس f یکنوا نیست؛

توضیح کوتاه‌تر این است که $\frac{5}{3}>\frac{3}{2}$ و $f(\frac{5}{3})>f(\frac{3}{2})$ پس f نزولی نیست و $\frac{5}{3}<\frac{2}{1}$ امّا $f(\frac{5}{3})>f(\frac{2}{1})$ پس f صعودی نیست. پس کلاً f یکنوا نیست.

تا الآن گزینه ۱ و ۲ و ۵ رد شده است (چون همه گزینه‌ها صحیح نیست پس گزینه ۵ غلط است) دو گزینه باقی مانده است. ثابت می‌کنیم گزینه ۴ غلط و گزینه ۳ درست است.

گزینه ۴ گزینه‌ای فریبنده است! چون در ظاهر به نظر می‌رسد که $f(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n+1} \leqslant \frac{m}{n}$

بله! نامساوی ذکر شده به علت این که مخرج n+1 بیشتر از مخرج n است درست است؛ امّا برای مقادیر مثبت m! در واقع برای مقادیر منفی m داریم (ضرب در مقادیر منفی جهت نامساوی را معکوس می‌کند!!):

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n} \Rightarrow \frac{m}{n+1} > \frac{m}{n} \Rightarrow f(\frac{m}{n}) > \frac{m}{n}$$

**ادامه سوال۴-**

حال نشان می‌دهیم تنها گزینه باقیمانده یعنی گزینه ۴ صحیح است.

یک عدد گویای دلخواه مثل $\frac{r}{s}$ را در نظر بگیرید که $r\in\mathbb{Z}$ و $s\in\mathbb{N}$ و $(r,s)=1$. ثابت می‌کنیم کسر $\frac{m}{n}$ ($(m,n)=1$ و $m\in\mathbb{N}$ و $n\in\mathbb{Z}$) موجود است که $f(\frac{m}{n})=\frac{r}{s}$.

پس باید $\frac{m}{n+1}=\frac{r}{s}$. این رابطه معادل است که $t\in\mathbb{N}$ را طوری بیابیم که $m=rt$ و $n+1=st$. در واقع لازم و کافی است که $t\in\mathbb{N}$ را طوری بیابیم که $(rt,st-1)=1$ و سپس قرار دهیم $m=rt$ و $n=st-1$. دقت کنید که $(t,st-1)=(t,-1)=1$ پس کافی است $t\in\mathbb{N}$ طوری باشد که

$$(r,st-1)=1$$

برای این کار کافی است قرار دهیم: $t=r$

در این صورت $(r,sr-1)=(r,-1)=1$. پس ادعای ما ثابت می‌شود.

**سوال۵-** گزینه ۲

$\overline{abc}=x^2$ , $\overline{(a+1)(b+2)(c+3)}=y^2$ $(x,y\in\mathbb{N})$ پس داریم:

$$x^2+123=y^2 \Rightarrow 123=(y-x)(y+x)$$

دقت کنید که تجزیه ۱۲۳ به عوامل اول $3\times 41$ است. پس با توجه به این که $y-x<y+x$ تنها حالات ممکن دو حالت زیر است (حالات دیگر را در نظر نگیریم چون مقادیر منفی $x$ را به ما می دهد اما در ابتدا ما $x$ را مثبت فرض کرده ایم)

حالت اول:

$$\begin{cases} y-x=3 \\ y+x=41 \end{cases} \Rightarrow y=22, x=19$$

کار تمام نشده است! باید چک کنیم که آیا $x^2$ و $y^2$ سه رقمی می‌شوند یا نه و اگر سه رقمی نشوند این اعداد جواب نمی دهند. در حالت ذکر شده داریم:

$$x^2=361 \ , \ y^2=484$$

که دقیقاً اعداد سه رقمی با خاصیت خواسته شده مسئله هستند.

حالت دوم:

$$\begin{cases} y-x=1 \\ y+x=123 \end{cases} \Rightarrow y=62 , x=61$$

در این حالت $x^2=3721$ که سه رقمی نیست پس این جواب قابل قبول نیست.

پس مسئله کلاً یک جواب دارد.

**سوال۶**- گزینه ۱. چون می خواهیم بزرگترین عدد کمترین مقدار ممکن را داشته باشد، پس بهترین روش برای ساختن سه عدد این است که رقم های ۱، ۲ و ۳ را در صدگان سه عدد به کار ببریم. بنابراین رقم صدگان بزرگترین عدد برابر ۳ است و چون بقیه ارقام باید از بین ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ انتخاب شوند، کوچکترین مقدار ممکن برای A، ۳۴۵ است.

۱۸۹, ۲۶۷ , ۳۴۵

**سوال۷-** گزینه ۱

بررسی گزاره سوم از همه آسان‌تر است. توجه کنید که می‌دانیم حاصل ضرب هر عدد گویا و گنگ، گنگ می‌شود پس $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{Q}'$. حال توجه کنید که اگر $x \in \mathbb{Q}'$، $x = 1 \times x$ که $1 \in \mathbb{Q}$ و $x \in \mathbb{Q}'$ پس $\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q}'$ و تساوی دو مجموعه اثبات می‌شود.

گزاره دوم هم صحیح است. ابتدا واضح است که $\{\sqrt{2}, 5\} \otimes \mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R} - \{0\}$؛ پس برای اثبات درستی گزاره کافی است نشان دهیم هر $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ به فرم $5y$ یا $\sqrt{2}y$ است که $y \in \mathbb{Q}'$. در واقع باید نشان دهیم برای هر $x \in \mathbb{R} - \{0\}$، حداقل یکی از اعداد $\frac{x}{5}$ یا $\frac{x}{\sqrt{2}}$ گنگ است. این نکته هم ساده است زیرا برای $x \in \mathbb{Q}'$، $\frac{x}{5} \in \mathbb{Q}'$ و برای $x \in \mathbb{Q} - \{0\}$، $\frac{x}{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}'$.

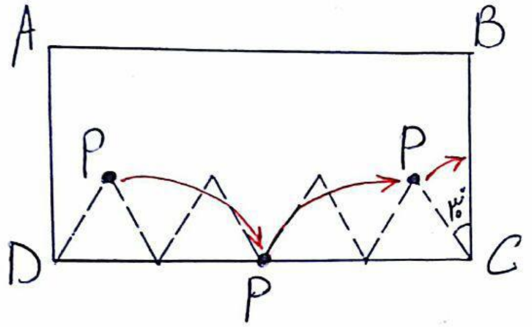
گزاره اول هم اثبات ساده‌ای دارد اما چون $\sqrt{3}$ و $\sqrt{2}$ گنگ هستند گزاره چهارم درستی گزاره اول را نتیجه می‌دهد. پس فقط گزاره چهارم را ثابت می‌کنیم تا ادعای ما در مورد درستی تمام گزاره‌ها ثابت شود.

توجه کنید که معلوم است که $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\} \otimes \mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R} - \{0\}$. پس فقط کافی است نشان دهیم که اگر $x \in \mathbb{R} - \{0\}$، آن‌گاه $x$ به فرم $\sqrt{2}y$ یا $\sqrt{3}y$ است که $y \in \mathbb{Q}'$. معادلاً باید ثابت کنیم $\frac{x}{\sqrt{3}}$ یا $\frac{x}{\sqrt{2}}$ گنگ است. برای اثبات این امر، فرض خلف می‌کنیم. پس $\frac{x}{\sqrt{3}} \in \mathbb{Q}$ و $\frac{x}{\sqrt{2}}$. پس حاصل تقسیم آن‌ها یعنی $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ هم گویا است پس ۲ برابر آن یعنی $2\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ یعنی $\sqrt{6}$ هم گویا است! اما

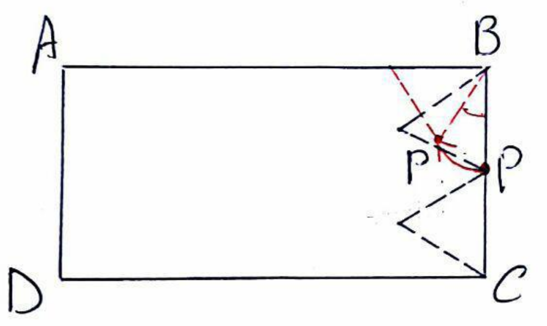
**ادامه سوال ۷-**

که داریم که چون ۶ مربع کامل نیست پس $\sqrt{6}$ گنگ است که این تناقض است؛ پس با برهان خلف ادعای ما ثابت می‌شود (توجه کنید که گزاره‌ای معروف در نظریه اعداد می‌گوید که اگر $a\in\mathbb{N}$ مربع کامل نباشد آن گاه $\sqrt{a}$ گنگ است)

**سوال۸-** نمره ۱.




- در حرکت مثلث روی طول مستطیل مطابق شکل روبرو نقطه P به اندازه $2\times120^\circ$ دوران می‌کند پس مسافت طی شده توسط آن برابر $\frac{4\pi}{3}$ می‌باشد.
- برای انتقال P روی BC این نقطه به اندازه $30^\circ$ دوران می‌کند.
- برای انتقال مثلث از BC به AB نیز $30^\circ$ دوران لازم داریم.




تا اینجا نقطه P به اندازه $\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$ مسافت پیموده در مسیر روی AB و AD نیز مسافت طی شده P مطابق قبل است یعنی در مجموع این نقطه $2(\frac{5\pi}{3})$ مسافت طی می‌کند.

**سوال۹-** گزینه ۴. با حالت بندی روی مقدار $z$ تعداد سه تایی های مرتب مطلوب را بدست می آوریم.

• اگر $z=1$، برای $x$ و $y$ به ترتیب ۸ و ۷ انتخاب داریم، پس تعداد سه تایی ها در این حالت برابر $8\times7=56$ است.

• اگر $z=2$، در این صورت حداقل یکی از $x$ و $y$ باید زوج باشند. از کل $8\times7$ انتخاب برای $x$ و $y$، در $5\times4$ حالت هر دوی $x$ و $y$ فرد هستند، پس تعداد سه تایی ها در این حالت برابر $8\times7-5\times4=36$ است.

• اگر $z=3$، در این صورت حداقل یکی از $x$ و $y$ باید مضرب ۳ باشند. از کل $8\times7$ انتخاب برای $x$ و $y$، در $6\times5$ حالت هیچ یک از $x$ و $y$ مضرب ۳ نیستند، پس تعداد سه تایی ها در این حالت برابر $8\times7-6\times5=26$ است.

• اگر $z=4$، در این صورت یا هر دوی $x$ و $y$ باید زوج باشند و یا یکی از $x$ و $y$ فرد باشد و دیگری برابر ۸. نتیجه می گیریم تعداد سه تایی ها در این حالت برابر $3\times2+2\times5=16$ است.

• در حالتی که $z=5$ یا $z=7$ هیچ سه تایی وجود ندارد.

• اگر $z=6$، در این صورت یکی از $x$ و $y$ باید زوج و دیگری باید برابر ۳ یا ۹ باشد. پس تعداد سه تایی ها در این حالت برابر $2\times3\times2=12$ است.

• اگر $z=8$ یا $z=9$ فقط سه تایی های $(2,4,8)$، $(6,4,8)$، $(4,2,8)$، $(4,6,8)$، $(3,6,9)$ و $(6,3,9)$ مطلوبند.

نتیجه می گیریم تعداد کل سه تایی های مطلوب برابر است با:

$$56+36+26+16+12+6=152$$

**سوال ۱۰-** گزینه ۳. در فرآیند گفته شده به ترتیب اعداد ۱۳۹۵، ۱۳۹۴، ... و ۶۹۸ انتخاب می‌شوند و مقسوم علیه‌های آنها حذف می‌شوند (توجه کنید که اعداد ۶۹۸ تا ۱۳۹۵ مقسوم علیه هیچ عددی نیستند و بنابراین وقتی حذف می‌شوند که خود بزرگترین عدد باقی‌مانده باشند ولی هر یک از اعداد ۱ تا ۶۹۷ مقسوم علیه حداقل یکی از اعداد ۶۹۸ تا ۱۳۹۵ هستند). نتیجه می‌گیریم آخرین عددی که خط می‌خورد یکی از مقسوم علیه‌های ۶۹۸ است. اما هر مقسوم علیه ۶۹۸، غیر از خود این عدد، مقسوم علیه حداقل یکی از اعداد ۶۹۹ تا ۱۳۹۵ است، بنابراین قبل از انتخاب ۶۹۸ به عنوان بزرگترین عدد خط‌نخورده همه آنها حذف می‌شوند. نتیجه می‌گیریم آخرین عدد حذف شده برابر ۶۹۸ است.

**سوال ۱۱-** گزینه ۴

توجه کنید که

$$a*(b*c)=a*\left(\frac{b+c}{1-bc}\right)=\frac{a+\frac{b+c}{1-bc}}{1-a\left(\frac{b+c}{1-bc}\right)}=\frac{\frac{a-abc+b+c}{1-bc}}{\frac{1-bc-ab-ac}{1-bc}}=\rightarrow$$

$$\rightarrow=\frac{a+b+c-abc}{1-ab-ac-bc}$$

طبق روابط ویت می‌دانیم که

$$\begin{cases} a+b+c=3 \\ ab+ac+bc=-2 \\ abc=-5 \end{cases}$$

پس جواب مسئله برابر می‌شود با $\frac{3-(-5)}{1-(-2)}$ یعنی همان $\frac{8}{3}$.

**سوال۱۲-** گزینه ۲

می‌خواهیم ابتدا از یک تغییر متغیر مفید برای سه عدد طبیعی برحسب ب.م.م های آن‌ها صحبت کنیم.

مثلاً خیلی از خوانندگان این راه حل می‌دانند که برای دو عدد صحیح دلخواه ناصفر $a$ و $b$ نمایش

$a=da'$ و $b=db'$ که $d=(a,b)$ و $(a',b')=1$ یک نمایش مفید

برای $a$ و $b$ هست که بسیار می‌تواند در ساده‌سازی مسائل مربوط به بخش‌پذیری و ب.م.م و ک.م.م و ... در مورد $a$ و $b$ کمک کند. سؤال این جاست که آیا مشابه چنین نمایشی برای سه عدد وجود دارد؟ پاسخ ما مثبت است.

اگر $a,b,c\in\mathbb{Z}$ ناصفر باشند ابتدا تعریف می‌کنیم: $d=(a,b,c)$.

پس داریم: $a=da',\ b=db',\ c=dc'$ که $(a',b',c')=1$.

حال می‌رویم سراغ ب.م.م های دوبه‌دوی $a'$ و $b'$ و $c'$. تعریف می‌کنیم:

$$x=(a',b') \qquad y=(a',c') \qquad z=(b',c')$$

حال توجه کنید که چون $(a',b',c')=1$ پس $z$ و $y$ و $x$ دوبه‌دو نسبت به هم اولند.

همچنین توجه کنید که

$$\begin{matrix} x\,|\,a' \\ y\,|\,a' \end{matrix} \Rightarrow [x,y]\,|\,a'$$

امّا چون $(x,y)=1$ پس $[x,y]=xy$ پس $a'=xya''$.

به طریق مشابه $b'=xzb''$ و $c'=yzc''$. دقت کنید که چون $x=(a',b')$ پس $\frac{a'}{x}$ و $\frac{b'}{x}$ نسبت به هم اولند پس $a''$ و $b''$ نسبت به هم اولند

به طریق مشابه هر سه عدد $a''$ و $b''$ و $c''$ دوبه‌دو نسبت به هم اولند.

**ادامه سوال۱۲-** پس یک نمایش جذاب برای سه عدد $a,b,c$ داریم :

$$a = dxya''$$
$$b = dxzb''$$
$$c = dyzc''$$

که $x,y,z$ دوبه دو نسبت به هم اولند و $a'',b'',c''$ هم دوبه دو نسبت به هم اولند.

حال این نمایش را برای سه عدد $a,b,c$ فرض مسئله به کار می‌بریم و فرض مسئله را به زبان این نمایش معنی می‌کنیم:

$$dxya''(dz) = dxzb''(dy) = dyzc''(dx) = 2^6\times3^8\times5^{10}$$

پس $d^2xyza'' = d^2xyzb'' = d^2xyzc'' = 2^6\times3^8\times5^{10}$

نتیجه می‌شود که $a''=b''=c''$ و چون دوبه دو نسبت به هم اولند پس همگی برابر با $1$ هستند پس $a=dxy\,,\,b=dxz\,,\,c=dyz$ که $x,y,z$ دوبه دو نسبت به هم اولند و $d^2xyz=2^6\times3^8\times5^{10}$.

پس تعداد جواب‌های مسئله برابر است با تعداد $d\in\mathbb{N}$ دلخواه و $x,y,z\in\mathbb{N}$ دوبه دو نسبت به هم اول که $d^2xyz=2^6\times3^8\times5^{10}$ ؛ زیرا به هر حالتی از چنین اعدادی یک $a,b,c$ یکتا با ویژگی‌های مسئله نسبت داده می‌شود و هر جواب مسئله هم به این فرم هست. البته باید به این نکته توجه شود که جوابی از مسئله وجود ندارد که از دو جواب برای $d,x,y,z$ ایجاد شوند یعنی امکان ندارد که جوابی از مسئله مثل $a,b,c$ موجود باشد که

$$a=dxy=d'x'y'$$
$$b=dxz=d'x'z'$$
$$c=dyz=d'y'z'$$

که $x,y,z$ دوبه دو نسبت به هم اول و $x',y',z'$ دوبه دو نسبت به هم اول باشند.

**ادامه سوال ۱۲-** زیرا در این صورت $d=(a,b,c)=d'$ (از نسبت به هم اول بودن $x,y,z$ و $x',y',z'$ استفاده می‌شود!) و حال توجه کنید که $x'=\left(\frac{a}{d'},\frac{b}{d'}\right)=\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=x$

و به طریق مشابه برابر بودن $y$ و $y'$، $z$ و $z'$ ثابت می‌شود.

پس ما نشان دادیم که دقیقاً ۱ تناظر یک به یک بین جواب‌های مسئله و چهارتایی $(d,x,y,z)$ با شرایط $x,y,z$ دو به دو نسبت به هم اول و $d^2xyz=2^6\times3^8\times5^{10}$ وجود دارد. درنتیجه برای شمردن تعداد جواب‌های معادله مسئله، تعداد چهارتایی‌های ممکن $(d,x,y,z)$ با شرایط ذکرشده را می‌شماریم.

$$d^2 \mid 2^6\times3^8\times5^{10} \Rightarrow d \mid 2^3\times3^4\times5^5$$

پس $d=2^\alpha\times3^\beta\times5^\gamma$ که $0\leq\alpha\leq3$ و $0\leq\beta\leq4$ و $0\leq\gamma\leq5$.

برای هر حالت $d$ داریم: $xyz=\frac{2^6\times3^8\times5^{10}}{d^2}$ که $x,y,z$ دو به دو نسبت به هم اولند؛ پس $x,y,z$ هیچ عامل مشترکی ندارند، درنتیجه برای شمردن تعداد حالات $x,y,z$ کافی است که ببینیم هر عامل اول $\frac{2^6\times3^8\times5^{10}}{d^2}$ در $x$ است یا در $y$ یا در $z$ یعنی ۳ حالت؛ پس تعداد حالات $x,y,z$ می‌شود ۳ به توان تعداد عوامل اول $\frac{2^6\times3^8\times5^{10}}{d^2}$. مثلاً اگر $d=2\times3^2$ چون $\frac{2^6\times3^8\times5^{10}}{(2\times3^2)^2}=2^4\times3^4\times5^{10}$، پس تعداد حالات $x,y,z$ مربوط به این مقدار $d$، $3^3$ است. امّا مثلاً اگر $d=2^3\times3^4\times5^5$ آن‌گاه چون $\frac{2^6\times3^8\times5^{10}}{d^2}=3^6$ پس تعداد حالات

**ادامه سوال ۱۲-** $x, y, z$ مرتبط با این مقدار $d$ می‌شود ۳۱.

پس با توجه به این نکات، با استفاده از یک حالت‌بندی ساده روی توان‌های عوامل $d$ تعداد حالات حساب می‌شود. گفتیم که $d=2^{\alpha}\times 3^{\beta}\times 5^{\gamma}$. در هر حالت از توان‌های $d$ تعداد حالات $x, y, z$ و در نتیجه تعداد جواب‌های مسئله در آن حالت را حساب می‌کنیم. سپس جمع تعداد مربوط به کل حالت‌ها جواب مسئله می‌شود.

حالت اول: $0 \leqslant \alpha < 3$ و $0 \leqslant \beta < 4$ و $0 \leqslant \gamma < 5$ که $3\times 4\times 5=60$ حالت

برای $d$ می‌شود که در هر کدام از این حالت $\frac{2^6\times 3^8\times 5^{10}}{d^2}$ دقیقاً ۳ عامل اول دارد پس $3^3=27$ حالت برای $x, y, z$ برای هر مقدار $d$ داریم پس کلاً $60\times 27=1620$ جواب در این حالت داریم.

حالت دوم: $\alpha=3$ و $0 \leqslant \beta < 4$ و $0 \leqslant \gamma < 5$ که $1\times 4\times 5=20$ حالت

برای $d$ می‌شود و در هر کدام از این حالات $\frac{2^6\times 3^8\times 5^{10}}{d^2}$ دقیقاً ۲ عامل اول دارد پس $3^2=9$ حالت برای $x, y, z$ برای هر مقدار $d$ داریم در نتیجه کلاً $20\times 9=180$ جواب در این حالت داریم.

برای حالات دیگر چون توضیحات مشابه است، مختصر می‌نویسیم.

حالت سوم: $0 \leqslant \alpha < 3$ و $\beta=4$ و $0 \leqslant \gamma < 5$.

تعداد جواب‌ها: $3\times 1\times 5\times 3^2=135$

حالت چهارم: $0 \leqslant \alpha < 3$ و $0 \leqslant \beta < 4$ و $\gamma=5$.

تعداد جواب‌ها: $3\times 4\times 1\times 3^2=108$

**ادامه سوال۱۲**- حالت پنجم: $\alpha=3$ , $\beta=4$ , $0\leq\gamma<5$

تعداد جواب ها: $1\times1\times5\times3^1=15$

حالت ششم: $\alpha=3$ , $0\leq\beta<4$ , $\gamma=5$ .

تعداد جواب ها: $1\times4\times1\times3^1=12$

حالت هفتم: $0\leq\alpha<3$ , $\beta=4$ , $\gamma=5$ .

تعداد جواب ها: $3\times1\times1\times3^1=9$

حالت هشتم: $\alpha=3$ , $\beta=4$ , $\gamma=5$

تعداد جواب ها: $1\times1\times1\times3^0=1$

پس تعداد کل جواب های این مسئله طولانی و کسل کننده برابر می شود با

$$1620+180+135+108+15+12+9+1=2080$$

**سوال۱۳**- گزینه ۵. جایگاه های ردیف پایین را با اعداد ۱ تا ۶ و جایگاه های ردیف بالایی را با اعداد ۷ تا ۱۲ نشان می دهیم، بطوری که جایگاه $6+i$ روی جایگاه $i$ قرار داشته باشد. باید تعداد جایگشت های اعداد ۱ تا ۱۲ را بیابیم بطوری که برای هر $1\leq i\leq 6$، $6+i$ بعد از $i$ آمده باشد.

تعداد این جایگشت ها برابر است با:

$$\underset{1,7}{\binom{12}{2}}\times\underset{2,8}{\binom{10}{2}}\times\underset{3,9}{\binom{8}{2}}\times\underset{4,10}{\binom{6}{2}}\times\underset{5,11}{\binom{4}{2}}\times\underset{6,12}{\binom{2}{2}}=66\times45\times28\times15\times6\times1=7484400$$

**سوال۱٤-** گزینه ۴

اگر $\alpha \in \mathbb{R}$ یک ریشه مشترک باشد داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a\alpha^2+b\alpha+c=0 \xrightarrow{\times\alpha} a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha=0 \\ b\alpha^2+c\alpha+a=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a(\alpha^3-1)=0$$

(دو رابطه را از هم کم می‌کنیم)

به طریق مشابه $b(\alpha^3-1)=0$ و $c(\alpha^3-1)=0$. چون $a,b,c$ متمایزند پس

حداکثر یکی برابر با صفر است و بقیه ناصفرند، در نتیجه $\alpha^3-1=0$ و $\alpha=1$.

پس تنها مقدار ممکن برای $\alpha$، $1$ است.

**سوال۱۵-** گزینه ٤. می‌توانیم سیب‌ها را به گونه‌ای توزیع کنیم که در هر جعبه تعداد سیب‌های سالم از تعداد سیب‌های لکه‌دار بیشتر باشد، مثلاً ۱۰۰۰ سیب را در ۱۰ جعبه توزیع می‌کنیم به طوری که هر جعبه ۹۰ سیب سالم و ۱۰ سیب لکه‌دار داشته باشد.

در ضمن اگر سیب‌ها را در ۱۰ جعبه ۱۰۰ تایی توزیع کنیم به طوری که ۸۰ جعبه فقط سیب سالم داشته باشند و ۲۰ جعبه دیگر هر کدام ۵ سیب سالم و ۵ سیب لکه‌دار داشته باشد، فقط در ۸۰ درصد از جعبه‌ها اکثریت سیب‌ها سالم است.

اکنون فرض کنید ۱۰۰۰ سیب را در $a$ جعبه $b$ تایی تقسیم کرده باشیم پس $ab=1000$. اگر در کمتر از ۸۰ درصد جعبه‌ها اکثریت سیب‌ها سالم باشد، نتیجه می‌گیریم در بیش از ۲۰ درصد از جعبه‌ها حداقل $\frac{b}{2}$ سیب لکه‌دار وجود دارد، یعنی تعداد سیب‌های لکه‌دار از

$$0/2a \times \frac{b}{2} = 0/1ab = 100$$

بیشتر است که می‌دانیم این گونه نیست. پس همواره حداقل در ۸۰ درصد از جعبه‌ها اکثریت سیب‌ها سالم است.

## سوال۱۶- گزینه ۱

ابتدا تجزیه $[1,\dots,m]$ به عوامل اول را برای $m\in\mathbb{N}$ دلخواه بررسی می‌کنیم. $[1,\dots,m]$ دقیقاً از عوامل اولی تشکیل شده که عددی کمتر مساوی $m$ را عاد کنند، معادلاً اعداد اولِ کوچکتر مساوی $m$. هم چنین برای یک عدد اولِ $p$ که $p\leq m$، توان عاملِ $p$ در تجزیه $[1,\dots,m]$ به عوامل اول، همان بزرگترین توان $\alpha$-ای است که مضربی از $p^\alpha$ مثلِ $p^\alpha k$ بین ۱، ۲، ...، $m$ موجود باشد. پس خودِ عددِ $p^\alpha$ هم باید بین ۱، ۲، ...، $m$ موجود باشد. پس در واقع توانِ $p$ در تجزیه $[1,\dots,m]$ همان بزرگترین $\alpha$-ای است که $p^\alpha\leq m$.

با توجه به این نکته به سادگی معلوم می‌شود که توانِ عامل اول $p$ در تجزیهٔ $\frac{[1,2,\dots,m]}{[1,2,\dots,n]}$ برابر با تعداد اعدادی به فرمِ $p^t$ است که $n<p^t\leq m$ (اعداد به فرمِ $p^t$ را توانی از $p$ گوییم)

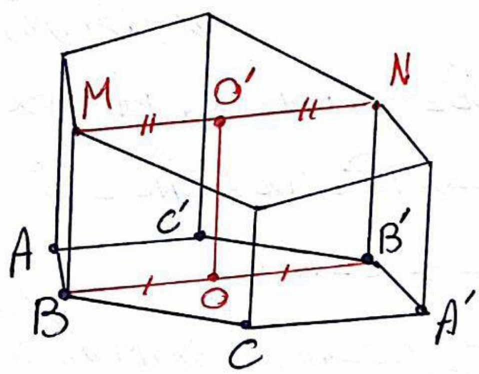
حال چون $[1,2,\dots,m]=1395[1,\dots,n]$ و $1395=3^2\times5\times31$، پس دقیقاً یک توان از ۵ و یک توان از ۳۱ و دو تا توانِ ۳ در بازه مذکور وجود دارد و برای هر $p$ اول دیگر هیچ توانی از $p$ در آن بازه وجود ندارد؛ اما کدام یک از این اطلاعات، نتایج جالبی درباره رابطه $m$ و $n$ به ما می‌دهد؟! دقت کنید که وجود یک توان از یک عدد اول مثل ۵ یا ۳۱ نتایج خاصی درباره رابطه $m$ و $n$ به ما نمی‌دهد، مثلاً اگر $m$ حتی یک واحد بیشتر از $n$ باشد، می‌تواند توانی از ۵ بین $n$ و $m$ موجود باشد؛ اما این نکته که دو تا توانِ ۳ بین $n$ و $m$ قرار می‌گیرد نتایج جالبی می‌دهد یعنی $\alpha\in\mathbb{N}$ موجود است که $3^{\alpha+1}\leq m$ و $n<3^\alpha$ که نتیجه می‌دهد $3n<m$.

**ادامه سوال ۱۶-**

حال توجه کنید که عواملی مثل ۲ هم که توانی از آن ها بین n تا m نیامده است هم نتایج جالبی درباره m، n می دهند. چون توانی از ۲ بین n تا m نیامده است پس $m < 2n$ ؛ زیرا اگر $m \geq 2n$ آن گاه اگر بزرگترین توان ۲ کوچکتر از n را $2^{\theta}$ بنامیم آن گاه $2^{\theta} \leq n$ پس $2^{\theta+1} \leq 2n$ و از طرفی چون $\theta$ بزرگترین توان با خاصیت $2^{\theta} \leq n$ است پس $n < 2^{\theta+1}$ در نتیجه $n < 2^{\theta+1} < 2n \leq m$ که با ویژگی m، n در تناقض است.

حال توجه کنید که نشان دادیم $m > 3n$ و همچنین ثابت کردیم $m < 2n$. پس $3n < 2n$ که تناقض است. پس ثابت شد m، n با خاصیت ذکر شده وجود ندارد.

**سوال۱۷-** گزینه ۵.




در میان جفت نقاط $(A,A')$، $(B,B')$ و $(C,C')$ می‌توان گفت مجموع فاصله آنها تا صفحه فوقانی ثابت بوده و برابر $2OO'$ است که در آن O مرکز شش ضلعی و O' تصویر آن در صفحه فوقانی است. زیرا:

$BMNB'$: ذوزنقه ، $BM \parallel OO' \parallel B'N$

$\longrightarrow BM + B'N = 2OO'$

این استدلال برای جفت نقاط $(A,A')$، $(C,C')$ نیز به طریق مشابه برقرار است.

از آنجا که فاصله ها به ترتیب ۲، ۳، $x$، $y$، ۱۱ و $z$ می‌باشند پس باید:

$$2+z = 3+11 = x+y \longrightarrow x+y+z = 14+12 = 26$$

**سوال۱۸-** گزینه ۲. طبق فرض هر روز تعداد افرادی که شایعه را می‌دانند دو برابر می‌شود. چون روز اول فقط ۲ نفر شایعه را می‌دانند، پس در پایان روز $n$ام $2^n$ نفر شایعه را می‌دانند. اگر $10^6 < 2^n$، آنگاه $n \geq 20$. بنابراین بعد از ۲۰ روز تعداد افرادی که شایعه را شنیده‌اند از مرز یک میلیون می‌گذرد. توجه کنید در هر روز یک نفر به افرادی که مستقیماً شایعه را از آقای خالی‌بند شنیده‌اند اضافه می‌شود، پس در پایان روز بیستم تعداد این افراد برابر ۲۰ است.
همچنین اگر $a_n$ تعداد افرادی باشد که (تا روز $n$ام) با یک واسطه شایعه به آنها رسیده است، آنگاه

**سوال ۱۹-** گزینه ۲

فرض کنید $(x,y)$ جوابی از این دستگاه معادلات باشد.

$$x^2-3xy+2y^2+x-y=0 \Leftrightarrow (x^2-2xy+y^2)-xy+y^2+x-y=0 \Leftrightarrow$$
$$(x-y)^2-y(x-y)+(x-y)=0 \Leftrightarrow (x-y)(x-y-y+1)=0 \Leftrightarrow$$
$$x=y \text{ یا } x=2y-1$$

حالت اول: $x=y$

در این حالت معادله اول برقرار است و کافی است معادله دوم برقرار باشد. در معادله دوم $y$ را برابر باید قرار دهیم تا جواب های با $x,y$ برابر آن را به دست آوریم:

$$2x^2-2xy-3y^2-2x+5y=0 \xrightarrow{y} \cancel{2x^2}-\cancel{2x^2}-3x^2-2x+5x=0 \Rightarrow$$
$$3x^2=3x \Rightarrow x^2=x \Rightarrow x=0 \text{ یا } x=1$$

پس در این حالت دو جواب داریم: $\boxed{x=y=1}$ و $\boxed{x=y=0}$

حالت دوم: $x=2y-1$

مشابه حالت قبل رفتار می‌کنیم:

$$2x^2-2xy-3y^2-2x+5y=0 \Rightarrow 2(2y-1)^2-2y(2y-1)-3y^2-2(2y-1)+5y=0$$
$$\Rightarrow 8y^2-8y+2-4y^2+2y-3y^2-4y+2+5y=0 \Rightarrow y^2-5y+4=0 \Rightarrow$$
$$(y-1)(y-4)=0 \Rightarrow y=1 \text{ یا } y=4$$ (چون $x=2y-1$ در هر حالت $x$ حساب می‌شود)

پس جواب ها در این حالت، $x=2(1)-1=1$ و $y=1$ یا $x=2\times4-1=7$ و $y=4$ می‌شود.

**ادامه سوال۱۹-**

جواب‌ها در این حالت:

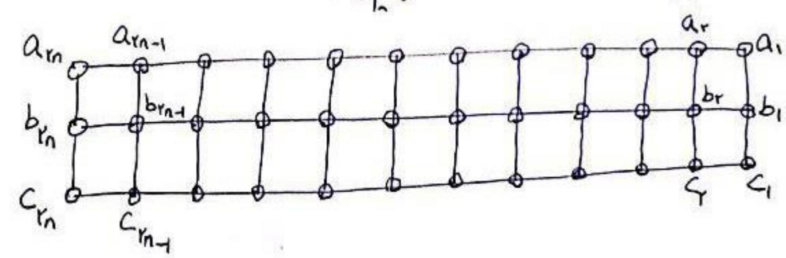
$\boxed{x=1,\ y=1}$ و $\boxed{x=7,\ y=4}$

ممکن است کسی که عجولانه می‌خواهد به سؤال پاسخ دهد وقتی می‌فهمد حالت دوم، دو جواب دارد سریعاً بگوید که تعداد کل جواب‌ها ۴ است و گزینه ۳ را انتخاب کند. یک گزینه انحرافی! در واقع شخصی که صبورانه جواب‌ها را پیدا می‌کند می‌فهمد که یکی از جواب‌های حالت دوم تکراری است و کل تعداد جواب‌های مسئله ۳ است یعنی گزینه ۲ درست است.

**سوال۲۰-**

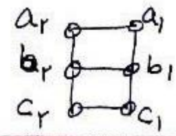
گزینه ۱. فرض کنید $x_n$ تعداد دورهای همیلتنی گراف متناظر با ۳ خیابان افقی و $2n$ خیابان عمودی باشد (در دور همیلتنی از یک رأس گراف شروع و با حرکت روی یال‌ها از هر رأس گراف دقیقاً یک بار عبور می‌کنیم و به رأس اول باز می‌گردیم).

$G_n$ :




توجه کنید که پاسخ مسئله برابر $2x_5$ است، زیرا پلیس با شروع از رأس $a_1$ هر دور همیلتنی را در یکی از دو جهت ساعتگرد و پادساعتگرد می‌تواند طی کند.

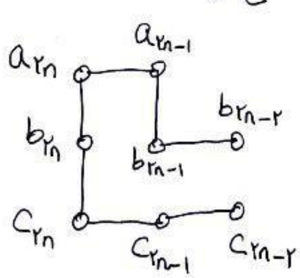
برای محاسبه $x_n$ رابطه‌ای بازگشتی به دست می‌آوریم. ابتدا توجه کنید که $x_1 = 1$.

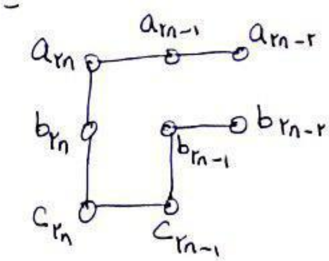



$a_1, a_2, b_2, c_2, c_1, b_1, a_1$

**ادامه سوال ۲۰-**

در گراف $G_n$ یک دور همیلتنی مانند $C$ در نظر بگیرید. دور $C$ از هر رأس گراف دقیقاً دو یال را دارد، پس هر یک از یال‌های $a_{2n-1}a_{2n}$، $a_{2n}b_{2n}$، $b_{2n}c_{2n}$ و $c_{2n-1}c_{2n}$ باید در $C$ باشند، زیرا درجه رأس‌های $a_{2n}$ و $c_{2n}$ برابر ۲ است. اکنون نتیجه می‌گیریم یال $b_{2n}b_{2n-1}$ نباید در $C$ باشد و در ضمن هر دو یال $a_{2n-1}b_{2n-1}$ و $c_{2n-1}b_{2n-1}$ همزمان نمی‌توانند در $C$ باشند، پس برای داشتن دو یال از $b_{2n-1}$ در $C$ نتیجه می‌گیریم $b_{2n-1}b_{2n-2}$ و یکی از دو یال $a_{2n-1}b_{2n-1}$ و $c_{2n-1}b_{2n-1}$ باید در $C$ باشند. اگر $a_{2n-1}b_{2n-1}$ در $C$ باشد، $c_{2n-2}c_{2n-1}$ نیز در $C$ قرار دارد و اگر $b_{2n-1}c_{2n-1}$ در $C$ باشد، $a_{2n-2}a_{2n-1}$ نیز در $C$ قرار دارد. پس یکی از دو حالت زیر در مورد $C$ رخ می‌دهد.

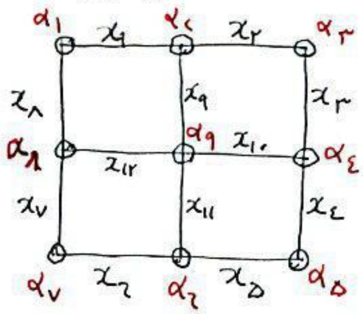



اکنون توجه کنید که اگر در شکل سمت چپ ۶ رأس با اندیس‌های $2n-1$ و $2n$ را حذف و یال $c_{2n-2}b_{2n-2}$ را جایگزین آنها کنیم دوری همیلتنی از $G_{n-1}$ به دست می‌آوریم و به طور مشابه در شکل سمت راست. نتیجه می‌گیریم از روی هر دور همیلتنی از $G_{n-1}$، دو دور همیلتنی از $G_n$ به دست می‌آید و برعکس. پس $x_n = 2x_{n-1}$ و چون $x_1 = 1$، پس $x_n = 2^{n-1}$.

بنابراین پاسخ مسئله برابر $2x_5 = 2^5$ است.

**سوال ۲۱**- گزینه ۴ . ابتدا درستی گزینه ۴ را ثابت می‌کنیم، سپس برای گزینه های ۱، ۲ و ۳ مثال نقض ارائه می دهیم. تعداد خودروهای پارک شده در خیابان ها را مانند شکل با $x_1$، ... و $x_{12}$ و ظرفیت تقاطع ها را با $\alpha_1$، ... و $\alpha_9$ نشان می دهیم. طبق فرض




$$\sum_{i=1}^{12} x_i = 90, \qquad \sum_{j=1}^{9} \alpha_j = 66$$

طبق تعریف ظرفیت، چنانچه هر $\alpha_j$ را برحسب $x_i$ ها بنویسیم (مثلاً $\alpha_1 = \frac{x_1+x_8}{2}$) در $\sum_{j=1}^{9} \alpha_j$ ضریب هر یک از $x_1$، ... و $x_8$ برابر $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ و ضریب هر یک از $x_9$، ... و $x_{12}$ برابر $\frac{7}{12}=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$ است (مثلاً $x_1$ در $\alpha_1$ با ضریب $\frac{1}{2}$ و در $\alpha_2$ با ضریب $\frac{1}{3}$ ظاهر می‌شود). نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
66 = \sum_{j=1}^{9} \alpha_j &= \frac{5}{6}(x_1+\cdots+x_8) + \frac{7}{12}(x_9+\cdots+x_{12}) \\
&= \frac{5}{6}(x_1+\cdots+x_8) + \left(\frac{5}{6}-\frac{1}{4}\right)(x_9+\cdots+x_{12}) \\
&= \frac{5}{6}(x_1+\cdots+x_{12}) - \frac{1}{4}(x_9+\cdots+x_{12}) \\
&= \frac{5}{6}\times 90 - \frac{1}{4}(x_9+\cdots+x_{12}) = 75 - \frac{1}{4}(x_9+\cdots+x_{12})
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} = 4(75-66) = 36$$

بنابراین حداقل یکی از $x_9$، $x_{10}$، $x_{11}$ و $x_{12}$ بزرگتر یا مساوی با ۹ است و درستی گزینه ۴ نتیجه می‌شود.

مثال نقض گزینه ۱: فرض کنید $x_1=54$ و $x_9=36$ و بقیه $x_i$ ها برابر صفر باشند، در این صورت

**ادامه سوال ۲۱-**

$\alpha_9 = 9$ و $\alpha_2 = 30$ ، پس $\alpha_2 > \alpha_9$ .

مثال نقض گزینه ۲: فرض کنید $x_i$ ها مانند مثال نقض گزینه ۱ باشند.

مثال نقض گزینه ۳: فرض کنید $x_1 = \cdots = x_7 = 7$ ، $x_8 = 5$ ، $x_9 = \cdots = x_{92} = 9$ .

**سوال ۲۲**- گزینه ۱. خانه ای را که از آن شروع کرده ایم با عدد صفر و بقیه خانه ها را در جهت ساعتگرد به ترتیب با اعداد ۱ تا ۹ شماره می دهیم. چنان چه شماره خانه ها را به پیمانه ۱۰ در نظر بگیریم، در پایان مرحله $n$ ام در خانه شماره $1-2+3-\cdots+(-1)^{n-1}n$ قرار خواهیم داشت. اگر این عدد را با $a_n$ نشان دهیم، به سادگی می توان دید که $a_{2k}=-k$ و $a_{2k+1}=k+1$

مراحلی را که به خانه شماره صفر می رویم به دست می آوریم، یعنی $n$ هایی که $a_n \overset{10}{\equiv} 0$. با توجه به فرمول $a_n$ نتیجه می گیریم به ازای

$$n=20,40,60,\dots,200,19,39,59,\dots,199$$

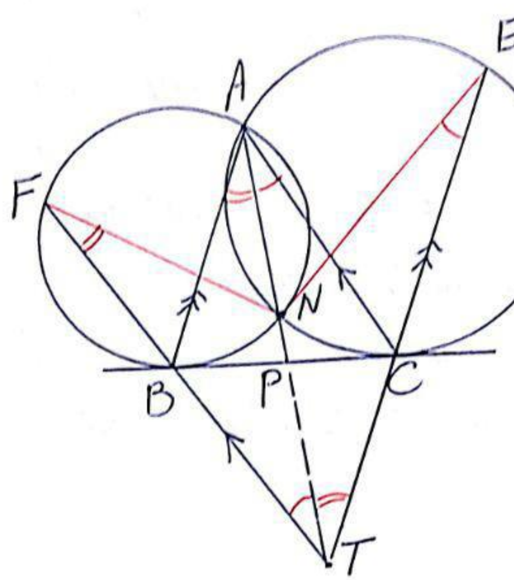
در مرحله $n$ ام به خانه شماره صفر می رویم. توجه کنید که اگر در مرحله $n$ ام، $n<200$، به خانه شماره صفر برویم وزنه $n$ کیلوگرمی را به این خانه می بریم و پس از آن وزنه $n+1$ کیلوگرمی را از این خانه خارج می کنیم، پس یک واحد از مجموع وزنه های این خانه کم می شود. همچنین در ابتدا وزنه یک کیلوگرمی از خانه صفر خارج و در پایان وزنه ۲۰۰ کیلوگرمی به خانه صفر اضافه می شود.

نتیجه می گیریم در پایان مجموع وزن وزنه های خانه شماره صفر برابر

$$(1+2+\cdots+200)-19-1+200=\frac{200\times 201}{2}+180=20280$$

کیلوگرم است.

**سوال ۲۳-** گزینه ۳.




اگر AN ضلع BC را در P قطع کند.

می‌دانیم:

$\overset{\triangle}{PNC} \sim \overset{\triangle}{APC}$

$\longrightarrow PC^{۲} = PN \cdot PA \quad (۱)$

$\overset{\triangle}{PNB} \sim \overset{\triangle}{APB}$

$\longrightarrow PB^{۲} = PN \cdot PA \quad (۲)$

$\xrightarrow{(۱),(۲)} PC^{۲} = PB^{۲} = PN \cdot PA$

پس P وسط BC است. از آنجا که ABTC متوازی‌الاضلاع است پس قطرهای آن یکدیگر را نصف می‌کنند در نتیجه AT از وسط BC، (یعنی همان P) می‌گذرد.

$BC = ۸ \longrightarrow BP = ۴ \longrightarrow ۴^{۲} = PN(PN+۶) \longrightarrow PN = ۲$

از آنجا که A، P، T هم‌خط می‌باشند می‌توان گفت:

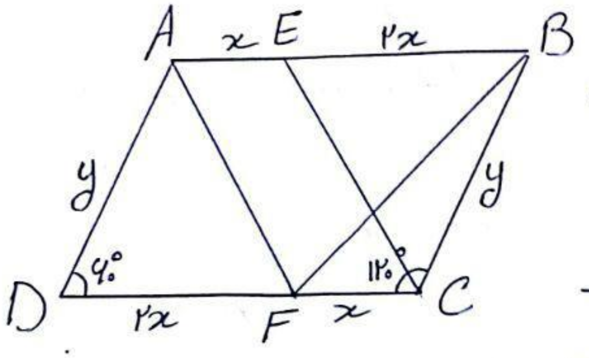
$$\left.\begin{array}{l} N\hat{E}C = N\hat{A}C = \frac{1}{2}\overset{\frown}{CN} \\ AC \parallel BT \longrightarrow N\hat{A}C = A\hat{T}B \end{array}\right\} \longrightarrow N\hat{E}C = A\hat{T}B$$

به طریق مشابه می‌توان ثابت کرد: $N\hat{F}T = N\hat{T}E$

$\longrightarrow \overset{\triangle}{NFT} \sim \overset{\triangle}{NTE} \longrightarrow \frac{NF}{NT} = \frac{NT}{NE}$

$\longrightarrow NF \times NE = NT^{۲} = (PT+PN)^{۲} = (AP+PN)^{۲} = (۸+۲)^{۲} = ۱۰۰$

سوال۲٤- گزینه ۵)




از آنجا که F قرینه E نسبت به مرکز متوازی الاضلاع است می‌توان گفت:

$CF = AE = x \ , \ BE = DF = 2x$

$\longrightarrow AECF$: متوازی الاضلاع

$\longrightarrow AF \parallel CE$

از آنجا که $CE \perp BF$ در نتیجه می‌توان گفت: $AF \perp BF$

$\hat{B} = 60^\circ \longrightarrow \hat{D} = 60^\circ , C = 120^\circ$

براساس قضیه کسینوس‌ها در دو مثلث $A\hat{D}F$ ، $B\hat{C}F$ داریم:

$$\left.\begin{aligned} AF^2 &= y^2 + (2x)^2 - 2y(2x)\cos 60^\circ = y^2 + 4x^2 - 2xy \\ BF^2 &= y^2 + x^2 - 2yx\cos 120^\circ = y^2 + x^2 + xy \end{aligned}\right\}$$

می‌دانیم: $AF^2 + BF^2 = AB^2 = 9x^2$

$$\longrightarrow (y^2 + 4x^2 - 2xy) + (y^2 + x^2 + xy) = 9x^2$$

$$\longrightarrow 2y^2 - xy = 4x^2 \longrightarrow 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \left(\frac{y}{x}\right) - 4 = 0$$

$$\longrightarrow \frac{y}{x} = \frac{1+\sqrt{33}}{4} \longrightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{1+\sqrt{33}}{12} \simeq 0.562$$

پس این نسبت به 0.6 نزدیک‌تر است.

**سوال ۲۵-** گزینه ۵.

با قرار دادن $a=\frac{b+e}{2}$ ، $c=\frac{b+d}{2}$ ساده‌شده نامساوی به صورت زیر می‌شود:

$$\frac{(b-e)^2}{2}+\frac{(b-d)^2}{2}+(e-d)^2 \geq k(b-d)^2$$

$$\longrightarrow \underbrace{(b-e)}_{x}^2+2(\underbrace{e-d}_{y})^2 \geq (2k-1)(b-d)^2$$

$$\longrightarrow x^2+2y^2 \geq (2k-1)(x+y)^2 = A(x+y)^2$$

$$\longrightarrow x^2(1-A)+x(-2Ay)+(2-A)y^2 \geq 0$$

عبارت بالا برای هر مقدار حقیقی $x$ مثبت شده است پس باید برای آن:

$$\Delta \leq 0 \longrightarrow 4A^2y^2-4(1-A)(2-A)y^2 \leq 0$$

$$\longrightarrow A^2 \leq (1-A)(2-A)=A^2-3A+2 \longrightarrow A \leq 2/3$$

$$A=2k-1 \leq 2/3 \longrightarrow k \leq 5/6$$

حال برای اثبات نامساوی از نامساوی $x^2+y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$ استفاده می‌کنیم:

$$\left[(a-b)^2+(e-a)^2\right]+\left[(b-c)^2+(c-d)^2\right]+(e-d)^2 \geq$$

$$\frac{(b-e)^2}{2}+\frac{(d-b)^2}{2}+(e-d)^2 \geq 5/6\,(b-d)^2$$

کافی است ثابت کنیم:

$$\frac{(\overbrace{b-e}^{x})^2}{2}+(\overbrace{e-d}^{y})^2 \geq \frac{1}{3}(b-d)^2 \Longleftrightarrow \frac{x^2}{2}+y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{3}$$

با ساده‌سازی عبارت بالا به دست می‌آید:

$$x^2+4y^2 \geq 4xy$$

که این نامساوی نیز به وضوح برقرار است پس بیشترین مقدار $k$ برابر $5/6$ است.

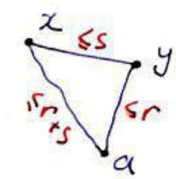
**سوال۲۶**- گزینه ۲ . فاصله دو نقطه از صفحه مانند $P$ و $q$ را با $d(P,q)$ نشان می‌دهیم. طبق تعریف

$$A_r = \{P \mid \exists a\in A : d(a,P)\le r\}$$

در واقع اگر به مرکز هر نقطه از $A$ یک دایره به شعاع $r$ رسم کنیم، اجتماع نقاط درون و روی این دایره‌ها برابر $A_r$ است. اکنون به بررسی هر یک از گزاره‌های داده شده می‌پردازیم.

• گزاره $(A_r)_s = (A_s)_r$ درست است و هر دو مجموعه برابر $A_{r+s}$ هستند. در واقع اگر $x\in (A_r)_s$ آنگاه $y\in A_r$ وجود دارد به طوری که $d(x,y)\le s$ و چون $y\in A_r$، پس $a\in A$ وجود دارد به طوری که $d(y,a)\le r$. طبق نامساوی مثلث

$$d(x,a)\le d(x,y)+d(y,a)\le s+r \Rightarrow x\in A_{r+s}$$

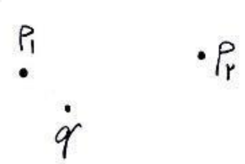



در نتیجه $(A_r)_s \subseteq A_{r+s}$. برعکس اگر $x\in A_{r+s}$ آنگاه $a\in A$ وجود دارد به طوری که $d(x,a)\le r+s$. روی پاره خط $xa$ می‌توانیم نقطه $y$ را بیابیم به طوری که $d(x,y)\le s$ و $d(y,a)\le r$. نتیجه می‌گیریم $y\in A_r$ و $x\in (A_r)_s$، پس $A_{r+s}\subseteq (A_r)_s$.


بنابراین تساوی $(A_r)_s = A_{r+s}$ نتیجه می‌شود.

• گزاره « $A\subset B_r$ اگر و تنها اگر $B\subseteq A_r$ » درست نیست. مثلاً فرض کنید $A$ متشکل از دو نقطه $P_1$ و $P_2$ به فاصله بیش از $2r$ و $B$ متشکل از تک نقطه $q$ به فاصله کمتر از $r$ از $P_1$ باشد.

در این صورت $B\subset A_r$ ولی $A\not\subset B_r$ زیرا نقطه $P_2$ در $B_r$ قرار ندارد.

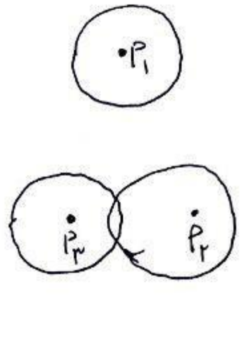


**ادامه سوال۲۶-**

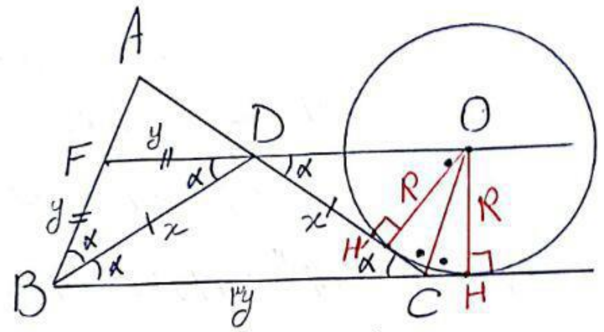
• گزاره «اگر برای هر $t>0$، $A_t \subset B_t$، آنگاه $A \subset B$» درست نیست. مثلاً فرض کنید $A$ فقط از یک نقطه مانند $P$ تشکیل شده باشد و $B$ مجموعه همه نقاط صفحه غیر از $P$ باشد. در این صورت $A \not\subset B$ و برای هر $t>0$، $B_t$ مجموعه همه نقاط صفحه است، پس $A_t \subset B_t$.

• گزاره $(A \cup B)_r = A_r \cup B_r$ درست است، زیرا اولاً واضح است که $A_r \subseteq (A\cup B)_r$ و $B_r \subseteq (A \cup B)_r$، پس $A_r \cup B_r \subseteq (A \cup B)_r$. در ضمن اگر $x \in (A\cup B)_r$، فاصله $x$ از نقطه‌ای متعلق به $A \cup B$ کمتر یا مساوی با $r$ است، پس فاصله $x$ از نقطه‌ای متعلق به $A$ یا $B$ کمتر یا مساوی با $r$ است، یعنی $x \in A_r$ یا $x \in B_r$، پس $x \in A_r \cup B_r$، در نتیجه $(A\cup B)_r \subseteq A_r \cup B_r$، پس $(A \cup B)_r = A_r \cup B_r$.

• گزاره «اگر $A \cap B \neq \emptyset$ آنگاه $(A\cap B)_r = A_r \cap B_r$» نیز نادرست است. مثلاً فرض کنید $P_1P_2P_3$ مثلث متساوی‌الساقینی باشد به گونه‌ای که $P_1P_2 = P_1P_3 > 2r$ و $P_2P_3 < 2r$. همچنین $A = \{P_1, P_2\}$ و $B = \{P_1, P_3\}$، در این صورت $(A\cap B)_r$ نقاط دایره به مرکز $P_1$ و شعاع $r$ است در صورتی که $A_r \cap B_r$ غیر از این نقاط، نقاط مشترک دایره‌های به مرکز $P_2$ و $P_3$ و شعاع $r$ را نیز در بر دارد.



**سوال۲۷-** گزینه ۱




از آنجا که

$BD = CD \, , \, BF = DF$

می‌دانیم $\hat{B} = 2\hat{C}$

می‌توان نتیجه گرفت:

$D\hat{B}C = \hat{C} = F\hat{D}B = D\hat{B}A$

پس $FD$ و $BC$ با یکدیگر موازی می‌باشند. فرض کنید:

$BD = CD = x \quad , \quad BF = DF = y$

$FD \parallel BC \longrightarrow \dfrac{S_{ABC}}{S_{AFD}} = \left(\dfrac{BC}{DF}\right)^2 = 9 \longrightarrow BC = 3DF = 3y$

می‌دانیم $CO$ نیمساز $D\hat{C}H$ است پس: $\quad O\hat{C}D = O\hat{C}H \quad (1)$

$FD \parallel BC \longrightarrow O\hat{C}H = D\hat{O}C \quad (2)$

$\xrightarrow{(1),(2)} O\hat{C}D = D\hat{O}C \longrightarrow DC = DO = x$

$$\left.\begin{array}{l} \longrightarrow FO = x + y = 4 \\ B\overset{\triangle}{F}D \sim B\overset{\triangle}{D}C \longrightarrow \dfrac{y}{x} = \dfrac{x}{3y} \end{array}\right\} \longrightarrow x = y\sqrt{3}$$

در مثلث $B\overset{\triangle}{F}D$ اگر ارتفاع $F$ را رسم کنیم خواهیم داشت:

$\cos\alpha = \dfrac{x/2}{y} = \dfrac{x}{3y} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow \alpha = 30^\circ$

در مثلث $O\overset{\triangle}{D}H'$ می‌توان گفت:

$$\left.\begin{array}{l} R = \dfrac{DO}{2} = \dfrac{x}{2} = \dfrac{y\sqrt{3}}{2} \\ x + y = y\sqrt{3} + y = 4 \longrightarrow y = \dfrac{4}{1+\sqrt{3}} = 2(\sqrt{3}-1) \end{array}\right\}$$

$\longrightarrow R = 3 - \sqrt{3}$

**سوال۲۸-** گزینه ۵.

$$x+y+z=۲۲۲ \longrightarrow x+y=۲۲۲-z$$
$$xy+yz+zx=xy+z(x+y)=۱۲۳۲۱ \Bigg\} \longrightarrow$$

$$xy+z(۲۲۲-z)=۱۲۳۲۱ \longrightarrow xy=z^{۲}-۲۲۲z+۱۲۳۲۱$$

$$\longrightarrow xy=(۱۱۱-z)^{۲}$$

به طریق مشابه می توان ثابت کرد:

$$yz=(۱۱۱-x)^{۲}, \quad zx=(۱۱۱-y)^{۲}$$

* اگر هر سه مقدار $x$، $y$ و $z$ کمتر یا مساوی ۱۱۱ باشند داریم:

$$\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=(۱۱۱-z)+(۱۱۱-x)+(۱۱۱-y)=۳۳۳-(x+y+z)$$

$$\longrightarrow ۳\sqrt{A} \leq \sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=۱۱۱ \longrightarrow \underline{A\leq ۱۳۶۹}$$

* اگر یکی از مقادیر $x$، $y$، $z$ بیشتر یا مساوی ۱۱۱ باشد، داریم:

به طور مثال $x \geq ۱۱۱ \longrightarrow \sqrt{yz}=x-۱۱۱$

$$\longrightarrow x+y+z=۱۱۱+\sqrt{yz}+y+z=۲۲۲$$

$$\longrightarrow ۳\sqrt{yz} \leq \sqrt{yz}+y+z=۱۱۱ \longrightarrow \sqrt{yz}\leq ۳۷$$

$$\longrightarrow A \leq yz \leq \underline{۱۳۶۹}$$

از آنجایی که اعداد $x$، $y$، $z$ حقیقی مثبت می باشند پس دو تای آنها نمی توانند بزرگتر یا مساوی ۱۱۱ باشند. پس نشان دادیم که:

$$A=\min\{xy,yz,zx\} \leq ۱۳۶۹$$

اکنون برای تکمیل اثبات کافی است یک مثال ارائه دهیم:

$$x=۱۴۸, \quad y=۳۷, \quad z=۳۷$$

## سوال۲۹- گزینه ۴

می‌دانیم اگر $a,b \in A$ آن‌گاه $0 \leq c \leq 99$ که $c \overset{100}{\equiv} a+b+1$

هم در $A$ است. توجه کنید که با اضافه کردن یک $1$ به دو طرف داریم:

$$c+1 \overset{100}{\equiv} (a+1)+(b+1)$$

پس بیایید به همه اعضای $A$، $1$ واحد اضافه کنیم (به هنگ $100$! یعنی $99+1$ را همان صفر می‌گیریم) تا مجموعه $A'$ به دست آید. طبق نتیجه بالا $A'$ جمعی است؛ با این تعریف که هرگاه $a',b' \in A'$ متمایز باشند، باقیمانده تقسیم $a'+b'$ بر $100$ هم در $A'$ است.
($A' \subseteq \{0,1,2,\dots,99\}$ و $|A'| \geq 2$)

درواقع زیرمجموعه‌های تقریباً جمعی $\{0,1,\dots,99\}$ در تناظر یک به یک با زیرمجموعه‌های جمعی $\{0,\dots,99\}$ هستند، این طور که اگر دقیقاً $1$ واحد به همه اعضای زیرمجموعه‌ای تقریباً جمعی اضافه کنیم زیرمجموعه‌ای جمعی به دست می‌آید و به سادگی می‌توان نشان داد که اگر دقیقاً $1$ واحد از همه اعضای زیرمجموعه‌ای جمعی کم کنیم زیرمجموعه‌ای تقریباً جمعی به دست می‌آید.

پس تعداد زیرمجموعه‌های تقریباً جمعی و جمعی برابر است. حال برای به دست آوردن جواب به محاسبه تعداد زیرمجموعه‌های جمعی می‌پردازیم.

فرض کنید $A$ یک زیرمجموعه جمعی از $\{0,1,\dots,99\}$ باشد. ابتدا یک حالت را جدا می‌کنیم:

حالت زیرمجموعه‌های جمعی ۲ عضوی: اگر این مجموعه به فرم $\{a,b\}$ باشد،

**ادامه سوال ۲۹-**

$a+b\in A$ پس برابر یکی از $a$ و ... است مثلاً $a+b \overset{100}{\equiv} a \Leftarrow b \overset{100}{\equiv} 0$

پس $0\in A$ و مجموعه به فرم $\{0,a\}$ است. به وضوح اگر مجموعه‌ای به این فرم باشد

جمعی است. پس تعداد زیرمجموعه‌های جمعی در این حالت $\underline{\underline{99}}$ تاست $(1\leq a\leq 99)$

حال فرض کنید $|A|\geq 3$. $a\neq 0$ را کوچکترین عضو ناصفر $A$ در نظر می‌گیریم.

$b$ را عضو دلخواهی از $A$ بگیرید که $b\neq 0$ و $b\neq a$ (چون $|A|\geq 3$ امکان‌پذیر است).

$b\neq a \Leftarrow b+a\in A$. اگر $b+a<100$ چون از $a$ بیشتر است با $a$ متمایز است

پس $b+2a=(b+a)+a\in A$ و این کار را ادامه می‌دهیم تا کوچکترین $k$ای که

$b+ak\geq 100$ پس $b+a(k-1)<100$ و در نتیجه $100\leq b+ak<100+a$

پس باقیمانده آن بر $100$ که باید عضو $A$ باشد کمتر از $a$ می‌شود که این نحوه انتخاب

$a$ (این که کوچکترین عضو است) در تضاد است، مگر این که $b+ak=100$.

می‌دانیم $b+a(k-1)\in A$ پس $100-a\in A$. همچنین باقیمانده $b+ak$

بر $100$ هم در $A$ است یعنی $0\in A$؛ پس $\{0,a,100-a\}\in A$ و برای هر $b\in A$ $(b\neq a)$

$k$ یافت می‌شود که $b+ak=100$. حال بازیک حالت را جدا می‌کنیم:

حالت $|A|=3$: در این حالت مجموعه $A$ حتماً به فرم $\{0,a,100-a\}$

است که برای این که ۳ عضوی شود تعداد حالات مجموعه برابر $\underline{\underline{49}}$ می‌شود. چون

$0<a\leq 49$ (زیرا $a<100-a \Leftarrow a<50$)

**ادامه سوال۲۹-**

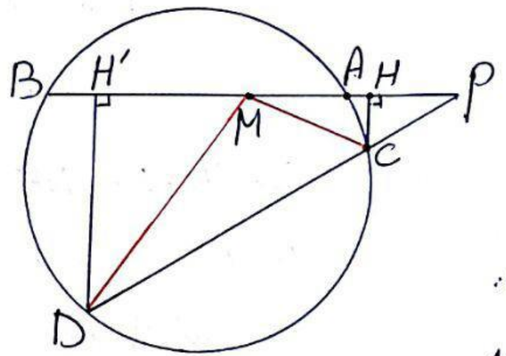
پس تعداد زیرمجموعه‌های جمعی باقیمانده، همان تعداد حالت a هاست با شرط $a|100$ و مجموعه مضارب‌ش حداقل ۲ عضوی باشد (توجه کنید برای چنین aهای، بوضوح مجموعه مضارب a بین ۵۰ و ۹۹ دو جمعی است) تعداد مقسوم علیه‌های ۱۰۰ ($100=2^2\times5^2$)، $3\times3=9$ است. البته ۱۰۰ به عنوان مقسوم علیه ۱۰۰ مقدار قبولی برای a نیست. پس aها ۸ حالت دارد و هرکدام یک زیرمجموعه جمعی می‌دهد. از این حالات، ۱ حالت ($a=50$) زیرمجموعه‌ای ۲ عضوی می‌دهد که تکراری است. باقی مجموعه‌های مرتبط با مقادیر دیگر a، حداقل ۴ عضوی است و تکراری نیست. پس ۷ زیرمجموعه جمعی جدید به حالات قبل اضافه می‌شود.

پس در مجموع $155=99+49+7$ زیرمجموعه جمعی از $\{50, \dots, 99\}$ داریم

و همین تعداد زیرمجموعه تقریباً جمعی!

**سوال ۳۰-**

گزینه ۳.




فرض کنید:

$$AP = x \quad , \quad AB = 3x$$

از آنجا که M وسط BP است می‌توان گفت:

$$MP = 2x \longrightarrow MP^2 = PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

از آنجا که میان دو مثلث $\overset{\triangle}{MCP}$ و $\overset{\triangle}{DMP}$ زاویه P مشترک است داریم:

$$\frac{MP}{PC} = \frac{PD}{MP} \longrightarrow \overset{\triangle}{MCP} \sim \overset{\triangle}{DMP}$$

$$\longrightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{MP}{PC} = \dfrac{DM}{CM} \\ \dfrac{PD}{MP} = \dfrac{DM}{CM} \end{array}\right\} \longrightarrow \frac{PD}{PC} = \left(\frac{DM}{CM}\right)^2 \quad (1)$$

از طرف دیگر چون $CH \parallel DH'$ بر اساس تالس می‌توان گفت:

$$\frac{CH}{DH'} = \frac{PC}{PD} \quad (2) \quad \xrightarrow{(1),(2)} \frac{CH}{DH'} = \left(\frac{CM}{DM}\right)^2$$

$$\longrightarrow \frac{CM}{\sqrt{CH}} = \frac{DM}{\sqrt{DH'}} = \sqrt{3}$$

group Landa